東京大学集中講義 12 月 03 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

1 Ringel-Hall 代数

この節では主に [K97, §1] と [S06, §1] に従って, 適当な条件を満たす Abel 圏に対して Ringel-Hall 代数を定義する. 大雑把に言うと「拡大の数え上げを構造定数とする結合代数」が Ringel-Hall 代数である。正確な定義を考えるためにはいくつかの条件を満たす Abel 圏を考える必要がある。最終的な条件の組は仮定 1.5.1 だが, 定義に用いる順番に各条件を説明していくことにする.

圏論やホモロジー代数に関する初歩的な知識は仮定する.

断らない限り線形空間は $\mathbb{C}$ 上のものを考える. $\mathbb{C}$ 上のテンソル積 $\otimes_{\mathbb{C}}$ を単に $\otimes$ と書く. $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ とする. 圏 $\mathfrak{A}$ の射のクラスは $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\cdot, \cdot)$ で表す. Abel 圏 $\mathfrak{A}$ の Ext 群は $\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{A}}(\cdot, \cdot)$ で表す.

1.1 積の定義

圏 $\mathfrak{A}$ が本質的に小 (essentially small) であるとは, 対象の同型類全体 $\mathrm{Iso}(\mathfrak{A})$ が集合であり, また任意の $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(A, B)$ も集合であるもののことであった.

仮定 1. $\mathfrak{A}$ は本質的に小な Abel 圏.

$A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$ の定める $\mathrm{Iso}(\mathfrak{A})$ の元を $[A]$ と書く.

定義. 有限台を持つ $\mathrm{Iso}(\mathfrak{A})$ 上の $\mathbb{C}$ 値関数全体のなす線形空間を $\mathrm{F}(\mathfrak{A})$ と書く. つまり

$$\mathrm{F}(\mathfrak{A}) := \{f : \mathrm{Iso}(\mathfrak{A}) \longrightarrow \mathbb{C} \mid f([A]) \neq 0 \text{ なる } [A] \text{ は有限個 }\}.$$

また $A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$ に対し $1_A \in \mathrm{F}(\mathfrak{A})$ を A の特性関数とする. つまり, $B \simeq A$ なら $1_A([B]) = 1$, そうでないなら $1_A([B]) = 0$.

注意. (1) $\{1_A \mid [A] \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A})\}$ は $\mathrm{F}(\mathfrak{A})$ の基底である.
(2) $\mathbb{C}$ 値関数で定義したが, §1.1 の議論は全て $\mathbb{Z}$ 値関数として通用する.

仮定 2. $\mathfrak{A}$ は finitary な Abel 圏. つまり $\mathfrak{A}$ は次の条件を満たすものとする.

- 任意の $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$ に対し $|\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(A, B)| < \infty$ かつ $\left|\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{A}}(A, B)\right| < \infty$.

定理 1.1.1 (Ringel [R90])**.** 仮定 1 と仮定 2 のもと, 双線形写像 $\circ : \mathrm{F}(\mathfrak{A}) \otimes \mathrm{F}(\mathfrak{A}) \to \mathrm{F}(\mathfrak{A})$ を

$$(f \circ g)([A]) = \sum_{A' \subset A} f([A/A'])g([A']).$$

で定めると, $\mathrm{H}(\mathfrak{A}) := (\mathrm{F}(\mathfrak{A}), \circ, 1_0)$ は 1_0 を単位元とする結合代数. ただし $0 \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$ は零対象.

[*1] 2018/12/03 版, ver. 0.6.

証明の前に, まず $\circ$ が well-defined であることを確認する. そのために 1 つ補題を用意する.

補題 1.1.2. $A, B, C \in \mathrm{Ob}(A)$ に対し

$$\mathcal{G}^C_{A,B} := \{B' \subset C \mid B' \simeq B,\, C/B' \simeq A\}, \quad g^C_{A,B} := \left|\mathcal{G}^C_{A,B}\right|$$

と定める. すると, 特性関数について

$$1_A \circ 1_B(C) = g^C_{A,B}.$$

証明. $\circ$ の定義から

$$(1_A \circ 1_B)(C) = \sum_{C' \subset C} 1_A(C/C') 1_B(C') = |\{C' \subset C \mid C' \simeq B, C/C' \simeq A\}| = g^C_{A,B}.$$

□

命題 1.1.3. 積 $\circ$ は well-defined である.

証明. $\{1_A \mid [A] \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A})\}$ が $\mathrm{F}(\mathfrak{A})$ の基底であることと補題 1.1.2 から,

$$1_A \circ 1_B = \sum_{[C] \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A})} g^C_{A,B} 1_C \tag{1.1}$$

の右辺が well-defined であることを示せばよい.

まず $g^C_{A,B}$ は有限である. 実際,

$$\mathcal{E}^C_{A,B} := \{0 \to B \to C \to A \to 0 \mid \mathfrak{A}\text{ の完全列 }\}. \tag{1.2}$$

と定めると

$$g^C_{A,B} = \frac{\left|\mathcal{E}^C_{A,B}\right|}{|\mathrm{Aut}(A)| \cdot |\mathrm{Aut}(B)|} \tag{1.3}$$

となる (問題 1.1). ただし $\mathrm{Aut}(A) = \mathrm{Aut}_{\mathfrak{A}}(A)$ は同型射のなす群. 仮定 2 より $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\cdot, \cdot)$ が有限集合なので, $\mathcal{E}^C_{A,B}$ は有限集合. よって $g^C_{A,B}$ は有限.

そして $g^C_{A,B} \neq 0$ となる $[C]$ は有限個である. 実際, Ext^1 が短完全列の同型類のなす集合と同一視できることから, 上で定めた $\mathcal{E}^C_{A,B}$ について,

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{A}}(A, B) = \Big(\bigcup_{C \in \mathrm{Ob}(A)} \mathcal{E}^C_{A,B}\Big)/\sim\, = \bigsqcup_{[C] \in \mathrm{Iso}(A)} \mathcal{E}^C_{A,B}.$$

仮定 2 より $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{A}}(A, B)$ は有限集合なので, $\mathcal{E}^C_{A,B} \neq \emptyset$ となる $[C] \in \mathrm{Iso}(C)$ は有限個しかない. □

問題 1.1 $(*)$**.** $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$ に対して集合 $\mathcal{E}^C_{A,B}$ を (1.2) で定義する. $\mathcal{E}^C_{A,B}$ に群 $\mathrm{Aut}(A) \times \mathrm{Aut}(B)$ が自由に作用することを説明し, そのことを用いて等式 (1.3) を示せ.

では $\circ$ の結合性の証明をしよう.

定理 1.1.1 の証明. $f, g, h \in \mathrm{F}(\mathfrak{A})$ に対して

$$(f \circ (g \circ h))(A) = \sum_{B \subset A} f(A/B)(g \circ h)(B) = \sum_{C \subset B \subset A} f(A/B) g(B/C) h(C).$$

同様に

$$((f \circ g) \circ h)(A) = \sum_{C \subset A} (f \circ g)(A/C)h(C) = \sum_{C \subset A,\, B' \subset A/C} f((A/C)/B')g(B')h(C).$$

これらは全単射

$$\{(B, C) \mid C \subset B \subset A\} \xrightarrow{\sim} \{(B', C) \mid C \subset A,\, B' \subset A/C\}, \quad B \longmapsto B' := B/C$$

によって等しいことがわかる．よって $\circ$ は結合的．1_0 が単位元であることは簡単に示せるので略す．$\square$

補題 1.1.2 から $\mathrm{H}(\mathfrak{A})$ を次のように定義することもできる．こちらの方が $\mathfrak{A}$ の仮定 2 を使うことが明確になるので分かりやすいかもしれない．

系 1.1.4. $\mathrm{Iso}(\mathfrak{A})$ を基底とする $\mathbb{C}$ 線形空間 $\oplus_{[A] \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A})} \mathbb{C}[A]$ と

$$[A] \circ [B] := \sum_{[C] \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A})} g_{A,B}^{C} [C]$$

とで結合代数が定義され, それは写像 $[A] \longmapsto 1_A$ のもとで $\mathrm{H}(\mathfrak{A})$ と同型である．

これを踏まえて, 次の同一視を常にする．

$$\mathrm{F}(A) \xrightarrow{\sim} \oplus_{[A] \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A})} \mathbb{C}[A], \quad 1_A \longmapsto [A].$$

また $\mathrm{H}(\mathfrak{A}) = (\mathrm{F}(A), \circ, 1_0)$ と系 1.1.4 の $(\oplus_{[A] \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A})} \mathbb{C}[A], \circ, [0])$ についても常に同一視する．
補題 1.1.2 ないし式 (1.1) と同様にして, 次の主張が示せる．

補題 1.1.5. $B_1, B_2, \dots, B_r \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$ として

$$\mathcal{F}(A; B_1, B_2, \dots, B_r) := \{A = A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_r \supset A_{r+1} = 0 \mid A_i/A_{i+1} \simeq B_i \ (i = 1, \dots, r)\}$$

と定めると

$$[B_1] \circ [B_2] \circ \cdots \circ [B_r] = \sum_{[A] \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A})} |\mathcal{F}(A; B_1, \dots, B_r)| \cdot [A].$$

本質的に小な Abel 圏 $\mathfrak{A}$ の Grothendieck 群 $K_0(\mathfrak{A})$ とは, $\mathrm{Iso}(\mathfrak{A})$ を生成元の集合とし, 短完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ に対して関係式 $\overline{A} - \overline{B} + \overline{C} = 0$ を定めることで定義される加群であった．ここで $[A] \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A})$ に対応する $K_0(\mathfrak{A})$ の元を $\overline{A}$ と書いた．
$\circ$ の定義から直ちに $\mathrm{H}(\mathfrak{A})$ が次数付けを持つことが分かる:

補題. $\mathrm{H}(\mathfrak{A})$ は $K_0(\mathfrak{A})$ 次数付き結合代数である．

1.2 Euler 型式による積の twist

次に Ringel が [R93] で導入した, $\circ$ を Euler 型式で twist したものを考える. 仮定 1 に加えて, 圏 $\mathfrak{A}$ に次の条件を課す.

仮定 3. 大域次元が有限かつ任意の $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$ と $i \in \mathbb{N}$ に対して $\left|\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{A}}(A,B)\right| < \infty$.

注意 1.2.1. 仮定 3 から仮定 2 が導かれる.

$A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$ の定める Grothendieck 群 $K_0(\mathfrak{A})$ のクラスを $\overline{A}$ と書く.

補題 1.2.2. $A, B \in \mathrm{Ob}(A)$ に対して $\langle A, B\rangle_m \in \mathbb{C}$ を

$$\langle A, B\rangle_m := \sqrt{\prod_{i \geq 0} \left|\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{A}}(A,B)\right|^{(-1)^i}}$$

で定義すると, $\langle A, B\rangle_m$ は $\overline{A}, \overline{B} \in K_0(\mathfrak{A})$ のみに依存する. このことから定まる写像

$$\langle \cdot, \cdot\rangle_m : K_0(\mathfrak{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(\mathfrak{A}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \alpha \otimes \beta \longmapsto \langle \alpha, \beta\rangle_m$$

は乗法的双線形型式である. つまり

$$\langle \alpha_1 + \alpha_2, \beta\rangle_m = \langle \alpha_1, \beta\rangle_m \cdot \langle \alpha_2, \beta\rangle_m, \quad \langle \alpha, \beta_1 + \beta_2\rangle_m = \langle \alpha, \beta_1\rangle_m \cdot \langle \alpha, \beta_2\rangle_m. \tag{1.4}$$

問題 1.2 (∗). 補題 1.2.2 を示せ.

補題 1.2.2 の双線形型式 $\langle \cdot, \cdot\rangle_m$ を (乗法的)Euler 型式 (のルート) と呼ぶ.

命題 1.2.3. $\mathrm{F}(\mathfrak{A})$ 上の双線形写像 $* : \mathrm{F}(\mathfrak{A}) \otimes \mathrm{F}(\mathfrak{A}) \to \mathrm{F}(\mathfrak{A})$ を

$$(f * g)([A]) := \sum_{A' \subset A} \langle A/A', A'\rangle_m \cdot f(A/A') g(A')$$

と定めると, $\mathrm{R}(\mathfrak{A}) := (\mathrm{F}(\mathfrak{A}), *, 1_0)$ は代数になる. また $K_0(\mathfrak{A})$ 次数付き代数である.

証明. 結合則のみ示す. 命題 1.1.1 の証明と同様に計算する. $f, g, h \in \mathrm{F}(\mathfrak{A})$ に対して

$$\begin{aligned}(f * (g * h))(A) &= \sum_{B \subset A} \langle A/B, B\rangle_m \cdot f(A/B)\,(g * h)(B) \\ &= \sum_{C \subset B \subset A} \langle A/B, B\rangle_m \langle B/C, C\rangle_m \cdot f(A/B)\, g(B/C)\, h(C). \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(A) &= \sum_{C \subset A} \langle A/C, C\rangle_m \cdot (f * g)(A/C)\, h(C) \\ &= \sum_{C \subset A,\, B' \subset A/C} \langle A/C, C\rangle_m \langle (A/C)/B', B'\rangle_m \cdot f((A/C)/B')\, g(B')\, h(C). \end{aligned} \tag{1.6}$$

ここで Euler 型式の双線形性 (1.4) から

$$\langle A/B, B\rangle_m \langle B/C, C\rangle_m = \langle A/B, B/C\rangle_m \langle A/B, C\rangle_m \cdot \langle B/C, C\rangle_m = \langle A/B, B/C\rangle_m \langle A/C, C\rangle_m.$$

命題 1.1.1 の証明で用いた全単射

$$\{(B, C) \mid C \subset B \subset A\} \xrightarrow{\sim} \{(B', C) \mid C \subset A,\ B' \subset A/C\}, \quad B \longmapsto B' := B/C$$

のもとで $(A/C)/B' \simeq A/B$ となるから

$$\langle A/B, B/C\rangle_m \langle A/C, C\rangle_m = \langle A/C, C\rangle_m \langle (A/C)/B', B'\rangle_m.$$

従って (1.5) の各項と (1.6) の各項が対応する．以上で $*$ が結合的であることが示せた． □

系 1.1.4 にあたる言いかえをしておくと

系． $\mathrm{R}(\mathfrak{A})$ は $\mathrm{Iso}(\mathfrak{A})$ を基底とする $\mathbb{C}$ 線形空間 $\oplus_{[A]\in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A})}\mathbb{C}[A]$ と

$$[A] * [B] := \langle A, B\rangle_m \, [A] \circ [B]$$

とで定義される結合代数と同型.

これ以降は $(\mathrm{F}(\mathfrak{A}), *)$ と $(\oplus_{[A]\in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A})}\mathbb{C}[A], *)$ を区別せずに扱う．
後で余積の余結合律を示すときの為に, 結合律の言いかえをしておく.

系 1.2.4. $e^C_{A,B} := \left|\mathcal{E}^C_{A,B}\right|$, $a_A := |\mathrm{Aut}(A)|$ と略記すると, 任意の $[A], [B], [C], [E] \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A})$ に対して

$$\sum_{[D]\in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A})} \langle A, B\rangle_m \langle D, C\rangle_m e^D_{A,B} e^E_{D,C}/a_D = \sum_{[D]\in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A})} \langle A, D\rangle_m \langle B, C\rangle_m e^E_{A,D} e^D_{B,C}/a_D.$$

証明. $*$ の結合律と

$$\begin{aligned}(A * B) * C &= \sum_{[D],[E]} \langle A, B\rangle_m \langle D, C\rangle_m \, g^D_{A,B} g^E_{D,C}[E],\\ A * (B * C) &= \sum_{[D],[E]} \langle A, D\rangle_m \langle B, C\rangle_m \, g^E_{A,D} g^D_{B,C}[E]\end{aligned}$$

および $g^C_{A,B} = e^C_{A,B}/a_A a_B$ から従う． □

1.3 Green の余積

この副節では Green が [G95] で導入した余積を扱う．まず余代数の定義を思い出しておく.

定義 1.3.1. 線形空間 C, 線形写像 $\Delta : C \to C \otimes C$ および $\epsilon : C \to \mathbb{C}$ が以下の図式を可換にするる時, 組 (C, Δ, ϵ) を余代数と呼ぶ．また Δ を余積, i を余単位射と呼ぶ.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{id}"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k \otimes C \arrow[r, "\simeq"] \arrow[dr, "\epsilon\otimes\mathrm{id}"'] & C \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes k \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes\epsilon"] \\ & C \otimes C & \end{tikzcd}$$

仮定 1 と仮定 3 に加え, 次の条件を圏 $\mathfrak{A}$ に課す.

仮定 4. 任意の対象について, その部分対象は有限個.

注意. 2 日目で扱う箙の表現圏はこの仮定 4 を満たす．3 日目以降で扱う有限体上定義された曲線の上の連接層の圏は満たさない.

命題 1.3.2. 写像 $\Delta : \mathrm{F}(\mathfrak{A}) \to \mathrm{F}(\mathfrak{A}) \otimes \mathrm{F}(\mathfrak{A})$ と $\epsilon : \mathrm{F}(\mathfrak{A}) \to \mathbb{C}$ を

$$\Delta([A]) := \sum_{[B],[C] \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A})} \langle B, C \rangle_m \frac{\left|\mathcal{E}^A_{B,C}\right|}{|\mathrm{Aut}(A)|} [B] \otimes [C], \quad \epsilon([A]) = \delta_{A,0} \tag{1.7}$$

で定義すると, $(\mathrm{F}(\mathfrak{A}), \Delta, \epsilon)$ は余代数.

仮定 4 から $\Delta([A])$ は有限和になり well-defined であることに注意する.

証明. 余結合律のみ示す. $e^A_{B,C} := \left|\mathcal{E}^A_{B,C}\right|$, $a_A := |\mathrm{Aut}(A)|$ と略記すると

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta([A]) &= (\Delta \otimes \mathrm{id})\Big(\sum_{[E],[D]} \langle E, D \rangle_m e^A_{E,D} / a_A \cdot [E] \otimes [D] \Big) \\ &= \sum_{[E],[D]} \langle E, D \rangle_m e^A_{E,D} / a_A \cdot \sum_{[B],[C]} \langle B, C \rangle_m e^E_{B,C} / a_E \cdot [B] \otimes [C] \otimes [D]. \end{aligned} \tag{1.8}$$

同様に

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta([A]) = \sum_{[B],[E]} \langle B, E \rangle_m e^A_{B,E} / a_A \cdot \sum_{[C],[D]} \langle C, D \rangle_m e^E_{C,D} / a_E \cdot [B] \otimes [C] \otimes [D].$$

従って, $[A], [B], [C], [D] \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A})$ を固定して, 次の等式を満たせばよい.

$$\sum_{[E]} \langle E, D \rangle_m \langle B, C \rangle_m e^A_{E,D} e^E_{B,C} / a_A a_E = \sum_{[E]} \langle B, E \rangle_m \langle C, D \rangle_m e^A_{B,E} e^E_{C,D} / a_A a_E.$$

これは $*$ の結合律を言い換えた系 1.2.4 から従う. □

仮定 4 がない場合でも, $\mathrm{F}(\mathfrak{A}) \otimes \mathrm{F}(\mathfrak{A})$ を完備化すれば Δ に意味がつく.

命題 1.3.3. 圏 $\mathfrak{A}$ が仮定 1 と仮定 3 だけを満たす場合,

$$\mathrm{F}(\mathfrak{A}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{F}(\mathfrak{A}) := \prod_{[M],[N] \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A})} \mathbb{C}[M] \otimes \mathbb{C}[N]$$

と定める. そして $\Delta : \mathrm{F}(\mathfrak{A}) \to \mathrm{F}(\mathfrak{A}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{F}(\mathfrak{A}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{F}(\mathfrak{A})$ と $\epsilon : \mathrm{F}(\mathfrak{A}) \to \mathbb{C}$ を (1.7) と同じ式で定めると, 余代数の定義 1.3.1 で $\otimes$ を $\widehat{\otimes}$ にしたものが成立する.

今後はこの意味で「$(\mathrm{F}(\mathfrak{A}), \Delta, \epsilon)$ は余積が位相的な余代数である」ということにする.

証明. 任意の $[A] \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A})$ に対して $(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta([A])$ および $(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta([A])$ が $\mathrm{F}(\mathfrak{A}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{F}(\mathfrak{A}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{F}(\mathfrak{A})$ に属することを示せば, これらが等しいことは命題 1.3.2 から従う. $(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta([A])$ については, 計算 (1.8) から

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta([A]) &= \sum_{[B],[C],[D] \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A})} c_{B,C,D} [B] \otimes [C] \otimes [D], \\ c_{B,C,D} &= \sum_{[E] \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A})} \langle E, D \rangle_m \langle B, C \rangle_m e^A_{E,D} e^E_{B,C} / a_A a_E \end{aligned}$$

となるので, $c_{B,C,D}$ が有限和であることを示せばよい. $e^E_{B,C} \neq 0$ なら E が C の B による拡大だが, (仮定 3 から出る仮定 2 より) $\mathfrak{A}$ は finitary だからそのような $[E]$ は有限個しかない. よって有限和. $(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta([A])$ についても同様である. □

1.4 Ringel-Hall 双代数

双代数 (bialgebra) の定義を復習しておこう.

定義. B を線形空間とする. 代数 $(B, \cdot, \eta)$ と余代数 (B, Δ, ϵ) について, $\Delta : B \otimes B \to B$ と $\epsilon : B \to k$ が代数準同型である時, B を双代数と呼ぶ. 但し $B \otimes B$ の積は次で与える.

$$(b_1 \otimes b_2) \cdot (b_1' \otimes b_2') := (b_1 \cdot b_1') \otimes (b_2 \cdot b_2').$$

定義. 仮定 1 と仮定 3 をみたす Abel 圏 $\mathfrak{A}$ について, $K_0(\mathfrak{A})$ 上の対称 Euler 形式 $(\cdot,\cdot)_m$ を次式で定義する.

$$(\alpha, \beta)_m := \langle \alpha, \beta \rangle_m \langle \beta, \alpha \rangle_m.$$

次の条件を考える.

仮定 5. Abel 圏 $\mathfrak{A}$ は遺伝的, つまり大域次元が 1 以下.

特に任意の $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$ に対し, $i \geq 2$ なら $\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{A}}(A, B) = 0$ である.

定理 1.4.1 (Green [G95])**.** 圏 $\mathfrak{A}$ は仮定 1, 仮定 3, 仮定 4 および仮定 5 をみたすものとする. $\mathrm{F}(\mathfrak{A}) \otimes \mathrm{F}(\mathfrak{A})$ 上の積 $*$ を

$$([A_1] \otimes [A_2]) * ([B_1] \otimes [B_2]) := (A_2, B_1)_m \cdot ([A_1] * [A_2]) \otimes ([B_1] * [B_2]) \tag{1.9}$$

で定義する. この時 $\Delta : (\mathrm{F}(\mathfrak{A}), *) \to (\mathrm{F}(\mathfrak{A}) \otimes \mathrm{F}(\mathfrak{A}), *)$ は代数準同型.

証明は解説しない. 証明の方針は単純だが, 実際に書き下すと意外と複雑である. Green が [G95, §2] で与えた証明と, 見通しを良くした Ringel の証明 [R96] がある. 後者の部分的解説が [S06, §1.5] にある.

仮定 4 を課さない場合, つまり Green の余積が位相的な場合も同様の結果が成立する. 但し $\mathrm{F}(\mathfrak{A}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{F}(\mathfrak{A})$ の積について少し注意が必要である.

定義. $\mathrm{F}(\mathfrak{A}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{F}(\mathfrak{A})$ の 2 元 $x = \sum_i a_i \otimes b_i$, $y = \sum_j c_j \otimes d_j$ を考える. (1.9) の積 $x * y$ が収束するとは, 任意の $[A], [B] \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A})$ に対して,

$$|\{(i,j) \mid (a_i \otimes b_i) * (c_j \otimes d_j) \text{ における } [A] \otimes [B] \text{ の係数が } 0 \text{ でない } \}| < \infty$$

が成り立つことをいう.

補題 1.4.2 ([S06, Lemma 1.8])**.** 任意の $[A], [B] \in \mathrm{Iso}(A)$ に対して $\Delta([A]) \cdot \Delta([B])$ は収束する.

証明はそれほど難しくないが省略する. [S06, Lemma 1.8] を参照のこと.

命題 1.4.3. 圏 $\mathfrak{A}$ は仮定 1, 仮定 3 および仮定 5 をみたすものとする. $\mathrm{F}(\mathfrak{A}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{F}(\mathfrak{A})$ 上の積 $*$ を (1.9) で定義すると, $\Delta : (\mathrm{F}(\mathfrak{A}), *) \to (\mathrm{F}(\mathfrak{A}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{F}(\mathfrak{A}), *)$ は代数準同型.

定義. $\mathrm{R}(\mathfrak{A}) = (\mathrm{F}(\mathfrak{A}), *, \eta, \Delta, \epsilon)$ を (余積が位相的な)Ringel-Hall 双代数と呼ぶ.

1.5 内積付き Hopf 代数としての Ringel-Hall 代数

今までに挙げてきた圏 $\mathfrak{A}$ に対する仮定をまとめておく.

仮定 1.5.1. 圏 $\mathfrak{A}$ に対する以下の条件を考える.

1 本質的に小な Abel 圏.

2 finitary.

3 大域次元は有限かつ任意の $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$ と $i \in \mathbb{N}$ に対して $\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{A}}(A, B)$ は有限集合.

4 任意の対象の部分対象は有限個.

5 遺伝的.

注意 1.2.1 で述べたように, 2 から 3 が出る.

まず Green が導入した Hopf 内積について説明する.

定義. $B = (B, \cdot, 1, \Delta, \epsilon)$ を双代数とする. 双線形型式 $\varphi : B \otimes B \to \mathbb{C}$ が任意の $x, y, z \in B$ に対して条件

$$\varphi(x, 1) = \epsilon(x), \quad \varphi(1, y) = \epsilon(y),$$
$$\varphi(x, y \cdot z) = (\varphi \times \varphi)(\Delta(x), y \otimes z), \quad \varphi(x \cdot y, z) = (\varphi \times \varphi)(x \otimes y, \Delta(z))$$

を満たすとき, φ を Hopf pairing という. 特に φ が非退化な場合, φ を Hopf 内積といい, (B, φ) を内積付き双代数という.

定理 1.5.2 (Green [G95])**.** 圏 $\mathfrak{A}$ に仮定 1.5.1 の 1,3,5 を課す. $\widetilde{\mathrm{F}}(\mathfrak{A})$ 上の双線形型式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を次で定義する.

$$\langle [A], [B] \rangle := \frac{\delta_{A,B}}{|\mathrm{Aut}(A)|}.$$

このとき $(\mathrm{R}(\mathfrak{A}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ は余積が位相的な内積付き双代数.

証明. $\langle [A] * [B], [C] \rangle = \langle [A] \otimes [B], \Delta([C]) \rangle$ だけ示す. $a_A := |\mathrm{Aut}(A)|$, $e^C_{A,B} := \left| \mathcal{E}^C_{A,B} \right|$ と書くと

$$\langle [A] * [B], [C] \rangle = \langle \textstyle\sum_{[D]} \langle A, B \rangle_m g^D_{A,B} [D], [C] \rangle = \langle A, B \rangle_m g^C_{A,B} / a_A = \langle A, B \rangle_m e^C_{A,B} / a_A a_B a_C,$$
$$\langle [A] \otimes [B], \Delta([C]) \rangle = \langle [A] \otimes [B], \textstyle\sum_{[D],[E]} \langle D, E \rangle_m e^C_{D,E} / a_C \cdot [D] \otimes [E] \rangle = \langle A, B \rangle_m e^C_{A,B} / a_A a_B a_C.$$

□

注意. $\mathrm{F}(\mathfrak{A})$ の元来の定義を用いて Hopf 内積を書き直すと, $f, g : \mathrm{Iso}(\mathfrak{A}) \to \mathbb{C}$ を有限台を持つ関数として,

$$\langle f, g \rangle = \sum_{[A] \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A})} \frac{f([A]) g([A])}{|\mathrm{Aut}(A)|}.$$

最後に Hopf 代数の構造について説明する.

定義. 双代数 $H = (H, m, \eta, \Delta, \epsilon)$ と線形写像 $S : H \to H$ が

$$m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = m \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \epsilon, \quad S \circ \eta = \eta, \quad \epsilon \circ S = \epsilon$$

を満たすとき, (H, S) を Hopf 代数と呼び, S を対蹠射または対合射と呼ぶ.

定理 1.5.3 (Xiao [X97])**.** 仮定 1.5.1 の 1,3,4,5 を課すと, $\mathrm{R}(\mathfrak{A})$ は Hopf 代数である. 対蹠射 $S : \mathrm{R}(\mathfrak{A}) \to \mathrm{R}(\mathfrak{A})$ は次の式で与えられる.

$$S([A]) := |\mathrm{Aut}(A)|^{-1} \sum_{r \geq 1} (-1)^r \sum_{A_\bullet \in \mathcal{F}(A; r)} \Big(\prod_{i=1}^{r} \langle A_i / A_{i+1}, A_{i+1} \rangle_m \, |\mathrm{Aut}(A_i / A_{i+1})| \Big)$$

$$\cdot [A_1/A_2] * [A_2/A_3] * \cdots * [A_r].$$

但し $\mathcal{F}(A;r)$ は長さ r の A の真のフィルトレーションの集合. つまり

$$\mathcal{F}(A;r) := \{A_\bullet = (A = A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq \cdots \supsetneq A_r \supsetneq 0)\}.$$

証明は直接計算でできるが, ここでは省略する. [X97, 4.5 Theorem (c)] もしくは [S06, Theorem 1.14] を参照のこと.

問題 1.3 ($*$)**.** 定理 1.5.3 の証明を与えよ.

参考文献

[G95] J. A. Green, *Hall algebras, hereditary algebras and quantum groups*, Invent. Math. **120**, 361–377, (1995).

[K97] M. Kapranov, *Eisenstein series and quantum affine algebras*, J. Math. Sci. (New York) **84**, no. 5, 1311–1360, (1997).

[R90] C. Ringel, *Hall algebras*, in *Topics in algebra, Part 1* (Warsaw, 1988), 433–447, Banach Center Publ., **26**, Part 1, PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw (1990).

[R93] C. M. Ringel, *Hall algebras revisited*, in *Quantum deformations of algebras and their representations* (Ramat-Gan, 1991/1992; Rehovot, 1991/1992), Israel Math. Conf. Proc., Vol. 7, 171–176 (1993).

[R96] C. M. Ringel, *Green's theorem on Hall algebras*, in *Representation theory of algebras and related topics* (Mexico City, 1994), 185–245, CMS Conf. Proc., **19**, AMS (1996).

[S06] O. Schiffmann, *Lectures on Hall algebras*, in *Geometric methods in representation theory. II*, pp. 1–141, Sémin. Congr., 24-II, Soc. Math. France, Paris (2012); arXiv:math/0611617v2.

[X97] J. Xiao, *Drinfeld double and Ringel-Green theory of Hall algebras*, J. Algebra **190**, no. 1, 100–144 (1997).

以上です.

東京大学集中講義　12 月 04 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

2　古典的 Hall 代数

今日は Jordan 箙の冪零表現圏の Ringel-Hall 代数を扱う．これは Ringel が Ringel-Hall 代数を導入する以前に, Steinitz や Hall が対称群の表現に関連して導入した可換代数と一致するため, 古典的 Hall 代数と呼ばれる．今日の前半の目標は古典的 Hall 代数の構造定理 (定理 2.1.7) を示すことである．後半ではこの構造定理を用いて Hall-Littlewood 対称函数を導入し, 直交性を中心にその性質を議論する．

§§2.1–2.4 は概ね Schiffmann の講義ノート [S06, §2] と Macdonald の教科書 [M95, Chap. Ⅱ] に従う．

2.1　Jordan 箙の冪零表現圏

k を体とする．Jordan 箙 $Q=(Q_0,Q_1)$, $Q_0=\{\bullet\}$, $Q_1=\{a:\bullet\to\bullet\}$ の表現圏 $\mathfrak{Rep}_k Q$ を考えよう．

$\mathfrak{Rep}_k Q$ の対象は k 上の有限次元線形空間 V とその自己準同型 $x\in\mathrm{End}_k(V)$ の組 (V,x) である．(V,x) から (W,y) への射とは, 線形写像 $f:V\to W$ であって $f\circ x=y\circ f$ を満たすものである．

$\mathfrak{Rep}_k Q$ は一変数多項式環 $k[t]$ の (右) 加群であって k 上有限次元なもののなす圏と同値である．実際, $(V,x)\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{Rep}_k Q)$ に線形空間 V を対応させ, V への t の作用を x で与えればよい．これから次が従う．

補題 2.1.1. $\mathfrak{Rep}_k Q$ は本質的に小で k 上線形な Abel 圏であり, 大域次元は 1.

今日取り扱うのは Q の冪零表現のなす圏

$$\mathfrak{A}:=\mathfrak{Rep}_k^{\mathrm{nil}} Q$$

である．ひとまず基礎体 k は任意の体とする．$\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{Rep}_k Q$ の部分 Abel 圏である．

$\mathfrak{Rep}_k Q$ の記述と同様に, $\mathfrak{A}$ の対象は有限次元線形空間 V と冪零な自己準同型 $x\in\mathrm{End}_k(V)$ の組 (V,x) と表せる．また $\mathfrak{A}$ は一変数多項式環 $k[t]$ の (右) 加群であって k 上有限次元であり, また t の作用が冪零であるもののなす圏と同値である．

$\mathfrak{A}$ に付随する Ringel-Hall 代数を考えたいのだが, その前に, Ringel-Hall 代数の定義に必要になった Abel 圏の仮定を満たすことを確認しておこう．

命題 2.1.2. $k=\mathbb{F}_q$ ならば Jordan 箙の冪零表現圏 $\mathfrak{A}$ は以下の条件を全て満たす．

(1) 本質的に小な Abel 圏.
(3) 大域次元は有限かつ $\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{A}}(\cdot,\cdot)$ は有限集合.
(4) 任意の対象の部分対象は有限個.
(5) 遺伝的.

証明. 補題 2.1.1 と $\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{Rep}_k Q$ の忠実充満部分 Abel 圏であることから, 任意の基礎体 k 上で $\mathfrak{A}$ は条件 (1)

[*1] 2018/12/04 版, ver. 0.6.

と (5) を満たす.

また $\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{A}}(\cdot,\cdot)$ は有限次元 k 線形空間だから, $k=\mathbb{F}_q$ とすれば $\left|\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{A}}(\cdot,\cdot)\right|<\infty$. よって (2) と (3) が従う.

(4) について. $(V,x)\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$ の部分表現 (W,y) に関して, W は k 線形空間 V の部分空間なので $k=\mathbb{F}_q$ なら有限個しかない. また $y=x|_W$ より W から y が一意に決まる. よって (W,y) は有限個しかない. □

従って §1 より Ringel-Hall 代数 $\mathrm{R}(\mathfrak{A})$ は $\mathbb{C}$ 上の Hopf 代数の構造を持つ. その構造を述べる前に, $\mathrm{Iso}(\mathfrak{A})$ が分割を使って簡単に記述できることから説明する.

注意. 分割とは有限長の非負整数の非増大列 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ のこと. 分割に関する記号は Macdonald の本 [M95, Chap.1 §1] に従う. 特に, $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n,0,\ldots)$ と 0 を付け加えた分割は同一視する.

定義. 対角成分が 0 の n 次 Jordan 細胞を J_n で表す.

$$J_n:=\begin{bmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&0&1\\&&&&0\end{bmatrix}.$$

分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$ に対して $\mathfrak{A}$ の対象 I_λ を次で定める.

$$I_\lambda:=(k^{|\lambda|},J_\lambda),\quad J_\lambda:=J_{\lambda_1}\oplus J_{\lambda_2}\oplus\cdots. \tag{2.1}$$

但し $|\lambda|:=\sum_{i\geq1}\lambda_i$. また $I_\emptyset:=0=(0,0)$ と定める.

補題 2.1.3. 基礎体 k は任意にとる.

(1) $\mathfrak{A}$ の単純対象は $I_{(1)}=(k,0)$ のみ.

(2) $\mathrm{Iso}(\mathfrak{A})=\{[I_\lambda]\mid\lambda$ は分割 $\}$.

(3) $\mathfrak{A}$ の直既約対象は $I_{(n)}$ $(n\in\mathbb{N})$ と同型.

証明. (1) $\dim_k V>1$ なら $(V,x)\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$ は部分対象 $(V,0)$ を含む. 従って (V,x) が単純対象ならば $\dim_k V=1$ であり, x は冪零なので $x=0$.

(2) 任意の $(V,x)\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$ に対して, x は冪零だからその固有値は全て 0. 単因子論から $(V,x)\simeq I_\lambda$ となる分割 λ が存在する.

(3) これは (2) の帰結.

□

1 日目で説明したように, Ringel-Hall 代数は Grothendieck 群による次数付けを持っていた. そこで $K_0(\mathfrak{A})$ を調べておく. $A\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$ が定める $K_0(\mathfrak{A})$ の元を $\overline{A}$ と書くことを思い出しておく.

命題 2.1.4. (基礎体 k は任意でよい.) 加群の同型 $K_0(\mathfrak{A})\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}$, $\overline{I_\lambda}\mapsto|\lambda|$ が存在する.

証明. $l,m\in\mathbb{N}$, $l\geq m$ とすると, $\mathfrak{A}$ の短完全列

$$0\to I_{(m)}\to I_{(l)}\to I_{(l)}/I_{(m)}\simeq I_{(l-m)}\to0$$

が存在する. 実際, $I_{(l)}=(k^l,x)$ について, $k^l=kv+kx.v+\cdots+kx^{l-1}.v$ と書くと, その m 次元部分加群 $kx^{l-m}.v+\cdots+kx^{l-1}.v$ は $I_{(l)}$ と同型で, 商 $kv+\cdots+kx^{l-m-1}.v$ は $I_{(l-m)}$ と同型である.

このことから $\overline{I_{(l)}} = l \cdot \overline{I_{(1)}}$ が分かる．そして分割 λ に対して $\overline{I_\lambda} = |\lambda| \cdot \overline{I_{(1)}}$ となることも分かる．あとは補題 2.1.3 (2) より結論が得られる． □

よって $\mathrm{R}(\mathfrak{A})$ は $\mathbb{Z}$ 次数付けを持つ．また乗法的 Euler 型式 $\langle A, B\rangle_m = \sqrt{\prod_i \left|\mathrm{Ext}^i(A,B)\right|^{(-1)^i}}$ について

命題 2.1.5. k が有限体なら $K_0(\mathfrak{A})$ 上の $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ は自明.

証明. 次の補題 2.1.6 より $\langle I_{(1)}, I_{(1)}\rangle_m = \sqrt{|k| / |k|} = 1$. よって命題 2.1.4 から任意の $\alpha, \beta \in K_0(\mathfrak{A})$ に対して $\langle \alpha, \beta \rangle_m = 1$. □

補題 2.1.6. (基礎体 k は任意でよい.) 単純対象 $I_{(1)}$ について $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(I_{(1)}, I_{(1)}) = k$, $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{A}}(I_{(1)}, I_{(1)}) = k$.

証明. 前半は $I_{(1)}$ が単純対象であることから直ちに従う．後半はについて, $\xi \in \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{A}}(I_{(1)}, I_{(1)})$ に対応する短完全列を

$$0 \to I_{(1)} \to (V, x) \to I_{(1)} \to 0$$

とする．命題 2.1.4 より $\overline{(V,x)} = 2 \in \mathbb{Z}$ であり, 同一視 $V = k^2$ のもとで x を行列

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とみなすと, $a = 0$ なら $(V, x) \simeq I_{(1^2)} = I_{(1)}^{\oplus 2}$, $a \neq 0$ なら $(V, x) \simeq I_2$ となる．これから $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{A}}(I_{(1)}, I_{(1)}) \simeq \{a\} = k$ が分かる． □

命題 2.1.5 より積 $\circ$ と $*$ は一致し, 双代数として同一視 $\mathrm{R}(\mathfrak{A}) = \mathrm{H}(\mathfrak{A})$ ができる．そこで以下では Hopf 代数 $\mathrm{R}(\mathfrak{A})$ を扱う．そのうち双代数の構造を思い出しておくと

$$\begin{aligned}
&\mathrm{R}(\mathfrak{A}) = (\mathrm{F}(\mathfrak{A}), *, [0], \Delta, \epsilon, S), \quad \mathrm{F}(\mathfrak{A}) := \oplus_{\lambda:\text{分割}} \mathbb{C}[I_\lambda] \\
&[I_\mu] * [I_\nu] = \sum_{\lambda:\text{分割}} g^\lambda_{\mu,\nu} [I_\lambda], \quad g^\lambda_{\mu,\nu} := \left|\mathcal{G}^\lambda_{\mu,\nu}\right|, \quad \mathcal{G}^\lambda_{\mu,\nu} := \mathcal{G}^{I_\lambda}_{I_\mu, I_\nu} = \{N \subset I_\lambda \mid N \simeq I_\nu, I_\lambda/N \simeq I_\mu\}, \\
&\Delta([I_\lambda]) := \sum_{\mu,\nu} a_\lambda^{-1} a_\mu a_\nu g^\lambda_{\mu,\nu} \cdot [I_\mu] \otimes [I_\nu], \quad a_\lambda := a_{I_\lambda} = \left|\mathrm{Aut}_{\mathfrak{A}}(I_\lambda)\right|.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

定義. 有限体上の Jordan 箙の冪零表現圏 $\mathfrak{A}$ に付随する Ringel-Hall 代数 $\mathrm{R}(\mathfrak{A})$ を古典的 Hall 代数と呼ぶ.

今日の目標の 1 つは次の定理を示すことである.

定理 2.1.7. 古典的 Hall 代数 $\mathrm{R}(\mathfrak{A})$ は可換かつ余可換な双代数であり, 対称函数のなす双代数 Λ と同型.

2.2 古典 Hall 代数の構造

まず $\mathrm{R}(\mathfrak{A})$ の双代数構造 (2.2) のうち代数構造だけ考える．分割 λ, μ, ν に対し

$$\mathcal{G}^\lambda_{\mu,\nu} := \mathcal{G}^{I_\lambda}_{I_\mu, I_\nu} = \{N \subset I_\lambda \mid N \simeq I_\nu, I_\lambda/N \simeq I_\mu\}, \quad g^\lambda_{\mu,\nu} := \left|\mathcal{G}^\lambda_{\mu,\nu}\right|$$

と定めると

$$[I_\mu] * [I_\nu] = \sum_{\lambda:\text{分割}} g^\lambda_{\mu,\nu} [I_\lambda].$$

$\mathrm{R}(\mathfrak{A})$ が $K_0(\mathfrak{A})$ 次数付けであることと, 命題 2.1.4 の同型 $K_0(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ から

補題 2.2.1. 分割 λ, μ, ν に対し, $g^{\lambda}_{\mu,\nu} \neq 0$ なら $|\lambda| = |\mu| + |\nu|$.

まず $\mathrm{R}(\mathfrak{A})$ の可換性を示す. これは $\mathfrak{A}$ の双対性の帰結である.

命題 2.2.2. $\mathrm{R}(\mathfrak{A})$ は可換代数.

証明. 任意の分割 λ, μ, ν に対して $g^{\lambda}_{\mu,\nu} = g^{\lambda}_{\nu,\mu}$ を示せばよい. $N = (V, x) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$ について, V の線形双対 V^* と $x : V \to V$ の転置 ${}^t x : V^* \to V^*$ から $N^* := (V^*, {}^t x) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$ が得られる. $I^*_\lambda \simeq I_\lambda$ に注意する. $N \in \mathcal{G}^{\lambda}_{\mu,\nu} = \{N \subset I_\lambda \mid N \simeq I_\nu, I_\lambda/N \simeq I_\mu\}$ に対し $N^\perp := \{\xi \in I^*_\lambda \mid \xi(N) = 0\}$ を考える. すると $N^\perp \simeq I_\mu$ かつ $I^*_\lambda / N^\perp \simeq I_\nu$. よってこの対応 $N \mapsto N^\perp$ で全単射

$$\mathcal{G}^{\lambda}_{\mu,\nu} \xrightarrow{\sim} \{M \subset I^*_\lambda \simeq I_\lambda \mid M \simeq I_\mu,\ I^*_\lambda/M \simeq I_\nu\} = \mathcal{G}^{\lambda}_{\nu,\mu}$$

が得られることが分かる. □

次に (2.2) の余代数構造を考える.

$$\Delta([I_\lambda]) := \sum_{\mu,\nu} a_\lambda^{-1} a_\mu a_\nu g^{\lambda}_{\mu,\nu} \cdot [I_\mu] \otimes [I_\nu], \quad a_\lambda := a_{I_\lambda} = |\mathrm{Aut}_{\mathfrak{A}}(I_\lambda)|.$$

定義. 余代数 (C, Δ) に対して $\Delta^{\mathrm{op}} : C \to C \otimes C$ を次で定める: $\Delta(x) := \sum_i x_i^{(1)} \otimes x_i^{(2)}$ のとき $\Delta^{\mathrm{op}}(x) := \sum_i x_i^{(2)} \otimes x_i^{(1)}$. 任意の $x \in C$ に対して $\Delta(x) = \Delta^{\mathrm{op}}(x)$ となるとき, C を余可換な余代数という.

すると命題 2.2.2 から直ちに

命題 2.2.3. $\mathrm{R}(\mathfrak{A})$ は余可換な余代数.

次に $\mathrm{R}(\mathfrak{A})$ が環としては無限変数の多項式環であることを示そう.

命題 2.2.4. $\mathbb{C}$ 代数として $\mathrm{R}(\mathfrak{A}) \simeq \mathbb{C}[[I_{(1)}], [I_{(1^2)}], \ldots]$.

証明の前に補題 1.1.5 を思い出しておく: μ と $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(n)}$ を分割として

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(\mu; \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(n)}) \\ &:= \{A_\bullet = (I_\mu = A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} = 0) \mid A_i/A_{i+1} \simeq I_{\lambda^{(i)}}\ (i = 1, \ldots, n)\} \end{aligned}$$

と定めると

$$[I_{\lambda^{(1)}}] * [I_{\lambda^{(2)}}] * \cdots * [I_{\lambda^{(n)}}] = \sum_\mu \left|\mathcal{F}(\mu; \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)})\right| \cdot [I_\mu]. \tag{2.3}$$

また今後繰り返し使う分割の重複度による記法を用意しておく.

定義. 分割 λ に対して

$$m_i(\lambda) := \{j \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \lambda_j = i\}$$

と定める. そして $\lambda = (1^{m_1(\lambda)}, 2^{m_2(\lambda)}, \ldots)$ と書く.

証明. $\lambda = (1^{l_1}, 2^{l_2}, \ldots, n^{l_n})$ とし,

$$X_\lambda := [I_{(1^{l_n})}] \cdot [I_{(1^{l_{n-1}+l_n})}] \cdot \cdots \cdot [I_{(1^{l_1+\cdots+l_n})}]$$

を考える. 補題 2.1.3 (2) と補題 2.2.1 より

$$X_\lambda = \sum_{\mu:\,|\mu|=|\lambda|} a_{\lambda\mu}[I_\mu], \quad a_{\lambda\mu} \in \mathbb{C} \tag{2.4}$$

と書ける. $a_{\lambda\mu} \neq 0$ と仮定し, $I_\mu = (V, x)$ と表そう. すると (2.3) より, V のフィルトレーション

$$V^\bullet = (0 = V^0 \subset V^1 \subset \cdots \subset V^n = V)$$

が存在して, $i = 1, \ldots, n$ について $\dim(V^i/V^{i-1}) = l_i + \cdots + l_n$ かつ $x(V^i) \subset V^{i-1}$ となる. 特に $\mathrm{Ker}\, x^i \supset V^i$. これから

$$\dim(\mathrm{Ker}\, x^i) \geq \dim V^i = l_1 + 2l_2 + \cdots + (i-1)i_{i-1} + i(l_i + \cdots + l_n). \tag{2.5}$$

そこで分割 $\nu = (1^{n_1}, 2^{n_2}, \ldots)$ と $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$\sigma_i(\nu) := n_1 + 2n_2 + \cdots + (i-1)n_{i-1} + i(n_i + n_{i+1} + \cdots)$$

と定め, また分割の半順序 $\succeq$ を

$$\alpha \succeq \beta \iff |\alpha| = |\beta| \text{ かつ任意の } i \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ に対して} \sigma_i(\alpha) \leq \sigma_i(\beta) \tag{2.6}$$

と定義する. ν の転置 ν' を用いて

$$\sigma_i(\nu) = \nu'_1 + \cdots + \nu'_i \tag{2.7}$$

となることから

$$\dim(\mathrm{Ker}\, x^i) = \sigma_i(\mu) \tag{2.8}$$

が分かる (問題 2.1). すると (2.5) から, $a_{\lambda\mu} \neq 0$ なら $\lambda \succeq \mu$. 更にもし $\lambda = \mu$ なら, 上の $V^\bullet$ は一意的である. 以上より (2.4) は

$$X_\lambda = [I_\lambda] + \sum_{\mu \prec \lambda} a_{\lambda\mu}[I_\mu], \quad a_{\lambda\mu} \in \mathbb{C}$$

と書ける. すると行列 $A = (a_{\lambda\mu})$ は上三角行列であり, 対角成分は 1 である. これより A は逆行列 A^{-1} を持ち, $A^{-1} = (a^{\lambda\mu})$ と書くと

$$[I_\lambda] = \sum_{\mu \preceq \lambda} a^{\lambda\mu} X_\lambda. \tag{2.9}$$

補題 2.1.3 (2) より $\mathrm{R}(\mathfrak{A})$ は $[I_\lambda]$ 達によって張られるから, (2.9) より $\mathrm{R}(\mathfrak{A})$ は X_λ 達でも張られる. X_λ は $[I_{(1^n)}]$ 達の積だったから, 積 $*$ の可換性 (命題 2.2.2) と合わせて $\mathrm{R}(\mathfrak{A}) \simeq \mathbb{C}[[I_{(1)}], [I_{(1^2)}], \ldots]$ を得る. □

問題 2.1 (∗)**.** 式 (2.7) と式 (2.8) を示せ.

注意. 式 (2.7) から半順序 (2.6) は転置の支配的半順序と同値であることが分かる. つまり

$$\alpha \succeq \beta \iff \alpha' \leq \beta' \overset{\text{def}}{\iff} |\alpha'| = |\beta'| \text{ かつ任意の } i \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ に関して} \alpha'_1 + \cdots + \alpha'_i \leq \beta'_1 + \cdots + \beta'_i.$$

2.3 積の具体例

後で対称函数環との比較をするために, ここで積の具体的な計算を幾つかしておく.
まず $n, s \in \mathbb{N}$, $n \geq s$ に対して q 二項係数 $\begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}_q$ を次のように定義する.

$$(x;q)_n := \prod_{i=1}^{n}(1-xq^{i-1}), \quad \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}_q := \frac{(q;q)_n}{(q;q)_s(q;q)_{n-s}}.$$

$s > n$ なら $\begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}_q := 0$ とする.

補題. 有限体 $k = \mathbb{F}_q$ 上の Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}(n,s) := \{k^n$ の s 次元部分空間$\}$ について $|\mathrm{Gr}(n,s)| = \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}_q$.

補題 2.3.1. $l, n \in \mathbb{N}$, $l \geq n$ とする.
(1) $\mathcal{G}^{(1^l)}_{(1^{l-n}),(1^n)} = \mathrm{Gr}(l,n)$. 特に $k = \mathbb{F}_q$ なら $g^{(1^l)}_{(1^{l-n}),(1^n)} = \begin{bmatrix} l \\ n \end{bmatrix}_q$.
(2) $\mathcal{G}^{(l)}_{(l-n),(n)}$ は 1 点集合. 特に $k = \mathbb{F}_q$ なら $g^{(l)}_{(l-n),(n)} = 1$.

証明. (1) $I_{(1^l)} \simeq I_{(1)}^{\oplus l}$ に注意すると $\mathcal{G}^{(1^l)}_{(1^{l-n}),(1^n)} = \{N \subset I_{(1)}^{\oplus l} \mid N \simeq I_{(1)}^{\oplus n}, I_{(1)}^{\oplus l}/N \simeq I_{(1)}^{\oplus l-n}\}$. 従って $\mathcal{G}^{(1^l)}_{(1^{l-n}),(1^n)}$ は k^l の n 次元部分空間の集合と同一視できる. それは Grassmann 多様体に他ならない.
(2) $I_{(l)} = (k^l, x)$ と書くと $k^l = kv + kx.v + \cdots + kx^{l-1}.v$ と書ける. その n 次元部分加群であって商が直既約になるものは $kx^{l-n}.v + \cdots + kx^{l-1}.v$ しか存在しない.

□

より一般の $g^{\lambda}_{\mu,\nu}$ を調べるために, 垂直帯を思い出しておく. これ以降, 分割と Young 図形を同一視し, 分割 λ と μ が $\lambda \subset \mu$ であるとは対応する Young 図形に包含関係があることを意味するものとする.

定義. $\lambda \subset \mu$ となる分割 λ, μ に対し $\theta := \mu - \lambda$ とする. θ は全ての i について $\theta_i \leq 1$ を満たすとき垂直帯 (vertical strip) であると呼ばれる.

命題 2.3.2 ([M95, Chap.Ⅱ §4 (4.4)])**.** β と μ を分割であって $\beta \subset \mu$ かつ $\mu - \beta$ が垂直帯であるものとする. $p := |\mu - \beta|$ とし, $M, P \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$ は以下の条件を満たすものとする.

$$M = I_\mu \supset P \simeq I_{(1^p)}, \quad M/P \simeq I_\beta.$$

このとき, 分割 λ に対して集合 $\mathcal{H}_\lambda(P,M)$ を

$$\mathcal{H}_\lambda(P,M) := \{L \subset P \mid M/L \simeq I_\lambda\}$$

で定めると, これが空でないのは $\beta \subset \lambda \subset \mu$ かつ $\mu - \lambda$ が垂直帯のときである. さらに, そのとき

$$\mathcal{H}_\lambda(P,M) \simeq \prod_{i \geq 1} \mathrm{Gr}(\mu_i' - \beta_i', \mu_i' - \lambda_i') \times (\mathbb{A}^{\mu_i' - \lambda_i'} \times \mathbb{A}^{\sum_{j>i}(\mu_j' - \beta_j')}).$$

但し $\mathbb{A}^d$ は d 次元アフィン空間.

$\varphi := \lambda - \beta$, $\theta := \mu - \lambda$ とすると, $\mathcal{H}_\lambda(P,M) \neq \emptyset$ ならば φ, θ, $\theta + \varphi$ は全て垂直帯である. 下図 2.1 を参照せよ.

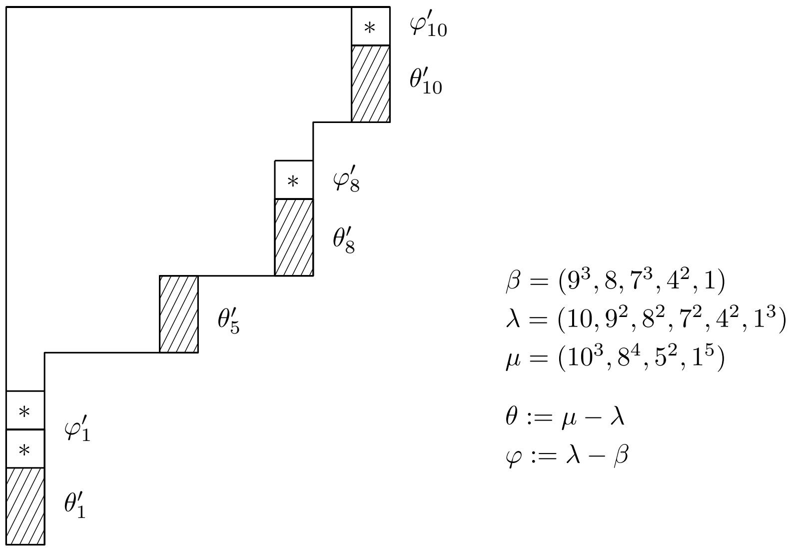

図 2.1 φ, θ の定義

証明. $L \in \mathcal{H}_\lambda(P,M)$ なら $M/L \simeq I_\lambda$ より $\beta \subset \lambda \subset \mu$ となるので, $\mathcal{H}_\lambda(P,M) \neq \emptyset \iff \lambda \subset \mu$ かつ $\mu - \lambda$ は垂直帯. 以下この条件の下で考える. $M = I_\mu = (k^{|\mu|}, x)$, $x = J_\mu$ と書いておく.

$K := \operatorname{Ker} x \subset M$, $K_i := K \cap x^i M$ とする. $m := \mu_1$ とすると $K_0 = K \supset K_1 \supset \cdots \supset K_m = 0$. そこで写像

$$\pi : \mathcal{H}_\lambda(P,M) \ni L \longmapsto \bigl(L \cap K_{m-1}, (L \cap K_{m-2})/(L \cap K_{m-1}), \ldots, L/(L \cap K_1)\bigr)$$

を考えると, $(L \cap K_{i-1})/(L \cap K_i) \in \operatorname{Gr}(\theta'_i + \varphi'_i, \theta'_i)$ より π は

$$B := \prod_{i=1}^{m} \operatorname{Gr}(\theta'_i + \varphi'_i, \theta'_i)$$

への全射である. π のファイバーを調べるために $(S_{m-1}, \ldots, S_0) \in B$ を任意に取ると

$$\pi^{-1}(S_{m-1}, \ldots, S_0) \simeq \prod_{i=1}^{m} \mathbb{A}_k^{\theta'_i} \times \mathbb{A}_k^{\sum_{j>i} \varphi'_j}$$

が分かる. これから結論を得る. □

この命題から $g^\mu_{\lambda,(1^p)}$ の明示式を得る. これ以降の計算のため, 分割に関していくつか記号を用意しておく.

定義 2.3.3. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ に対して $\ell(\lambda)$ を λ の長さ, つまり $\lambda_i > 0$ となる最大の i とする. また $n(\lambda) \in \mathbb{N}$ を次で定める.

$$n(\lambda) := \sum_{i \geq 1} (i-1)\lambda_i = \sum_{i \geq 1} \binom{\lambda'_i}{2}.$$

系 2.3.4. 分割 λ, μ および $p \in \mathbb{N}$ について, $\mathcal{G}^\nu_{\lambda,(1^p)} \neq \emptyset \iff \theta := \nu - \mu$ が垂直帯かつ $|\theta| = p$. その場合

$$g^\mu_{\lambda,(1^p)} = q^{n(\mu)-n(\lambda)-n(1^p)} \prod_{i \geq 1} \begin{bmatrix} \mu'_i - \mu'_{i+1} \\ \mu'_i - \lambda'_i \end{bmatrix}_{1/q}.$$

証明. 命題 2.3.2 で $\beta = \widetilde{\mu} := \mu - (1^{\ell(\mu)})$ とすると, $M/P \simeq I_{\widetilde{\mu}}$ より $P = \operatorname{Ker} x \subset M = I_\mu$ だから

$$\mathcal{H}_\lambda(P, M) = \{L \subset P \mid M/L \simeq I_\lambda\} = \{L \subset I_\mu \mid I_\mu/L \simeq I_\lambda\} = \mathcal{G}^\lambda_{\mu,(1^p)}.$$

よって $m := \mu_1$ とすると

$$g^\lambda_{\mu,(1^p)} = |\mathcal{H}_\lambda(\operatorname{Ker} x, I_\mu)| = \prod_{i=1}^m q^{\theta'_i(\varphi'_{i+1}+\cdots+\varphi'_m)} \begin{bmatrix} \theta'_i + \varphi'_i \\ \theta'_i \end{bmatrix}_q.$$

ここで $\varphi := \lambda - \widetilde{\mu}$, $\theta := \mu - \lambda$ より $\theta + \varphi = \mu - \widetilde{\mu}$. よって $\theta'_i + \varphi'_i = \mu'_i - \mu'_{i+1}$, $\theta'_i = \mu'_i - \lambda'_i$. すると

$$\begin{bmatrix} \theta'_i + \varphi'_i \\ \theta'_i \end{bmatrix}_q = q^{\theta'_i\varphi'_i} \begin{bmatrix} \theta'_i + \varphi'_i \\ \theta'_i \end{bmatrix}_{1/q} = q^{\theta'_i\varphi'_i} \begin{bmatrix} \mu'_i - \mu'_{i+1} \\ \mu'_i - \lambda'_i \end{bmatrix}_{1/q}.$$

これで主張のうち q 二項係数の部分を得る. 次に q の冪 $\sum_i \bigl(\theta'_i\varphi'_i + \theta'_i(\varphi'_{i+1} + \cdots + \varphi'_m)\bigr) = \sum_{i \le j} \theta'_i\varphi'_j$ について, θ や φ が垂直帯であることから $\sum_{i \le j} \theta'_i\varphi'_j = \sum_{i \le j} \varphi_j\theta_i$ となることに注意する. $\varphi_i = \lambda_i - \mu_i + 1 = 1 - \theta_i$ および, $\theta_i = 0$ または 1 より $\theta_i^2 = \theta_i$ から $\sum_{i \le j} \varphi_j\theta_i = \sum_{i \le j}(1-\theta_i)\theta_i = \sum_{i \le j}(1-\theta_i)\theta_i$. あとは $\sum_i \theta_i = p$ から

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{i \le j}(1-\theta_i)\theta_i &= \textstyle\sum_{i<j}(1-\theta_i)\theta_i = \sum_j (j-1)\theta_j - \bigl(\sum_i \theta_i\bigr)^2/2 + \sum_i \theta_i^2/2 \\ &= n(\mu) - n(\lambda) - p(p-1)/2 = n(\mu) - n(\lambda) - n(1^p).\end{aligned}$$

□

2.4 Hopf 内積と余積の計算

$\mathrm{R}(\mathfrak{A})$ は Hopf 内積

$$\langle [I_\lambda], [I_\mu] \rangle = \delta_{\lambda,\mu} a_\lambda^{-1}, \quad a_\lambda := a_{I_\lambda} = |\operatorname{Aut}(I_\lambda)|$$

を持っていた. そこで a_λ を計算しよう.

次の主張の証明は略す.

補題 2.4.1. 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の n 次一般線形群 $\mathrm{GL}(n)$ について $|\mathrm{GL}(n)| = (q^n - 1)(q^n - q)\cdots(q^n - q^{n-1})$. 特に $|\mathrm{GL}(n)| = (-1)^n q^{\binom{n}{2}}(q;q)_n = q^{n^2}(q^{-1};q^{-1})_n$.

命題 2.4.2 ([S06, Lemma 2.8])**.** 分割 λ に対して $m_i := m_i(\lambda) = \{j \mid \lambda_j = i\}$ とすると

$$\operatorname{Aut}(I_\lambda) \simeq \prod_{i \ge 1} \mathrm{GL}(m_i) \times \bigl(\mathbb{A}^{m_i} \times \mathbb{A}^{\sum_{j<i} jm_j + (i-1)m_i + i\sum_{j>i} m_j}\bigr).$$

従って $k = \mathbb{F}_q$ なら, 定義 2.3.3 の $n(\lambda)$ を用いて

$$a_\lambda = q^{|\lambda| + 2n(\lambda)} \prod_{i \ge 1} (q^{-1};q^{-1})_{m_i(\lambda)}.$$

特に $\operatorname{Aut}(I_{(1^n)}) \simeq \mathrm{GL}(n)$ で, 更に $k = \mathbb{F}_q$ なら $a_{(1^n)} = q^{n^2}(q^{-1};q^{-1})_n$ となる.

証明. $I_\lambda = (k^{|\lambda|}, x)$ と書いておく. $I_\lambda = I_{(1)}^{\oplus m_1} \oplus I_{(2)}^{\oplus m_2} \oplus \cdots$ に注意して, $I_{(i)}^{\oplus m_i}$ の生成元 $x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^{m_i}$ を取って固定する. 線形写像 $f \in \operatorname{End}_k(I_\lambda)$ は x_i^j の行先を指定すれば定まる. それが $\operatorname{Aut}_{\mathfrak{A}}(I_\lambda)$ の元であるため

には, $f(x_i^j) \in \operatorname{Ker} x^i$ かつ $f(x_i^j)$ の $I_{(i)}^{\oplus m_i}$ での成分が 0 でないことが必要十分. これから $(f(x_i^1), \dots, f(x_i^{m_i}))$ の行先は

$$\mathrm{GL}(m_i) \times \Big(\mathbb{A}^{m_i} \times \big(\operatorname{Ker} x^i \cap \oplus_{j \neq i} I_j^{\oplus m_j} \oplus \operatorname{Ker} x^i \cap I_i^{\oplus m_j}\big)\Big)$$

だけある. $j < i$ なら $\operatorname{Ker} x^i \cap I_j^{\oplus m_j} = I_j^{\oplus m_j}$ となることに注意して結論を得る.

$k = \mathbb{F}_q$ の場合の式は補題 2.4.1 と $|\lambda| = \sum_i i m_i$, $n(\lambda) = \sum_i i\binom{m_i}{2} + \sum_{i<j} i m_i m_j$ から導ける. □

系 2.4.3.

$$\langle [I_\lambda], [I_\mu] \rangle = \frac{\delta_{\lambda,\mu}}{q^{|\lambda|+2n(\lambda)} \prod_{i \geq 1} (q^{-1}; q^{-1})_{m_i(\lambda)}}.$$

次に余積の計算例を挙げる.

命題 2.4.4. $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\Delta([I_{(1^n)}]) = \sum_{r=0}^{n} q^{-r(n-r)} [I_{(1^{n-r})}] \otimes [I_{(1^r)}].$$

証明. 余積の定義 (2.2) から

$$\Delta([I_{(1^n)}]) = \sum_{r=0}^{n} a_{(1^n)}^{-1} a_{(1^{n-r})} a_{(1^r)} g_{(1^{n-r}),(1^r)}^{(1^n)} \cdot [I_{(1^{n-r})}] \otimes [I_{(1^r)}].$$

命題 2.4.2 の $a_{(1^n)} = (-1)^n q^{\binom{n}{2}} (q;q)_n$ と補題 2.3.1 (1) の $g_{(1^{n-r})(1^r)}^{(1^n)} = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q$ に注意すると

$$a_{(1^n)}^{-1} a_{(1^{n-r})} a_{(1^r)} g_{(1^{n-r}),(1^r)}^{(1^n)} = q^{-\binom{n}{2}} q^{\binom{n-r}{2}} q^{\binom{r}{2}} = q^{-r(n-r)}$$

となって結論が得られる. □

2.5 対称函数環とその Hopf 代数構造

対称函数環の記号は Macdonald の教科書 [M95, Chap.I] に従う.

定義. $\mathbb{Z}$ 係数の n 変数対称多項式環 $\Lambda_n(x) := \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{S_n}$ は

$$p_{n+1,n} : \Lambda_{n+1}(x) \twoheadrightarrow \Lambda_n(x), \quad x_i \longmapsto \begin{cases} x_i & (1 \leq i \leq n) \\ 0 & (i = n+1) \end{cases}$$

で射影系をなす. その射影極限を (整数係数の) 対称函数環といい, $\Lambda(x)$ と書く. 混乱がなければ x 変数を省略して Λ と書く. また多項式の次数から定まる Λ_n や Λ の次数構造を $\Lambda_n = \oplus_{d \in \mathbb{N}} \Lambda_n^d$, $\Lambda = \oplus_{d \in \mathbb{N}} \Lambda^d$ と書く.

定義. 基本対称多項式

$$e_r(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_r} \ \in \Lambda_n^r(x)$$

の定める $\Lambda^r(x)$ の元を $e_r(x)$ と書き基本対称函数と呼ぶ. 混乱がなければ $e_r \in \Lambda^r$ と書く. また分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ に対し $e_\lambda := e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots \in \Lambda^{|\lambda|}$ と定める.

よく知られている事実を思い出しておく.

補題 2.5.1. Λ は ($\mathbb{Z}$ 上) 自由加群で, $\{e_\lambda \mid \lambda$ は分割 $\}$ を基底とする．特に環として $\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \ldots]$.

次の事実は Zelevinsky [Z81] による．Macdonald の教科書 [M95, Chap.I, Chap.Ⅲ] にも解説がある．

定理 2.5.2. 対称多項式環 Λ は

$$\Delta(e_n) := \sum_{r=0}^{n} e_r \otimes e_{n-r}$$

で定まる余積 $\Delta : \Lambda \to \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ について ($\mathbb{Z}$ 上の) 双代数になる．また q を不定元として, $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(q)$ は次の双線形型式を Hopf 内積とする双代数になる．

$$\langle e_\lambda, e_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu} \prod_{i \geq 1} (q;q)_{m_i(\lambda)}^{-1}$$

さて定理 2.1.7 は次の形で証明できる．

定理 2.5.3. 双代数の同型

$$\psi : \mathrm{R}(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\sim} \Lambda \otimes \mathbb{C}, \quad [I_{(1^n)}] \longmapsto q^{-\binom{n}{2}} e_n$$

が存在する．また Hopf 内積は, $x \in H(\mathfrak{A})$ が $K_0(\mathfrak{A})$ 次数に関して次数 n の斉次元なら

$$\langle \psi(x), \psi(x) \rangle = \langle x, x \rangle \cdot q^n.$$

証明. ψ が代数同型であることは命題 2.2.4 と補題 2.5.1 から分かる．余代数同型であることは命題 2.2.3 と定理 2.5.2 の余積の部分から分かる．Hopf 内積の対応は系 2.4.3 と定理 2.5.2 の内積の部分から分かる． □

実は Hopf 代数として同型であるが, 対蹠射の議論は省略する．

2.6 Hall-Littlewood 対称函数

定義 2.3.3 の函数 $n(\lambda) = \sum_i (i-1)\lambda_i$ を思い出しておこう．

定義 2.6.1. 分割 λ に対して $P_\lambda \in \mathrm{R}(\mathfrak{A})$ を, $n \in \mathbb{N}$ に対して $e_n \in \mathrm{R}(\mathfrak{A})$ を次で定義する．

$$P_\lambda := q^{n(\lambda)}[I_\lambda], \quad e_n := P_{(1^n)} = q^{\binom{n}{2}}[I_{(1^n)}].$$

定理 2.5.3 より, 同型 $\psi : H(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\sim} \Lambda(x) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ のもと e_n は基本対称多項式 $e_n(x)$ に対応する．実は P_λ はパラメータを q^{-1} とする Hall-Littlewood 対称函数 $P_\lambda(x; q^{-1})$ [M95, Chap.Ⅲ] に対応する．

2.7 古典的 Hall 代数の原始元

余代数において $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ を満たす元 x を**原始元** (primitive element) と呼ぶ．この節では古典的 Hall 代数の原始元を決定する．

定義 2.7.1. $p_0 := [0] \in \mathrm{R}(\mathfrak{A})$ とする．また $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $p_n \in \mathrm{R}(\mathfrak{A})$ を次式で定義する．

$$p_n := \sum_{|\lambda|=n} (q;q)_{\ell(\lambda)-1} \cdot [I_\lambda].$$

実は, 定理 2.5.3 の同型 $\psi : H(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\sim} \Lambda(x) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ のもとで p_n は冪和対称函数 $p_n(x) = \sum_i x_i^n$ に対応する．

定理 2.7.2. 古典的 Hall 代数 $\mathrm{R}(\mathfrak{A})$ の斉次原始元は p_n の定数倍のみである. 特に

$$\Delta(p_n) = p_n \otimes 1 + 1 \otimes p_n. \tag{2.10}$$

これを示すために, 一旦次の主張を認めることにする. $e_n \in \mathrm{R}(\mathfrak{A})$ の定義 2.6.1 を思い出しておこう.

命題 2.7.3. 次の等式が $\mathrm{R}(\mathfrak{A})[[z]]$ において成立する.

$$\sum_{n\geq 0} e_n(-z)^n = \exp\Big(-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n z^n\Big).$$

但し $x \in \mathrm{R}(\mathfrak{A})$ に対して $\exp(x) := \sum_{n\geq 0}(p * \cdots * p)/n!$.

(2.10) の証明. 命題 2.4.4 と e_n の定義より $\Delta(e_n) = \sum_{r=0}^{n} e_r \otimes e_{n-r}$. が成り立つことに注意する. $E(z) := \sum_{n\geq 0} e_n(-z)^n$ とおいて これを言い換えると

$$\Delta(E(z)) = E(z) \otimes E(z).$$

両辺に命題 2.7.3 の等式 $E(z) = \exp(-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n z^n)$ を代入して, $x \otimes x = (x \otimes 1) * (1 \otimes x)$ に注意すると

$$\exp\Big(-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\Delta(p_n)z^n\Big) = \Big(\exp\Big(-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n z^n\Big)\otimes 1\Big) * \Big(1 \otimes \exp\Big(-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n z^n\Big)\Big).$$

両辺の log をとると

$$-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\Delta(p_n)z^n = \Big(-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n z^n\Big)\otimes 1 + 1 \otimes \Big(-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n z^n\Big)$$

z^n の係数を比較して結論を得る. □

以下で何度か使う恒等式を用意しておく.

補題 2.7.4. 次の等式が成立する.

$$(x;q)_n = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q x^r q^{\binom{r}{2}}.$$

命題 2.7.3 の証明. まず結論が

$$\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r p_{n-r} * e_r = (-1)^{n-1} n e_n \tag{2.11}$$

と同値であることに注意する (問題 2.2). そこで (2.11) を証明する. p_n と e_n および P_λ の定義から

$$((2.11)\text{ の左辺}) = \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \sum_{|\mu|=n-r} q^{-n(\mu)}(q;q)_{\ell(\mu)-1} P_\mu * P_{(1^r)}, \quad ((2.11)\text{ の右辺}) = (-1)^{n-1} n P_{(1^n)}$$

ここで P_λ の定義と系 2.3.4 から

$$P_\mu * P_{(1^r)} = \sum_{|\lambda|=n} q^{n(\mu)+n(1^r)-n(\lambda)} g^{\lambda}_{\mu,(1^r)} P_\lambda, \quad g^{\lambda}_{\mu,(1^r)} = q^{n(\lambda)-n(\mu)-n(1^r)} \prod_{i\geq 1} \begin{bmatrix} \lambda'_i - \lambda'_{i+1} \\ \lambda'_i - \mu'_i \end{bmatrix}_{1/q}$$

であり, また $\{P_\lambda \mid \lambda \text{ は分割 }\}$ が $\mathrm{R}(\mathfrak{A})$ の基底であることから, (2.11) は $|\lambda| = n$ となる任意の分割 λ に対して

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \sum_{|\mu|=n-i} q^{-n(\mu)}(q;q)_{\ell(\mu)-1} \begin{bmatrix} \lambda'_i - \lambda'_{i+1} \\ \lambda'_i - \mu'_i \end{bmatrix}_{1/q} = \delta_{\lambda,(1^n)}(-1)^{n-1} n \tag{2.12}$$

となることと同値.

まず $\lambda = (1^n)$ のとき, (2.12) の左辺に現れる μ は (1^{n-i}) しかないので

$$((2.12)\text{ の左辺}) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i q^{-\binom{n-i}{2}} (q;q)_{n-i-1} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_{1/q} = (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (1/q;1/q)_{n-i-1} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_{1/q}.$$

よって $t := 1/q$ として

$$(2.12) \iff \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_t (t;t)_{i-1} = n.$$

これは $\left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}\right]_t = t^i \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ i \end{smallmatrix}\right]_t + \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ i-1 \end{smallmatrix}\right]_t$ を用いて n に関する帰納法で示せる.

次に $\lambda = (r^s)$, $r > 1$ のときを示す. 前と同様の議論により, 示すべきことは

$$\sum_{u=0}^{s-1} (-1)^{s-u-1} t^{n(\mu)} \begin{bmatrix} s \\ u \end{bmatrix}_t = t^{r\binom{s}{2}}, \quad \mu := (r^u, (r-1)^{s-u})$$

と同値. ここで $n(\mu) = (r-1)\binom{s}{2} + \binom{u}{2}$ および補題 2.7.4 の等式 $\sum_{k=0}^{n} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_t t^{\binom{k}{2}} (-z)^k = (z;t)_n$ より

$$\sum_{u=0}^{s-1} (-1)^{s-u-1} t^{n(\mu)} \begin{bmatrix} s \\ u \end{bmatrix}_t = t^{(r-1)\binom{s}{2}} \sum_{u=0}^{s-1} \begin{bmatrix} s \\ u \end{bmatrix}_t t^{\binom{u}{2}} (-1)^u = (-1)^{s-1} t^{(r-1)\binom{s}{2}} \cdot \left(-t^{\binom{s}{2}} (-1)^s\right) = t^{r\binom{s}{2}}.$$

以上で $\lambda = (r^s)$ の場合が示せた.

一般の $\lambda = (r_1^{s_1}, \ldots, r_l^{s_l})$ に対しては

$$\sum_{(u_1,\ldots,u_l) \neq (0,\ldots,0)} (-1)^{u_1+\cdots+u_l-1} t^{n(\mu)} \begin{bmatrix} s_1 \\ u_1 \end{bmatrix}_t \cdots \begin{bmatrix} s_l \\ u_l \end{bmatrix}_t = t^{n(\lambda)} \tag{2.13}$$

を示せばよい. ここで u_i は下図 2.2 の斜線部の長さであり, μ は λ から斜線部を除いた部分である. まず $\widetilde{\lambda} := \lambda - (1^{\ell(\lambda)}) = ((r_1-1)^{s_1}, \ldots, (r_l-1)^{s_l})$ とすると

$$n(\lambda) = n(\widetilde{\lambda}) + \binom{s_1 + \cdots + s_l}{2}.$$

$n(\mu)$ を計算すると

$$\begin{aligned} n(\mu) = n(\widetilde{\lambda}) &+ (0 + 1 + \cdots + (s_1 - u_1 - 1)) + (s_1 + \cdots + (s_1 + s_2 - u_2 - 1)) \\ &+ \cdots + ((s_1 + \cdots + s_{l-1}) + \cdots + (s_1 + \cdots + s_{l-1} + s_l - i_l - 1)). \end{aligned}$$

これらから

$$\begin{aligned} ((2.13)\text{ の左辺}) =& t^{n(\lambda)} + (-1)^{s_2 \cdots s_l - 1} \Big(\sum_{u_1=0}^{s_1} (-1)^{u_1} t^{\binom{s_1-u_1}{2}} \begin{bmatrix} s_1 \\ u_1 \end{bmatrix}_t \Big) \cdot \Big(\sum_{u_2=0}^{s_2} (-t^{s_1})^{s_2-u_2} \begin{bmatrix} s_2 \\ u_2 \end{bmatrix}_t t^{\binom{s_2-u_2}{2}} \Big) \cdot \\ & \cdots \cdot \Big(\sum_{u_l=0}^{s_l} (-t^{s_1+\cdots+s_{l-1}})^{s_l-u_l} \begin{bmatrix} s_l \\ u_l \end{bmatrix}_t t^{\binom{s_l-u_l}{2}} \Big). \end{aligned}$$

ここで補題 2.7.4 より $\sum_{u_1=0}^{s_1} (-1)^{u_1} t^{\binom{s_1-u_1}{2}} \left[\begin{smallmatrix} s_1 \\ u_1 \end{smallmatrix}\right]_t = 0$ となるので, (2.13) が得られる.

□

定理 2.7.2 の残りの部分はレポート問題とする (問題 2.3).

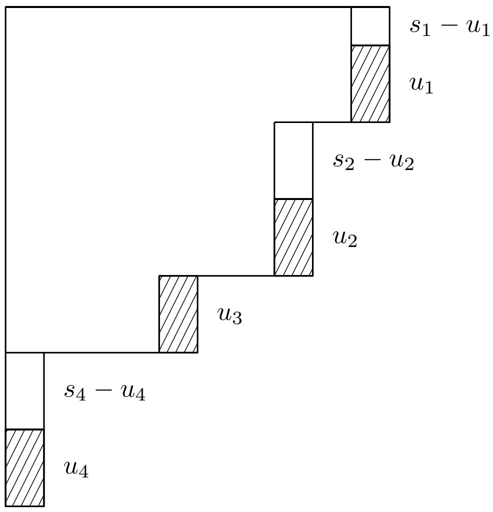

図 2.2 u_i の定義

命題 2.7.5. 分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$ に対して $p_\lambda:=p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}\cdots$ と定めると, $\{p_\lambda\}$ は $\mathrm{R}(\mathfrak{A})$ の基底.

証明は対称函数の議論で良く知られているので省略する

問題 2.2 (∗)**.** 命題 2.7.3 と式 (2.11) が同値であることを示せ.

問題 2.3 (∗)**.** 定理 2.7.2 の証明の残りの部分, つまり次の主張を示せ: $\mathrm{R}(\mathfrak{A})$ の斉次原始元は定数倍を除いて p_n と一致する.

2.8 p_n の Hopf 内積

p_n の Hopf 内積を計算しよう.

定理 2.8.1.

$$\langle p_n,p_m\rangle=\delta_{n,m}\frac{n}{q^n-1}.$$

定理 2.5.3 の同型 $\psi:\mathrm{R}(\mathfrak{A})\xrightarrow{\sim}\Lambda\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$ によって $\langle\psi(p_n),\psi(p_m)\rangle=\delta_{n,m}n/(1-q^{-n})$ となるが, これは Hall-Littlewood 内積 [M95, Chap.VI §1] で $t=q^{-1}$ としたものに他ならない.

証明. $K_0(\mathfrak{A})=\mathbb{Z}$ による次数付けが違えば内積は 0 になるので, $\langle p_n,p_n\rangle=n/(q^n-1)$ のみ示せばよい. p_n の定義 2.7.1 と $[I_\lambda]$ の Hopf 内積の値 (系 2.4.3) から

$$\langle p_n,p_n\rangle=\sum_{|\lambda|=n}\frac{(q;q)^2_{\ell(\lambda)-1}}{q^{|\lambda|+2n(\lambda)}\prod_{i\geq1}(q^{-1};q^{-1})_{m_i(\lambda)}}=q^{-n}\sum_{|\lambda|=n}q^{-2n(\lambda)+2\binom{\ell(\lambda)}{2}}\frac{(q^{-1};q^{-1})^2_{\ell(\lambda)-1}}{\prod_{i\geq1}(q^{-1};q^{-1})_{m_i(\lambda)}}. \tag{2.14}$$

そこで t と u を不定元として

$$\sum_{|\lambda|=n}t^{2n(\lambda)-2\binom{l(\lambda)}{2}}\frac{(t;t)_{l(\lambda)-1}(u^{-1};t)_{l(\lambda)}}{\prod_{i\geq1}(t;t)_{m_i(\lambda)}}u^{l(\lambda)}=\frac{u^n-1}{1-t^n} \tag{2.15}$$

を示す. 実際, 両辺を $u-1$ で割って $u\to 1$ の極限を取り, $t=q^{-1}$ とすると

$$\frac{((2.15)\text{ の左辺})}{u-1}\to\sum_{|\lambda|=n}q^{-n(\lambda)+2\binom{l(\lambda)}{2}}\frac{(q^{-1};q^{-1})_{l(\lambda)-1}(q^{-1};q^{-1})_{l(\lambda)-1}}{\prod_i(q^{-1};q^{-1})_{m_i(\lambda)}},\quad \frac{((2.15)\text{ の右辺})}{u-1}\to\frac{n}{1-q^{-n}}$$

となるので, $(2.14)=n/(q^n-1)$ が分かる.

ここで t 多項係数の記号

$$\begin{bmatrix} l \\ m_1,m_2,\dots,m_n\end{bmatrix}_t := \frac{(t;t)_l}{(t;t)_{m_1}(t;t)_{m_2}\cdots(t;t)_{m_n}}\quad (n\geq 2)$$

を導入する. $l=m_1+m_2$ なら $\begin{bmatrix} l \\ m_1,m_2\end{bmatrix}_t=\begin{bmatrix} l \\ m_1\end{bmatrix}_t=\begin{bmatrix} l \\ m_2\end{bmatrix}_t$ である. $l(\lambda)=m_1(\lambda)+\cdots+m_n(\lambda)$ に注意して t 多項係数を用いると

$$\begin{aligned}((2.15)\text{ の左辺}) &= \sum_{|\lambda|=n}t^{2n(\lambda)-l(\lambda)(l(\lambda)-1)}\begin{bmatrix} l(\lambda) \\ m_1(\lambda),\dots,m_n(\lambda)\end{bmatrix}_t\frac{(u^{-1};t)_{l(\lambda)}}{1-t^{l(\lambda)}}u^{l(\lambda)} \\ &= \sum_{|\lambda|=n}t^{-l(\lambda)(l(\lambda)-1)}u^{l(\lambda)}\frac{(u^{-1};t)_{l(\lambda)}}{1-t^{l(\lambda)}}\cdot t^{2n(\lambda)}\begin{bmatrix} l(\lambda) \\ m_1(\lambda),\dots,m_n(\lambda)\end{bmatrix}_t \qquad (2.16)\end{aligned}$$

と変形できる. $\cdot$ より前の部分は $l(\lambda)$ のみに依存していることに注意する. そこで $n,l\in\mathbb{N}$ を固定して等式

$$\sum_{\lambda:\,|\lambda|=n,\,l(\lambda)=l}t^{2n(\lambda)}\begin{bmatrix} l \\ m_1(\lambda),\dots,m_n(\lambda)\end{bmatrix}_t = t^{l(l-1)}\begin{bmatrix} n-1 \\ l-1\end{bmatrix}_t \qquad (2.17)$$

を考える. (2.17) が示せれば,

$$\begin{aligned}((2.16)\text{ の右辺}) &= \sum_{l\geq 1}t^{-l(l-1)}u^l\frac{(u^{-1};t)_l}{1-t^l}\cdot t^{l(l-1)}\begin{bmatrix} n-1 \\ l-1\end{bmatrix}_t = \frac{1}{1-t^n}\sum_{l\geq 1}\begin{bmatrix} n \\ l\end{bmatrix}_t(u^{-1};t)_l u^l \\ &= \frac{1}{1-t^n}(u^n-1) = ((2.15)\text{ の右辺})\end{aligned}$$

が成り立つ. 但し 3 番目の等号で

$$\sum_{l=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ l\end{bmatrix}_t(u^{-1};t)_l\,u^l = u^n \qquad (2.18)$$

を用いた. 従って (2.17) を示せば証明が終わる.

n に関する帰納法で (2.17) を示す. $n=1$ のときは明らか. 以下 $n>1$ とする. $l(\lambda)=l$ となる分割 λ に対して $\mu=\widetilde{\lambda}:=\lambda-(1^l)$ とすれば, $\mu_i'=\lambda_{i+1}'$ と $l=l(\lambda)=\lambda_1'$ より

$$2n(\lambda)=2\sum_{i\geq 1}\binom{\lambda_i'}{2}=\lambda_i'(\lambda_i'-1)+2\sum_{i\geq 1}\binom{\mu_i'}{2}=l(l-1)+2n(\mu).$$

また $m_{i+1}(\lambda)=m_i(\mu)$ であり, $|\lambda|=n$ なら $|\mu|=|\lambda|-l=n-l$ となることに注意すると

$$\begin{aligned}(2.17)\text{ の左辺} &= \sum_{\lambda:\,|\lambda|=n,\,l(\lambda)=l}t^{l(l-1)}\begin{bmatrix} l \\ m_1(\lambda)\end{bmatrix}_t\cdot t^{2n(\widetilde{\lambda})}\begin{bmatrix} l-m_1(\lambda) \\ m_2(\lambda),\dots,m_n(\lambda)\end{bmatrix}_t \\ &= t^{l(l-1)}\sum_{m_1\in\mathbb{N}}\begin{bmatrix} l \\ m_1\end{bmatrix}_t\sum_{\mu:\,|\mu|=n-m_1,\,l(\mu)=l-m_1}t^{2n(\mu)}\begin{bmatrix} l-m_1 \\ m_1(\mu),\dots,m_{n-l}(\mu)\end{bmatrix}_t\end{aligned}$$

$$= t^{l(l-1)} \sum_{m_1 \geq 0} t^{(l-m_1)(l-m_1-1)} \begin{bmatrix} n-l-1 \\ l-m_1-1 \end{bmatrix}_t \begin{bmatrix} l \\ m_1 \end{bmatrix}_t = t^{l(l-1)} \begin{bmatrix} n-1 \\ l-1 \end{bmatrix}_t = ((2.17) \text{ の右辺}).$$

ここで 3 番目の等号は帰納法の仮定を用いた. また 4 番目の等号は q-Chu-Vandermonde の定理

$$\sum_{j \geq 0} t^{(a-k+j)j} \begin{bmatrix} a \\ k-j \end{bmatrix}_t \begin{bmatrix} b \\ j \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} a+b \\ k \end{bmatrix}_t$$

で $a = l$, $k - j = m_1$, $b = n - l - 1$, $j = l - m_1 - 1$ としたもの. これで (2.17) が任意の n で示せた. □

問題 2.4 $(*)$**.** 等式 (2.18) を示せ.

2.9 Cauchy 型核函数

定義 2.9.1. 分割 λ に対して $Q_\lambda \in \mathrm{R}(\mathfrak{A})$ を次のように定義する.

$$Q_\lambda := P_\lambda / \langle P_\lambda, P_\lambda \rangle = P_\lambda \cdot q^{|\lambda|} \prod_{i \geq 1} (q^{-1}; q^{-1})_{m_i(\lambda)}.$$

系 2.4.3 より $\{Q_\lambda\}$ は Hopf 内積に関して $\{P_\lambda\}$ の双対基底をなす.

命題 2.9.2. $\mathrm{R}(\mathfrak{A}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{R}(\mathfrak{A})$ において次の等号が成立する.

$$\sum_{\lambda:\text{分割}} P_\lambda \otimes Q_\lambda = \exp\Big(\sum_{n \geq 1} \frac{q^n - 1}{n} p_n \otimes p_n \Big).$$

証明. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ に対して $p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots$ とすると

$$\exp\Big(\sum_{n \geq 1} \frac{q^n - 1}{n} p_n \otimes p_n \Big) = \sum_{\lambda:\text{分割}} \widetilde{z}_\lambda(q)^{-1} p_\lambda \otimes p_\lambda, \quad \widetilde{z}_\lambda(q) := \prod_{i \geq 1} \Big(i^{m_i(\lambda)} \cdot m_i(\lambda_i)! \Big) \cdot \prod_{i \geq 1} (q^{\lambda_i} - 1)^{-1}.$$

ここで命題 2.7.5 と定理 2.8.1 より $\{p_\lambda\}$ と $\{p_\lambda / \widetilde{z}_\lambda(q)\}$ は Hopf 内積に関する $\mathrm{R}(\mathfrak{A})$ の双対基底になる. また定義 2.9.1 より $\{P_\lambda\}$ と $\{Q_\lambda\}$ も双対基底である. 従って $\sum_{\lambda:\text{分割}} P_\lambda \otimes Q_\lambda = \sum_{\lambda:\text{分割}} p_\lambda \otimes (p_\lambda / \widetilde{z}_\lambda(q))$. 以上より結論を得る. □

Schur 多項式 $s_\lambda(x)$ に関する Cauchy の公式 [M95, Chap.I §4 (4.3)]

$$\sum_{\lambda:\text{分割}} s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1}$$

に因んで, $\sum_\lambda P_\lambda \otimes Q_\lambda$ を Cauchy 型核函数とよぶ. これを使って, 対称函数の理論を持ち出さずに, Ringel-Hall 代数の言葉に基づいて P_λ の性質を調べることができる. 特に Macdonald の教科書 [M95, Chap.Ⅲ] に書いてあることの多くが復元できるが, この講義ではこれ以上扱わない.

参考文献

[M95] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd ed., Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1995.

[S06] O. Schiffmann, *Lectures on Hall algebras*, in *Geometric methods in representation theory. II*, pp. 1–141, Sémin. Congr., 24-II, Soc. Math. France, Paris (2012); arXiv:math/0611617v2.

[Z81] A. Zelevinsky, *Representations of finite classical groups. A Hopf algebra approach*, Lect. Note Math., **869**, Springer-Verlag (1981).

以上です.

東京大学集中講義　12 月 05 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

3　曲線の Ringel-Hall 代数

今日と明日で楕円曲線上の連接層の圏に付随した Ringel-Hall 代数を考える. 今日はまず一般の曲線上の連接層についての説明から始め, その圏に付随する Ringel-Hall 代数の説明をする. 後半では Fourier 向井変換を使って楕円曲線上の連接層の圏を扱う.

§§3.2–3.3 は概ね [S06, §4] に基づく. §3.5 で扱う安定性に関しては [HL10, §1] が詳しい. 楕円曲線上の連接層に関する §3.6 の議論は [BBH09, §3.5.1] に基づく.

今回は [H77] にあるような代数幾何学の初歩的な知識を仮定するが, 特に連接層に関して必要な事項はある程度復習していく.

3.1　曲線上の連接層の圏

スキーム X 上の $\mathcal{O}_X$ 加群層のことを単に X 上の層とよぶ. 定義を思い出すと, X 上の連接層 $\mathcal{F}$ とは, 任意の $x \in X$ に対して開近傍 $U \ni x$ と有限集合 I, J および $\mathcal{O}_X|_U$ 加群層の完全列

$$\mathcal{O}_X^{\oplus J}|_U \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus I}|_U \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0$$

が存在するような層のことであった. また連接層の射とは層の射のことであった.

X 上の連接層のなす圏を $\mathfrak{Coh}(X)$ と書く. よく知られていることをまとめておくと

命題.　(1) 任意のスキーム X に対して, $\mathfrak{Coh}(X)$ は本質的に小な Abel 圏である [H77, Chap.Ⅱ §1].

(2) X が体 k 上の非特異射影代数多様体なら, $\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{Coh}(X)}(\cdot,\cdot)$ は有限次元 k 線形空間であり, また $\mathfrak{Coh}(X)$ の大域次元は X の次元と一致する [H77, Chap.Ⅲ §6].

以下, **曲線**といったら体上の**非特異射影曲線**の意味とする. 上の定理から, X が曲線なら $\mathfrak{Coh}(X)$ は大域次元 1 で, 特に遺伝的である. 更に基礎体が有限体 $k = \mathbb{F}_q$ なら, $\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{Coh}(X)}(\cdot,\cdot)$ は k 上の線形空間だから, 次の主張を得る.

命題 3.1.1. X が有限体 $k = \mathbb{F}_q$ 上の曲線なら, $\mathfrak{Coh}(X)$ は以下の条件を全て満たす.

(1) 本質的に小な Abel 圏.
(3) 大域次元は有限かつ $\mathrm{Ext}^i(\cdot,\cdot)$ は有限集合.
(5) 遺伝的.

従って §1 の議論より, $\mathfrak{Coh}(X)$ に対して (余積が位相的な)Ringel-Hall 双代数が定義できる. その構造を調べる前に, 曲線上の連接層の一般論をもう少し説明する.

[*1] 2018/12/05 版, ver. 0.4.

スキーム X 上の $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\mathcal{F}$ の台 $\mathrm{Supp}(\mathcal{F})$ とは X の部分集合

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{F}) := \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$$

のことである. Noether スキーム上の連接層の台はいつも閉集合になる [H77, Chap.II §5 Ex.5.6].

以下では代数多様体 X に対し $x \in X$ と書いたら x は X の閉点を意味するものとする.

定義. 代数多様体 X 上のねじれ層 (torsion sheaf) とは $\mathrm{Supp}(\mathcal{F})$ が有限個の閉点からなる層 $\mathcal{F}$ のことである.

ねじれ層の例は摩天楼層, つまり 1 点のみに台を持つ層である. $x \in X$ における局所環を $\mathcal{O}_{X,x}$ と書き, その極大イデアルを $\mathfrak{m}_x$, 剰余体を $k(x) := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ と書く. x での stalk が $k(x)$ であり, 他の stalk が 0 である摩天楼層を $\mathcal{O}_x$ と書く.

定義. 代数多様体 X 上のねじれ連接層のなす圏を $\mathcal{T}\mathrm{or}(X)$ と書く. また $x \in X$ に対し, 台が $\{x\}$ であるねじれ連接層のなす圏を $\mathcal{T}\mathrm{or}_x$ と書く.

定義より直ちに

補題 3.1.2. $\mathcal{T}\mathrm{or}(X)$ や $\mathcal{T}\mathrm{or}_x$ は $\mathfrak{Coh}(X)$ の Abel 部分圏で, $\mathcal{T}\mathrm{or}(X) = \coprod_{x\in X} \mathcal{T}\mathrm{or}_x$ となる.

次に曲線上の連接層の構造に関する基本定理を説明する. そのために局所自由層の定義を思い出しておこう. スキーム X 上の局所自由層 $\mathcal{F}$ とは, X の各点 x に対しある開近傍 U が存在して, $\mathcal{F}|_U$ が自由 $\mathcal{O}_X|_U$ 加群層になるもののことであった. またその階数が x によらない値 $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ の場合, $\mathcal{F}$ を階数 r の局所自由層と呼ぶ. $\mathcal{F}$ が連接層でかつ階数 r の局所自由層なら $r \in \mathbb{N}$ である. また階数 1 の局所自由層を可逆層と呼ぶ [H77, Chap.II §6]. 有限階数の局所自由層はベクトル束と, 可逆層は直線束と 1 対 1 に対応する [H77, Chap.II §5 Ex.5.18]. 今後はこれらを同一視する.

定理 3.1.3 ([HL10, §1.1] 参照)**.** 曲線 X 上の任意の連接層 $\mathcal{F}$ について

(1) $\mathcal{F}$ のねじれ部分層であって包含関係で極大なものが唯一存在する. これを $\mathcal{F}$ のねじれ部分 (torsion part) といい $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}$ と書く.
(2) 商層 $\mathcal{F}/\mathcal{T}$ は有限階数の局所自由層である.
(3) 短完全列 $0 \to \mathcal{T} \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{T} \to 0$ は分裂する. つまり $\mathcal{F} \simeq \mathcal{T} \oplus \mathcal{F}/\mathcal{T}$.

3.2 連接層の圏の Ringel-Hall 代数

前副節の準備をもとに, X を曲線として $\mathfrak{Coh}(X)$ の Ringel-Hall 双代数

$$\mathrm{R}(X) := \mathrm{R}(\mathfrak{Coh}(X)) = (\mathrm{F}(\mathfrak{Coh}(X)), *, [0], \Delta, \epsilon)$$

を考えてみよう. 改めて定義を思い出しておくと, まず $\mathbb{C}$ 線形空間としては

$$\mathrm{F}(\mathfrak{Coh}(X)) = \oplus_{[\mathcal{F}]\in \mathrm{Iso}(\mathfrak{Coh}(X))} \mathbb{C}[\mathcal{F}].$$

定理 3.1.3 から次の主張が従う.

命題 3.2.1. X が曲線なら, $\mathrm{F}(\mathfrak{Coh}(X))$ の $\mathbb{C}$ 基底として次のものが取れる.

$$\{[\mathcal{V} \oplus \mathcal{T}] \mid \mathcal{V} : \text{ベクトル束},\ \mathcal{T} : \text{ねじれ連接層}\ \}.$$

次に積を思い出すと

$$[\mathcal{F}_1]*[\mathcal{F}_2] = \sum_{[\mathcal{F}_3]\in \mathrm{Iso}(\mathfrak{Coh}(X))} \langle \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\rangle_m\, g^{\mathcal{F}_3}_{\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2}[\mathcal{F}_3],$$
$$g^{\mathcal{F}_3}_{\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2} := \left|\mathcal{G}^{\mathcal{F}_3}_{\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2}\right|, \quad \mathcal{G}^{\mathcal{F}_3}_{\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2} := \{\mathcal{N}\subset \mathcal{F}_3 \mid \mathcal{N}\simeq \mathcal{F}_2,\ \mathcal{F}_3/\mathcal{N}\simeq \mathcal{F}_1\}.$$

乗法的 Euler 型式の平方根 $\langle\cdot,\cdot\rangle_m$ は Riemann-Roch の定理を使って計算できる．その説明の為に, まず連接層 $\mathcal{F}$ の階数 $\mathrm{rank}(\mathcal{F})$ と次数 $\deg(\mathcal{F})$ を思い出そう．

階数や次数は高次元でも定義できるが, ここでは簡単のため X を曲線とする．どちらも加群準同型

$$\mathrm{rank}: K_0(\mathfrak{Coh}(X)) \to \mathbb{Z}, \quad \deg: K_0(\mathfrak{Coh}(X)) \to \mathbb{Z}$$

を定める． $\mathrm{rank}(\mathcal{F})$ は, 定理 3.1.3 を用いて, 局所自由層 $\mathcal{F}/\mathcal{T}$ の階数で定義する． $\deg(\mathcal{F})$ は, $\deg(\mathcal{O}_x) = \deg x := [k(x):k]$ と $\deg : K_0(\mathfrak{Coh}(X)) \to \mathbb{Z}$ が加群準同型であることとの 2 条件で特徴づけられる．

定理 3.1.3 から次の主張が従う．

補題. 曲線の上の連接層 $\mathcal{F}\neq 0$ について $\mathrm{rank}(\mathcal{F})=0 \iff \mathcal{F}$ はねじれ層．またこのとき $\deg(F)>0$.

次に直線束と因子の対応を思い出しておく．曲線 X の (Weil) 因子

$$D = \sum_i n_i x_i \quad (n_i \in \mathbb{Z},\ x_i \in X)$$

に付随する可逆層 [H77, Chap.II §6] を $\mathcal{O}_X(D)$ と書く． $\deg \mathcal{O}_X(D) = \deg D = \sum_i n_i \deg x_i$ である．

最後に X の種数 g_X の定義を思い出しておく． ω_X を標準層とし K_X を標準因子とする． $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X(K_X)$ であった．このとき

$$g_X = p_a(X) = p_g(X),$$
$$p_a(X) := \dim_k H^1(X,\mathcal{O}_X)\ (\text{算術種数}), \quad p_g(X) := \dim_k H^0(X,\omega_X)\ (\text{幾何種数}).$$

補題 3.2.2. X を体 k 上の曲線とし, $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$ を X 上の連接層とする．このとき加法的 Euler 型式

$$\chi(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) := \sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim_k \mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{Coh}(X)}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$$

は次のように計算できる．

$$\chi(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) = (1-g_X)\,\mathrm{rank}(\mathcal{F}_1)\,\mathrm{rank}(\mathcal{F}_2) + \mathrm{rank}(\mathcal{F}_1)\deg(\mathcal{F}_2) - \mathrm{rank}(\mathcal{F}_2)\deg(\mathcal{F}_1).$$

特に $k=\mathbb{F}_q$ 上では $\langle \mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\rangle_m = q^{\chi(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)/2}$.

証明. Grothendieck-Riemann-Roch の定理 [H77, Appendix A §4] から

$$\chi(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) = \int_X \mathrm{ch}(\mathcal{F}_1^\vee)\,\mathrm{ch}(\mathcal{F}_2)\mathrm{td}_X.$$

但し $\mathcal{F}^\vee := \mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{O}_X)$ は $\mathcal{F}$ の双対層． X は曲線なので, 標準因子 K_X を用いて $\mathrm{td}_X = 1 - K_X/2$. よって

$$\begin{aligned}\int_X \mathrm{ch}(\mathcal{F}_1^\vee)\,\mathrm{ch}(\mathcal{F}_2)\mathrm{td}_X &= \int_X (\mathrm{rank}(\mathcal{F}_1)-c_1(\mathcal{F}_1))(\mathrm{rank}(\mathcal{F}_2)+c_1(\mathcal{F}_2))(1-K_X/2)\\ &= \mathrm{rank}(\mathcal{F}_1)\deg(\mathcal{F}_2) - \mathrm{rank}(\mathcal{F}_2)\deg(\mathcal{F}_1) - \mathrm{rank}(\mathcal{F}_1)\,\mathrm{rank}(\mathcal{F}_2)\deg(K_X)/2\\ &= \mathrm{rank}(\mathcal{F}_1)\deg(\mathcal{F}_2) - \mathrm{rank}(\mathcal{F}_2)\deg(\mathcal{F}_1) + (1-g_X)\,\mathrm{rank}(\mathcal{F}_1)\,\mathrm{rank}(\mathcal{F}_2).\end{aligned}$$

最後で曲線上の Riemann-Roch の定理の帰結 $\deg(K_X) = 2g_X - 2$ を用いた． □

3.3 数値的 Grothendieck 群

引き続き X を有限体 $k=\mathbb{F}_q$ 上の曲線とする．Ringel-Hall 代数 $\mathrm{R}(X)$ は Grothendieck 群 $K_0(\mathfrak{Coh}(X))$ による次数付けを持っていた．しかし 1 つ注意が必要で, ($X \not\simeq \mathbb{P}^1$ なら) $K_0(X)$ は大きな群になってしまう．そこで, より小さい群である数値的 Grothendieck 群 $N(\mathfrak{Coh}(X))$ を考えよう．

定義 3.3.1. (本質的に小, k 線形かつ大域次元有限な)Abel 圏 $\mathcal{A}$ の数値的 Grothendieck 群 $N(\mathcal{A})$ とは, 加法的 Euler 型式

$$\chi(A,B) := \sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim_k \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A,B)$$

に関する根基による Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{A})$ の商のこと:

$$N(\mathcal{A}) := K_0(\mathcal{A})/\operatorname{rad}\chi, \quad \operatorname{rad}\chi := \{\alpha \in K_0(\mathfrak{Coh}(X)) \mid \chi(\alpha,\cdot)=0\}.$$

曲線 X に対して $N(X) := N(\mathfrak{Coh}(X))$ とする．

定義より $N(\mathcal{A})$ 上にも加法的 Euler 型式 χ が定義される．$\mathcal{A}=\mathfrak{Coh}(X)$ の場合は補題 3.2.2 から

補題 3.3.2. X を曲線とすると, $N(X)$ は $N(X) \ni \alpha \mapsto (\operatorname{rank}(\alpha), \deg(\alpha))$ で $\mathbb{Z}^2$ と同型.

この補題を使って以下 $N(X)$ と $\mathbb{Z}^2$ を同一視する．また $\mathcal{F} \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{Coh}(X))$ の定める $N(X)$ の元を $\overline{\mathcal{F}} = (\operatorname{rank}(\mathcal{F}), \deg(\mathcal{F}))$ と書く．

$K_0(X)$ による次数付けの議論から

命題. $\mathrm{R}(X)$ は余積が位相的な双代数であり, また $[\mathcal{F}] \mapsto \overline{\mathcal{F}}$ によって $N(X)$ 次数付けをもつ.

3.4 ねじれ層の圏の Ringel-Hall 代数

X を曲線とする．$x \in X$ に台を持つねじれ連接層の圏 $\mathcal{T}\mathrm{or}_x$ は $\mathfrak{Coh}(X)$ の部分 Abel 圏だった (補題 3.1.2) ので, 対応する Ringel-Hall 代数

$$\mathrm{R}(\mathcal{T}\mathrm{or}_x) := (\mathrm{F}(\mathcal{T}\mathrm{or}_x), *, [0], \Delta, \epsilon)$$

は $\mathrm{R}(\mathfrak{Coh}(X))$ の部分双代数である．

X は非特異だと仮定しているので, x での局所環 $\mathcal{O}_{X,x}$ は離散付置環である．その素元 t をとると, $\mathcal{T}\mathrm{or}_x$ は有限生成 $\mathcal{O}_{X,x}$ 加群であって t の作用が冪零なもののなす圏と同値である．つまり

命題. X を有限体 $k=\mathbb{F}_q$ 上の曲線とし, $x \in X$ とする．このとき $\mathrm{R}(\mathcal{T}\mathrm{or}_x)$ は §2 の Jordan 箙 Q の冪零表現圏の Ringel-Hall 代数と同型.

$$\mathrm{R}(\mathcal{T}\mathrm{or}_x) \simeq \mathrm{R}(\mathfrak{Rep}^{\mathrm{nil}}_{k(x)}\, Q).$$

但し $k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ は x での局所環の剰余体.

特に $\mathrm{R}(\mathcal{T}\mathrm{or}_x)$ での積や余積等は, §2 の計算で q を $q^{\deg x}$, $\deg x = [k(x):k]$ に置き換えたものになる.

3.5 Mumford 安定性と Ringel-Hall 代数

命題 3.2.1 から分かるように, $\mathrm{R}(X)$ は一般には非常に大きい線形空間であり, その構造定数を全て計算するのは困難である. しかし, 連接層の安定性から代数構造をある程度考察することができる. この副節の内容の詳しい説明は [HL10, §1] を参照せよ.

定義. 曲線上の連接層 $\mathcal{F}$ を考える.

(1) $\mathcal{F}$ のスロープ $\mu(\mathcal{F})$ を次で定義する.

$$\mu(\mathcal{F}) := \frac{\deg(\mathcal{F})}{\operatorname{rank}(\mathcal{F})} \in \mathbb{Q} \sqcup \{\infty\}$$

(2) $\mathcal{F}$ が半安定であるとは, 任意の部分層 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ について $\mu(\mathcal{G}) \le \mu(\mathcal{F})$ となることをいう.

(3) $\mathcal{F}$ が安定であるとは, 任意の真部分層 $0 \subsetneq \mathcal{G} \subsetneq \mathcal{F}$ に対して $\mu(\mathcal{G}) < \mu(\mathcal{F})$ となることをいう.

定義から簡単に以下の主張が示せる.

補題 3.5.1. 曲線上の連接層について

(1) 直線束 $\mathcal{L}$ は $\mu(\mathcal{L}) = \deg(\mathcal{L})$ の安定層であり, ねじれ層 $\mathcal{T}$ は $\mu(\mathcal{T}) = \infty$ の半安定層である.

(2) 連接層の短完全列

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

があれば $\min\{\mu(\mathcal{F}_1), \mu(\mathcal{F}_3)\} \le \mu(\mathcal{F}_2) \le \max\{\mu(\mathcal{F}_1), \mu(\mathcal{F}_3)\}$. またこの短完全列で $\mathcal{F}_2$ が半安定層なら $\mu(\mathcal{F}_1) \le \mu(\mathcal{F}_2) \le \mu(\mathcal{F}_3)$.

(3) $\mathcal{F}_1$ と $\mathcal{F}_2$ をそれぞれスロープ η_1, η_2 の半安定層とする. $\eta_1 > \eta_2$ なら $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{Coh}(X)}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = 0$.

半安定性は次のように連接層の自然な filtration を定める.

定理 3.5.2. 曲線上の任意の連接層 $\mathcal{F}$ に対して, 層の有限長の増大列

$$0 = \mathcal{F}_0 \subsetneq \mathcal{F}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{F}_l = \mathcal{F}$$

であって, 各 $i = 1, \ldots, l$ について $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$ は半安定かつ $\mu(\mathcal{F}_1) > \mu(\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_1) > \cdots > \mu(\mathcal{F}_l/\mathcal{F}_{l-1})$ となるものが一意に存在する. これを $\mathcal{F}$ の Harder-Narasimhan filtration (HNF) と呼ぶ.

定理 3.1.3 と補題 3.5.1 より, 連接層 $\mathcal{F}$ がねじれ部分 $\mathcal{T} \neq 0$ を持つならば, $\mathcal{F}$ の HNF の最初は $\mathcal{F}_1 = \mathcal{T}(\mathcal{F})$ となる.

安定性は次のように加群圏の Jordan-Hölder 性の類似を与える.

定理 3.5.3. $\eta \in \mathbb{Q} \sqcup \{\infty\}$ とする. 曲線上のスロープ η の任意の半安定層 $\mathcal{F}$ に対して, 層の有限長の増大列

$$0 = \mathcal{F}_0 \subsetneq \mathcal{F}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{F}_l = \mathcal{F}$$

であって, 各 $i = 1, \ldots, l$ について $\operatorname{gr}_i(\mathcal{F}) := \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$ がスロープ η の安定層であるものが存在する. これを半安定層 $\mathcal{F}$ の Jordan-Hölder filtration (JHF) と呼ぶ. 更に $\oplus_i \operatorname{gr}_i(\mathcal{F})$ は JHF によらない.

次の $\mathfrak{Coh}(X)$ の部分圏を定めるのは自然であろう.

定義 3.5.4. 曲線 X と $\eta \in \mathbb{Q} \sqcup \{\infty\}$ に対して, $\mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{\eta}(X)$ をスロープ η の半安定層のなす $\mathfrak{Coh}(X)$ の部分圏とする.

定義より $\mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{\infty} = \mathcal{T}\mathrm{or}(X)$. 補題 3.5.1 (2), (3) と定理 3.5.2 及び定理 3.5.3 を使って, 次のことが示せる.

命題 3.5.5. X を曲線とし, $\eta \in \mathbb{Q} \sqcup \{\infty\}$ とする.

(1) $\mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{\eta}(X)$ は $\mathfrak{Coh}(X)$ の Abel 部分圏. 特に拡大で閉じている.

(2) $\mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{\eta}(X)$ の任意の対象は有限長の組成列を持つ. また $\mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{\eta}(X)$ の単純対象は安定層である.

問題 3.1 $(*)$**.** 命題 3.5.5 を証明せよ.

3.6 楕円曲線上の連接層

この副節では X を楕円曲線, つまり $g_X = 1$ の曲線とし, $\mathfrak{Coh}(X)$ を考える. 定義 3.5.4 で導入したスロープ η の半安定層の圏 $\mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{\eta}(X)$ を思い出そう. 結論は以下の通り.

定理 3.6.1. 任意の $\eta, \eta' \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ に対して圏同値

$$\Phi_{\eta,\eta'} : \mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{\eta}(X) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{\eta'}(X)$$

が存在する. 特に $\mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{\eta}(X) \simeq \mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{\infty}(X) = \mathcal{T}\mathrm{or}(X)$.

$\Phi_{\eta,\eta'}$ は Fourier 向井変換を用いて構成されるので, その説明から始めよう.

g 次元 Abel 多様体 A とその双対 $\widehat{A}$ を考える. A の上の次数 d の直線束の精密モジュライ空間 (fine moduli space) である Picard スキームを $\mathrm{Pic}^d(A)$ と書くと, $\mathrm{Pic}^0(A) \simeq \widehat{A}$ である. $A \times \mathrm{Pic}^d(A)$ 上の普遍族は直線束であるが, これを Poincaré 束と呼ぶ. 特に $A \times \mathrm{Pic}^0(A) \simeq A \times \widehat{A}$ 上の Poincaré 束を $\mathcal{P}$ と書く.

A 上の連接層の有界導来圏を $D(A) := D^b(\mathfrak{Coh}(A))$ と書こう.

定義. $\mathcal{P}$ を積分核とする積分変換

$$\mathbf{S} := \Phi^{\mathcal{P}}_{A \to \widehat{A}} = \pi_{\widehat{A}*}\big(\pi_A^*(-) \otimes_{\mathcal{O}_{A\times\widehat{A}}} \mathcal{P}\big) : D(A) \longrightarrow D(\widehat{A})$$

を Fourier 向井変換と呼ぶ. 但し $\pi_A : A \times \widehat{A} \to A$ と $\pi_{\widehat{A}} : A \times \widehat{A} \to \widehat{A}$ は射影で, 定義に現れている函手 $\pi_{\widehat{A}*}$ 等は全て導来函手を表す.

$\mathbf{S}$ は圏同値である. $\mathbf{S}$ の逆変換は

$$\widehat{\mathbf{S}} := \Phi^{\mathcal{P}^\vee[g]}_{\widehat{A} \to A} = \pi_{A*}\big(\pi_{\widehat{A}}^*(-) \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{A}\times A}} \mathcal{P}^\vee[g]\big) : D(\widehat{A}) \longrightarrow D(A)$$

で与えられる. 但し $\mathcal{P}^\vee = \mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{P}, \mathcal{O}_{\widehat{A}\times A})$ は直線束 $\mathcal{P}$ の双対束.

$g = 1$ 次元の Abel 多様体, つまり楕円曲線 X の場合は, 楕円曲線の加法の零元 $x_0 \in X$ を指定すると $\mathcal{O}_X(x_0)$ が主偏極を与えるので, 同型 $X \xrightarrow{\sim} \widehat{X}$ が定まる. 以下この x_0 と同型を固定する. このとき Fourier 向井変換とその逆変換は次のように書ける.

$$\mathbf{S} = \Phi^{\mathcal{P}}_{X\to X} : D(X) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} D(X) : \widehat{\mathbf{S}} = \Phi^{\mathcal{P}^\vee[1]}_{X\to X}.$$

数値的 Grothendieck 群 (定義 3.3.1) は導来圏 $D(X)$ の Grothendieck 群 $K_0(D(X))$ からも定義できて, 結果は同じ $N(X)$ を与える. 特に補題 3.3.2 から, $D(X)$ の対象, つまり X 上の連接層の有界複体 $\mathcal{F}^\bullet$ は $N(X)$

の元を定める:

$$\overline{\mathcal{F}^\bullet} = \big(\mathrm{rank}(\mathcal{F}^\bullet), \deg(\mathcal{F}^\bullet)\big) \in N(X) \simeq \mathbb{Z}^2.$$

Fourier 向井変換 $\mathbf{S} : D(X) \to D(X)$ は数値的 Grothendieck 群の変換を引き起こす:

$$\mathbf{S} : N(X) \longrightarrow N(X), \quad \overline{\mathcal{F}^\bullet} \longmapsto \overline{\mathbf{S}(\mathcal{F}^\bullet)}. \tag{3.1}$$

Grothendieck-Riemann-Roch の定理の帰結として, 次の公式が証明できる.

補題 3.6.2. $N(X)$ への $\mathbf{S}$ の作用 (3.1) は $\mathbf{S}(r,d) = (d,-r)$ で与えられる.

この主張の帰結として, weak index theorem (WIT) を満たす連接層への $\mathbf{S} : D(X) \to D(X)$ の作用が記述できる.

定義. $\mathcal{F} \in \mathfrak{Coh}(X)$, $i \in \mathbb{Z}$ とする. $\mathcal{F}$ が S に関して WIT_i を満たすとは, ある $\mathfrak{Coh}(\widehat{X}) = \mathfrak{Coh}(X)$ の対象 $\mathcal{G}$ が存在して, $D(\widehat{X}) = D(X)$ において $\mathbf{S}(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{G}[-i]$ となることをいう. 同様に $\widehat{\mathbf{S}}$ に関する WIT_i も定義する.

系. $\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Coh}(X))$ とし, $\widehat{\mathcal{F}} := \mathbf{S}(\mathcal{F}) \in \mathrm{Ob}(D(X))$ と書く.
(1) $i = 0$ または $i = 1$ とする. $\deg(\mathcal{F}) \neq 0$ かつ $\mathcal{F}$ が WIT_i を満たすなら $\mu(\widehat{\mathcal{F}}) = -1/\mu(\mathcal{F})$.
(2) $\mathcal{F}$ が WIT_0 を満たすなら $\deg(\mathcal{F}) \geq 0$. またこのとき $\deg(\mathcal{F}) = 0 \iff \mathcal{F} = 0$.
(3) $\mathcal{F}$ が WIT_1 を満たすなら $\deg(\mathcal{F}) \leq 0$.

補題 3.6.3. X 上の直既約ベクトル束は半安定.

問題 3.2 (*)**.** HNF (定理 3.5.2) と $\mathfrak{Coh}(X)$ での Serre 双対性

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Coh}(X)}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{Coh}(X)}(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1)^*$$

(右辺の $*$ は k 線形双対の意味) を使って補題 3.6.3 を示せ.

コホモロジーの基底変換定理 [H77, Chap.Ⅲ §12] の帰結として, Fourier 向井変換による像がベクトル束になるための条件を述べておく. $x \in X$ として, Poincaré 束 $\mathcal{P}$ の $X \times \{x\}$ への制限を $\mathcal{P}_x$ と書く.

補題 3.6.4. $i = 0$ または $i = 1$ とする. $\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Coh}(X))$ について

$$\begin{aligned} &\mathcal{F} \text{ は } \mathbf{S} \text{ に関して } \mathrm{WIT}_i \text{ を満たし, かつ } \mathbf{S}(\mathcal{F}) \text{ はベクトル束} \\ \iff &\text{任意の } x \in X \text{ と } j \neq i \text{ に対し } H^j(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{P}_x) = 0. \end{aligned}$$

以上の補題を使うと次の命題を示すことができる.

命題 3.6.5. $\mathcal{F}$ を X 上の半安定層で $\overline{\mathcal{F}} = (r,d)$ とする.
(1) $d > 0$ なら $\mathcal{F}$ は $\mathbf{S}$ と $\widehat{\mathbf{S}}$ 両方に関して WIT_0 を満たし, $\mathbf{S}(\mathcal{F})$ と $\widehat{\mathbf{S}}(\mathcal{F})$ は半安定なベクトル束である.
(2) $d < 0$ なら $\mathcal{F}$ は $\mathbf{S}$ と $\widehat{\mathbf{S}}$ 両方に関して WIT_1 を満たし, $\mathbf{S}(\mathcal{F})$ と $\widehat{\mathbf{S}}(\mathcal{F})$ は半安定なベクトル束である.
(3) $d \neq 0$ なら $\mathcal{F}$ はベクトル束である.
(4) $d = 0$ かつ $\mathcal{F}$ が安定なら $r = 1$ で $\mathcal{F}$ は直線束.
(5) $d = 0$ かつ $\mathcal{F}$ が半安定なら, $\mathcal{F}$ は WIT_1 をみたし $\widehat{\mathcal{F}} := \mathbf{S}(\mathcal{F})$ は摩天楼層.

定理 3.6.1 の導出の説明のため, 新たに $\mathfrak{Coh}(X)$ の部分圏を導入する.

定義. $(r,d) \in N(X)$ に対し, $\overline{\mathcal{F}} = (r,d)$ となる半安定層 $\mathcal{F}$ のなす $\mathfrak{Coh}(X)$ の部分圏を $\mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{(r,d)}(X)$ と書く.

命題 3.6.5 を言い換えると

命題 3.6.6. Fourier 向井変換 $\mathbf{S}$ は以下の圏同値を定める.

$$\mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{(r,d)}(X) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{(d,-r)}(X) \quad (d > 0), \qquad \mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{(r,0)}(X) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{(0,r)}(X).$$

次にもう一つ圏同値を導入する.

定義. $x_0 \in X$ を最初に固定した楕円曲線 X の加法に関する零元とし, 次数 1 の直線束 $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(x_0)$ を考える. $\mathcal{L}$ とのテンソル積函手を $\mathbf{T}$ と書く:

$$\mathbf{T} := \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} (-) : D(X) \xrightarrow{\sim} D(X).$$

$\mathbf{S}$ の $N(X)$ への作用 (補題 3.6.2) と同様に, $\mathbf{T}$ の $N(X)$ への作用は

$$\mathbf{T}(r,d) = (r, r+d)$$

と書ける. また $\mathbf{T}$ は明らかに連接層を連接層に移し, また安定性を保つので

命題 3.6.7. テンソル積函手 $\mathbf{T}$ は次の圏同値を定める.

$$\mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{(r,d)}(X) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{(r,r+d)}(X).$$

定理 3.6.1 は命題 3.6.6 と命題 3.6.7 の帰結である.

問題 3.3 $(*)$**.** 最後のステップを確認せよ. つまり命題 3.6.6 と命題 3.6.7 から定理 3.6.1 を導け.

参考文献

[BBH09] C. Bartocci, U. Bruzzo, D. Hernández Ruipérez, *Fourier–Mukai and Nahm Transforms in Geometry and Mathematical Physics*, Progress in Mathematics **276**, Birkhäuser, 2009.

[H77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM **52**, Springer, 1977.

[HL10] D. Huybrechts, M. Lehn, *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Cambridge University Press (2010).

[S06] O. Schiffmann, *Lectures on Hall algebras*, in *Geometric methods in representation theory. II*, pp. 1–141, Sémin. Congr., 24-II, Soc. Math. France, Paris (2012); arXiv:math/0611617v2.

以上です.

東京大学集中講義　12 月 06 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

4　楕円曲線の Ringel-Hall 代数

今日はまず一般の曲線 X の Ringel-Hall 代数 $\mathrm{R}(X)$ について, spherical Hall 代数と呼ばれる部分双代数 $\mathrm{S}(X)$ を導入する．また Hopf 内積付き双代数の Drinfeld ダブルの概念を復習し, $\mathrm{S}(X)$ のダブル $\mathrm{DS}(X)$ を導入する．最後に Burban-Schiffmann が [BS12] で明らかにした, X が楕円曲線の場合の $\mathrm{DS}(X)$ の構造を紹介する.

昨日に引き続き曲線とは非特異射影代数曲線のこととする．X を有限体 $k=\mathbb{F}_q$ 上の曲線とする.

4.1　spherical Hall 代数

$\mathfrak{Coh}(X)$ の Ringel-Hall 代数

$$\mathrm{R}(X) := \mathrm{R}(\mathfrak{Coh}(X)) = (\mathrm{F}(\mathfrak{Coh}(X)), *, [0], \Delta, \epsilon)$$

を思い出そう．$\mathrm{R}(X)$ は余積が位相的な双代数である．また §3.4 で導入した数値的 Grothendieck 群 $N(X)$ による次数付けをもつ．そして Hopf 内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を持つ.

$\mathbb{C}$ 線形空間としては

$$\mathrm{F}(X) := \mathrm{F}(\mathfrak{Coh}(X)) \simeq \bigoplus_{\mathcal{F}\in \mathrm{Iso}(\mathfrak{Coh}(X))} \mathbb{C}[\mathcal{F}]$$

であった．$\mathrm{F}(X)$ の $N(X)$ 次数付けは, 同型 $N(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^2$, $\alpha \longmapsto (\mathrm{rank}(\alpha), \deg(\alpha))$ の下で, $[\mathcal{F}] \mapsto \overline{\mathcal{F}} = (\mathrm{rank}(\mathcal{F}), \deg(\mathcal{F}))$ で与えられた.

定義. $\alpha \in N(X) = \mathbb{Z}^2$ に対して $\mathrm{F}(X)$ の部分線形空間 $\mathrm{F}(X)[\alpha]$ を次で定める.

$$\mathrm{F}(X)[\alpha] := \bigoplus_{\overline{\mathcal{F}}=\alpha} \mathbb{C}[\mathcal{F}].$$

代数構造は

$$[\mathcal{F}_1] * [\mathcal{F}_2] = \sum_{[\mathcal{F}_3]\in \mathrm{Iso}(\mathfrak{Coh}(X))} \langle \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\rangle_m \, g^{\mathcal{F}_3}_{\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2} [\mathcal{F}_3].$$

但し

$$g^{\mathcal{F}_3}_{\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2} := \left|\mathcal{G}^{\mathcal{F}_3}_{\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2}\right|, \quad \mathcal{G}^{\mathcal{F}_3}_{\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2} := \{\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_3 \mid \mathcal{N} \simeq \mathcal{F}_3,\ \mathcal{F}_1/\mathcal{E} \simeq \mathcal{F}_2\},$$
$$\langle \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\rangle_m = q^{\chi(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)/2}, \quad \chi(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) = \mathrm{rank}(\mathcal{F}_1)\deg(\mathcal{F}_2) - \mathrm{rank}(\mathcal{F}_2)\deg(\mathcal{F}_1) + (1-g_X)\,\mathrm{rank}(\mathcal{F}_1)\,\mathrm{rank}(\mathcal{F}_2).$$

余積と余単位射は

$$\Delta([\mathcal{F}]) := \sum_{[\mathcal{F}_1],[\mathcal{F}_2]} \langle \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\rangle_m a_{\mathcal{F}}^{-1} a_{\mathcal{F}_1} a_{\mathcal{F}_2} g^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2} [\mathcal{F}_1] \otimes [\mathcal{F}_2], \quad \epsilon([\mathcal{F}]) = \delta_{\mathcal{F},0}.$$

[*1] 2018/12/06 版, ver. 0.3.

余積は位相的なものだが, 次に述べるように $N(X)$ 次数付けで斉次部分を見れば代数的である.

補題 4.1.1. $\alpha,\beta \in N(X)$ に対して

$$\Delta_{\alpha,\beta} : \mathrm{F}(X)[\alpha+\beta] \longrightarrow \mathrm{F}(X)[\alpha] \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{F}(X)[\beta]$$

を $\Delta : \mathrm{F}(X) \to \mathrm{F}(X) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{F}(X)$ と射影 $\mathrm{F}(X) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{F}(X) \to \mathrm{F}(X)[\alpha] \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{F}(X)[\beta]$ の合成とする. このとき.

$$\Delta_{\alpha,\beta}\bigl(\mathrm{F}(X)[\alpha+\beta]\bigr) \subset \mathrm{F}(X)[\alpha] \otimes \mathrm{F}(X)[\beta].$$

次に spherical Hall 代数と呼ばれる $\mathrm{R}(X)$ の部分代数を導入する. そのために次のような $N(X) \simeq \mathbb{Z}^2$ の分解を用意しておく.

$$N(X) = N_+(X) \cup N_-(X), \quad N_\pm(X) := \{(r,d) \mid \pm r > 0\} \sqcup \{(0,d) \mid \pm d \geq 0\}.$$

すると $N_+(X) = \{\overline{\mathcal{F}} \mid \mathcal{F} \in \mathfrak{Coh}(X)\}$ となる.

定義. (1) $(r,d) \in N_+(X)$ に対して, $\overline{\mathcal{F}} = (r,d)$ となる半安定層 $\mathcal{F}$ のなす $\mathfrak{Coh}(X)$ の部分圏を $\mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{(r,d)}(X)$ と書く. そして $1^{\mathrm{ss}}_{(r,d)} \in \mathrm{R}(X)$ を以下のように定義する.

$$1^{\mathrm{ss}}_{(r,d)} := \sum_{[\mathcal{F}] \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{(r,d)}(X))} [\mathcal{F}].$$

(2) $\{1^{\mathrm{ss}}_{(r,d)} \mid (r,d) \in N_+(X),\ r \leq 1\}$ で生成される $\mathrm{R}(X)$ の部分代数を $\mathrm{S}(X)$ と表し, X の spherical Hall 代数と呼ぶ.

階数 1 以下の連接層の部分層は簡単に分類できる. それを使うと

命題 4.1.2. $\mathrm{S}(X)$ の生成元の余積は

$$\Delta(1^{\mathrm{ss}}_{(0,d)}) = \sum_{e=0}^{d} 1^{\mathrm{ss}}_{(0,e)} \otimes 1^{\mathrm{ss}}_{(0,d-e)}, \quad \Delta(1^{\mathrm{ss}}_{(1,d)}) = 1^{\mathrm{ss}}_{(1,d)} \otimes 1 + \sum_{e \geq 0} \theta_e \otimes 1^{\mathrm{ss}}_{(1,d-e)}.$$

但し $\theta_e \in \mathrm{S}(X)$ は, $[r]_v := (v^{r/2} - v^{-r/2})/(v^{1/2} - v^{-1/2})$ として

$$\sum_{e \geq 0} \theta_e z^e = \exp\Bigl((v - v^{-1}) \sum_{r \geq 1} T_{(0,r)} z^r\Bigr), \quad \exp\Bigl(\sum_{r \geq 1} T_{(0,r)} z^r / [r]_v\Bigr) = \sum_{d \geq 0} 1^{\mathrm{ss}}_{(0,d)} z^d$$

で定義した. 特に $\mathrm{S}(X)$ は $\mathrm{R}(X)$ の部分双代数.

$\mathrm{S}(X)$ の構造を Kapranov が [K97] で調べている. その説明のために, 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の曲線 X のゼータ関数を思い出そう:

$$\zeta_X(z) := \exp\Bigl(\sum_{r \geq 1} \frac{1}{r} \left|X(\mathbb{F}_{q^r})\right| z^r\Bigr).$$

Weil 予想より

$$\zeta_X(z) = \frac{\prod_{i=1}^{2g}(1 - \alpha_i z)}{(1-z)(1-qz)}, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}, \quad |\alpha_i| = q^{1/2}, \quad \alpha_i \alpha_{2g+1-i} = q.$$

また $\bigl|\mathrm{Pic}^0(X)\bigr| = \prod_i (1 - \alpha_i)$ である.

定理 4.1.3 (Kapranov [K97, Theorem 3.3])**.** $\mathrm{S}(X)[[z^{\pm}]]$ の元

$$x(z) := \sum_{d\in\mathbb{Z}} 1^{\mathrm{ss}}_{(1,d)} z^d, \quad \psi(z) := \sum_{d\in\mathbb{N}} 1^{\mathrm{ss}}_{(0,d)} z^d$$

を考える．このとき $\mathrm{S}(X)[[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]]$ で以下の等式が成立する．

$$\begin{aligned}\zeta_X(w/z)x(z) * x(w) &= \zeta_X(z/w)x(w) * x(z),\\ \psi(z) * x(w) &= \zeta_X(w/q^{1/2}z)x(z) * \psi(w),\\ \psi(z) * \psi(w) &= \psi(w) * \psi(z).\end{aligned}$$

4.2 Ringel-Hall 双代数の Drinfeld ダブル

Drinfeld ダブルの定義を思い出そう．以下では Sweedler の記号を用いる:

$$\Delta(a) = \sum a_1 \otimes a_2, \quad \Delta^2(a) = \sum a_1 \otimes a_2 \otimes a_3.$$

定義. $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle) = (H, \cdot, 1, \Delta, \epsilon, S, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を Hopf pairing を持つ $\mathbb{C}$ 上の Hopf 代数とする．その Drinfeld ダブル DH とは線形空間

$$H \otimes_{\mathbb{C}} H$$

に次のようにして定まる Hopf 代数 $(DH, *, 1\otimes 1, \Delta_{DH}, \epsilon\otimes\epsilon, S_{DH})$ のことである．積 $*$ は

$$\begin{aligned}&(a\otimes 1) * (a'\otimes 1) := (a\cdot a')\otimes 1, \quad (1\otimes b) * (1\otimes b') := 1\otimes (b\cdot b'),\\ &(a\otimes 1) * (1\otimes b) := a\otimes b,\\ &(1\otimes b) * (a\otimes 1) := \sum \langle a_1, S(b_1)\rangle a_2 \otimes b_2 \langle a_3, b_3\rangle. \qquad (4.1)\end{aligned}$$

余積構造 Δ_{DH} と対蹠射 S_{DH} は

$$\Delta_{DH}(a\otimes b) := \sum (a_1\otimes b_1)\otimes(a_2\otimes b_2), \quad S_{DH}(a\otimes b) := (1\otimes S(b)) * (S(a)\otimes 1).$$

これで確かに Hopf 代数が定まることの証明は [J95, §3.2] を参照せよ．

Drinfeld ダブルのダブルの構成で非自明なのは積の定義の (4.1) であるが、この部分は対蹠射 S を使わずに言い換えることができる．

命題 4.2.1. DH の代数構造の定義において、(4.1) と次の関係式は同値.

$$R(a,b): \quad \sum (1\otimes a_1) * (b_2\otimes 1)\,\langle a_2, b_1\rangle = \sum (b_1\otimes 1) * (1\otimes a_2)\,\langle a_1, b_2\rangle. \qquad (4.2)$$

特に Hopf pairing 付き双代数 $(B, \cdot, 1, \Delta, \epsilon, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対して双代数 $(DB, *, 1\otimes 1, \Delta_{DB}, \epsilon\otimes\epsilon)$ が構成できる．

命題 4.2.1 の構成を $(\mathrm{R}(X), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ に適用したい．$\mathrm{R}(X)$ の余積は位相的なものなので注意が必要だが, 補題 4.1.1 から, 関係式 (4.2) に現れている和は有限和であることが分かり, Drinfeld ダブルは well-defined である．

定義. $\mathrm{R}(X)$ の Drinfeld ダブルを

$$\mathrm{DR}(X) = (\mathrm{F}(X)\otimes\mathrm{F}(X), *, 1\otimes 1, \Delta, \epsilon\otimes\epsilon)$$

と書く．また $\mathrm{F}(X)\otimes\mathrm{F}(X)$ の元に関して略記号 $a^+ := a\otimes 1$, $a^- := 1\otimes a$ を用いる．

$\mathrm{R}(X)$ の Drinfeld ダブルを考える動機を 1 つ紹介する．Abel 圏 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ に対し, 完全函手 $F : D^b(\mathcal{A}_1) \to D^b(\mathcal{A}_2)$ が友好的であるとは, ある $n \in \mathbb{Z}$ があって $F(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{A}_2[-1] \oplus \mathcal{A}_2[-n-1]$ となることをいう．

定理 (Cramer [C10])**.** $\mathcal{A}$ を finitary な遺伝的 Abel 圏であって, 有界導来圏 $D^b(\mathcal{A})$ の自己同値が全て友好的だと仮定する．このとき Ringel-Hall 代数 $\mathrm{R}(\mathcal{A})$ の Drinfeld ダブルに自己同値群が代数同型として作用する．

4.3 spherical Hall 代数の Drinfeld ダブル

曲線 X の spherical Hall 代数 $\mathrm{S}(X)$ の Drinfeld ダブルを考えよう．

定義. (1) $(r,d) \in N(X)$ に対して $1^{\mathrm{ss}}_{(r,d)} \in \mathrm{DR}(X)$ を以下のように定義する．$(r,d) \in N_+(X)$ に対しては

$$1^{\mathrm{ss}}_{(r,d)} := \sum_{\mathcal{F} \in \mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{(r,d)}(X)} [\mathcal{F}]^+,$$

また $(r,d) \in N_-(X)$ に対しては, $-(r,d) \in N_+(X)$ に注意して

$$1^{\mathrm{ss}}_{(r,d)} := \sum_{\mathcal{F} \in \mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{-(r,d)}(X)} [\mathcal{F}]^-.$$

(2) $\{1^{\mathrm{ss}}_{(r,d)} \mid (r,d) \in N(X)\}$ で生成される $\mathrm{DR}(X)$ の部分代数を $\mathrm{DS}(X)$ と表す．

命題 4.3.1. $\mathrm{DS}(X)$ は $\mathrm{S}(X)$ の Drinfeld ダブルであり, 特に $\mathrm{DR}(X)$ の部分双代数.

この命題は X が楕円曲線の場合に Burban-Schiffmann の [BS12, Proposition 4.5] で示されているが、同じ議論が任意の曲線について適用できる．

4.4 楕円曲線の場合の構造

X が楕円曲線の場合の $\mathrm{DS}(X)$ の構造は Burban と Schiffmann の論文 [BS12] で明らかになった．これを説明する．以下 X は有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の楕円曲線とする．$\zeta_X(z)$ を

$$\zeta_X(z) = \frac{(1-q_1 z)(1-q_2 z)}{(1-z)(1-qz)}$$

と書く．つまり $|X(q^r)| = q^r + 1 - q_1^r - q_2^r$.

$\eta \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ と $x \in X$ に対し, §3.6 の圏同値

$$\mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{\eta}(X) \xrightarrow{\Phi_{\eta,\infty}} \mathcal{T}\mathrm{or}(X) \xrightarrow{\sim} \coprod_{x \in X} \mathcal{T}\mathrm{or}_x \xrightarrow{\sim} \coprod_{x \in X} \mathfrak{Rep}^{\mathrm{nil}}_{k(x)} Q$$

の誘導する Ringel-Hall 代数の単射準同型を次のように表す.

$$\phi_{\eta,x} : \mathrm{R}(\mathfrak{Rep}^{\mathrm{nil}}_{k(x)} Q) \longrightarrow \mathrm{R}(X).$$

さらに $r \in \mathbb{Z}$ に対し $[r]_v := (v^{r/2} - v^{-r/2})/(v^{1/2} - v^{-1/2})$.

定義. $r \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\eta \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, $x \in X$ に対して $T_{\eta,r,x} \in \mathrm{R}(X)$ を

$$T_{\eta,r,x} := \begin{cases} [r]_{q^{1/2}} \frac{\deg(x)}{r} \phi_{\eta,x}(p_{r/\deg(x)}) & \deg(x) \mid r \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定める. ここで $p_n \in \mathrm{R}(\mathfrak{Rep}^{\mathrm{nil}}_{k(x)} Q)$ は §3 で定めたもの. また $T_{\eta,r} \in \mathrm{R}(X)$ を次で定める.

$$T_{\eta,r} := \sum_{x\in X} T_{\eta,r,x}$$

最後に $(r,d) \in N(X) = \mathbb{Z}^2$ に対して $T_{(r,d)} \in \mathrm{DR}(X)$ を以下で定める.

$$T_{(r,d)} := \begin{cases} T^+_{q/p,l} = T_{q/p,l} \otimes 1 & (r,d) = (lp, lq) \in N_+(X),\ \gcd(p,q) = 1,\ p \geq 1\ (l \geq 1) \\ T^-_{q/p,l} = 1 \otimes T_{q/p,l} & (r,d) = (-lp,-lq) \in N_-(X),\ \gcd(p,q) = 1,\ p \geq 1\ (l \geq 1) \\ T^{\pm}_{\infty,\pm d} & r = 0,\ \pm d > 0 \\ 1 & r = d = 0 \end{cases}.$$

定理 4.4.1 ([BS12])**.** (1) $\mathbf{x} = (r,d) \in N(X)$ なら $T_{\mathbf{x}} \in \mathrm{DS}(X)$ であり, $\{T_{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in N(X)\}$ は $\mathrm{DS}(X)$ の (代数としての) 生成元.

(2) 以下のものは $\{T_{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in N(X)\}$ に関する関係式の組で極小のもの.

(i) $\mathbb{Q}\mathbf{x} = \mathbb{Q}\mathbf{y}$ なら

$$[T_{\mathbf{x}}, T_{\mathbf{y}}] = 0.$$

(ii) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in N(X) \setminus \{(0,0)\}$ は $\gcd(\mathbf{x}) = 1$ かつ $(0,0), \mathbf{x}, \mathbf{y}$ の作る $N(X) = \mathbb{Z}^2$ の三角形の内部に格子点がないものとする. このとき

$$[T_{\mathbf{y}}, T_{\mathbf{y}}] = \varepsilon_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \frac{c_{\gcd(\mathbf{y})}}{q^{-1/2} - q^{1/2}} \theta_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}.$$

ただし $\varepsilon_{\mathbf{x},\mathbf{y}} := \operatorname{sign}\det(\mathbf{x},\mathbf{y})$ および $d \in \mathbb{Z}$ に対して

$$c_d := \frac{[d]_{q^{1/2}} \left|X(\mathbb{F}_{q^d})\right|}{d q^{d/2}}.$$

また $\theta_{\mathbf{x}} \in \mathrm{DS}(X)$ は次の母函数で定義する: $\gcd(\mathbf{x}_0) = 1$ なる $\mathbf{x}_0 \in N(X)$ に対して

$$\sum_{l\geq 0} \theta_{l\mathbf{x}_0} z^i = \exp\Big((q^{1/2} - q^{-1/2}) \sum_{r\geq 1} T_{r\mathbf{x}_0} z^r\Big).$$

注意. 楕円 Hall 代数とは $\mathrm{DS}(X)$ の $\mathbb{C}[N(X)]$ による拡大を, 更に中心拡大したものである ([SV13, §1.1] で $\widehat{\mathcal{E}}$ と書かれているもの). それは量子トロイダル $\mathfrak{gl}_1$ 代数 (またの名を Ding・庵原・三木代数) と同型であることが知られている.

参考文献

[BS12] I. Burban, O. Schiffmann, *On the Hall algebra of elliptic curve I*, Duke Math. J. **161**, no. 7 (2012), 1171–1231.

[C10] T. Cramer, *Double Hall algebras and derived equivalences*, Adv. Math. **224** (2010), 1097–1120.

[J95] A. Joseph, *Quantum groups and their primitive ideals*, Ergeb. Math. Grenzgeb. 3 **29**, 1995 .

[K97] M. Kapranov, *Eisenstein series and quantum affine algebras*, J. Math. Sci. (New York) **84**, no. 5, 1311–1360, (1997).

[SV13] O. Schiffmann, E. Vasserot *The elliptic Hall algebra and the K-theory of the Hilbert scheme of* $\mathbb{A}^2$, Duke Math. J. **162**, no. 2 (2013), 279–366.

以上です.

東京大学集中講義　12 月 07 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

5 Macdonald 対称函数の再構成

昨日導入した楕円曲線 X に付随した spherical Hall 代数 $\mathrm{S}(X)$ を使って Macdonald 対称函数の理論を展開する．この話題は Schiffmann-Vasserot が [SV11] で発見したものであるが, 講義では, 彼らの議論とは違い, 対称函数の理論を仮定しないで話を進める．

引き続き曲線とは非特異射影代数曲線のこととする．$k = \mathbb{F}_q$ を有限体とし, $q = v^{-2}$ とする．

5.1 Eisenstein 級数

[K97] に従って曲線の Ringel-Hall 代数における Eisenstein 級数を導入する．X を $k = \mathbb{F}_q$ 上の曲線とする．数値的 Grothendieck 群 $N(X) \simeq \mathbb{Z}^2$ の分解

$$N(X) = N_+(X) \cup N_-(X), \quad N_\pm(X) := \{(r,d) \in N(X) \mid \pm r > 0\} \cup \{(0,d) \in N(X) \mid \pm d \geq 0\}$$

を思い出しておく．$(r,d) \in N_+(X)$ に対し, $\mathfrak{Coh}_{(r,d)}(X)$ を $\overline{\mathcal{F}} = (r,d)$ となる連接層 $\mathcal{F} \in \mathfrak{Coh}(X)$ のなす部分圏とする．また $\mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{(r,d)}(X)$ を半安定層のなす $\mathfrak{Coh}_{(r,d)}(X)$ の部分圏とする．

$\mathrm{R}(X) = \mathrm{R}(\mathfrak{Coh}(X))$ を X の Ringel-Hall 代数とし, $\mathrm{S}(X) \subset \mathrm{R}(X)$ を spherical Hall 代数とする．$\mathrm{S}(X)$ は $\{1^{\mathrm{ss}}_{(r,d)} \mid (r,d) \in N_+(X)\}$ で生成される部分代数だった．但し

$$1^{\mathrm{ss}}_{(r,d)} := \sum_{\mathcal{F} \in \mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{(r,d)}(X)} [\mathcal{F}].$$

今日は, $1^{\mathrm{ss}}_{(r,d)}$ のように半安定層に制限せずに定義した

$$1_{(r,d)} := \sum_{\mathcal{F} \in \mathfrak{Coh}_{(r,d)}(X)} [\mathcal{F}]$$

も考える．ねじれ層の対応する部分 $1_{(0,d)}$ については, §3 の議論から $1_{(0,d)} = 1^{\mathrm{ss}}_{(0,d)}$ となる．

$1_{(r,d)}$ は $\mathrm{S}(X)$ の元ではない．そこで $\mathrm{S}(X)$ の完備化を考える．HNF の一意存在定理から

補題. $*$ 積によって次の線形空間の同型が得られる:

$$\mathrm{F}(X) = \overrightarrow{\bigotimes_{\eta \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}}} \mathrm{F}^{\mathrm{ss}}_\eta, \quad \mathrm{F}^{\mathrm{ss}}_\eta := \bigoplus_{\mathcal{F}: \text{半安定}, \ \mu(\mathcal{F}) = \eta} \mathbb{C}[\mathcal{F}].$$

但し $\overrightarrow{\otimes}_\eta$ は η が小さい順にテンソル積を取ることを意味する．

[*1] 2018/12/07 版, ver. 0.2.

そこで, $\alpha \in N_+(X)$ に対し $\mathrm{F}[\alpha] := \oplus_{\overline{\mathcal{F}}=\alpha}\mathbb{C}[\mathcal{F}]$, $\mathrm{F}^{\mathrm{ss}}_\eta[\alpha] := \mathrm{F}^{\mathrm{ss}}_\eta \cap \mathrm{F}[\alpha]$ とすれば,

$$\mathrm{F}[(r,d)] = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \bigoplus_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in N_+(X) \\ \mu(\alpha_1)<\cdots<\mu(\alpha_n),\ \sum_i \alpha_i=(r,d)}} \mathrm{F}^{\mathrm{ss}}_{\mu(\alpha_1)}[\alpha_1]\otimes\cdots\otimes \mathrm{F}^{\mathrm{ss}}_{\mu(\alpha_n)}[\alpha_n].$$

定義. $\eta \in \mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ に対して $\mathrm{S}_\eta \subset \mathrm{S}(X)$ を $\{1^{\mathrm{ss}}_{(r,d)} \mid (r,d)\in N_+(X),\ d/r=\eta\}$ が生成する部分代数とする.

また $\alpha \in N_+(X)$ に対して

$$\mathrm{S}[\alpha] := \mathrm{S}(X)\cap \mathrm{F}[\alpha], \quad \mathrm{S}^{\mathrm{ss}}_\eta[\alpha] := \mathrm{S}[\alpha]\cap \mathrm{F}^{\mathrm{ss}}_\eta.$$

最後に $(r,d)\in N_+(X)$ に対して

$$\widehat{\mathrm{S}}[(r,d)] := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \prod_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in N_+(X) \\ \mu(\alpha_1)<\cdots<\mu(\alpha_n),\ \sum_i \alpha_i=(r,d)}} \mathrm{S}^{\mathrm{ss}}_{\mu(\alpha_1)}[\alpha_1]\otimes\cdots\otimes \mathrm{S}^{\mathrm{ss}}_{\mu(\alpha_n)}[\alpha_n]$$

と定め, $\widehat{\mathrm{S}}(X) := \oplus_{\alpha\in N_+(X)}\widehat{\mathrm{S}}[\alpha]$ とする.

証明はしないが, 念のため述べておくと

補題 5.1.1. $\mathrm{S}(X)$ の双代数構造は $\widehat{\mathrm{S}}(X)$ に延長する.

$1_{(r,d)}$ に話を戻そう. 以下 $v = q^{-1/2} = |k|^{-1/2}$ を使う.

命題 5.1.2. $1_{(1,d)} \in \widehat{\mathrm{S}}(X)$. より正確には

$$1_{(1,d)} = \sum_{e\geq 0} v^e 1^{\mathrm{ss}}_{(1,d-e)} * 1^{\mathrm{ss}}_{(0,e)}$$

証明. $\overline{\mathcal{F}} = (1,d)$ なら §3.1 の分解 $\mathcal{F} = \mathcal{L}\oplus\mathcal{T}$ で $\mathcal{L}$ は直線束, $\mathcal{T}$ はねじれ連接層となる. $\deg(\mathcal{T}) := e$ とすれば $e\in\mathbb{N}$ で, また $\deg(\mathcal{L}) = d-e$.

このとき

$$[\mathcal{F}] = \langle \mathcal{L},\mathcal{T}\rangle^{-1}[\mathcal{L}]*[\mathcal{T}] = v^e[\mathcal{L}]*[\mathcal{T}].$$

となる. 実際, Serre 双対性 $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{L},\mathcal{T}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{T},\mathcal{L}\otimes\omega_X)^*$ と $\mu(\mathcal{T}) = \infty > \mu(\mathcal{L}\otimes\omega_X)$ および $\mathcal{T}$ と $\mathcal{L}$ の半安定性から $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{L},\mathcal{T}) = 0$. あとは §3.2 補題 3.2.2 の計算 $\chi((1,d-e),(0,e)) = e$ を使えばよい. □

一般の $1_{(r,d)}$ については

命題 5.1.3. 任意の $r\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して $1_{(r,d)}\in\widehat{\mathrm{S}}(X)$. 特に $g_X \leq 1$ なら

$$1_{(r,d)} = 1^{\mathrm{ss}}_{(r,d)} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in N_+(X) \\ \mu(\alpha_1)<\cdots<\mu(\alpha_n),\ \sum_i \alpha_i=(r,d)}} v^{\sum_{i<j}\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle_m} 1^{\mathrm{ss}}_{\alpha_1}*\cdots*1^{\mathrm{ss}}_{\alpha_n}.$$

この命題の前半の証明は複雑なので略す. 後半の主張は次の補題から従う.

補題. $g_X \leq 1$ とする. $\mathcal{F}\in\mathfrak{Coh}(X)$ が

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{F}_l, \quad \mathcal{F}_i \in \mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{\eta_i}(X), \quad \eta_1<\cdots<\eta_l$$

となっているなら

$$[\mathcal{F}] = \prod_{i<j}\langle\mathcal{F}_i,\mathcal{F}_j\rangle_m^{-1}\cdot[\mathcal{F}_1]*\cdots*[\mathcal{F}_l]$$

証明. Serre 双対性 $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_1\otimes\omega_X)^*$ に注意する. $\mathrm{rank}(\mathcal{F}_1\otimes\omega_X) = \mathrm{rank}(\mathcal{F}_1)$ と $\deg(\mathcal{F}_1\otimes\omega_X) = \deg(\mathcal{F}_1)+\mathrm{rank}(\mathcal{F}_1)\deg\omega_X = \deg(\mathcal{F}_1)+\mathrm{rank}(\mathcal{F}_1)\cdot(2g_X-2)$ から $\mu(\mathcal{F}_1\otimes\omega_X) = \mu(\mathcal{F}_1)+2g_X-2 < \mu(\mathcal{F}_2)$. すると半安定性から $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_1\otimes\omega_X) = 0$. よって $[\mathcal{F}_1]*[\mathcal{F}_2] = \langle\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\rangle_m[\mathcal{F}_1\oplus\mathcal{F}_2]$. これを繰り返し使って結論を得る. □

定義. $r\in\mathbb{N}$ に対して $E_r(z)\in\widehat{\mathrm{S}}(X)[[z^{\pm1}]]$ を次で定義する. $r=0$ に対しては

$$E_0(z) := \sum_{d\geq 0} 1_{(0,d)} v^{-d} z^d,$$

$r>0$ に対しては

$$E_r(z) := \sum_{d\in\mathbb{Z}} 1_{(r,d)} v^{(r-1)d} z^d.$$

また $r_1,\dots,r_n\in\mathbb{N}$ に対して $\widehat{\mathrm{S}}(X)[[z_1^{\pm1},\dots,z_n^{\pm1}]]$ の元を次のように定義する.

$$E_{r_1,\dots,r_n}(z_1,\dots,z_n) := E_{r_1}(z_1)*\cdots*E_{r_n}(z_n).$$

これを Eisenstein 級数と呼ぶ.

§1.1 の補題 1.1.5 から, $r_1,\dots,r_n\in\mathbb{N}$ に対して, $r:=\sum_{i=1}^n r_i$ とすると

$$E_{r_1,\dots,r_n}(z_1,\dots,z_n) = \sum_{d\in\mathbb{Z}} v^{-(r+1)d} \sum_{\overline{\mathcal{F}}=(r,d)} [\mathcal{F}]\cdot \sum_{\substack{\mathcal{F}=\mathcal{F}_1\supset\cdots\supset\mathcal{F}_n\supset\mathcal{F}_{n+1}=0 \\ \mathrm{rank}(\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i+1})=r_i}} v^{2\sum_{i=1}^n r_i\deg(\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_{i+1})} z_1^{\deg(\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_2)}\cdots z_n^{\deg(\mathcal{F}_n)}. \tag{5.1}$$

また, §4.4 の記号を思いだすと $E_0(z)=\psi(z/v)$, $E_1(z)=x(z)$. よってこれらの交換関係式は X のゼータ関数

$$\zeta_X(z) = \frac{(1-\alpha_1 z)\cdots(1-\alpha_{2g}z)}{(1-z)(1-qz)}$$

を使って書ける.

次の定理は直接は使わないが, Eisenstein 級数に関する基本的な結果である. Harder の結果 [H74, §1.6] を Schiffmann-Vasserot が [SV11, §6] で整理した形で述べる.

定理. (1) $E_{r_1,\dots,r_n}(z_1,\dots,z_n)$ は $|z_1|\ll\cdots\ll|z_n|$ で $\widehat{\mathrm{S}}(X)(z_1,\dots,z_n)$ の元に収束する. さらにその極は

$$z_i/z_j\in\{1,q^{-1},\dots,q^{-r}\},\quad r:=\sum_i r_i$$

にしかなくて, 高々 1 位.

(2) $E_{1,\dots,1}(z_1,\dots,z_n)$ は z_i 達に関する対称多項式.

5.2 Eisenstein 級数と Macdonald 対称函数

X を $k=\mathbb{F}_q$ 上の楕円曲線とする.

§4 の議論から, 任意の $\eta,\eta'\in\mathbb{Q}\sqcup\{\infty\}$ に対して双代数同型

$$\Phi_{\eta,\eta'}:\mathrm{S}_\eta(X)\xrightarrow{\sim}\mathrm{S}_{\eta'}(X)$$

がある. 特に $\mathrm{S}_\eta(X)\simeq\mathrm{S}_\infty(X)$. 以下では $\mathrm{S}_0(X)$ に注目する. これは次数 0 の半安定層に対応した元 $1^{\mathrm{ss}}_{(r,0)}$ から生成されるものである. 上の同型から

補題. 環として $\mathrm{S}_0(X) = \mathbb{C}[1^{\mathrm{ss}}_{(1,0)}, 1^{\mathrm{ss}}_{(2,0)}, \ldots]$.

楕円曲線 X のゼータ関数を

$$\zeta_X(z) = \frac{(1-q_1z)(1-q_2z)}{(1-z)(1-qz)}$$

と書く. 特に $q_1q_2 = q$. また $|X(\mathbb{F}_{q^n})| = 1 + q^n - q_1^n - q_2^n = (1-q_1^n)(1-q_2^n)$.

定義 5.2.1. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ に対し

$$E_\lambda(z) := E_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(z, q_1z, \ldots, q_1^{n-1}z).$$

また $P_\lambda \in \mathrm{S}_0(X)$ を次のように定める: $E_\lambda(z)$ を (5.1) のように展開したものを $E_\lambda(z) = \sum_{\mathcal{F}} E_\lambda(\mathcal{F}) \cdot [\mathcal{F}]$ と書いたときに

$$P_\lambda := \sum_{\mathcal{F} \in \mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{(|\lambda|,0)}(X)} E_\lambda(\mathcal{F}) \cdot [\mathcal{F}].$$

例. $\lambda = (1,1)$ とする.

$$E_{1,1}(z_1, z_2) = \sum_{d \in \mathbb{Z}} v^d \sum_{\overline{\mathcal{F}} = (2,d)} [\mathcal{F}] \cdot \sum_{\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_2,\, \mathrm{rank}(\mathcal{F}_2)=1} v^{2\deg(\mathcal{F}/\mathcal{F}_2)} z_1^{\deg(\mathcal{F}/\mathcal{F}_2)} z_2^{\deg(\mathcal{F}_2)}.$$

$\mathrm{F}(X)$ の函数描像を思い出して, 各 $\mathcal{F} \in \mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{(2,0)}(X)$ に対して $E_{1,1}(z_1,z_2)(\mathcal{F})$ を計算してみよう. それから $P_{(1,1)}$ が得られる.

$\mathcal{V}$ を $\overline{\mathcal{V}} = (2,0)$ なるベクトル束とすると

$$E_{1,1}(z_1,z_2)(\mathcal{V}) = \sum_{\mathcal{V} \supset \mathcal{L},\, \mathrm{rank}(\mathcal{L})=1} q^{-\deg(\mathcal{V}/\mathcal{L})} z_2^{\deg(\mathcal{L})} z_1^{\deg(\mathcal{V}/\mathcal{L})}.$$

$\mathcal{L}$ はベクトル束 $\mathcal{V}$ の部分層で階数 1 だから直線束. そこで $\deg(\mathcal{L}) = -d$ で先に和を取ると, $\deg(\mathcal{V}/\mathcal{L}) = d$ に注意して

$$E_{1,1}(z_1,z_2)(\mathcal{V}) = \sum_{d \in \mathbb{Z}} q^{-d}(z_1/z_2)^d \sum_{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^{-d}(X),\ \mathcal{L} \subset \mathcal{V}} 1 = \sum_{d \in \mathbb{Z}} \left(\frac{z_1}{qz_2}\right)^d \sum_{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^{-d}(X)} \frac{|\mathrm{Hom}(\mathcal{L},\mathcal{V}) \setminus \{0\}|}{|k^\times|}.$$

2 つ目の等号で, 直線束からの写像は全て単射であることを用いた.

更に $\mathcal{V}$ が安定なら

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{L},\mathcal{V}) = \begin{cases} k^{2d} & (d > 0) \\ 0 & (d \le 0) \end{cases}.$$

実際, $d \le 0$ なら $\mu(\mathcal{L}) \ge \mu(\mathcal{V})$ だから $\mathcal{V}$ の半安定性より $\mathcal{L} \to \mathcal{V}$ は自明. $d > 0$ なら Grothendieck-Riemann-Roch から $\chi(\mathcal{L},\mathcal{V}) := \dim_k \mathrm{Hom}(\mathcal{L},\mathcal{V}) - \dim_k \mathrm{Ext}^1(\mathcal{L},\mathcal{V}) = \chi((1,-d),(2,0)) = 2d$. Serre 双対性 $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{L},\mathcal{V}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathcal{L})^*$ と半安定性の帰結 $\mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathcal{L}) = 0$ から $\dim_k \mathrm{Hom}(\mathcal{L},\mathcal{V}) = 2d$ となる. これから

$$\begin{aligned} E_{1,1}(z_1,z_2)(\mathcal{V}) &= \sum_{d>0} \left(\frac{z_1}{qz_2}\right)^d \frac{|k^{2d}| - 1}{|k| - 1} \left|\mathrm{Pic}^{-d}(X)\right| = \frac{|X(k)|}{q-1} \sum_{d>0} \left(\frac{z_1}{qz_2}\right)^d (q^{2d} - 1) \\ &= (1+q)\,|X(k)| \cdot \frac{z_1z_2}{(z_2 - qz_1)(qz_2 - z_1)}. \end{aligned}$$

次に半安定であって安定でない階数 2, 次数 0 のベクトル束 $\mathcal{V}$ を考える. この場合は $\mathcal{V} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}'_0$ と次数 0 の直線束の直和になって, 上と同様に調べると

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}'_0) = \begin{cases} k^{-2d} & (d < 0) \\ k & (d = 0,\ \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \text{ or } \mathcal{L} = \mathcal{L}'_0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}.$$

これから

$$E_{1,1}(z_1, z_2)(\mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}'_0) = (1+q)\,|X(k)| \cdot \frac{z_1 z_2}{(z_2 - qz_1)(qz_2 - z_1)} + 2.$$

以上から $E_{1,1}(z_1, z_2)$ のうち $\mathfrak{Coh}^{\mathrm{ss}}_{(2,0)}$ の部分 $E^{\mathrm{ss},(0)}_{1,1}(z_1, z_2)$ は

$$E^{\mathrm{ss},(0)}_{1,1}(z_1, z_2) = (1+q)\,|X(k)| \cdot \frac{z_1 z_2}{(z_2 - qz_1)(qz_2 - z_1)} 1^{\mathrm{ss}}_{(2,0)} + 1^{\mathrm{ss}}_{(1,0)} * 1^{\mathrm{ss}}_{(1,0)}.$$

$z_2/z_1 = q_1$ とすれば $P_{(1,1)}$ になる. $1^{\mathrm{ss}}_{(1,0)} = p_1$, $1^{\mathrm{ss}}_{(2,0)} = p_2/2 + p_1^2/2$ とすると,

$$\begin{aligned} P_{(1,1)} &= \frac{(1+q)(1-q_1)(1-q_2)}{(1-q_2)(qq_1-1)} \Big(\frac{p_2}{2} + \frac{p_1^2}{2}\Big) + p_1^2 \\ &= -\frac{(1+q)(1-q_1)}{1-qq_1}\frac{p_2}{2} + \frac{(1-q)(1+q_1)}{1-qq_1}\frac{p_1^2}{2}. \end{aligned}$$

これは, p_2 の係数の符号を除いて, Macdonald 対称函数 $P_{(2)}(q_1, q)$ と一致する.

一般の λ についても, P_λ と Macdonald 対称函数が対応することを Schiffmann-Vasserot が発見した.

定理 ([SV11, Theorem 7.1])**.** 代数同型 $\mathrm{S}_0(X) \xrightarrow{\sim} \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ があって

$$P_\lambda = \omega P_{\lambda'}(q_1, q).$$

但し右辺の $P_\lambda(q,t) \in \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ は Macdonald 対称函数 [M95, Chap.VI] であり, ω は $\omega p_r = (-1)^{r-1} p_r$ で定まる $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ 上の対合 [M95, Chap.I].

5.3 原始元と Macdonald-Cauchy 核関数

Macdonald が [M95, Chap.VI] で導入した記号をいくつか思い出しておく. 分割 λ に対し $c_\lambda(q,t)$, $c'_\lambda(q,t)$, d_λ を次のように定義する.

$$c_\lambda(q,t) := \prod_{s \in \lambda} (1 - q^{a_\lambda(s)} t^{\ell_\lambda(s)+1}), \quad c'_\lambda(q,t) := \prod_{s \in \lambda} (1 - q^{a_\lambda(s)+1} t^{\ell_\lambda(s)}), \quad d_\lambda(q,t) := \prod_{(i,j) \in \lambda \setminus \{(1,1)\}} (t^{i-1} - q^{j-1}).$$

ここで λ と Young 図形 $\{(i,j) \mid 1 \le i \le \ell(\lambda), 1 \le j \le \lambda_i\}$ を同一視して, $s = (i,j) \in \lambda$ に対して

$$a_\lambda(s) := \lambda_i - j, \quad \ell_\lambda(s) := a_{\lambda'}(j,i).$$

定義. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $p_n \in \mathrm{S}_0(X)$ を次で定義する.

$$p_n := \sum_{|\lambda| = n} (1 - q^n) \frac{d_\lambda(q_1, q)}{c'_\lambda(q_1, q)} \cdot P_{\lambda'}.$$

§2 と同様の計算で, 次の 2 つ主張を示すことができる.

定理 5.3.1. $\Delta(p_n) = p_n \otimes 1 + 1 \otimes p_n$. 逆に $\mathrm{S}_0(X)$ の斉次原始元は p_n の定数倍に限る.

定理 5.3.2.

$$\langle p_n, p_m \rangle = \delta_{n,m} n \frac{1-q_1^n}{1-q^n}.$$

以上から Macdonald-Cauchy 核関数を復元することができる.

定理 5.3.3. $Q_\lambda := P_\lambda / \langle P_\lambda, \lambda \rangle$ とすると, $\mathrm{S}_0(X) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{S}_0(X)$ において次の等式が成立する.

$$\sum_\lambda P_\lambda \otimes Q_\lambda = \exp\Big(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \frac{1-q^n}{1-q_1^n} p_n \otimes p_n \Big).$$

5.4 Shuffle 代数との関係

しばらく X は (楕円曲線とは限らない) 一般の曲線とする.

有理関数 $g(z) \in \mathbb{C}(z)$ を 1 つ取って固定する. $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$g(x_1, \ldots, x_r) := \prod_{i<j} g(x_i/x_j)$$

とする. また

$$\Psi_r : \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_r^{\pm 1}] \longrightarrow \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_r)^{\mathfrak{S}_r}, \quad f(x_1, \ldots, x_r) \longmapsto \sum_{w \in \mathfrak{S}_r} w(g(x_1, \ldots, x_r) f(x_1, \ldots, x_r))$$

とし, Ψ_r の像を A_r と書く. $A_0 := \mathbb{C}1$ として

$$A_{g(z)} := \oplus_{r \in \mathbb{N}} A_r$$

は次の積 $\star$ に関して結合代数になる: $P(x_1, \ldots, x_r) \in A_r$, $Q(x_1, \ldots, x_s) \in A_s$ に対して

$$(P \star Q)(x_1, \ldots, x_{r+s}) := \sum_{w \in Sh_{r,s}} w\Big(P(x_1, \ldots, x_r) Q(x_{r+1}, \ldots, x_{r+s}) \prod_{\substack{1 \leq i \leq r \\ r+1 \leq j \leq r+s}} g(x_i/x_j) \Big).$$

$\mathrm{S}^+(X)$ を $\{1^{\mathrm{ss}}_{(1,d)} \mid d \in \mathbb{Z}\}$ が生成する $\mathrm{S}(X)$ の部分代数とする.

補題 5.4.1 ([SV12, Corollary 1.10])**.** $g_X(z) := z^{g-1} \zeta_X(z^{-1})$ とすると, $1^{\mathrm{ss}}_{(1,d)} \mapsto x_1^d$ は次の代数同型を定める.

$$\Upsilon_X : \ \mathrm{S}^+(X) \xrightarrow{\sim} A_{g_X(z)}$$

以下では簡単のため $A = A_{g_X(z)}$ と書く. $\mathrm{S}^0(X)$ を $\{1^{\mathrm{ss}}_{(0,d)} \mid d \in \mathbb{N}\}$ が生成する $\mathrm{S}(X)$ の部分代数とする. また $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$\mathrm{F}^r(X) := \oplus_{\mathrm{rank}(\mathcal{F})=r} \mathbb{C}[\mathcal{F}], \quad \mathrm{S}^r(X) := \mathrm{S}(X) \cap \mathrm{F}[r].$$

と定義する. Hall 代数の積 $*$ でもって $\mathrm{S}^r(X)$ は $\mathrm{S}^0(X)$ 加群になることに注意する.

補題 5.4.2 ([SV12, Lemma 1.12])**.** $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$\pi_r : \mathrm{S}^0(X) \longrightarrow \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_r^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_r}, \quad \frac{T_{(0,d)}}{[d]_v} \longmapsto \frac{v^d}{d} \left| X(\mathbb{F}_{q^d}) \right| p_d(x_1, \ldots, x_r)$$

と定めると,

$$\Upsilon_X(u * v) = \pi_r(u) \cdot \Upsilon_X(v) \quad \forall\, u \in \mathrm{S}^0(X), \ v \in \mathrm{S}^r(X).$$

命題 5.4.3 ([SV12, Proposition 1.14])**.** $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\Delta(x) := \prod_{i<j}(x_i - x_j)$ とすると

$$\Delta(x)^{r!/2} I_r \subset A_r \subset I_r.$$

但し $I_r \subset \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_r^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_r}$ は

$$W_r^{\alpha} = \{f(x) \mid f(x_1, \alpha x_1, \alpha\overline{\alpha} x_1, x_4, \ldots, x_r) = 0\}$$

として, $W_r^{\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots, 2g)$ が生成するイデアル.

W_r^{α} は wheel condition と呼ばれている.

$\{1_{(r,0)}^{\mathrm{ss}} \mid r \in \mathbb{N}\}$ の生成する $\mathrm{S}(X)$ の部分代数を $\mathrm{HH}(X)$ と書く.

定理 5.4.4 ([FHHSY])**.** X が楕円曲線の場合, 同型 Υ_X による $\mathrm{HH}(X)$ の像は次の degenerate $\mathbb{CP}^1$ 条件を満たす: $f \in A_r$ に対して

$$\forall k = 1, \ldots, n-1, \quad \partial^{(0,k)}(f/\Delta(x)^{r!}) = \partial^{(\infty,k)}(f/\Delta(x)^{r!}).$$

但し

$$\partial^{(\alpha,k)} f := \lim_{\xi \to \alpha} f(x_1, \ldots, x_{k-1}, \xi x_k, \xi x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots).$$

参考文献

[FHHSY] B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi, S. Yanagida, *A commutative algebra on degenerate* $\mathbb{CP}^1$ *and Macdonald polynomials*, J. Math. Phys. **50** (2009), no. 9, 095215.

[H74] G. Harder, *Chevalley groups over function fields and automorphic forms*, Ann. of Math. (2) **100** (1974), 249–300.

[K97] M. Kapranov, *Eisenstein series and quantum affine algebras*, J. Math. Sci. (New York) **84**, no. 5, 1311–1360, (1997).

[M95] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd ed., Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1995.

[SV11] O. Schiffmann, E. Vasserot, *The elliptic Hall algebra, Cherednik Hecke algebras and Macdonald polynomials*, Compositio Math. **147** (2011), 188–234.

[SV12] O. Schiffmann, E. Vasserot, *Hall algebras of curves, commuting varieties and Langlands duality*, Math. Ann. **353** (2012), 1399–1451.

以上です.