2017 年度春学期　代数学 I/代数学概論 V 講義ノート

担当:　柳田 伸太郎

ver. 2017.08.01

目次

0　講義の概要

内容

- 時間は毎週木曜 3 限 (13:00–14:30), 場所は多元数理棟 509 号室です.
- この講義は次の 3 つの対象の入門を目標にします.
  - **鏡映群, Weyl 群, Coxeter 群**
  - **ルート系**
  - **不変式**
- ルート系とそれに付随する Weyl 群は数学の様々な分野に顔を出す普遍的な対象です. そのため話題は豊富に存在しますが, この講義ではそのうちのごく一部だけを扱います.
- また次の Macdonald の論文を理解することを目標とします.

  [M72]　I. G. Macdonald, *The Poincaré series of a Coxeter group*, Math. Ann., **199** (1972), 161–174.

  初回の講義では簡単な例 (対称群) の場合にこの論文の主張を解説します. 結果は次のような恒等式です.

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sigma\Big(\prod_{1\le i<j\le n}\frac{1-tz_j/z_i}{1-z_j/z_i}\Big)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}t^{\ell(\sigma)}=\prod_{d=2}^{n}\frac{1-t^d}{1-t}.$$

  ここで $\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群を表します. 左辺の $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ は $z_1,\ldots,z_n$ の添え字の置換で z_i 達の式に作用しています. 中辺の $\ell(\sigma)$ は $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ を隣接互換 $(1,2),(2,3),\ldots,(n-1,n)$ の積で表した時の最短長です. **中辺には z_i 達が登場していません**. 更に右辺から分かるように**この式は有理式の積で書けます**.

予定

講義日程と各講義の内容を以下のように予定しています.

04/13	導入, 有限鏡映群 1	04/20	有限鏡映群 2
04/27	有限鏡映群 3	05/11	鏡映群の分類 1
05/18	鏡映群の分類 2	05/25	鏡映群の分類 3
06/01	不変式 1	06/08	**名大祭のため休講**
06/15	不変式 2	06/22	不変式 3
06/29	不変式 4	07/06	Macdonald の論文
07/13	休講	07/20	アフィン Weyl 群 1
07/27	アフィン Weyl 群 2	08/03	休講

成績のつけ方

- 成績は原則毎回出題するレポート問題で付けます. 出席点は加味しません.
- A4 の紙に答案を書いて講義の時に提出して下さい. **特に提出期限は指定しません**. なおメールでも答案を受け付けます.

前提知識・参考書

- 前提知識は 3 年生までに習う代数系の知識で十分です. 特に群の表示, 加群や (非可換) 環に関する初歩的知識があれば良いです.
- 参考書ですが,
  - 主に次の本に従って鏡映群, ルート系, Coxeter 群を説明します.
    James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge studies in advanced mathematics **29**, Cambridge University Press, 1990.
  - また次のブルバキの本も参考になります.
    ブルバキ 数学原論 リー群とリー環 2 (杉浦光夫訳, 東京図書)
    この訳本は絶版ですが, 原著のフランス語版や英語の翻訳版なら Springer から手に入ります.
- 7 月に入ったら上記の論文 [M72] に基づいて講義を進めます. これは学内からオンラインで閲覧できるはずです.

その他

- 下記のウェブページに予定, 連絡事項やレポート問題などを掲示しますので, 適宜確認して下さい.
  http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2017S-AlgI.html
- オフィスアワーは Cafe David で金曜日の 16:00-17:00 に開催します.
  これ以外の時間でもメールでアポイントを取って下されば質問や相談に応じられますのでご連絡下さい.

以上です.

0.1　全般的な記号

この講義ノートの全編で用いる記号を説明する.

(1) $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ で非負整数全体の集合を表す.

(2) 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$, 有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$, 実数全体の集合を $\mathbb{R}$, 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ と書く.

(3) 集合 T に対し $S \subset T$ と書いたら, S は T の部分集合であることを意味する.

(4) 集合 S と T に対し, $S \setminus T := \{s \in S \mid s \notin T\}$ で集合差を表す.

(5) 集合 S の濃度を $|S|$ で表す.

(6) $\delta_{m,n}$ で Kronecker のデルタを表す. つまり $m = n$ なら $\delta_{m,n} = 1$, $m \neq n$ なら $\delta_{m,n} = 0$.

(7) 群の単位元を 1 で表す.

(8) H が群 G の部分群であることを $H \leq G$ で表す.

4 月 13 日 有限鏡映群 1

1 有限鏡映群

有限鏡映群とは実 Euclid 空間の鏡映で生成される有限群のことである．鏡映群の研究で大切なのは鏡映面に垂直なベクトルを上手く選ぶことである．それらを**ルート**と呼ぶ．更にその中で**単純ルート**と呼ばれるもの達が鏡映群の良い生成元の組を与える．こうして得られる鏡映群の表示を一般化したものが Coxeter 群である．

1.1 鏡映

実数体上の有限次元線形空間とその上の標準内積の組を**実 Euclid 空間**と呼ぶ．$\mathbb{R}^n$ で n 次元実 Euclid 空間を表すことにする．

以下 V を実 Euclid 空間とし, その内積を $(\cdot, \cdot)$ と書く．

定義 1.1.1. $\alpha \in V \setminus \{0\}$ に垂直な**超平面** (hyperplane) H_α とは 1 次元部分空間 $\mathbb{R}\alpha \subset V$ の直交補空間のことである．

$$H_\alpha := (\mathbb{R}\alpha)^\perp = \{v \in V \mid (v, \alpha) = 0\}.$$

超平面という言葉は次元が $\dim H_\alpha = \dim V - 1$ となることに由来する．

定義 1.1.2. V の**鏡映** (reflection) とは, ある 0 でないベクトル α を $-\alpha$ に写し, また α に垂直な超平面 H_α に属する任意のベクトルを動かさないような線形変換 $s \in \mathrm{End}(V)$ のことである．H_α を s の**鏡映面** (reflecting hyperplane) と呼ぶ．

注意 1.1.3. 鏡映は α に依存するので $s = s_\alpha$ と書くこともある．線形性から $s_\alpha = s_{c\alpha}$ が任意の $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対し成立する．また s_α は次のように明示的に書ける．

$$s_\alpha(v) = v - 2\frac{(v, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

V の内積を保つ線形変換全体のなす集合を $O(V)$ と書く．$O(V)$ は線形変換の合成に関して群になる．この群 $O(V)$ を V の**直交群** (orthogonal group) と呼ぶ．任意の鏡映 s が $O(V)$ の元であることに注意する．

定義 1.1.4. 鏡映で生成される $O(V)$ の有限部分群を V の**有限鏡映群** (finite reflection group) と呼ぶ．

以下いくつかの種類の有限鏡映群を挙げる．「X 型鏡映群」と名前を付けているが, 完全な分類を §2.4 で行う．

例 1.1.5 ($\mathrm{I}_2(m)$ 型鏡映群)**.** m を 3 以上の整数とする．$V = \mathbb{R}^2$ とし, 原点中心の正 m 角形を考える．この正 m 角形を保つような $O(\mathbb{R}^2)$ の元達が生成する部分群を $\mathcal{D}_m$ と書く．

$\mathcal{D}_m$ には m 個の「対角線」H_{α_i} $(i = 1, \dots, m)$ に関する鏡映 s_{α_i} が含まれる．但し「対角線」とは m が偶数なら正 m 角形の対面する二頂点を結ぶ直線または対面する二辺の各中点を結ぶ直線のことであり, m が奇数なら頂点と対面する辺の中点を結ぶ直線のことである．

また m 個の原点中心の回転 R_{θ_j} ($\theta_j = 2\pi j/m$ が回転角) も $\mathcal{D}_m$ に含まれるが, これらの回転は鏡映の合成になっている. 実際 R_{θ_1} は, 隣接する対角線 H_{α_i} と H_{α_j} に関する鏡映の合成 $s_{\alpha_i}s_{\alpha_j}$ に等しい.

$\mathcal{D}_m$ の元は鏡映か回転なので, 以上の議論から $\mathcal{D}_m$ は有限鏡映群であることが分かる. $\mathcal{D}_m$ を位数 $2m$ の**二面体群**と呼ぶ.

例 1.1.6 (A_{n-1} 型鏡映群)**.** n を 2 以上の整数とし, n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ を考える.

$\mathfrak{S}_n$ は次のようにして $O(\mathbb{R}^n)$ の部分群と思える. $e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の単位ベクトルとすると $\mathfrak{S}_n$ は集合 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ の置換群と思える. つまり $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ は $e_j \mapsto e_{\sigma(j)}$ と単位ベクトルの添え字の置換で作用している. 単位ベクトルの集合は $\mathbb{R}^n$ の基底なので, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ の $\mathbb{R}^n$ への作用が

$$\sigma(a_1e_1 + \cdots + a_ne_n) := a_1e_{\sigma(1)} + \cdots a_ne_{\sigma(n)} \tag{1.1.1}$$

で定まる. これは線形変換であり標準内積を保つ. 以上より群の単射準同型 $\mathfrak{S}_n \hookrightarrow O(\mathbb{R}^n)$ が構成できた.

この埋め込みのもとで互換 $(i, j) \in \mathfrak{S}_n \subset O(\mathbb{R}^n)$ は $\alpha := e_i - e_j \in \mathbb{R}^n$ を $-\alpha$ に写し, またその直交補空間 H_α の各元を動かさない. 従って鏡映である. $\mathfrak{S}_n$ は互換で生成されるので, 結局 $\mathfrak{S}_n$ は有限鏡映群である.

式 (1.1.1) から $\mathfrak{S}_n \subset O(\mathbb{R}^n)$ は部分空間 $\mathbb{R}(e_1 + \cdots + e_n) \subset \mathbb{R}^n$ の各元を動かさない. よってその直交補空間 V に $\mathfrak{S}_n$ は作用する. $\mathfrak{S}_n$ を A_{n-1} 型鏡映群と呼ぶが, これは $\dim V = n - 1$ に由来する.

例 1.1.7 (B_n 型鏡映群)**.** 引き続き $\mathfrak{S}_n$ の $\mathbb{R}^n$ への作用 (1.1.1) を考える. $\mathbb{R}^n$ の鏡映として, e_i を $-e_i$ に写しその他の単位ベクトルを動かさないものも存在する. これら符号変換のなす群は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ と同型なので, 以下簡単に $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ と書くことにする. すると $O(\mathbb{R}^n)$ の部分群として $\mathfrak{S}_n \cap (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n = \{\mathrm{id}\}$. また任意の符号変換 $f \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ と置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ について $\sigma^{-1}f\sigma$ もまた符号変換である. 以上より半直積

$$\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \subset O(\mathbb{R}^n)$$

は位数 $2^n n!$ の有限鏡映群である.

例 1.1.8 (D_n 型鏡映群)**.** B_n 型鏡映群を作るときに考えた符号変換のうち, 偶数個の単位ベクトルの符号を変えるもの, 即ち $e_i + e_j \mapsto -(e_i + e_j)$ を考える. これらのなす群はやはり $\mathfrak{S}_n$ で正規化される. 半直積をとって得られる群は有限鏡映群であり, B_n 型鏡映群の指数 2 の部分群である.

1.2　ルート

V を実 Euclid 空間, W を V の有限鏡映群とする. W に含まれる鏡映 s_α から鏡映面 H_α とそれに直交する直線 $L_\alpha = \mathbb{R}\alpha$ が定まる.

補題 1.2.1. $t \in O(V)$ と $\alpha \in V \setminus \{0\}$ に対し $ts_\alpha t^{-1} = s_{t\alpha}$. 特に $w \in W$ について $s_\alpha \in W$ なら $s_{w\alpha} \in W$.

証明. 明らかに $(ts_\alpha t^{-1})(t\alpha) = -t\alpha$. また $v \in H_\alpha \iff tv \in H_{t\alpha}$ が $(v, \alpha) = (tv, t\alpha)$ から分かる. 一方 $v \in H_\alpha$ なら $(ts_\alpha t^{-1})(tv) = ts_\alpha v = tv$. よって $ts_\alpha t^{-1}$ は $H_{t\alpha}$ の元を動かさない. □

特に W は直線の集合 $\{L_\alpha\}$ に置換で作用する. この集合は W に含まれる鏡映 s_α と一対一に対応する. しかし $\alpha \in V$ とは一対一対応ではない. そこで $\mathbb{R}\alpha \subset \Phi$ から上手く代表元を取ることを考える.

定義 1.2.2. Φ を V の 0 でない元の有限集合であって次の二条件を満たすものとする.

(R1) 任意の $\alpha \in \Phi$ に対し $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$.

(R2) 任意の $\alpha \in \Phi$ に対し $s_\alpha \Phi = \Phi$.

この時 Φ を**ルート系** (root system) と呼び, Φ の元を**ルート** (root) と呼ぶ. また $W(\Phi)$ を $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ で生成される $O(V)$ の部分群とする.

注意 1.2.3. 一般に「ルート系」と呼ばれるものは Lie 環に付随して現れるルート系であり, ここで述べた鏡映群に付随するルート系とは定義が違うので注意せよ. Lie 環に付随するルート系については §2.8, §2.9 で扱う.

定義 1.2.2 の直前の議論から, 有限鏡映群 $W \subset O(V)$ についてルート系 Φ があって $W = W(\Phi)$ となることが分かる. $W = W(\Phi)$ となる Φ は一意でないことに注意する. 逆に

補題 1.2.4. ルート系 Φ に付随する群 $W(\Phi)$ は有限鏡映群である.

証明. $W(\Phi)$ が有限群であることを示せばよい. 条件 (R2) より $W(\Phi)$ は Φ に置換で作用するので, $N := |\Phi|$ とすれば群準同型 $W(\Phi) \to \mathfrak{S}_N$ がある. これが単射であることが示せれば $|W(\Phi)| \leq |\mathfrak{S}_N| = N! < \infty$ で証明が終わる.

各鏡映 $s_\alpha \in W(\Phi)$ について, Φ で張られる部分空間 $\mathbb{R}\Phi \subset V$ の直交補空間 $(\mathbb{R}\Phi)^\perp$ の元は s_α の作用で動かない. よって任意の $w \in W(\Phi)$ についても同様に, $(\mathbb{R}\Phi)^\perp$ の元は w の作用で動かない. よって Φ の任意の元を動かさないのは $\mathrm{id} \in W(\Phi)$ のみである. これは $\mathrm{Ker}(W(\Phi) \to \mathfrak{S}_N) = \{\mathrm{id}\}$ を意味する. □

参考文献

参考書 [H90] の §§1.1–1.3.

4 月 13 日分レポート問題

レポートに関する注意事項

- レポートの提出期限は (今学期中という自明な期限を除いて) 特に設けません.
  解けたら提出して下さい.
- 講義で分からなかった所, 扱ってほしい話題などありましたらレポートに書いて下さい.
- ここに挙げた問題以外でも, 関連する話題についてレポートにしてくださっても構いません.

問題 1.1 (群の半直積, 5 点)**.** 群の半直積について

(1) 群の半直積の定義を述べよ.

(2) §1.1 の B_n 型鏡映群 $\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ の定義を (1) で答えた半直積の定義に沿って説明せよ.

出典について

参考書 [H90] の §§1.1–1.3 の Exercise より引用しました.

4 月 20 日 有限鏡映群 2

前回の §1.2 で, 実 Euclid 空間 V とそのルート系 Φ に対して有限鏡映群 $W = W(\Phi)$ が定まることを説明した. 特に Φ は群 W の生成系を与えている. 群表示の問題ではなるべく生成元の数を減らすのが自然であるが, 我々の文脈ではこれは Φ の「良い」部分集合を定めることと同義である. こうして現れるのが正ルート及び単純ルートの概念である.

1.3 正ルート, 単純ルート

定義 1.3.1. V を実線形空間とする.

(1) **実線形空間 V 上の全順序** $\geq$ とは (集合としての) V 上の全順序 $\geq$ であって次の条件を満たすもののことである.

　(a) 任意の $u, v, w \in V$ に対し $u \geq v$ なら $u + w \geq v + w$.

　(b) $v \geq w$ なる $v, w \in V$ と任意の $c \in \mathbb{R}$ について, $c > 0$ なら $cv \geq cw$, また $c < 0$ なら $cv \leq cw$.

(2) V 上の全順序 $\geq$ が与えられたとする. $v \in V$ は $v > 0$ の時 (全順序 $\geq$ に関して) **正** (positive) と呼ばれる.

注意. V の元のうち正のものの集合は錘 (cone) である. 即ち加法及び正のスカラー倍で閉じている.

例. このような全順序は辞書次式順序を用いて作ることができる. $u_1, \ldots, u_n$ を V の基底とする. $v, w \in V$ を $v = \sum_{i=1}^n a_i u_i$, $w = \sum_{i=1}^n b_i u_i$ と表した時に $a_i \neq b_i$ となる最小の添え字 i を k として, $v > w \overset{\text{dfn}}{\iff} a_k > b_k$ と定義すればよい.

定義 1.3.2. 実 Euclid 空間 V 上のルート系 Φ を考える. Φ の部分集合 Π は, ある V 上の全順序 $\geq$ があって $\Pi = \{v \in \Phi \mid v > 0\}$ となるとき**正ルート集合** (positive root system) と呼ばれる. Π の元を**正ルート** (positive root) と呼ぶ.

注意. 正ルート集合 $\Pi \subset \Phi$ が与えられると $\Phi = \Pi \sqcup (-\Pi)$ となることがルート系の公理 (R1) $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\pm\alpha\}$ から従う. また全順序の存在から正ルート集合も必ず存在する.

定義 1.3.3. 部分集合 $\Delta \subset \Phi$ は以下の二条件を満たすとき**単純ルート集合** (simple root system) と呼ばれる.

(a) Δ は Φ の張る V の部分空間の基底.

(b) 各 $\alpha \in \Phi$ を Δ の線形結合で表したときに係数の符号が全て一致する.

このとき Δ の元を**単純ルート** (simple root) と呼ぶ.

正ルート集合の存在性に比べて単純ルート集合の存在性は非自明である.

定理 1.3.4. Φ をルート系とする.

(1) $\Delta \subset \Phi$ が単純ルート集合の時, Δ を含む正ルート集合が唯一存在する.

(2) 任意の正ルート集合 $\Pi \subset \Phi$ は単純ルート集合を唯一つ含む. 特に単純ルート集合は必ず存在する.

証明. (1) 省略する.

(2) 前半の主張のうち唯一性は簡単なので省略する. また後半は正ルート集合の存在と前半から従う.

Π の部分集合 Δ であって, Π の各元が Δ の非負係数の線形結合で書けるようなもののうち最小のものを改めて Δ とする (このような Δ は必ず存在する). あとは Δ が線形独立であることを示せば, Δ が Π に含まれる単純ルート集合だと分かる. そのためには

$$\alpha \neq \beta \text{ となる任意の } \alpha, \beta \text{ について } (\alpha, \beta) \leq 0 \qquad (\sharp)$$

を示せば十分である. 実際 $(\sharp)$ が成立すると仮定して, $\sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha \alpha = 0$ とすると, 係数 c_α が正のものと負のものに分けてこの等式を $\sum b_\beta \beta = \sum d_\gamma \gamma$, $b_\beta > 0$, $d_\gamma > 0$ と書き直せる. 等号の両辺を v と書くと, 内積の非退化性と $(\sharp)$ から $0 \leq (v, v) = (\sum b_\beta \beta, \sum d_\gamma \gamma) \leq 0$. これより $v = 0$ で c_α は全て 0.
以上より $(\sharp)$ を示せばよい. ある対 $\alpha, \beta \in \Delta$ について成立しないと仮定する. $s_\alpha \beta = \beta - c\alpha$ と書くと $c = 2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha) > 0$. また $\Phi = \Pi \sqcup (-\Pi)$ より $\pm s_\alpha \beta \in \Pi$.

(I) まず $s_\alpha \beta \in \Pi$ と仮定する. $s_\alpha \beta = \sum c_\gamma \gamma$ と書くと $c_\gamma \geq 0$. ここでさらに場合分けして
- (i) $c_\beta < 1$ の時. $\beta - c\alpha = \sum c_\gamma \gamma$ より $(1 - c_\beta)\beta = c\alpha + \sum_{\gamma\neq\beta} c_\gamma \gamma$. これより β が $\Delta \setminus \{\beta\}$ の正の線形結合で表せてしまい, Δ の最小性と矛盾する.
- (ii) $c_\beta \geq 1$ の時は $0 = (c_\beta - 1)\beta + c\alpha + \sum_{\gamma\neq\beta} c_\gamma \gamma$ だが, 右辺は非負係数の線形結合だから, 全ての係数は 0. しかし α の係数は $c + c_\alpha > 0$ なので矛盾.

(II) $-s_\alpha \beta \in \Pi$ と仮定する. $s_\alpha \beta = -\sum c_\gamma \gamma$ と書くと $c_\gamma \geq 0$.
- (i) $c > c_\alpha$ の時は $\beta - c\alpha = -\sum c_\gamma \gamma$ より $(c - c_\alpha)\alpha = \beta + \sum_{\gamma\neq\alpha} c_\gamma \gamma$ で I) の i) と同様に Δ の最小性と矛盾.
- (ii) $c \leq c_\alpha$ の時は $0 = (c_\alpha - c)\alpha + \beta + \sum_{\gamma\neq\alpha} c_\gamma \gamma$ から I) の ii) と同様に矛盾.

以上より $(\sharp)$ の証明が終わった.

□

証明中の議論から

系. Δ がルート系 Φ の単純ルート集合ならば, 任意の $\alpha \neq \beta \in \Delta$ について $(\alpha, \beta) \leq 0$.

定義 1.3.5. ルート系 Φ (または付随する有限鏡映群 $W = W(\Phi)$) の**階数** $\operatorname{rk}\Phi$ (または $\operatorname{rk} W$) を Φ の単純ルート集合 Δ の濃度で定義する. つまり

$$\operatorname{rk}\Phi \;=\; \operatorname{rk} W \;:=\; |\Delta|\,.$$

注意. 単純ルート集合は Φ の張る V の部分空間 $\mathbb{R}\Phi$ の基底なので, $\operatorname{rk}\Phi = \dim \mathbb{R}\Phi$ となり, 特に単純ルート集合の取り方に依存しない.

例. §1.1 の例 1.1.5 と例 1.1.6 について, 実は

$$\operatorname{rk}\mathfrak{D}_m \;=\; 2, \quad \operatorname{rk}\mathfrak{S}_n \;=\; n-1$$

となる (レポート問題 2.2, 2.3).

1.4 正ルート集合および単純ルート集合の共役性

命題 1.4.1. Π を Φ の正ルート集合, Δ を Π に含まれる Φ の単純ルート集合とする. 各 $\alpha \in \Delta$ について

$$s_\alpha(\Pi \setminus \{\alpha\}) \;=\; \Pi \setminus \{\alpha\}.$$

証明. $\beta \in \Pi \setminus \{\alpha\}$ を $\beta = \sum_{\gamma\in\Delta} c_\gamma \gamma$ と書くと, $\mathbb{R}\alpha \cap \Phi = \{\pm\alpha\}$ より, ある $\gamma_0 \in \Delta \setminus \{\alpha\}$ について $c_{\gamma_0} > 0$. すると $s_\alpha\beta = \beta - c\alpha$ の γ_0 の係数も正で, $\Phi = \Pi \sqcup (-\Pi)$ から $s_\alpha\beta = \sum_{\gamma\in\Delta} c'_\gamma \gamma$ と書いたときの全ての係数 c'_γ は正. 従って $s_\alpha\beta \neq -\alpha$. 以上より任意の $\beta \in \Pi \setminus \{\alpha\}$ は s_α で $\Pi \setminus \{\alpha\}$ の元に写る. あとは $s_\alpha^2 = \mathrm{id}$ より $\Pi \setminus \{\alpha\}$ 上で s_α は全単射である. □

定理 1.4.2. Φ の任意の 2 つの正ルート集合は W で共役である. また任意の 2 つの単純ルート集合も W で共役である.

証明. Π と Π' を正ルート集合とする. $\Phi = \Pi \sqcup (-\Pi) = \Pi' \sqcup (-\Pi')$ に注意して, $r := |\Pi \cap (-\Pi')|$ に関する帰納法で示す. $r = 0$ なら $\Pi = \Pi'$ なので良い. $r > 0$ なら Π に含まれる単純ルート集合 Δ は Π' には含まれないから $\alpha \in \Delta \cap (-\Pi')$ なる元 α がある. 上の命題より $|(s_\alpha\Pi) \cap (-\Pi')| = r - 1$. 帰納法の仮定を $s_\alpha\Pi$ と Π' に適用すると, ある $w \in W$ が存在して $w(s_\alpha\Pi) = \Pi'$. よって $(ws_\alpha)\Pi = \Pi'$ なので示せた.

後半の単純ルート集合に関する主張は, 正ルート集合と単純ルート集合の対応 (定理 1.3.4) と前半の主張から従う. □

1.5　単純鏡映による生成

Δ を Φ の単純ルート集合とし, Π を対応する正ルート集合とする. $\alpha \in \Delta$ に対応した $s_\alpha \in W = W(\Phi)$ を (Δ に属する) **単純鏡映**と呼ぶ.

定義 1.5.1. 各 $\beta \in \Phi$ を $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha \alpha$ と書いたときの

$$\mathrm{ht}(\beta) := \textstyle\sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha$$

を β の (Δ に関する) **高さ** (height) と呼ぶ.

例えば $\alpha \in \Delta$ なら $\mathrm{ht}(\alpha) = 1$ である.

定理 1.5.2. 任意の正ルート集合 Δ について, W は Δ に属する単純鏡映で生成される. 即ち

$$W \;=\; \langle s_\alpha \ (\alpha \in \Delta)\rangle.$$

証明. $W' := \langle s_\alpha \ (\alpha \in \Delta)\rangle$ を単純鏡映で生成される W の部分群とする.

$\beta \in \Pi$ を任意にとり $W'\beta \cap \Pi$ の元の中で高さが最小のものを γ とする. この時 $\gamma \in \Delta$ となる. 実際 $\gamma = \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha \alpha$ とすると $0 < (\gamma, \gamma) = \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha(\gamma, \alpha)$ よりある $\alpha \in \Delta$ について $(\gamma, \alpha) > 0$. $\gamma = \alpha$ なら $\gamma \in \Delta$. $\gamma \neq \alpha$ なら命題 1.4.1 より $s_\alpha\gamma \in \Pi$. 一方 $s_\alpha\gamma = \gamma - c\alpha$, $c = 2(\gamma, \alpha)/(\alpha, \alpha) > 0$ だから $\mathrm{ht}(s_\alpha\gamma) < \mathrm{ht}(\gamma)$. これは $s_\alpha\gamma \in W'\beta$ より γ の取り方と矛盾する. よって $\gamma \in \Delta$.

次に $W'\Delta = \Phi$ を示す. 上の議論から任意の $\beta \in \Pi$ の W' 軌道は Δ と交わるので $\Pi \subset W'\Delta$. また $\beta \in -\Pi$ なら, ある $\alpha \in \Delta$ と $w \in W'$ が存在して $-\beta = w\alpha$. これから $\beta = (ws_\alpha)\alpha$. よって $-\Pi \subset W'\Delta$. $\Pi \sqcup (-\Pi) = \Phi$ より $W'\Delta = \Phi$ を得る.

最後に任意の生成元 $s_\beta \in W$ $(\beta \in \Phi)$ を取る. 上の議論からある $\alpha \in \Delta$ と $w \in W'$ が存在して $\beta = w\alpha$. すると補題 1.2.1 から $s_\beta = ws_\alpha w^{-1} \in W'$. 以上より $W' = W$. □

上の証明中で示した $W'\Delta = \Phi$ を系として述べておく.

系 1.5.3. 任意の $\beta \in \Phi$ に対し, ある $w \in W$ が存在して $w\beta \in \Delta$.

参考文献

参考書 [H90] の §§1.3–1.7.

4 月 20 日分レポート問題

問題 2.1 (単純ルート, 5 点)**.** 定理 1.3.4 の証明で省略した部分を補え.

問題 2.2 (階数 2 のルート系, 10 点)**.** 階数が 2 であるルート系 Φ に付随した有限鏡映群は 2 面体群であることを示せ.

問題 2.3 (A_n 型ルート系の単純ルート, 5 点)**.** A_n 型ルート系の単純ルート集合を一つあげよ.

問題 2.4 (5 点)**.** Φ を階数 n のルート系であって全ての元の長さが 1 のものとする. 部分集合 $\Psi \subset \Phi$ は $|\Psi| = n$ であって, Ψ の元達が互いになす角度の集合が Φ のある単純ルート集合の元達のなす角度の集合と一致するものとする. この時 Ψ もまた単純ルート集合になることを示せ.

問題 2.5 (5 点)**.** ルート系 Φ の単純ルート集合 Δ の真部分集合 $I \subsetneq \Delta$ を任意に取る. I に属する単純鏡映達は有限鏡映群 $W = W(\Phi)$ を生成しない, 即ち $\langle s_\alpha \, (\alpha \in I) \rangle \subsetneq W$ を示せ.

問題 2.6 (5 点)**.** $\Delta \subset \Pi$ をルート系 Φ の単純ルート集合及びそれを含む正ルート集合とする. $\beta \in \Pi \setminus \Delta$ なら $\mathrm{ht}(\beta) > 1$ を示せ.

出典について

参考書 [H90] より引用しました. 問題 2.4–2.6 は [H90, §1.6, Exercise 1–3] です.

オフィスアワー

4/21 と 4/28 の Cafe David でのオフィスアワーはお休みさせて頂きます. 他の時間に相談に来てください.

4 月 27 日 有限鏡映群 3

前回に引き続き実 Euclid 空間 V とそのルート系 Φ を固定する．$W = W(\Phi)$ を付随する有限鏡映群とする．前回 §1.5 の定理 1.5.2 から有限鏡映群 W は単純鏡映で生成されることが分かった．実はこの生成系に関する W の関係式が明示的に求まる (§1.9)．今後暫くはその準備をしていく．

1.6　長さ関数

定義 1.6.1. Δ を Φ の単純ルート集合とする．$w \in W$ の (Δ に関する) **長さ** (length) $\ell(w)$ とは

$$w \ = \ s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r} \quad (\alpha_i \in \Delta)$$

と単純鏡映の積で書いたときの r の最小値のこと．またこの最小値を与えるような表示 $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{\ell(w)}}$ のことを w の**簡約表示** (reduced expression) という．

注意. $\ell(w) = 0 \iff w = 1_W$ 及び $\ell(w) = 1 \iff w = s_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$ は明らか．また任意の $w \in W$ に対し $\ell(w) = \ell(w^{-1})$．実際 $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$ なら $w^{-1} = s_{\alpha_r} \cdots s_{\alpha_1}$ なので $\ell(w^{-1}) \leq \ell(w)$．逆の不等号も同様．

長さ $\ell(w)$ を正ルート集合に関する量で表すことができる．次に定義する $n(w)$ がそれである．

定義 1.6.2. Δ を含む正ルート集合を Π とする．$w \in W$ に対し

$$n(w) \ := \ \left|\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)\right|.$$

次節で実は $n(w) = \ell(w)$ であることを示す (系 1.7.2)．そのためにいくつか準備をする．

補題 1.6.3. $\alpha \in \Delta$, $w \in W$ について

(1) $w\alpha > 0$ なら $n(ws_\alpha) = n(w) + 1$.

(2) $w\alpha < 0$ なら $n(ws_\alpha) = n(w) - 1$.

(3) $w^{-1}\alpha > 0$ なら $n(s_\alpha w) = n(w) + 1$.

(4) $w^{-1}\alpha < 0$ なら $n(s_\alpha w) = n(w) - 1$.

証明. $\Pi(w) := \Pi \cap w^{-1}(-\Pi)$ とおく．特に $n(w) = |\Pi(w)|$．命題 1.4.1 より，もし $w\alpha > 0$ なら $\Pi(ws_\alpha) = s_\alpha \Pi(w) \sqcup \{\alpha\}$．これから (1) が従う．また $w\alpha < 0$ なら $s_\alpha \Pi(ws_\alpha) = \Pi(w) \setminus \{\alpha\}$ かつ $\alpha \notin \Pi(w)$．よって (2) が成立する．(3) と (4) は，(1) と (2) で w を w^{-1} に置き換えて $n(w^{-1}a_\alpha) = n(s_\alpha w)$ を使うと分かる．　□

系 1.6.4. $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$ と r 個の単純鏡映の積で書けるならば $n(w) \leq r$．特に $n(w) \leq \ell(w)$.

証明. 補題 1.6.3 より単純鏡映をかけていく度に関数 n の値は高々 1 しか増えない．　□

1.7　簡約表示

定理 1.7.1. 単純ルート集合 Δ を固定する．$w \in W$ が $w = s_1 \cdots s_r$ と単純鏡映 $s_i = s_{\alpha_i}$ 達の積で表されているとする．もし $n(w) < r$ なら $1 \leq i < j \leq r$ であって以下の三条件を満たすものが存在する．

(a) $\alpha_i = (s_{i+1} \cdots s_{j-1})\alpha_j$,

(b) $s_{i+1}s_{i+2} \cdots s_j = s_i s_{i+1} \cdots s_{j-1}$,

(c) $w = s_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots \widehat{s}_j \cdots s_r$. 但し $\widehat{s}_i$ は i 番目の項を除くことを意味する．

証明. $n(w) < r$ と補題 1.6.3 (1), (2) の繰り返しにより，ある $j \leq r$ が存在して $s_1 \cdots s_{j-1}\alpha_j < 0$. しかし $\alpha_j > 0$ だから，ある $i < j$ が存在して $s_{i+1} \cdots s_{j-1}\alpha_j > 0$ かつ $s_i(s_{i+1} \cdots s_{j-1}\alpha_j) < 0$. この i と j が三条件を満たすことを示そう．

命題 1.4.1 を s_i に適用して，s_i の作用で負になる正ルート $(s_{i+1} \cdots s_{j-1})\alpha_j$ は α_i だと分かる．これで (a) が示せた．次に $\alpha := \alpha_j$, $w' := s_{i+1} \cdots s_{j-1}$ とする．(a) より $w'\alpha = \alpha_i$ なので，補題 1.2.1 より $w' s_\alpha w'^{-1} = s_{w'\alpha} = s_i$. つまり $(s_{i+1} \cdots s_{j-1})s_j(s_{j-1} \cdots s_{i+1}) = s_i$. これから (b) が従う．(c) は (b) から直ちに従う． □

系 1.7.2. 任意の $w \in W$ について $n(w) = \ell(w)$.

証明. 系 1.6.4 より $n(w) \leq \ell(w)$. もし $n(w) < \ell(w) = r$ なら $w = s_1 \cdots s_r$ と書いたときに定理 1.7.1 の条件 (c) から w は $r-2$ 個の単純鏡映の積で書けるので $\ell(w) = r$ に反する． □

1.8　単純推移性と最長元

系 1.7.2 から直ちに以下が従う．

定理 1.8.1. $\Delta \subset \Phi$ を単純ルート集合, $\Pi \supset \Delta$ を付随する正ルート集合とする．$w \in W$ に関する以下の五条件は同値．

$$\text{(a) } w\Pi = \Pi, \quad \text{(b) } w\Delta = \Delta, \quad \text{(c) } n(w) = 0, \quad \text{(d) } \ell(w) = 0, \quad \text{(e) } w = 1.$$

系 1.8.2. $\Delta \subset \Phi$ を単純ルート集合, Π をそれに付随する正ルート集合とする．

(1) $w_\circ \in W$ であって $w_\circ\Pi = -\Pi$ となるものが唯一存在する．

(2) $\ell(w_\circ) = n(w_\circ) = |\Pi|$.

(3) $w_\circ^{-1} = w_\circ$.

(4) $\Delta \subset \Pi$ を単純ルート集合とする．$w_\circ$ は以下のような $w \in W$ として unique に特徴づけられる: 任意の $\alpha \in \Delta$ について $\ell(s_\alpha w) < \ell(w)$.

(5) $w_\circ = ww'$ と $w, w' \in W$ の積になっている時は $\ell(w_\circ) = \ell(w) + \ell(w')$.

(6) 任意の $w \in W$ について $\ell(w_\circ w) = \ell(w_\circ) - \ell(w)$.

定義 1.8.3. 系 1.8.2 (1) の元 $w_\circ$ を W の (単純ルート集合 Δ に関する) **最長元**という．

1.9 生成元と関係式

定理 1.9.1. Φ の単純ルート集合 Δ を固定する. W は次の表示を持つ.

$$W = \langle s_\alpha \ (\alpha \in \Delta) \mid (s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = 1 \ (\alpha, \beta \in \Delta) \rangle$$

但し $m(\alpha,\beta)$ は $s_\alpha s_\beta$ の W における位数.

証明. s_α 達が生成元であることは知っているので, 任意の関係式

$$s_1 \cdots s_r = 1 \tag{1.9.1}$$

$(s_i := s_{\alpha_i})$ が定義関係式 $(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = 1$ の帰結であることを示せばよい. r は偶数であることに注意して, 関係式の長さ r に関する帰納法で示す (偶数であることは $\det(s_i) = -1$ から従う).

$r = 2$ なら $s_1 s_2 = 1$ から $s_1 = s_2^{-1} = s_2$ より $s_1^2 = 1$. これは定義関係式に含まれる.

$r = 2k - 2$ まで示せたとする. 関係式 (1.9.1) を

$$s_1 \cdots s_{k+1} = s_{2k} \cdots s_{k+2}$$

と変形する. 右辺の長さは $k-1$ 以下で左辺より短いので, 左辺は簡約表示にはなりえない. §1.7 定理 (b) を左辺に適用して, $1 \le i < j < k+1$ があって $s_{i+1} \cdots s_j = s_i \cdots s_{j-1}$. これは以下の等式と同値.

$$s_i \cdots s_{j-1} s_j \cdots s_{i+1} = 1 \tag{1.9.2}$$

もし (1.9.2) の長さが $2k$ 未満なら帰納法の仮定よりこれは定義関係式から導かれる. すると (1.9.1) は (1.9.2) を用いて $s_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots \widehat{s}_j \cdots s_{2k} = 1$ と短くできて, 再び帰納法の仮定より定義関係式の帰結だと分かる.

そこで (1.9.2) の長さが $2k$, つまり $i = 1, j = k+1$ だと仮定する. この時 (1.9.2) は

$$s_2 \cdots s_{k+1} = s_1 \cdots s_k. \tag{1.9.3}$$

与えられている関係式 (1.9.1) を $s_2 \cdots s_{2k} s_1 = 1$ と書き直し, それと (1.9.3) について前と同様の議論をする. 定義関係式の帰結だと言えないのは

$$s_3 \cdots s_{k+2} = s_2 \cdots s_{k+1} \tag{1.9.4}$$

の時である. これを書き換えると $s_3(s_2 s_3 \cdots s_{k+1}) s_{k+2} s_{k+1} \cdots s_4 = 1$ と $2k$ 個の積になる. これについて再び前と同様の議論をする. 定義関係式の帰結にできないのは

$$s_2 \cdots s_{k+1} = s_3 s_2 s_3 \cdots s_k$$

の場合だが, その時は (1.9.3) から $s_1 = s_3$.

この議論を巡回的に添え字をずらした場合に適用すると, 定義関係式に帰着できないのは ($s_1 = s_3$ かつ) $s_2 = s_4$ の場合. 更に添え字をずらして議論を繰り返すと, 定義関係式に帰着できないのは

$$s_1 = s_3 = \cdots = s_{2k-1} \text{ かつ } s_2 = s_4 = \cdots = s_{2k}$$

の時. しかしこの場合は元の関係式 (1.9.1) が $(s_1 s_2)^k = 1$ となっていて, 定義関係式に含まれている. □

定義 1.9.2. 群 W は次の表示を持つとき **Coxeter 群**と呼ばれる.

$$W = \langle S \mid (ss')^{m(s,s')} = 1 \rangle, \quad m(s,s') \begin{cases} = 1 & (s = s') \\ \ge 2 & (s \ne s') \end{cases}.$$

参考文献

参考書 [H90] の §§1.8–1.11.

4 月 27 日分レポート問題

問題 3.1 (5–10 点)**.** 講義中に証明を省略した部分を補え.

問題 3.2 (5 点)**.** V を Euclid 空間, $W \subset O(V)$ を有限鏡映群とする.
(1) $w \in W$ について $(-1)^{n(w)} = \det(w)$ となることを示せ. 但し右辺の det は $W \subset O(V)$ とみなした時の行列式である.
(2) $w, w' \in W$ なら $n(ww') \leq n(w) + n(w')$ かつ $n(ww') \equiv n(w) + n(w') \pmod 2$ となることを示せ.

問題 3.3 (5 点)**.** 対称群 $\mathfrak{S}_n$ は隣接互換 $(i, i+1)$ 達を単純鏡映とする単純ルート集合 Δ を持つ. この Δ に関する $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ の長さ $\ell(\sigma)$ は転倒数, 即ち $\sigma(i) > \sigma(j)$ となる 1 以上 n 以下の整数の対 $i < j$ の数と一致することを示せ.

問題 3.4 (5 点)**.** 系 1.8.2 を証明せよ.

問題 3.5 (5 点)**.** 例 1.1.6 で説明した有限鏡映群としての対称群 $W = \mathfrak{S}_n \leq O(\mathbb{R}^n)$ について考える. 単純ルート集合 Δ として $\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$ が取れる (但し $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底). この Δ 及び対応する正ルート集合 Π に関する $\mathfrak{S}_n$ の最長元を求めよ.

問題 3.6 (5 点)**.** 最長元 $w_\circ \in W$ の任意の簡約表示について, どの単純鏡映も 1 度以上現れることを示せ.

出典について

参考書 [H90] より引用しました. 問題 3.3 は [H90, §1.7, Exercise 1], 問題 3.5 と 3.6 は [H90, §1.8, Exercise 1, 2] です.

引用の仕方

レポートを書くときに本を参照することは全く問題ありませんが, 答案が参照している本の内容に基づいている場合は必ず**その本を引用し, 特に引用箇所を明示**して下さい. 具体的にはこの上に「出典について」にあるような説明をして下されば十分です.
(数学に限らず) 学術論文を書くときに**引用無しに他者の結果を載せることは**, あたかも自分の発見であると虚偽の主張をする, いわゆる**盗用に当たる重大な違反行為**です.

オフィスアワー及び次回

4/28 の Cafe David でのオフィスアワーは 16:00–16:30 の間だけです.
5/4 は休日ですので, 次回は 5/11(木) です.

5 月 11 日有限鏡映群 4, 有限鏡映群の分類 1

前回と同様, Euclid 空間 V とそのルート系 Φ を固定し, $W = W(\Phi)$ を付随する有限鏡映群とする.

1.10　放物部分群

有限鏡映群 $W = W(\Phi)$ の部分群のうち, ルート系 Φ の「部分ルート系」と関連するものを考えよう.

定義 1.10.1. Φ の単純ルート集合 Δ を固定する. $S := \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ を単純鏡映からなる W の部分集合とする.

(1) 部分集合 $I \subset S$ に対し, W_I を $s_\alpha \in I$ 達で生成される W の部分群とする. つまり

$$W_I := \langle s_\alpha \ (s_\alpha \in S) \rangle.$$

また $\Delta_I := \{\alpha \in \Delta \mid s_\alpha \in I\}$ と定める.

(2) wW_Iw^{-1} $(I \subset S,\ w \in W)$ と書ける W の部分群を W の**放物部分群** (parabolic subgroup) と呼ぶ.

例. $W_\emptyset = \{1\}$, $W_S = W$.

命題 1.10.2. Φ の単純ルート集合 Δ を固定し対応する単純鏡映の集合を S と書く. $I \subset S$ に対し $V_I \subset V$ を Δ_I の張る ($\mathbb{R}$ 上の線形) 部分空間とし, $\Phi_I := \Phi \cap V_I$ と定める. また W の Δ に関する長さ関数を ℓ と書く.

(1) Φ_I は V 上の [及び V_I 上の] ルート系である. Δ_I は Φ_I の単純ルート集合であり, 対応する鏡映群は $W(\Phi_I) = W_I$. また Φ_I は V_I 上のルート系でもあり, 対応する鏡映群は $W(\Phi_I) = W_I|_{V_I}$.

(2) $W_I = W(\Phi_I)$ の単純ルート集合 Δ_I に関する長さ関数を ℓ_I とすると, W_I 上では $\ell_I = \ell$.

(3) $W^I := \{w \in W \mid \ell(ws) > \ell(w)\ \forall s \in I\}$ とする. 任意の $w \in W$ に対し $w = uv$ となる $u \in W^I$, $v \in W_I$ が唯一存在する. この時長さに関して $\ell(w) = \ell(u) + \ell(v)$ となっていて, また u は wW_I の中で最も短い唯一の元でもある.

証明. (1) 定義より直ちに W_I が V_I を保つことが分かる. また Φ_I がルート系の条件 (R1), (R2) を満たすことも明らか.

(2) Π を Δ を含む Φ の正ルート集合とすると系 1.7.2 より $w \in \Pi$ について $\ell(w) = \left|\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)\right|$. また $\Pi_I := \Pi \cap \Phi_I$ とすれば, $w \in W_I$ について $\ell_I(w) = \left|\Pi_I \cap w^{-1}(-\Pi_I)\right|$. $\alpha \in \Pi \setminus \Phi_I$ を単純ルートの線形結合で書けば, ある $\gamma \in \Delta \setminus \Delta_I$ が含まれる. よって任意の $\beta \in \Delta_I$ について $s_\beta\alpha$ は γ を正の係数付きで含む. これは $s_\beta\alpha > 0$ を意味する. よって任意の $w \in W_I$ について $w\alpha > 0$. 従って $w \in W_I$ について $\Pi_I \cap w^{-1}(-\Pi_I) = \Pi \cap w^{-1}(-\Pi)$. 再び系 1.7.2 より $\ell_I(w) = \ell(w)$.

(3) $w \in W$ に対し $u \in wW_I$ であって最短長のものを一つ取る. するとある $v \in W_I$ で $w = uv$ と書ける. 任意の $s \in I$ について $us \in wW_I$ だから $u \in W^I$. この u, v の簡約表示を $u = s_1 \cdots s_p$, $v = s'_1 \cdots s'_q$ とする. (2) より $s'_i \in I$ として良い. この時 $\ell(w) \leq \ell(u) + \ell(v)$. もし $\ell(w) < \ell(u) + \ell(v)$ なら, 定理 1.7.1 より $uv = s_1 \cdots s_p s'_1 \cdots s'_q$ から二つ単純鏡映を取り除くことができる. しかし u の取り方から $s_1, \ldots, s_p$ からは一つも取り除けない. よって $s'_1 \ldots, s'_q$ から取り除くことになるが, これは v の簡約表示を取ったことに反する. 以上より $\ell(w) = \ell(u) + \ell(v)$ である.

もし u とは別の最短長の元 $u' \in wW_I$ があったとしたら $u' = ux$, $\ell(x) =: r > 0$ と書ける. $x = s_1 \cdots s_r$ $(s_i \in I)$ と簡約表示すると $\ell(u's_r) < \ell(u')$ となり $u' \in W^I$ に反する.

□

1.11 Poincaré 多項式

定義 1.11.1. 有限鏡映群 W の部分集合 X に対し $X(t) := \sum_{w\in X} t^{\ell(w)}$ を X の **Poincaré 多項式**と呼ぶ. 特に

$$W(t) = \sum_{w\in W} t^{\ell(w)} = \sum_{n\geq 0} |\{w \in W \mid \ell(w) = n\}|\, t^{\ell(w)}.$$

例. $W = \mathfrak{S}_3$ なら $W(t) = 1 + 2t + 2t^2 + t^3$.

命題 1.11.2. Φ の単純ルート集合 Δ を固定し $S := \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\} \subset W$ とする.

(1) 任意の部分集合 $I \subset S$ について $W(t) = W_I(t)W^I(t)$.

(2) Δ を含む正ルート集合を Π とすると

$$\sum_{I\subset S} (-1)^{|I|} \frac{W(t)}{W_I(t)} = \sum_{I\subset S} (-1)^{|I|} W^I(t) = t^{|\Pi|}.$$

証明. (1) 命題 1.10.2 (3) から従う.

(2) 最初の等号は (1) から従う. 各 $w \in W$ の中辺への寄与を考える. $K_w := \{s \in S \mid \ell(ws) > \ell(w)\}$ とすれば $w \in W^I \iff I \subset K_w$. よって中辺における $t^{\ell(w)}$ の係数は $\sum_{I\subset K_w} (-1)^{|I|}$. $K_w \neq \emptyset$ なら $\sum_{I\subset K_w} (-1)^{|I|} = (1-1)^{|K_w|} = 0$. $K_w = \emptyset$ は $w = w_\circ$ と同値で, 系 1.8.2 (2) より $t^{\ell(w_\circ)} = t^{|\Pi|}$. 以上より二番目の等号を得る.

□

系. 上の命題と同じ記号のもとで

$$\sum_{I\subset S} (-1)^{|I|} \frac{|W|}{|W_I|} = 1.$$

証明. 命題 1.11.2 (2) で $t = 1$ とし $X(1) = |X|$ に注意すればよい. □

2 有限鏡映群の分類

2.1 Coxeter グラフと鏡映群の同型類

§1.9 までの議論により, 有限鏡映群 W は単純ルート $\alpha \in \Delta$ に対応した単純鏡映 s_α 達を生成系とし, 関係式が整数の集合 $\{m(\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta \in \Delta\}$ で決定されるが分かった. この集合を表すグラフが Coxeter グラフである. この概念は一般の Coxeter 系に対して定義できる.

定義 2.1.1. **Coxeter 系** (W,S) とは群 W と有限生成系 $S \subset W$ の組であって, 関係式が

$$(ss')^{m(s,s')} = 1 \ (s,s' \in S), \quad m(s,s') \begin{cases} = 1 & (s = s') \\ \geq 2 & (s \neq s') \end{cases}$$

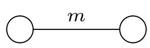
となっているものをいう. 但し s と s' に関係がない場合は $m(s,s') = \infty$ と約束する.

例. §1.9 より, 有限鏡映群 $W = W(\Phi)$ と単純ルート集合 $\Delta \subset \Phi$ の組 (W,Δ) は Coxeter 系とみなせる. この場合は常に $m(\alpha,\beta) < \infty$ $(\alpha,\beta \in \Delta)$ である.

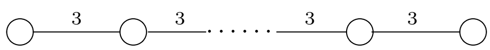
定義 2.1.2. Coxeter 系 (W,S) の **Coxeter グラフ** $\Gamma = \Gamma(W,S)$ とは, 生成系 S を頂点集合とし, $m(s,s') \geq 3$ なる $s \neq s' \in S$ の間に $m(s,s')$ とラベル付けされた辺を持つグラフのことである.

Coxeter グラフの異なる二頂点 $s \neq s' \in S$ について, それらを結ぶ辺がなければ $m(s,s') = 2$ であることに注意する.

例. (1) 二面体群 $\mathfrak{D}_m$ は 2 元からなる単純ルート集合 $\Delta = \{\alpha,\beta\}$ を持つ. Coxeter グラフ $\Gamma(\mathfrak{D}_m,\Delta)$ は



(2) 対称群 $\mathfrak{S}_n$ と単純ルート集合 $\Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n\}$ について, Coxeter グラフは $n-1$ 個の頂点を持つ以下のようなグラフである.



次の命題の証明は難しくないので省略する.

命題 2.1.3 ([H90, §2.1, Proposition])**.** W_1, W_2 を Euclid 空間 V_1, V_2 に作用する有限鏡映群であってそれぞれ固定点を持たないものとする. もし両者の Coxeter グラフが等しければ, V_1 から V_2 への等長変換が存在して W_1 から W_2 への同型が誘導される.

2.2 Coxeter 系の既約成分

定義 2.2.1. Coxeter 系 (W,S) は Coxeter グラフ $\Gamma(W)$ が連結なとき**既約**であるという.

次の命題の証明は (前の命題 2.1.3 と違い) 準備が必要なので省略する.

命題 2.2.2 ([H90, §2.2, Proposition])**.** Coxeter 系 (W,S) の Coxeter グラフ Γ が連結成分 $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ を持つとする. $S_1, \ldots, S_r \subset S$ を対応する部分集合とする. このとき W は放物部分群 $W_{S_1}, \ldots, W_{S_r} \leq W$ の直積と同型. また Coxeter 系 (W_{S_i}, S_i) はどれも既約.

2.3　Coxeter グラフと双線形型式

定義 2.3.1. (W, S) を Coxeter 系とする．正方行列 $A(W, S) = (a(s, s'))_{s,s' \in S}$ を次のように定める．

$$a(s, s') := -\cos\big(\pi/m(s, s')\big).$$

注意. $A(W, S)$ は対称行列である．また $A(W, S)$ は Coxeter グラフ $\Gamma(W, S)$ からも決めることができる．

一般に n 次対称行列 A が**正定値** (positive definite) であるとは, 対応する $\mathbb{R}^n$ 上の双線形型式 $(x, y) \mapsto {}^t xAy$ が正定値であること, 即ち任意の $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ について ${}^t xAx > 0$ となることを言う．

補題 2.3.2. 有限鏡映群 $W = W(\Phi)$ と単純ルート集合 $\Delta \subset \Phi$ から定まる Coxeter 系 (W, Δ) について, 対称行列 $A(W, \Delta)$ は正定値.

証明. V を W の作用する Euclid 空間とすると, $A(W, \Delta)$ は V の基底 Δ に関する V の Euclid 内積の表現行列である．Euclid 内積は正定値な双線形型式だから $A(W, \Delta)$ も正定値である． □

2.4　正定値グラフ

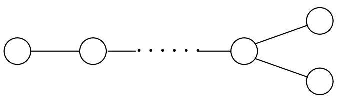
これ以降 Coxeter グラフの辺のラベルが 3 の場合はラベルを省略する．

補題 2.4.1. 以下の Coxeter グラフに対応した対称行列は正定値である．

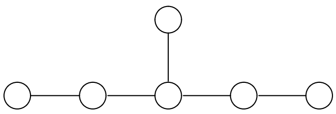
A_n $(n \geq 1)$

B_n $(n \geq 2)$

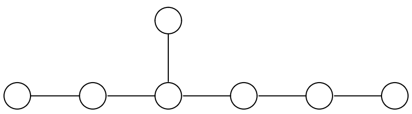
D_n $(n \geq 4)$



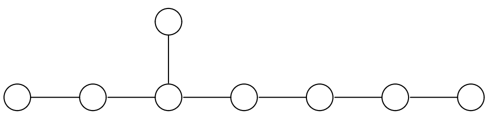
E_6



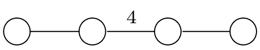
E_7



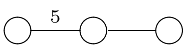
E_8



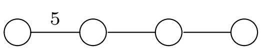
F_4



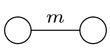
H_3



H_4



$\mathrm{I}_2(m)$



証明. 対称行列 A が正定値であることと A の**主小行列式** (principal minor) が全て正であることが同値なことを思い出す．そこで各 X_n 型グラフに対応した行列 $A(\mathrm{X}_n)$ の主小行列式を計算していく．$A(\mathrm{X}_n)$ のサイズ, 即ち頂点の数は n である．$n \leq 2$ の場合は

$$A(\mathrm{A}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(\mathrm{B}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad A(\mathrm{I}_2(m)) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos(\pi/m) \\ -\cos(\pi/m) & 1 \end{pmatrix}$$

となっていて, どれも正定値であることが分かる．

$n \geq 3$ の場合, D_4 を除いて帰納的に議論できる．D_4 が正定値であることは

$$A(\mathrm{D}_4) = \begin{pmatrix} 1 & c & & \\ c & 1 & c & c \\ & c & 1 & \\ & c & & 1 \end{pmatrix}, \quad c = -1/2$$

より直接確認できるので省略する．D_4 以外の場合, 頂点の番号付けを工夫して以下の条件を満たすようにできる: i 番目の頂点を v_i と書くと, v_n は v_{n-1} だけと結ばれていて, v_{n-1} 番目の頂点は v_n と v_{n-2} だけと結ばれている．更に v_n と v_{n-1} を結ぶ辺のラベルは $m = 3$ または 4. 具体的には, X_n 型から v_n を除いたものを Y_{n-1} 型, Y_{n-1} 型から v_{n-1} を除いたものを Z_{n-2} 型とすると $(\mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_{n-1}, \mathrm{Z}_{n-2})$ の組み合わせは以下の通り．

X_n	$\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n$	D_5	$\mathrm{D}_{n\geq 6}$	E_n	F_4	H_3	H_4
Y_{n-1}	A_{n-1}	D_4	D_{n-1}	D_{n-1}	B_3	$\mathrm{I}_2(5)$	H_3
Z_{n-2}	A_{n-2}	A_3	D_{n-2}	A_{n-2}	A_2	A_1	$\mathrm{I}_2(5)$

また $c := -\cos(\pi/m)$ と書くと $A(\mathrm{X}_n)$ は次のような形をしている．

$$A(\mathrm{X}_n) = \left(\begin{array}{c|c} A(\mathrm{Y}_{n-1}) & \begin{matrix} \\ c \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} & c \end{matrix} & 1 \end{array}\right)$$

従って $2A(\mathrm{X}_n)$ の i 次主行列式を d_i と書くと

$$\det(2A(\mathrm{X}_n)) = 2d_{n-1} - 4c^2 d_{n-2} = 2\det(2A(\mathrm{Y}_{n-1})) - 4c^2 \det(2A(\mathrm{Z}_{n-2}))$$

となる．$m = 3, 4$ より $4c^2 = 1, 2$ であることに注意してこの漸化式を解くと, 結果は以下のようになる．

X_n	A_n	B_n	D_n	E_n	F_4	H_3	H_4	$\mathrm{I}_2(m)$
$\det(2A(\mathrm{X}_n))$	$n+1$	2	4	$9-n$	1	$3-\sqrt{5}$	$(7-3\sqrt{5})/2$	$4\sin^2(\pi/m)$

但し $\cos\pi/5 = (1+\sqrt{5})/4$ を用いた．これで $\det A(\mathrm{X}_n) > 0$ が確認できた．また議論が帰納的なので, 主小行列式も全て正であることが証明できている． □

参考文献

参考書 [H90] の §§2.1–2.7.

5 月 11 日分レポート問題

問題 4.1 (各 5 点–10 点)**.** 講義中に省略した命題の証明を補え.

問題 4.2 (5 点)**.** $W = \mathfrak{S}_n$ の任意の放物部分群は対称群の直積と同型であることを示せ.

問題 4.3 (5 点)**.** $W = \mathfrak{S}_n$ の Poincaré 多項式 $W(t)$ を計算せよ (必要なら命題 1.11.2 を用いよ).

問題 4.4 (5 点)**.** 補題 2.4.1 の証明で省略した部分 (漸化式を解く所) を補え.

5 月 18 日 有限鏡映群の分類 2

2.5　半正定値グラフ

定義 2.5.1. Coxeter グラフとは有限グラフの各辺に 3 以上の整数又は ∞ をラベル付けしたものである．

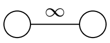
注意.　(1) Coxeter 系 (W, S) に付随する Coxeter グラフ $\Gamma(W, S)$ (定義 2.1.2) は定義 2.5.1 の意味での Coxeter グラフである．

(2) 定義 2.3.1 で $\Gamma(W, S)$ から行列 $A(W, S) = (a(s, s'))_{s,s' \in S}$ を $a(s, s') := -\cos(\pi/m(s, s'))$ で定めたのと同様に，Coxeter グラフ Γ に対し実数成分対称行列 $A(\Gamma)$ を定義できる．

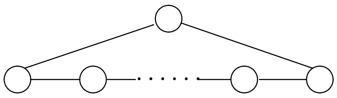
定義 2.5.2. n 次対称行列 A が**半正定値** (positive semi-definite) であるとは，対応する $\mathbb{R}^n$ 上の双線形型式が半正定値であること，即ち任意の $x \in \mathbb{R}^n$ について ${}^t x A x \geq 0$ となることを言う．

補題 2.5.3. 以下の Coxeter グラフに対応した対称行列は半正定値である．

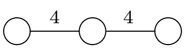
$\widetilde{A}_1$



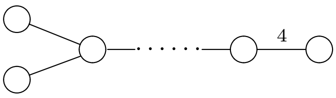
$\widetilde{\mathrm{A}}_n$ $(n \geq 2)$



$\widetilde{\mathrm{B}}_2 = \widetilde{\mathrm{C}}_2$

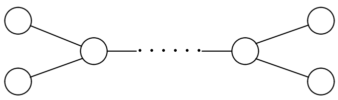


$\widetilde{\mathrm{B}}_n$ $(n \geq 3)$

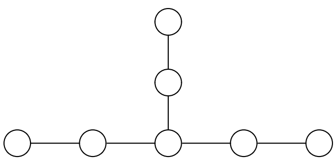


$\widetilde{\mathrm{C}}_n$ $(n \geq 3)$

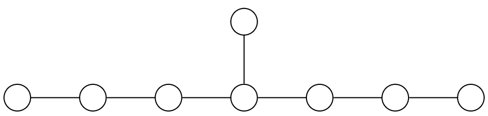
$\widetilde{\mathrm{D}}_n$ $(n \geq 4)$



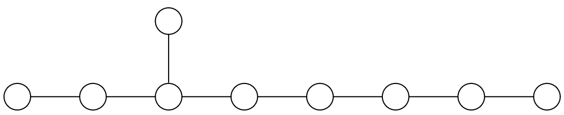
$\widetilde{\mathrm{E}}_6$



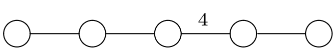
$\widetilde{\mathrm{E}}_7$



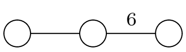
$\widetilde{\mathrm{E}}_8$



$\widetilde{\mathrm{F}}_4$



$\widetilde{\mathrm{G}}_2$



証明. どのグラフも 1 つ頂点を減らして補題 2.4.1 の正定値グラフにできるので, グラフに付随した対称行列の行列式が 0 になることだけ確認すればよい.

$\widetilde{A}_n$ の場合は各行の成分の和が 0 なので行列式は 0 である. 他の場合は補題 2.4.1 の証明と同様の漸化式

$$\det(2A(\widetilde{\mathrm{X}}_n)) \;=\; 2d_{n-1} - 4c^2 d_{n-2}$$

を使えばよい. 詳細は省略する. □

2.6　Coxeter グラフの部分グラフ

定義 2.6.1. Coxeter グラフ Γ が正 (positive type) であるとは, 対応する対称行列 $A(\Gamma)$ が半正定値である時をいう.

定義 2.6.2. Coxeter グラフ Γ の**部分グラフ**とは, Γ の頂点とそれにつながっている辺を取り除いたもの, あるいは辺のラベルを減らしたもののことをいう.

定義 2.6.3. 実数成分の n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ が可約 (reducible または decomposable) であるとは, $\{1, 2, \ldots, n\} = I \sqcup J$ と空でない集合 I, J に分解できて, $i \in I$ かつ $j \in J$ なら $a_{ij} = 0$ となることをいう. 可約でない A を既約 (irreducible または indecomposable) であるという.

命題 2.6.4. $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ を半正定値かつ既約な実数成分 $n(\geq 2)$ 次対称正方行列であって, $i \neq j$ なら $a_{ij} \leq 0$ だとする.

(1) $N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid {}^t x A x = 0\}$ は $\ker A := \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$ と一致する. また $\dim N = 1$.

(2) A の最小固有値は重複度 1 で, その固有ベクトルであって全ての成分が正のものが存在する.

(2) については, A が半正定値なのでその固有値は全て非負実数であることに注意する. 証明はレポート問題 5.2 にする.

系 2.6.5. 正の連結 Coxeter グラフ Γ の真部分グラフ Γ' に対応した対称行列は正定値である. 特に Γ の真部分グラフとして補題 2.5.3 のグラフ $\widetilde{\mathrm{A}}_1, \ldots, \widetilde{\mathrm{G}}_2$ が現れることはない.

証明. A, A' をそれぞれ Γ, Γ' に付随した対称行列とする. $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $A' = (a'_{ij})_{i,j=1}^k$, $k \leq n$ とおける. また辺のラベルは $m_{ij} \geq m'_{ij} \geq 3$ とおけるから

$$a'_{ij} \;=\; -\cos(\pi/m'_{ij}) \;\geq\; -\cos(\pi/m_{ij}) \;=\; a_{ij}.$$

A' が正定値でないなら ${}^t x' A' x' \leq 0$ となる $x' \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ が存在する. ${}^t x' = (x_1, \ldots, x_k)$ として, $x \in \mathbb{R}^n$ を ${}^t x := (|x_1|, \ldots, |x_k|, 0, \ldots, 0)$ で定める. x での正定値対称形式 A の値を考えると

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^k a_{ij}\,|x_i|\,|x_j| \leq \sum_{i,j=1}^k a'_{ij}\,|x_i|\,|x_j| \leq \sum_{i,j=1}^k a'_{ij} x_i x_j \leq 0.$$

ここで三番目の不等号は $a'_{ij} \leq 0$ から従う. よってどの和も 0 であり, 特に ${}^t x A x = 0$. 命題 2.6.4 (1) から $Ax = 0$ となるので 0 は A の固有値であり, 更にその固有空間は 1 次元だから $\mathbb{R}x$ である. また命題 2.6.4 (2) から A の最小固有値は 0 であり, x の成分は全て正にできる. つまり $k = n$. すると上記の 2 番目の等式から全ての i, j について $a_{ij} = a'_{ij}$. これは Γ' が真部分グラフであることと矛盾する. □

2.7　正の Coxeter グラフの分類

定理 2.7.1. 正の連結 Coxeter グラフは補題 2.4.1 と補題 2.5.3 で挙げたもので尽くされる．

証明. Γ を正の Coxeter グラフとし, n を Γ の頂点の数, m を辺のラベルの最大値とする．

(1) 頂点数が 1 または 2 の Coxeter グラフは A_1, $\mathrm{I}_2(m)$, $\widetilde{\mathrm{A}}_1$ だけでこれらは正．以下 $n \geq 3$ とする．

(2) 系 2.6.5 より $\widetilde{\mathrm{A}}_1$ は Γ の部分グラフになりえないので $m < \infty$ として良い．

(3) 系 2.6.5 より $\widetilde{\mathrm{A}}_n$ は部分グラフでないので Γ にループはない．

(3.1) $m = 3$ と仮定する．$\Gamma \neq \mathrm{A}_n$ としてよい．すると Γ は分岐を持つ．

(3.2) 系 2.6.5 より $\widetilde{\mathrm{D}}_{n>4}$ は Γ の部分グラフでないので分岐は一か所しかない．

(3.3) $\widetilde{\mathrm{D}}_4$ も部分グラフでないので分岐は 3 分岐である．各分岐にある頂点の数を $a \leq b \leq c$ とする．

(3.4) $\widetilde{\mathrm{E}}_6$ は部分グラフではないので $a = 1$.

(3.5) $\widetilde{\mathrm{E}}_7$ は部分グラフではないので $b \leq 2$

(3.6) $\Gamma \neq \mathrm{D}_{n\geq 4}$ としてよい．よって $b = 2$.

(3.7) $\widetilde{\mathrm{E}}_8$ は部分グラフではないので $c \leq 4$. すると $\Gamma = \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8$.

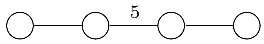
(4) $m \geq 4$ と仮定する．$\widetilde{\mathrm{C}}_{n\geq 2}$ は部分グラフでないのでラベルが > 3 となる辺は 1 つのみ．また $\widetilde{\mathrm{B}}_{n\geq 3}$ は部分グラフでないので Γ は分岐を持たない．

(4.1) $m = 4$ と仮定する．$\Gamma \neq \mathrm{B}_n$ としてよい．よって (2 本ある) 終端の辺のラベルは 3.

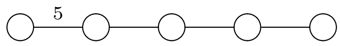
(4.2) $\widetilde{\mathrm{F}}_4$ は部分グラフでないので $n = 4$. すると $\Gamma = F_4$.

(5) $m \geq 5$ の場合, $\widetilde{\mathrm{G}}_2$ が部分グラフでないことから $m = 5$.

(6) 次の Coxeter グラフ Z_4 は正ではないので Γ の部分グラフではない．よってラベル 5 の辺は終端にある．

Z_4 

(7) 次の Coxeter グラフ Z_5 は正ではないので Γ の部分グラフではない．よって $n \leq 4$. すると $\Gamma = \mathrm{H}_3, \mathrm{H}_4$.

Z_5 

□

以上で有限鏡映群 W から現れる Coxeter グラフ $\Gamma(W, \Delta)$ が分類できた．そこで次回以降は, 与えられた正の連結 Coxeter グラフ Γ に対し $\Gamma = \Gamma(W, \Delta)$ となるような鏡映群 W を構成することを考える．

参考文献

参考書 [H90] の §§2.6–2.10.

5 月 18 日分レポート問題

問題 5.1 (5 点)**.** 補題 2.5.3 の証明で省略した部分を補え.

問題 5.2 (10 点)**.** 命題 2.6.4 を証明せよ.

問題 5.3 (5 点)**.** 定理 2.7.1 の証明で用いた Coxeter グラフ Z_4 と Z_5 が正でない (即ち付随する対称形式が半正定値でない) ことを確認せよ.

問題 5.4 (5 点)**.** E_6, E_7, E_8 型ルート系の最高ルート $\widetilde{\alpha}$ を単純ルートの和で書け. また最高ルートであることを確認せよ.

問題 5.5 (計 15 点)**.** Weyl 群に付随したルート系 $\Phi = \mathrm{A}_n, \ldots, \mathrm{G}_2$ について、$\Gamma(\Phi, \Delta)$ が確かに補題 2.4.1 の正定値 Coxeter グラフになることを確認せよ.

5 月 25 日 有限鏡映群の分類 3

今回はルート系のうち, その Coxeter 群が Weyl 群になるものを扱う.

2.8　Weyl 群

V を Euclid 空間とする. 以下ルート系といったら V 上のものを考える.

定義 2.8.1. Φ をルート系とする.

(1) ルート系 Φ は次の条件を満たすとき**結晶的** (crystallographic) であるという.

(R3) $\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} \in \mathbb{Z} \quad (\forall\alpha,\beta\in\Phi)$

(2) 結晶的ルート系 Φ に付随した有限鏡映群 $W(\Phi)$ を (有限) **Weyl 群**という.

注意. 注意 1.2.3 でも言及したように, 定義 2.8.1 の意味での結晶的ルート系のことを通常単に「ルート系」と呼ぶ.

鏡映の V への作用

$$s_\alpha v \;=\; v - \frac{2(\alpha,v)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \quad (v\in V)$$

より次の補題が成り立つ.

補題 2.8.2. Φ を結晶的ルート系, $\Delta\subset\Phi$ を単純ルート集合とすると $\Phi\subset\mathbb{Z}\Delta$. また $\mathbb{Z}\Delta\subset V$ は $W(\Phi)$ の作用で不変.

系 2.8.3. Φ を結晶的ルート系とすると, 任意の $w\in W(\Phi)$ について $\mathrm{tr}_V(w)\in\mathbb{Z}$.

証明. Δ を含む V の基底を取る. $\mathbb{R}\Delta\subset V$ の直交補空間への $W(\Phi)$ の作用は自明だから

$$\mathrm{tr}_V(w) \;=\; \mathrm{tr}_{\mathbb{R}\Delta}(w) + \dim V - \dim\mathbb{R}\Delta.$$

補題 2.8.2 より $w|_{\mathbb{R}\Delta}\in O(\mathbb{R}\Delta)$ を基底 Δ で行列表示すれば成分は全て整数. よって $\mathrm{tr}_{\mathbb{R}\Delta}(w)$ も整数. □

命題 2.8.4. Φ を結晶的ルート系, $\Delta\subset\Phi$ をその単純ルート集合とする. 任意の $\alpha,\beta\in\Delta$, $\alpha\neq\beta$ について

$$m(\alpha,\beta)\in\{2,3,4,6\}.$$

証明. $\alpha\neq\beta$ より $s_\alpha s_\beta\in W(\Phi)$ は $s_\alpha s_\beta\neq 1$ であり, 平面 $\mathbb{Z}\alpha+\mathbb{Z}\beta\subset V$ 上に回転で作用し, 直交補空間には自明に作用する. 回転の角度は $\theta:=2\pi/m(\alpha,\beta)$. よって適当に V の基底をとって計算すると

$$\mathrm{tr}_V(s_\alpha s_\beta) \;=\; 2\cos\theta + \dim V - 2.$$

すると系 2.8.3 より $2\cos\theta\in\mathbb{Z}$. これから $\cos\theta = -1, -1/2, 0, 1/2$. □

例 2.8.5. この命題から H_3, H_4 および $m\neq(1,2,)3,4,6$ の $\mathrm{I}_2(m)$ は結晶的ではない.

注意 2.8.6. 以下 $\mathrm{G}_2 := \mathrm{I}_2(6)$ と書く. なお $\mathrm{I}_2(3)=\mathrm{A}_2$, $\mathrm{I}_2(4)=\mathrm{B}_2$ に注意.

2.9　Weyl 群に付随したルート系

前副節の最後の例 2.8.5 及び注意 2.8.6 とは逆に

定理 2.9.1. 既約な結晶的ルート系は, 補題 2.4.1 の正定値な Coxeter グラフのうち以下のもので尽くされる.

$$\mathrm{A}_n,\ \mathrm{B}_n,\ \mathrm{D}_n,\ \mathrm{E}_{6,7,8},\ \mathrm{F}_4,\ \mathrm{G}_2$$

証明は, 上述の Coxeter グラフ Γ から上手くルート系の実現 $\Phi \subset V$ を探してきて, それが結晶的であることを確認すればよい. $\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{D}_n$ については §1.1 の例で説明したことが欲しいルート系の実現になっている. これらの復習から定理の証明を始める.

注意. (1) B_n 型 Coxeter グラフには二つの結晶的ルート系 B_n と C_n が対応する. C_n も以下で説明する.
(2) $\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n$ は**古典型ルート系**, $\mathrm{E}_{6,7,8}, \mathrm{F}_4, \mathrm{G}_2$ は**例外型ルート系**と呼ばれる.

また後で必要になる最高ルートについても説明していく.

定義 2.9.2. $\Phi \subset V$ を結晶的ルート系とし, 単純ルート集合 $\Delta \subset \Phi$ を一つ取って固定する.
(1) V 上の半順序 $\geq$ を以下で定義する.

$$\lambda \geq \mu \overset{\mathrm{dfn}}{\iff} \lambda - \mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Delta. \tag{2.9.1}$$

(2) Φ において半順序 $\geq$ で最大となる元を**最高ルート** (highest root) と呼ぶ.

次の事実を証明なしで用いることにする.

事実 2.9.3 ([H90, §2.9 (3)]). 結晶的ルート系 Φ が定義 2.2.1 の意味で既約なら, Φ の最高ルートが存在する. 以下ではそれを $\widetilde{\alpha} \in \Phi$ と書く.

各 Coxeter グラフに対応するルート系の実現 $V \supset \Phi \supset \Delta$ を次のように定める. 最高ルート $\widetilde{\alpha}$ も書いてある. 古典型については $W = W(\Phi)$ およびその V への作用も記す.

2.9.1　A_n 型

$V := \{\sum_{i=1}^{n+1} a_i\varepsilon_i \mid \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$,
$\Phi := \{v \in V \mid (v,v) = 2\} \cap \oplus_{i=1}^{n+1}\mathbb{Z}\varepsilon_i = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$,
$\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ \alpha_2 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3,\ \ldots,\ \alpha_n := \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}\}$,　$\widetilde{\alpha} = \varepsilon_1 - \varepsilon_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$,
$W = \mathfrak{S}_{n+1}$, ε_i の添え字の置換で V に作用.

2.9.2　B_n 型

Φ は長さの 2 乗が 1 のものが $2n$ 個, 2 のものが $2n(n-1)$ 個で計 $2n^2$ 個ある.

$V := \mathbb{R}^n$,
$\Phi := \{v \in V \mid (v,v) \in \{1,2\}\} \cap \oplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}\varepsilon_i = \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$,
$\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ \alpha_2 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3,\ \ldots,\ \alpha_{n-1} := \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n,\ \alpha_n := \varepsilon_n\}$,
$\widetilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{n-1} + 2\alpha_n$,
$W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, $\mathfrak{S}_n$ は ε_i の添え字の置換で, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ は $\varepsilon_i \mapsto -\varepsilon_i$ で作用.

2.9.3　C_n 型

C_n 型ルート系は B_n 型の「双対」である.

$V := \mathbb{R}^n$,

$\Phi := \{v \in V \mid (v,v) \in \{2,4\}\} \cap \oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i = \{\pm 2\varepsilon_i \mid 1 \le i \le n\} \cup \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\}$,

$\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\, \alpha_2 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3,\, \ldots,\, \alpha_{n-1} := \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n,\, \alpha_n := 2\varepsilon_n\}$,

$\widetilde{\alpha} = 2\varepsilon_1 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n$,

$W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, 作用は B_n の時と同様.

2.9.4　D_n 型

$V := \mathbb{R}^n$,　$\Phi := \{v \in V \mid (v,v) = 2\} \cap \oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\}$,

$\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\, \alpha_2 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3,\, \ldots,\, \alpha_{n-1} := \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n,\, \alpha_n := \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n\}$,

$\widetilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n$.

$W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$, $\mathfrak{S}_n$ は ε_i の添え字の置換で, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$ は偶数個の符号変換 $\varepsilon_i \mapsto -\varepsilon_i$ で作用.

2.9.5　G_2 型

例外型ルート系の実現は古典型に比べるとあまり自然には見えない. 例えば $\mathrm{G}_2 = \mathrm{I}_2(6)$ だが, 例 1.1.5 で述べた二面体群のルート系の実現は条件 (R3) と相性が悪い. 下記の実現が知られている.

$V := \{\sum_{i=1}^3 a_i\varepsilon_i \mid \sum_{i=1}^3 a_i = 0\} \subset \mathbb{R}^3$,

$\Phi := \{v \in V \mid (v,v) \in \{2,6\}\} \cap \oplus_{i=1}^3 \mathbb{Z}\varepsilon_i$

$\quad = \{\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j) \mid 1 \le i < j \le 3\} \cup \{\pm(2\varepsilon_i - \varepsilon_j - \varepsilon_k) \mid \{i,j,k\} = \{1,2,3\}\}$,　$|\Phi| = 6 + 6 = 12$.

$\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\, \alpha_2 := -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\}$,　$\widetilde{\alpha} = 2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$.

$W = \mathfrak{D}_6$ は位数 12 の二面体群.

2.9.6　F_4 型

補助的に格子 $L \subset V$ を導入する. $|\Phi| = 48$ で, 長さの二乗が 1 のものと 2 のものが 24 個ずつある.

$V := \mathbb{R}^4$,　$L := \oplus_{i=1}^4 \mathbb{Z}\varepsilon_i + \mathbb{Z}(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i)$,

$\Phi := \{v \in L \mid (v,v) \in \{1,2\}\} = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le 4\} \cup \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \le i \le 4\} \cup \{\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm\varepsilon_2 \pm\varepsilon_3 \pm\varepsilon_4)\}$,

$|\Phi| = 24 + 24 = 48$.

$\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3,\, \alpha_2 := \varepsilon_3 - \varepsilon_4,\, \alpha_3 := \varepsilon_4,\, \alpha_4 := \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)\}$.

$\widetilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$.

2.9.7　E_8 型

再び補助的な格子 $L \subset V$ を導入する.

$V := \mathbb{R}^8$,　$L := \{\sum_{i=1}^8 c_i\varepsilon_i \mid c_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^8 \varepsilon_i \in 2\mathbb{Z}\} + \mathbb{Z}(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^8 \varepsilon_i)$,

$\Phi := \{v \in L \mid (v,v) = 2\} = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le 8\} \cup \{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^8 \pm\varepsilon_i \mid -$ が偶数個 $\}$,

$|\Phi| = 4 * 28 + 2^8/2 = 112 + 128 = 240$.

$\Delta := \{\alpha_1 := \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8),\, \alpha_2 := \varepsilon_1 + \varepsilon_2,\, \alpha_i := \varepsilon_{i-1} - \varepsilon_{i-2}\ (3 \le i \le 8)\}$.

$\widetilde{\alpha} = \varepsilon_7 + \varepsilon_8$.

2.9.8　E_7 型

Coxeter グラフが E_8 型の部分グラフであることに注意する．$\Delta(\mathrm{E}_8) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_8\} \subset \Phi(\mathrm{E}_8) \subset \mathbb{R}^8$ と E_8 型のルート系および単純ルート集合を書く．

$$
\begin{aligned}
&V := \mathbb{R}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_7\} \subset \mathbb{R}^8,\\
&\Phi := \Phi(\mathrm{E}_8) \cap V\\
&\quad = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le 6\} \cup \{\pm(\varepsilon_7 - \varepsilon_8)\} \cup \{\pm\tfrac{1}{2}(\varepsilon_7 - \varepsilon_8 + \textstyle\sum_{i=1}^{6} \pm\varepsilon_i) \mid \sum \text{ の中の } - \text{ は奇数個 }\},\\
&|\Phi| = 4 * 15 + 2 + 2 * (6 + 20 + 6) = 126, \quad \Delta := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_7\}, \quad \widetilde{\alpha} = \varepsilon_8 - \varepsilon_7.
\end{aligned}
$$

2.9.9　E_6 型

再び E_8 型のルート系および単純ルート集合を使う．

$$
\begin{aligned}
&V := \mathbb{R}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_6\} \subset \mathbb{R}^8,\\
&\Phi := \Phi(\mathrm{E}_8) \cap V = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le 5\} \cup \{\pm\tfrac{1}{2}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \textstyle\sum_{i=1}^{5} \pm\varepsilon_i) \mid \sum \text{ の中の } - \text{ は奇数個 }\},\\
&|\Phi| = 4*10 + 2*(5+10+1) = 72, \quad \Delta := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_6\}, \quad \widetilde{\alpha} = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8).
\end{aligned}
$$

2.10　基本領域

次の §2.11 で Weyl 群の位数を計算する際，**基本領域**の概念を用いる．基本領域は Weyl 群や鏡映群に限らず「良い」群作用がある状況では大切で大変有用な概念である．

定義 2.10.1. 有限鏡映群 $W = W(\Phi) \le O(V)$ の単純ルート集合 $\Delta \subset \Phi$ を固定する．V の部分集合 C と D を次のように定める．

$$
C := \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha) > 0 \ \forall \alpha \in \Delta\}, \quad D := \overline{C} = \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha) \ge 0 \ \forall \alpha \in \Delta\}.
$$

ここで $\overline{C}$ は Euclid 位相に関する C の閉包を表す．

定理 2.10.2. $\Delta \subset \Phi$ を固定する (従って $D \subset V$ も固定)．この時 D は V の W 作用に関する**基本領域**である．即ち

(1) 任意の $\lambda \in V$ はある $\mu \in D$ と W 共役．

(2) $w \in W$ と $\lambda, \mu \in D$ について，$w\lambda = \mu$ ならば $\lambda = \mu$.

証明. (1) V 上の半順序 (2.9.1) $\mu \ge \lambda \iff \mu - \lambda \in \mathbb{Z}_{\ge 0}\Delta$ を思い出す．集合 $M := \{\mu \in V \mid \lambda$ と W 共役かつ $\mu \ge \lambda\}$ は λ を含むから空ではない．よって (Zorn の補題により) M には極大元 μ がある．任意の $\alpha \in \Delta$ について，$s_\alpha\mu$ は λ と W 共役だから，$s_\alpha\mu = \mu - 2(\mu, \alpha)/(\alpha, \alpha) \cdot \alpha$ と μ の極大性から $(\mu, \alpha) \ge 0$. よって結論を得る．

(2) $\ell(w) = n(w) := |\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)|$ (定義 1.6.2) に関する帰納法で示す．$n(w) = 0$ なら $w = e$ より自明．$n(w) > 0$ ならある $\alpha \in \Delta$ があって $w\alpha \in -\Pi$. よって補題 1.6.3 (4) より $n(ws_\alpha) = n(w) - 1$. また $\lambda, \mu \in D$ と $w\alpha \in -\Pi$ から

$$
0 \ge (\mu, w\alpha) = (w^{-1}\mu, w^{-1}w\alpha) = (\lambda, \alpha) \ge 0.
$$

これから $(\lambda, \alpha) = 0$ 及び $s_\alpha\lambda = \lambda$ を得るので $ws_\alpha\lambda = \mu$. すると帰納法の仮定から $\lambda = \mu$.

□

(2) の証明からより精密に次のことが分かる.

系 2.10.3. $\lambda, \mu \in D$ が $w\lambda = \mu$ を満たすなら, $\lambda = \mu$ かつ w は λ を固定する単純鏡映の積. 特に $\lambda \in C$ ならその固定化群 $\{w \in W \mid w\lambda = \lambda\}$ は自明.

2.11 Weyl 群の位数

定理 2.11.1. 既約な有限鏡映群の位数とルートの数は以下の表のようになる.

	A_n	B_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2	H_3	H_4	$\mathrm{I}_2(m)$
$\lvert W\rvert$	$(n+1)!$	$2^n n!$	$2^{n-1}n!$	$2^7 3^4 5$	$2^{10}3^4 5 7$	$2^{14}3^5 5^2 7$	$2^7 3^2$	12	120	120^2	$2m$
$\lvert\Phi\rvert$	$n(n+1)$	$2n^2$	$2n(n-1)$	72	126	240	48	12	30	120	$2m$

表 2.11.1 有限鏡映群の位数とルートの数

古典型 Weyl 群 (A_n, $\mathrm{B}_n = \mathrm{C}_n$, D_n) と二面体群 ($\mathrm{I}_2(m)$) は分かりやすい実現を持っており, 位数はそれから容易に計算できる. しかしその他の例外型 Weyl 群や $\mathrm{H}_{3,4}$ 型の群の実現は複雑である. 以下ではルートの集合への W の作用から例外型 Weyl 群の位数を計算してみる. なお $\mathrm{H}_{3,4}$ 型についてはレポート問題を参照せよ.

まず次の初等的な事実を思い出す.

命題 2.11.2. 有限群 G が有限集合 X に作用しているとする. $x \in X$ に対し $Gx := \{gx \mid g \in G\}$ で x の G 軌道を, $G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$ で x の固定化群を書くと

$$|G| = |Gx|\,|G_x|.$$

この主張を $G = W$, $X = \Phi \ni x = \widetilde{\alpha}$ に適用したい. $W\widetilde{\alpha}$ や $W_{\widetilde{\alpha}}$ を決定するため, 少し準備をする.

§2.9 の結晶的ルート系の実現において, ルートの長さは全て同じ (A_n, D_n, E_n 型) か二種類 ($\mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{F}_4, \mathrm{G}_2$ 型) のどちらかであることに注意する.

定義 2.11.3. 既約な結晶的ルート系について,

(1) A_n, D_n, E_n 型のルート系を **simply laced** であるという.
また $\mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{F}_4, \mathrm{G}_2$ 型のルート系を **non simply laced** であるという.

(2) non-simply-laced なルート系 Φ について, 長い方のルートを**長ルート** (long root), 短い方のルートを**短ルート** (short root) と呼ぶ. それぞれの集合を次の記号で表す.

$$\Phi_l := \{\Phi \text{ の長ルート }\}, \quad \Phi_s := \{\Phi \text{ の短ルート }\}.$$

また simply laced なルート系 Φ については, (記号の濫用だが) $\Phi_l := \Phi$ と書く.

命題 2.11.4. 既約な結晶的ルート系において, 同じ長さのルートの集合は W 作用において一つの軌道をなす.

証明. simply laced の場合, 任意のルートは単純ルートを W 共役だから, Coxeter グラフで隣り合う頂点に対応した単純ルートが W 共役であることを示せばよい. これは結局 A_2 型の場合だから, $W(\mathrm{A}_2) = \mathfrak{S}_3$ の元である巡回置換 $(1,2,3)$ で $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ が $\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ に写ることから従う.

non simply laced の場合, 長ルートに対応した頂点がラベル $m = 3$ の辺だけで連結成分をなしていて, 短ルートについても同様なので, 前半の A_2 型の議論に帰着する. □

補題 2.11.5. Φ を既約な結晶的ルート系とし, $\widetilde{\alpha} \in \Phi$ を事実 2.9.3 の最高ルートとする.

(1) $\widetilde{\alpha} \in \Phi_l$.　(2) $\widetilde{\alpha}$ は W の基本領域 D に含まれる.

証明. (1) は §2.9 のリストから分かる. 次に任意の $\alpha \in \Delta$ に対し $(\widetilde{\alpha}, \alpha) \geq 0$. 実際 $(\widetilde{\alpha}, \alpha) < 0$ だと $s_\alpha \widetilde{\alpha} > \widetilde{\alpha}$ で矛盾する. (2) はこれから従う. □

以上で命題 2.11.2 を使う準備が整った. まず命題 2.11.4 と補題 2.11.5 (1) より $W\widetilde{\alpha} = \Phi_l$ なので, その濃度 $|W\widetilde{\alpha}|$ は計算できる. また補題 2.11.5 (2) と系 2.10.3 から, 固定化群 $W_{\widetilde{\alpha}}$ は $\widetilde{\alpha}$ と直交する単純ルートに対応した単純鏡映で生成される. このことと Coxeter グラフを参照すると $W_{\widetilde{\alpha}}$ を決定することができる.

それでは具体的に $|W|$ を計算しよう.

- F_4 の場合. $|\Phi_l| = 24$. また $\widetilde{\alpha}$ は $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ と直交する. それらは C_3 型の Coxeter グラフをなしているので $W_{\widetilde{\alpha}} \simeq W(\mathrm{C}_3)$ で位数 48. よって $|W| = 24 \cdot 48 = 2^7 3^2$.
- E_6 の場合. $|\Phi_l| = 72$. $\widetilde{\alpha}$ は α_2 以外の単純ルートと直交する. よって Coxeter グラフから $W_{\widetilde{\alpha}} \simeq W(\mathrm{A}_5)$ で位数 $6!$. よって $|W| = 72 \cdot 6! = 2^7 3^4 5$.
- E_7 の場合. $|\Phi_l| = 126$. $\widetilde{\alpha}$ は α_1 以外の単純ルートと直交する. よって Coxeter グラフから $W_{\widetilde{\alpha}} \simeq W(\mathrm{D}_6)$ で位数 $2^5 6!$. よって $|W| = 126 \cdot 2^5 6! = 2^{10} 3^4 5^1 7$.
- E_8 の場合. $|\Phi_l| = 240$. $\widetilde{\alpha}$ は α_8 以外の単純ルートと直交する. よって Coxeter グラフから $W_{\widetilde{\alpha}} \simeq W(\mathrm{E}_7)$. よって $|W| = 240 \cdot 2^{10} 3^4 5^1 7 = 2^{14} 3^5 5^2 7$.

参考文献

参考書 [H90] の §2.8–2.11.

5 月 25 日分レポート問題

問題 6.1 (5 点)**.** 階数 2 の既約 Weyl 群 $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \mathrm{G}_2$ について基本領域を図示せよ.

問題 6.2 (計 20 点, [H90, §2.13])**.** 本文では扱っていない H_4 の実現について考える.

(1) $V = \mathbb{R}^4$ とその Euclid 内積を四元数体 $\mathbb{H} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ で書き直す. まず $\mathbb{R}$ 上の線形同型

$$V \longrightarrow \mathbb{H}, \quad (c_1, \ldots, c_4) \longmapsto c_1 + c_2 i + c_3 j + c_4 k$$

で両者を同一視する (記号の濫用だが $\lambda = (c_1, \ldots, c_4) = c_1 + c_2 i + c_3 j + c_4 k$ 等と書く). この時 V の Euclid 内積 $(\cdot, \cdot)$ が

$$(\lambda, \mu) = \frac{1}{2}(\lambda\overline{\mu} + \mu\overline{\lambda})$$

と書けることを確認せよ. 但し $\lambda = c_1 + c_2 i + c_3 j + c_4 k$ に対し $\overline{\lambda} := c_1 - c_2 i - c_3 j - c_4 k$.

(2) $\|\lambda\| := \lambda\overline{\lambda} \in \mathbb{R}$ と定義すればこれは (1) より $(\cdot, \cdot)$ に対応したノルムである. また $\lambda \neq 0$ なら明らかに $\lambda^{-1} = \lambda/\|\lambda\|$. この時, $\|\alpha\| = 1$ なる $\alpha \in \mathbb{H}$ を V の元とみなし鏡映 s_α を考えると, s_α の作用は $\mathbb{H}$ において次のように書けることを確認せよ.

$$s_\alpha(\lambda) = -\alpha\overline{\lambda}\alpha.$$

(3) H_4 の Coxeter グラフにラベル $m = 5$ があることを考慮して, 三角関数の値を

$$a := \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad b := \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

と表しておく．$2a = 2b+1, 4ab = 1, 4a^2 = 2a+1, 4b^2 = -2b+1$ が成立する．$\Phi \subset \mathbb{H}$ を

$$(1,0,0,0) = 1, \quad (\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1+i+j+k), \quad (a,\frac{1}{2},b,0) = a + \frac{1}{2}i + bj$$

と各成分を偶置換するか符号変換して得られるものからなる部分集合とする．$|\Phi| = 120$ 及び Φ の任意の元のノルムが 1 であることを確認せよ (「1 への偶置換と符号変換の作用」によって $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ の 8 個が現れると数える)．

(4) Φ は群 $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ の部分群であることを確かめよ．
実は $\mathbb{H}$ の有限部分群で偶数位数のものは必ずルート系になることが知られている [H90, §2.13, Lemma]．従って Φ はルート系である．

(5) $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_4\} \subset \Phi$ を

$$\alpha_1 := a - \frac{1}{2}i + bj, \quad \alpha_2 := -a + \frac{1}{2}i + bj, \quad \alpha_3 := \frac{1}{2} + bi - aj, \quad \alpha_4 := -\frac{1}{2} - ai + bk$$

で定める．これらの内積を計算して $\mathbb{H}_4$ の Coxeter グラフと合致することを確認せよ．
これと 4/20 のレポート問題 2.4 から，Δ は Φ の単純ルート集合だとわかる．以上で H_4 型 Coxeter グラフを実現するルート系の存在が分かった．

問題 6.3 (10 点, [H90, §2.13])**.** 実は $W(\mathrm{H}_3)$ は正 20 面体の対称性を表す群である (従って正 12 面体の対称性を表す群でもある)．このことから $W(\mathrm{H}_3) \simeq \{\pm 1\} \times A_5$ となることを説明せよ．但し A_5 は 5 次交代群．特に $|W(\mathrm{H}_3)| = 120$ である．

問題 6.4 (10 点)**.** §2.11 の方法と $|W(\mathrm{H}_3)| = 120$ を用いて，$W(\mathrm{H}_4)$ の位数が 120×120 であることを示せ．

6 月 01 日 有限鏡映群の不変式 1

3　有限鏡映群の不変式

今回の目標は不変式に関する Chevalley の定理 3.2.1 である．

3.1　不変式

まず (鏡映群とは限らない) 一般の群 G が有限次元線形空間 V に線形に作用している状況を考える．V の定義体を K とし, 双対空間 $V^* := \mathrm{Hom}(V, K)$ 上の対称代数を $S = S(V^*)$ と書く．

補題 3.1.1. V の基底を一つ取り, その双対基底を $x_1, \dots, x_n \in V^*$ とすると, 次のような K 代数同型が存在する．

$$S \xrightarrow{\sim} K[x_1, \dots, x_n].$$

この補題を用いて, S の元の次数 deg を x_i 達の多項式と思った時の全次数として定める．これは V の基底の取り方, ないし x_i 達の取り方によらない．そしてこの次数でもって S を次数付き K 代数と思う．

G の V への作用から V^* への作用が

$$(g \cdot f)(v) := f(g^{-1}v) \quad (g \in G,\ f \in V^*,\ v \in V).$$

で定まる．これから更に G の $S(V^*)$ への作用が自然に定まる．これもまた $g \cdot f$ と書く ($g \in G$, $f \in S$)．この作用は S の次数を保つ．

定義 3.1.2. $f \in S$ が G 不変 (G-invariant) であるとは, 任意の $g \in G$ に対し $g \cdot f = f$ となることを言う．G 不変な元の集合を $S^G := \{f \in S \mid G \text{ 不変 }\}$ で表す．

S^G は S の次数付き部分 K 代数である．以下ではそれを次のように略記する．

$$R := S^G = \{f \in S \mid G \text{ 不変 }\}.$$

S の商体 (分数体) を L と書く．補題 3.1.1 から $L \xrightarrow{\sim} K(x_1, \dots, x_n)$ である．そして G の S への作用から自然に L への作用も定まる．従って L の元の G 不変性も同様に定義される．G 不変な L の元の集合を次の記号で表す．

$$L^G := \{f \in L \mid G \text{ 不変 }\}.$$

命題 3.1.3. K の標数は 0 であるとし, G は有限群だと仮定する．この時 R の商体は L^G と一致する．また R の商体の (K 上の) 超越次元は n.

証明. R の商体が L^G に含まれるは明らか．逆の包含関係を示す．$p/q \in L^G$ $(p, q \in S)$ とする．分母と分子に $\prod_{g \neq 1}(g \cdot p)$ をかけると, 分子は $p' := \prod_{g \in G}(g \cdot p)$ となって G 不変なので, 分母 $q' := q \prod_{g \neq 1}(g \cdot p)$ も G 不変．よって $p/q = p'/q'$ は R の商体の元である．

後半の主張については L^G の超越次元が n であることを示せばよいが, L/L^G が G を Galois 群とする有限次 Galois 拡大であることから L^G の超越次元は L の超越次元 n と等しい．　□

3.2 不変式に関する Chevalley の定理

V を n 次元 Euclid 空間, $W \leq O(V)$ を有限鏡映群とする．§3.1 の諸定義を $K = \mathbb{R}$, $G = W$ に適用する．特に

$$S = S(V^*) \simeq \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n], \quad R = S^W$$

はともに次数付き $\mathbb{R}$ 代数である．R を W の**不変式環**と呼ぶ．

定理 3.2.1 (Chevalley の定理). R は代数的に独立な n 個の斉次多項式で ($\mathbb{R}$ 代数として) 生成される．

定義 3.2.2. R の代数的に独立な斉次生成元 $f_1, \ldots, f_n$ の組を**基本不変式** (basic invariants) の組という．

証明には幾つか準備を必要とする．

3.2.1 有限生成性

ひとまず §3.1 の一般的状況に戻って, 有限群 G が体 K 上の有限次元線形空間 V に線形に作用しているものとする．記号 $S := S^*(V)$, $R := S^G$ を用いる．

$R^+ \subset R$ を定数項が 0 である元からなる集合とする．R^+ は R のイデアルである．また $I := SR^+ \subset S$ を R^+ の生成する S のイデアルとする．

命題 3.2.3. $|G|$ が K の標数で割り切れないと仮定する．$f_1, \ldots, f_r$ を R^+ の斉次元であって S のイデアル $I := SR^+$ を生成するものとする．この時 R は K 代数としてこれらで生成される．

証明の前に

注意. Chevalley の定理 3.2.1 の証明はこの命題 3.2.3 を使って行う．つまり R^+ の有限生成系で極小なものを探せば, この命題から自動的に R の生成系になる．あとはこの生成系が代数的に独立であることを示せばよい．

定義 3.2.4. $|G|$ が K の標数で割り切れないと仮定する．**Raynolds 作用素** $\rho : S \to R = S^G$ を次で定義する．

$$\rho(f) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot f.$$

K の標数の仮定により ρ が well-defined であることに注意する．

補題 3.2.5. Raynolds 作用素は以下の性質を満たす．

(1) $\rho(f) \in R$ (ρ は R への写像)．また ρ は K 線形．

(2) $f \in S$, $g \in R$ なら $\rho(fg) = \rho(f)g$.

補題の証明はレポート問題 7.2 とする．

命題 3.2.3 の証明. 任意の $f \in R$ が f_i 達の多項式で書けることを示せばよい．f は斉次元だと仮定してよい．$\deg f$ の帰納法で示す．$\deg f = 0$ の場合は定数だから自明．

$\deg f > 0$ と仮定する．この時 $f \in I$ なので $f = s_1 f_1 + \cdots + s_r f_r$ $(s_i \in S)$ と書ける．f, f_i は全て斉次なので s_i 達も斉次と仮定できる (レポート問題 7.3)．両辺に Raynolds 作用素をあてて補題 3.2.5 を用いると

$f = \rho(s_1)f_1 + \cdots + \rho(s_r)f_r$. $\rho(s_i)$ は次数が $\deg f$ 未満の R の斉次元だから, 帰納法の仮定より f_i 達の多項式で書ける．よって f 自身も f_i 達の多項式で書ける． □

3.2.2　環と加群の一般論

定義 3.2.6. R を可換環とする．

(1) 任意の部分加群が有限生成である R 加群を Noether R 加群と呼ぶ.

(2) R が R 加群として Noether である時, R を Noether (可換) 環と呼ぶ.

定理 3.2.7 (Hilbert の基底定理). R を Noether 可換環とすると, R 上有限生成な可換代数は Noether 環である．特に体上の有限生成可換代数は Noether 環.

3.2.3　Chevalley の定理 3.2.1 の証明

§3.1 の状況に戻る．つまり $W \subset O(V)$ は有限鏡映群, $S := S(V^*) \simeq \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, $R := S^W$ とする．§3.2.1 と同様に, $R_+ \subset R$ を正の次数の斉次元が生成される R のイデアル, $I := SR_+ \subset S$ を R_+ が生成する S のイデアルとする．

S は多項式環だから Hilbert の基底定理 3.2.7 より Noether 環．よってそのイデアル I は有限生成で, 特に (極小な) 生成系 $f_1, \ldots, f_r \in S$ が取れる．f_i 達は斉次元で $\deg f_i > 0$ と仮定できる．

命題 3.2.8. f_i 達は代数的に独立.

この命題 3.2.8 が示せれば, 命題 3.2.3 より f_i 達は R を生成する．つまり $R = \mathbb{R}[f_1, \ldots, f_r]$. すると命題 3.1.3 から R の商体の超越次元は $r = n$ となる．これで Chevalley の定理の証明が終わる．

命題 3.2.8 の証明. f_i 達の任意の代数関係式 $h(f_1, \ldots, f_r) = 0$ を考える．$h = h(y_1, \ldots, y_r) \in \mathbb{R}[y_1, \ldots, y_r]$ は r 変数の多項式で $h \neq 0$ である．

$f_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ の次数を d_i として, $\mathbb{R}[y_1, \ldots, y_r]$ の次数を $\deg' y_i := d_i$ で定義することができる．すると h はこの $\deg'$ に関して斉次だと仮定してよい．以下 $d := \deg' h$ と書く．

ここで各 $k = 1, \ldots, n$ について, 関係式 $h(f_1, \ldots, f_r) = 0$ の両辺を x_k で微分して

$$\sum_{i=1}^{r} h_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = 0, \quad h_i := \frac{\partial h}{\partial y_i}(f_1, \ldots, f_r). \tag{3.2.1}$$

各 h_i は $\deg'$ について斉次であり, また $\deg' h_i = d - d_i$.

必要なら h_i 達の添え字を付け直して, $h_1, \ldots, h_m$ が R のイデアル $(h_1, \ldots, h_r)$ の極小な生成系だと仮定する．但し $m \leq r$. すると各 $i > m$ について

$$h_i = \sum_{j=1}^{m} g_{ij} h_j \quad (g_{ij} \in R) \tag{3.2.2}$$

と書ける．$\deg' h_i = d - d_i$ より, 必要なら非斉次項を消去して, g_{ij} は斉次元だと仮定できる．この時 $\deg g_{ij} = d_j - d_i$. (3.2.2) を (3.2.1) に代入して

$$\sum_{i=1}^{m} h_i p_i := 0, \quad p_i := \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{j=m+1}^{r} g_{ji} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}. \tag{3.2.3}$$

p_i 達は S の斉次元であって $\deg p_i = d_i - 1$ であることに注意する．ここで次の補題を用意する．

補題． $h_1, \ldots, h_m \in R = S^W$ に対し $J := (h_2, \ldots, h_m) \subset R$ を R のイデアルとする．$h_1 \notin J$ かつ

$$h_1 p_1 + \cdots + h_m p_m = 0$$

なる $p_1, \ldots, p_r \in S$ が存在すると仮定する．この時 $p_1 \in I = SR_+$.

補題の証明は後で与える．$h_1, \ldots, h_m$ が極小な生成系なので補題を (3.2.3) に適用できて，$p_1 \in I$．よって

$$p_1 \;=\; \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \sum_{j=m+1}^{r} g_{j1}\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \;=\; \sum_{i=1}^{r} f_i q_i \quad (q_i \in S)$$

と書ける．この等式の両辺を x_k 倍して k に関して和を取れば

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{j=m+1}^{r} g_{j1}\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{r} f_i q_i.$$

ここで斉次多項式に関する Euler の公式

$$\vartheta f(x) \;=\; f(x)\cdot(\deg f), \quad \vartheta \;:=\; \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

を使って最後の等式を書き直すと

$$d_1 f_1 + \sum_{j=m+1}^{r} d_j g_{j1} f_j \;=\; \sum_{i=1}^{r} f_i r_i \quad r_i \;:=\; q_i \sum_{k=1}^{n} x_k. \tag{3.2.4}$$

左辺の各項は次数 d_1 の斉次元で，一方で $\deg r_1 > 0$ だから，右辺の $f_1 r_1$ は $\sum_{i=2}^{n} f_i r_i$ のうち次数が d_1 でない項と打ち消しあう．このことを考慮して (3.2.4) を整理し直すと $f_1 = \sum_{i=2}^{r} f_i s_i$ の形に書き直せる．つまり $f_1 \in (f_2, \ldots, f_r) \subset S$．しかしこれは証明の最初の $f_1, \ldots, f_r$ の取り方と矛盾する．□

補題の証明は次回与える．

参考文献

参考書 [H90] の §§3.1–3.5.

6 月 01 日分レポート問題

問題 7.1 (5 点)**.** §3.1 について,

(1) 次数付き (可換) 環の定義を述べ, 多項式環が次数付き環であることを説明せよ.

(2) 線形空間 V の対称代数 $S(V)$ の定義を述べよ.

(3) 補題 3.1.1 を証明せよ.

問題 7.2 (5 点)**.** 補題 3.2.5 を示せ.

問題 7.3 (5 点)**.** 命題 3.2.3 の証明にある「s_i 達も斉次と仮定できる」の部分を説明せよ.

問題 7.4 (5 点)**.** A_{n-1} 型有限鏡映群, 即ち対称群 $W = \mathfrak{S}_n$ の不変式環を考える. $\mathfrak{S}_n \leq O(\mathbb{R}^n)$ とみなすと, $R = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ は対称多項式のなす環に他ならない. その斉次な生成元の取り方は無数にあるが, 以下のものが古典的に知られている.

- 基本対称多項式 (elementary symmetric polynomials):

$$e_1 := \sum_{1 \leq i \leq n} x_i, \ e_2 := \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j, \ e_3 := \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} x_i x_j x_k, \ \ldots, \ e_n := x_1 \cdots x_n.$$

- 完全対称多項式 (complete symmetric polynomials):

$$h_1 := \sum_{1 \leq i \leq n} x_i, \ h_2 := \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_i x_j, \ h_3 := \sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq n} x_i x_j x_k, \ \ldots, \ h_n := \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_n \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$$

- 冪和対称多項式 (power sum symmetric polynomials):

$$p_1 := \sum_{1 \leq i \leq n} x_i, \ p_2 := \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^2, \ p_3 := \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^3, \ \ldots, \ p_n := \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^n.$$

(1) これらが実際に R の生成元であることを示せ.

(2) **整数係数**の対称多項式環を $R' := \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ と表す. $R' = \mathbb{Z}[e_1, \ldots, e_n]$ 及び $R' = \mathbb{Z}[h_1, \ldots, h_n]$ が成立するが, $R' \neq \mathbb{Z}[p_1, \ldots, p_n]$ となることを示せ.

次回

6 月 08 日は休講です (8 日午後から名大祭準備のため). 次回は 6 月 15 日です.

6 月 15 日 有限鏡映群の不変式 2

$W \leq O(V)$ を有限鏡映群とし, $S := S(V^*)$, $R := S^W$ とする. R を不変式環と呼ぶのであった.

3.2　Chevalley の定理

Chevalley の定理 3.2.1 の証明で残っていた, 次の補題を証明する.

補題. $h_1, \ldots, h_m \in R$ に対し $J := (h_2, \ldots, h_m) \subset R$ を R のイデアルとする. $h_1 \notin J$ かつ

$$h_1 p_1 + \cdots + h_m p_m \;=\; 0 \tag{3.2.1}$$

なる $p_1, \ldots, p_m \in S$ が存在すると仮定する. この時 $p_1 \in I = SR^+$.

補題の証明. まず h_1 が $h_2, \ldots, h_m$ の生成する S のイデアルに含まれないことに注意する. 実際, もし含まれていれば $h_1 = h_2 g_2 + \cdots + h_m g_m$ となる $g_i \in S$ があるが, Raynolds 作用素 (定義 3.2.4) $\rho(r) := \frac{1}{|W|}\sum_{w\in W} w \cdot r$ をあてると $h_1 = h_2\rho(g_2) + \cdots + h_m\rho(g_m)$ となって, $\rho(g_i) \in R$ より $h_1 \in J$ となり矛盾する.

$p_1 \in I$ を $\deg p_1$ に関する帰納法で示す. $\deg p_1 = 0$ の時は $p_1 = 0$ となって自明なので $\deg p_1 > 0$ と仮定する.

$s = s_\alpha \in W$ を鏡映とすると, $s \cdot p_i - p_i$ は超平面 $H_\alpha \subset V$ 上で 0. 従って H_α を定義する 1 次式を $l \in S$ とすれば

$$s \cdot p_i - p_i \;=\; l q_i \quad (q_i \in S) \tag{3.2.2}$$

となる (レポート問題 8.1). ここで (3.2.1) の両辺に s を作用させて $h_1(s \cdot p_1) + \cdots + h_r(s \cdot p_r) = 0$. この式と (3.2.1) の差を取り, (3.2.2) を代入して整理すると $l(h_1 q_1 + \cdots + h_r q_r) = 0$. $l \neq 0$ だから

$$h_1 q_1 + \cdots + h_r q_r = 0.$$

ここで (3.2.2) の左辺は $\deg p_i$ の斉次元だから, q_i も斉次元で $\deg q_i < \deg p_i$. 特に $\deg q_1 < \deg p_1$ なので帰納法の仮定が使えて $q_1 \in I$. 再び (3.2.2) より $s \cdot p_1 \equiv p_1 \pmod{I}$.

これまでの議論で $s = s_\alpha \in W$ は任意に取った. 鏡映で W は生成されるので, 任意の $w \in W$ について $w \cdot p_1 \equiv p_1 \pmod{I}$. よって Raynolds 作用素 $\rho(p_1) = \frac{1}{|W|}\sum_{w\in W} w \cdot p_1$ について $\rho(p_1) \equiv p_1 \pmod{I}$. これと $\rho(p_1) \in R^+$ より $p_1 \in I$. □

注意. Chevalley の定理 3.2.1 の証明で W が鏡映群であることを使っているのは, 今示した補題の所のみである.

注意. Chevalley の定理の逆と見なせる, 次の **Shephard-Todd の定理**が成立する.

「V を Euclid 空間, G を $\mathrm{GL}(V)$ の有限部分群とする. $S = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ の G 不変部分環 S^G が n 個の代数的に独立な斉次多項式で生成されると仮定する. この時 G はそれに含まれる (V の) 鏡映で生成される. 特に G は有限鏡映群である.」

この講義では Shephard-Todd の定理は証明しない. 参考書の [H90, §3.11] もしくは次の日本語のテキストに証明が与えられている.

堀田, 渡辺, 庄司, 三町「群論の進化」朝倉書店 (2004 年),
第 2 章 有限群の不変式論 (渡辺敬一), §2.5.

3.3　基本不変式の次数

例 3.3.1 (レポート問題 7.4)**.** A 型有限鏡映群, 即ち対称群 $W = \mathfrak{S}_n$ の不変式環を考える. $\mathfrak{S}_n \le O(\mathbb{R}^n)$ とみなすと, $R = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ は対称多項式のなす環に他ならない. その (斉次な) 生成元の取り方として以下のものが古典的に知られている. どの生成系についても次数の集合は $\{1, \ldots, n\}$ になることに注意する.

- 基本対称多項式 (elementary symmetric polynomials):

$$e_1 := \sum_{1 \le i \le n} x_i,\ e_2 := \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j,\ e_3 := \sum_{1 \le i < j < k \le n} x_i x_j x_k,\ \ldots,\ e_n := x_1 \cdots x_n.$$

- 完全対称多項式 (complete symmetric polynomials):

$$h_1 := \sum_{1 \le i \le n} x_i,\ h_2 := \sum_{1 \le i \le j \le n} x_i x_j,\ h_3 := \sum_{1 \le i \le j \le k \le n} x_i x_j x_k,\ \ldots,\ h_n := \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_n \le n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$$

- 冪和対称多項式 (power sum symmetric polynomials):

$$p_1 := \sum_{1 \le i \le n} x_i,\ p_2 := \sum_{1 \le i \le n} x_i^2,\ p_3 := \sum_{1 \le i \le n} x_i^3,\ \ldots,\ p_n := \sum_{1 \le i \le n} x_i^n.$$

命題 3.3.2. $f_1, \ldots, f_n$ 及び $g_1, \ldots, g_n$ を各々 R の代数的独立で斉次な生成元とする. $d_i := \deg f_i$, $e_i := \deg g_i$ とおく. すると $\{d_1, \ldots, d_n\} = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

証明. 各 f_i は $g_1, \ldots, g_n$ の多項式で書けて, また各 g_j も $f_1, \ldots, f_n$ の多項式で書ける. 従って偏微分の関係式 $\partial f_i / \partial f_j = \delta_{i,j}$ は

$$\sum_{k=1}^{n} (\partial f_i / \partial g_k)(\partial g_k / \partial f_j) = \delta_{i,j}$$

と書き直せて, これから行列 $(\partial f_i / \partial g_j)_{i,j}$ 及び $(\partial g_i / \partial f_j)_{i,j}$ は互いの逆行列になることが分かる. 特に $\det(\partial f_i / \partial g_j)_{i,j} \neq 0$. これは行列式を展開した時少なくとも 1 つの項が 0 でないことを意味するから, ある置換 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ があって

$$\prod_{i=1}^{n} \partial f_i / \partial g_{\pi(i)} \neq 0.$$

特に各 f_i を $g_1, \ldots, g_n$ の多項式で書いた時 $g_{\pi(i)}$ が必ず現れる. すると次数を比較して $d_i \ge e_{\pi(i)}$ が任意の i について成立する.

最後に得られた不等式を i に関して和をとると, π が置換であることに注意して $\sum_{i=1}^n d_i \ge \sum_{i=1}^n e_i$. 同様の議論を $(\partial g_i / \partial f_j)_{i,j}$ に適用して $\sum_{i=1}^n e_i \ge \sum_{i=1}^n d_i$ となるので $\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n e_i$. よって任意の i について $d_i = e_{\pi(i)}$. □

定義 3.3.3. 有限鏡映群 W の**次数** (degrees) とは不変式環 $R = S(V^*)^W$ の生成元の次数 $d_1, \ldots, d_n$ のことをいう.

注意. $S = S(V^*) = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ と書くと, $W \le O(V)$ より $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \in R = S^W$ である. 実はこれから 2 がいつも W の次数に現れることが分かる.

3.4　次数の性質

$W \leq O(V)$ を有限鏡映群とする．$V_{\mathbb{C}}$ を線形空間 V の複素化とすると各 $w \in W$ は $w \in \mathrm{GL}(V_{\mathbb{C}})$ とみなせる．t を不定元として

$$\det(1 - tw) \;=\; (1 - c_1 t) \cdots (1 - c_n t)$$

と $\det(1 - tw)$ を因数分解すれば, $c_i \in \mathbb{C}$ は w の固有値である．

命題 3.4.1. $d_1, \ldots, d_n$ を W の次数とすると, 形式冪級数環 $\mathbb{C}[[t]]$ で次の等式が成立する．

$$\frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \frac{1}{\det(1 - tw)} \;=\; \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - t^{d_i}}.$$

証明. ひとまず $w \in W$ を固定する．$S \simeq \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ の複素化を $S_{\mathbb{C}} = S(V_{\mathbb{C}}^*) \simeq \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ と書く．つまり z_i 達は $V_{\mathbb{C}}^*$ の基底である．各 z_i は w の固有ベクトルだと仮定できる．その固有値を c_i とする．示すべき等式の左辺の $1/\det(1 - tw)$ は次のように展開できる．

$$\frac{1}{\det(1 - tw)} \;=\; \frac{1}{1 - c_1 t} \cdots \frac{1}{1 - c_n t} \;=\; \sum_{k \geq 0} t^k \sum_{k_1 + \cdots + k_n = k} c_1^{k_1} \cdots c_n^{k_n}.$$

各 $c_1^{k_1} \cdots c_n^{k_n}$ は $z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n} \in S_{\mathbb{C}}$ の w 固有値である．よって $S_{\mathbb{C},k} \subset S_{\mathbb{C}}$ を k 次斉次部分とすれば

$$\sum_{k_1 + \cdots + k_n = k} c_1^{k_1} \cdots c_n^{k_n} \;=\; \mathrm{tr}_{S_{\mathbb{C},k}}\, w.$$

ここで次の補題に注意する．

補題 3.4.2. G を有限群, E を標数 0 の体上の有限次元 G 表現とする．この時 G 不変部分 $E^G \subset E$ の次元は

$$\dim E^G \;=\; \mathrm{tr}_E\, p, \quad p \;:=\; \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g.$$

補題の証明は後回しにする．これから

$$\frac{1}{|W|} \sum_{k_1 + \cdots + k_n = k} c_1^{k_1} \cdots c_n^{k_n} \;=\; \dim S_{\mathbb{C},k}^W. \tag{3.4.1}$$

一方 $S^W = \mathbb{R}[f_1, \ldots, f_n]$ と不変式環の生成元を取ると $S_{\mathbb{C},k}^W = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n]$ となるので, $\{f_1^{e_1} \cdots f_n^{e_n} \mid \sum e_i \deg f_i = k\}$ は $S_{\mathbb{C},k}^W$ の基底である．すると $\dim S_{\mathbb{C},k}^W$ の母関数が

$$\sum_{k \geq 0} t^k \dim S_{\mathbb{C},k}^W \;=\; \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - t^{d_i}} \tag{3.4.2}$$

となることが分かる．式 (3.4.1) と (3.4.2) より結論を得る．　□

補題 3.4.2 の証明. 任意の $g \in G$ に対し $gp = p$ なので $p^2 = p$．よって p の最小多項式は $x^2 - x$．従って p は対角化可能で固有値は 0 と 1．$E = E_0 \oplus E_1$ を固有分解とすると $\mathrm{tr}_E\, p = \dim E_1$．よって $E_1 = E^G$ を示せばよい．$e \in E_1$ なら任意の $g \in G$ に対して $e = p \cdot e = gp \cdot e = g \cdot e$ なので $E_1 \subset E^G$．逆に $e \in E^G$ なら $p \cdot e = e$ が分かるので $E^G \subset E_1$．　□

この命題 3.4.1 の応用として

定理 3.4.3. $d_1, \dots, d_n$ を W の次数とし, N を W に含まれる鏡映の数とすると

$$d_1 d_2 \cdots d_n = |W|, \quad d_1 + d_2 + \cdots + d_n = N + n.$$

証明. $w \in W \le O(V)$ であって, n 個の w 固有値のうち $n-1$ 個が 1 であるものは単位元 e もしくは鏡映 s に限られる. 実際, $\mathrm{tr}_V\, w$ は実数だから残り 1 個の固有値も実数で, w が有限位数だからその値は ± 1 で, 単位元か鏡映だと分かる.

命題を思い出して $\det(1-tw)$ を考えると, $\det(1-te) = (1-t)^n$, $\det(1-ts) = (1-t)^{n-1}(1+t)$ は明らかで, また上の議論から, これら以外の $w \in W$ については $\det(1-tw)$ は $(1-t)^{n-1}$ を因子に持たないことが分かる. 従って, 命題 3.4.1 の等式の両辺を $(1-t)^n$ 倍すると

$$\frac{1}{|W|}\left(1 + N\frac{1-t}{1+t} + (1-t)^2 g(t)\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+t+\cdots+t^{d_i-1}}$$

と書ける. 但し $g(t)$ は分母が $1-t$ で割れない有理式. この等式で $t=1$ とすれば $|W| = d_1 \cdots d_n$ を得る.

またこの等式を t で微分すれば

$$-\frac{2N}{|W|}\frac{1}{(1+t)^2} + h(t) = \sum_{j=1}^{n} -\frac{1+2t+\cdots+(d_j-1)t^{d_j-2}}{1+t+\cdots+t^{d_j-1}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+t+\cdots+t^{d_i-1}}.$$

但し $h(t)$ は分子が $1-t$ で割り切れる有理式. 得られた等式で $t=1$ とすれば

$$-N/(2|W|) = -\sum_{i=1}^{n} (d_j - 1)/(2d_1 \cdots d_n)$$

となり, これから結論を得る. □

注意. $\Phi \supset \Pi$ を W のルート系および正ルート集合とすると, 実は $N = |\Pi| = |\Phi|/2$.

3.5 基本不変式の例

具体的に基本不変式の組を見つける際, 次の命題が有効である.

命題 3.5.1. $g_1, \dots, g_n \in R = S^W$ が斉次で代数独立かつ $\prod_{i=1}^{n} \deg g_i = |W|$ ならば, g_i 達は基本不変式の組.

証明. $e_i := \deg g_i$ とおく. $e_1 \le \cdots \le e_n$ と仮定してよい. $f_1, \dots, f_n$ を基本不変式の組であって $d_1 := \deg f_1 \le \cdots \le d_n := \deg f_n$ となるものとする. 任意の $i = 1, \dots, n$ について $e_i \ge d_i$ であることが示せれば, 前節 §3.4 の定理から $\prod_i d_i = |W| = \prod_i e_i$ なので任意の i について $d_i = e_i$. よって S^W の各斉次部分 S^W_k について $\dim(\langle g_1, \dots, g_n\rangle \cap S^W_k) = \dim(\langle f_1, \dots, f_n\rangle \cap S^W_k)$ が分かるので $\langle g_1, \dots, g_n\rangle \cap S^W_k = S^W_k$. つまり g_i 達は S^W を生成する.

g_1 は f_i 達の多項式でかけるから $e_1 \ge d_1$. $e_i < d_i$ となる i が存在すると仮定して, そのうち最小のものを k とすると, $g_1, \dots, g_k$ は $f_1, \dots, f_{k-1}$ の多項式で書ける (レポート問題 8.4). しかし $g_1, \dots, g_k$ 達が生成する有理関数体 $\mathbb{R}(g_1, \dots, g_k)$ の $\mathbb{R}$ 上の超越次数は k. 従って超越次数が $k-1$ である $\mathbb{R}(f_1, \dots, f_{k-1})$ に含まれることはない. □

上の命題は代数独立性を仮定していた．代数独立性については次の **Jacobian 判定法**がある．

事実 3.5.2. K を標数 0 の体とする．$f_1, \dots, f_n \in K[x_1, \dots, x_n]$ が代数的に独立であることと

$$J(f_1, \dots, f_n) := \det(\partial f_i / \partial x_j)_{i,j=1}^n$$

が 0 でないことは同値である．

例. A_n 型有限鏡映群 $W = \mathfrak{S}_{n+1} \le O(V)$, $V = \{(a_i) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 0\}$ の基本不変式を見つけよう．$S = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{n+1}]/(x_1 + \cdots + x_{n+1})$ と書ける．冪和対称多項式

$$f_i := p_{i+1} = x_1^{i+1} + \cdots + x_{n+1}^{i+1} \quad (1 \le i \le n)$$

を取ると $d_i = \deg f_i = i + 1$ で $\prod_{i=1}^n d_i = (n+1)! = |W|$．よって代数独立性を示せば命題が使える．$\partial f_i / \partial x_j = (i+1)x_j^i - (i+1)x_{n+1}^i$ より

$$\begin{aligned}
J(f_1, \dots, f_n) &= (n+1)! \begin{vmatrix} x_1 - x_{n+1} & x_2 - x_{n+1} & \cdots & x_n - x_{n+1} \\ x_1^2 - x_{n+1}^2 & x_2^2 - x_{n+1}^2 & \cdots & x_n^2 - x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n - x_{n+1}^n & x_2^n - x_{n+1}^n & \cdots & x_n^n - x_{n+1}^n \end{vmatrix} \\
&= (n+1)!(-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = (n+1)!(-1)^n \prod_{1 \le i < j \le n+1} (x_j - x_i) \\
&= (n+1)! \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \prod_{i=1}^n (x_i + z), \quad z := x_1 + x_2 + \cdots + x_n.
\end{aligned}$$

よって Jacobian は 0 でない．従って $f_1, \dots, f_n$ が基本不変式の組であることが分かった．特に $\mathfrak{S}_{n+1} \le O(V)$ の次数は $2, \dots, n+1$.

参考文献

参考書 [H90] の §§3.7–3.12.

6 月 15 日分レポート問題

問題 8.1 (5 点)**.** (3.2.2) 式 $s_i \cdot p_i - p_i = lq_i$ を示せ.

問題 8.2 (5 点)**.** Euclid 空間 V 上での -1 倍作用素を i と書く. 有限鏡映群 $W \subset O(V)$ について, $i \in W$ であることと W の次数が全て偶数であることが同値であることを示せ.

問題 8.3 (5 点)**.** 定理 3.4.3 の $d_1 d_2 \cdots d_n = |W|$, $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = N + n$ を A_n 型有限鏡映群の場合に確かめよ.

問題 8.4 (5 点)**.** 命題 3.5.1 の証明で「$g_1, \ldots, g_k$ は $f_1, \ldots, f_{k-1}$ の多項式で書ける」の部分を示せ.

問題 8.5 (10 点)**.** 事実 3.5.2 (Jacobian 判定法) を示せ.

問題 8.6 (5 点)**.** B_n 型有限鏡映群 W は $S(V^*) = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ に x_i 達の置換及び符号変換で作用する. W の基本不変式の組として

$$f_i := x_1^{2i} + \cdots + x_n^{2i} \quad (1 \le i \le n)$$

が取れることを示せ. (Jacobian は $2^n n! x_1 \cdots x_n \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j^2 - x_i^2)$ になる.)

問題 8.7 (5 点)**.** D_n 型有限鏡映群 W は $S(V^*) = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ に x_i 達の置換及び偶数個の符号変換で作用する. W の基本不変式の組として

$$f_i := x_1^{2i} + \cdots + x_n^{2i} \quad (1 \le i \le n-1), \quad f_n := x_1 \cdots x_n$$

が取れることを示せ. (Jacobian は $(-2)^{n-1}(n-1)! \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j^2 - x_i^2)$ になる.)

出典について

問題 8.2 は [H90, §3.7, Exercise], 問題 8.6 と 8.7 は [H90, §3.12] の本文から引用しました.

6 月 22 日 有限鏡映群の不変式 3

有限鏡映群 $W = W(\Phi) \leq O(V)$ は既約かつ本質的と仮定する．つまり対応する Coxeter グラフ $\Gamma(W, \Delta)$ が連結で, かつ V の W 固定点が存在しない $(V^W = \emptyset)$ と仮定する．この時 W の次数は **Coxeter 元**と呼ばれる特別な元の固有値から計算できることを説明する．

以下 n を W の階数 (定義 1.3.5), つまり単純ルート集合 $\Delta \subset \Phi$ の濃度とする．

3.6　Coxeter 元, Coxeter 数, 指数

定義 3.6.1. W のルート系 Φ とその単純ルート集合 $\Delta \subset \Phi$ を固定する．また Δ の元の番号付け $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ も固定する．$s_i = s_{\alpha_i} \in W$ を対応する単純鏡映とする．この状況で

$$s_1 s_2 \cdots s_n \in W$$

を (考えている Δ とその番号付けに関する) **Coxeter 元** (Coxeter element) と呼ぶ.

命題 3.6.2. 任意の Coxeter 元は W 共役である．

証明. 任意の単純ルート集合は W 共役なので, 集合 $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ は固定して, 二つの番号付けに対応する二つの Coxeter 元が W 共役であることを示せばよい．

番号付けの巡回置換が Coxeter 元の共役に対応することは

$$s_n s_1 \cdots s_{n-1} = s_n (s_1 \cdots s_n) s_n^{-1}$$

から分かる．また $s_i s_{i+1} = s_{i+1} s_i$ なら番号付けの隣接互換 $(i, i+1)$ で Coxeter 元が不変であることも明らか．そこで番号付けの任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ がこの二種類の置換の合成で書けることを言えば十分．

n に関する帰納法で示す．$n = 1, 2$ なら自明．$n > 2$ と仮定する．必要なら予め巡回置換を施して, s_n に対応する Coxeter グラフの頂点が端の頂点, 即ち 1 つの辺で他の頂点 s_j だけと結ばれていると仮定してよい．任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ を考える．$j \neq n-1$ なら $\mathfrak{S}_n = \langle (1, 2, \ldots, n), (n-1, n) \rangle$ が成り立つ (レポート問題 9.1) ことから結論が成立する．$j = n-1$ なら $\mathfrak{S}_n = \langle (1, 2, \ldots, n), (1, n) \rangle$ を使えばよい．　□

定義 3.6.3. Coxeter 元の位数を W の **Coxeter 数** (Coxeter number) と呼び h と書く．

例. (1) 二面体群 $\mathfrak{D}_m = W(\mathrm{I}_2(m)) = \langle \alpha, \beta \rangle$ の Coxeter 数は $s_\alpha s_\beta$ が $\pm 2\pi/m$ 回転であることから $h = m$.

(2) 対称群 $\mathfrak{S}_{n+1} = W(\mathrm{A}_n)$ の Coxeter 数は次の関係式から $h = n+1$.

$$s_1 s_2 \cdots s_n \;=\; (1,2)(2,3)\cdots(n, n+1) \;=\; (1, 2, \ldots, n+1).$$

定義 3.6.4. h を W の Coxeter 数, ζ_h を 1 の原始 h 乗根とする．Coxeter 元の固有値を

$$\zeta_h^{m_i}, \quad 0 \leq m_1 \leq \cdots \leq m_n < h$$

と書いたときの m_i 達を W の**指数** (exponents) と呼ぶ.

例 3.6.5. $\mathfrak{S}_{n+1} = W(\mathrm{A}_n)$ の Coxeter 元は置換行列 $P = (p_{ij}) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{n+1})$, $p_{ij} = \delta_{j-i,1} + \delta_{i-j,n}$ に対応する．その固有値は $\det(tI_{n+1} - P) = t^{n+1} - 1 = 0$ より ζ_{n+1}^i $(i = 0, \ldots, n)$. $W(\mathrm{A}_n) \leq O(V)$, $V \subsetneq \mathbb{R}^{n+1}$ に注意して, $W(\mathrm{A}_n)$ の指数は $1, 2, \ldots, n$.

$W(\mathrm{A}_n)$ の次数は $2, 3, \ldots, n+1$ であった．実は一般に次の定理が成立する．証明は次回与える．

定理 3.6.6. 既約かつ本質的な有限鏡映群 $W \leq O(V)$ の次数 $d_1, \ldots, d_n$ と指数 $m_1, \ldots, m_n$ について

$$d_i \;=\; m_i + 1.$$

3.7 指数の性質

以下 W の Coxeter 元を $w = s_1 \cdots s_n$ と書く．

補題 3.7.1. w の固有値に 1 は現れない．特に全ての指数 m_i は正．また $\{h - m_i\}_{i=1}^n = \{m_i\}_{i=1}^n$ である．従って $\sum_{i=1}^n m_i = nh/2$.

証明． $wv = v$ なる $v \in V$ について $s_2 \cdots s_n v = s_1 v$. しかし

$$s_2 \cdots s_n v \equiv v \pmod{\mathbb{R}\alpha_2 + \cdots + \mathbb{R}\alpha_n}, \quad s_1 v \equiv v \pmod{\mathbb{R}\alpha_1}$$

及び α_i 達が線形独立であることから $s_2 \cdots s_n v = v = s_1 v$. 特に $(v, \alpha_1) = 0$. この議論を繰り返して任意の $i = 1, \ldots, n$ について $(v, \alpha_i) = 0$ が言えるので $v = 0$.

後半について，w は $\mathbb{R}$ 上の線形変換だから虚数の固有値はその複素共役と対で現れる．1 が固有値でないことは分かっていて，また $-1 = \zeta_h^{h/2} = \zeta_h^{h-h/2}$ だから，$\{h - m_i\}_{i=1}^n$ は $\{m_i\}_{i=1}^n$ の置換だと分かる． □

命題 3.7.2. W の指数 $m_1, \ldots, m_n$ について $m_1 = 1$ かつ $m_n = h - 1$.

この命題の証明にはいくつか準備が必要である．最初にある特別な平面 $P \subset V$ を用意する．

P の構成． まず単純ルートを適宜番号付けして，$s_1, \ldots, s_r$ が互いに可換かつ $s_{r+1}, \ldots, s_n$ も互いに可換となるようにする．これは Coxeter グラフ $\Gamma(W, \Delta)$ の頂点集合を二色に色分けして，どの隣接頂点の対も別々の色にすることと同値であるが，考えているグラフが木 (tree graph) なのでいつでも可能である．

$y, z \in W$ を $y := s_1 \cdots s_r$, $z := s_{r+1} \cdots s_n$ で定めれば $yz = w$ かつ $y^2 = z^2 = e$.

$\omega_1, \ldots, \omega_n \in V$ を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ の Euclid 内積 $(\cdot, \cdot)$ に関する双対基底とする．また必要ならスカラー倍して，任意の $k = 1, \ldots, n$ に対し $(\alpha_k, \alpha_k) = 1$ と仮定する．V の部分空間 Y, Z を

$$Y \;:=\; \mathbb{R}\omega_{r+1} + \cdots + \mathbb{R}\omega_n, \quad Z \;:=\; \mathbb{R}\omega_1 + \cdots + \mathbb{R}\omega_r$$

で定める．また $H_i = H_{\alpha_i}$ を α_i に垂直な超平面とすると次が成立する (レポート問題 9.2 (2)):

$$Y \;=\; H_1 \cap \cdots \cap H_r, \quad Z \;=\; H_{r+1} \cap \cdots \cap H_n.$$

これから $y|_Y = \mathrm{id}_Y$ 及び $y|_{Y^\perp} = -\mathrm{id}_{Y^\perp}$ ($Y^\perp$ は Y の直交補空間) が従う．同様に $z|_Z = \mathrm{id}_Z$, $z|_{Z^\perp} = -\mathrm{id}_{Z^\perp}$.

次に行列 $A = (a_{kl})_{k,l=1}^n$, $a_{kl} := (\alpha_k, \alpha_l)$ を考える．$\alpha_l = \sum_{k=1}^n \omega_k a_{kl}$ となること (レポート問題 9.2 (2)) に注意する．A は非対角成分が 0 以下の正定値行列だから，命題 2.6.4 より A の固有値 $c > 0$ が存在して，対応する固有ベクトル ${}^t(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ の成分 c_i は全て正．

以上の準備のもと P を次のように定める．

$$P \;:=\; \mathbb{R}\lambda + \mathbb{R}\mu \subset V, \quad \lambda \;:=\; \sum_{i=1}^r c_i \omega_i \in Z, \quad \mu \;:=\; \sum_{j=r+1}^n c_j \omega_j \in Y.$$

□

補題 3.7.3. 以上で構成した P は次の性質を満たす.

(1) w の作用は P を保ち, P 上に制限すると回転になる.

(2) $w|_P$ の位数は w の位数, 即ち W の Coxeter 数 h に等しい. つまり $w|_P$ は $\pm 2\pi/h$ 回転である.

この補題を一度認めて, 先に命題 3.7.2 の証明を完了させよう.

命題 3.7.2 の証明. $w|_P$ が $\pm 2\pi/h$ 回転なので 1 の原始 h 乗根 ζ_h は w の固有値. これと $m_1 > 0$ (補題 3.7.1) から $m_1 = 1$. w は $\mathbb{R}$ 上の線形変換だから ζ_h の複素共役 $\overline{\zeta_h} = \zeta_h^{n-1}$ も w の固有値. よって $m_n = n-1$. □

補題 3.7.3 (1) の証明. $\alpha_l = \sum_k \omega_k a_{kl}$ と固有値 c の取り方から $\sum_{l=1}^n \alpha_l c_l = c\sum_{k=1}^n \omega_k c_k$. この式と α_i $(i = 1,\ldots,r)$ の内積を取ると, $1 \le i,l \le r$ で $a_{il} = \delta_{i,l}$ である (レポート問題 9.2 (3)) から $c_i + \sum_{j=r+1}^n a_{ij}c_j = cc_i$. すると

$$\begin{aligned}(c-1)\lambda &= (c-1)\sum_{i=1}^r \omega_i c_i = \sum_{i=1}^r \omega_i \sum_{j=r+1}^n a_{ij}c_j = \sum_{j=r+1}^n c_j \sum_{i=1}^r \omega_i a_{ij} = \sum_{j=r+1}^n c_j\Bigl(-a_{jj}\omega_j + \sum_{k=1}^n \omega_k a_{kj}\Bigr)\\ &= -\sum_{j=r+1}^n c_j\omega_j + \sum_{j=r+1}^n c_j\alpha_j = -\mu + \nu.\end{aligned}$$

但し $\nu := \sum_{j=r+1}^n c_j\alpha_j$. 四番目の等式では $a_{kj} = 0$ $(k \ge r+1,\ k \ne j)$ 及び $a_{jj} = 1$ を使った. この計算と $\nu \in Z^\perp$ から $(c-1)\lambda + \mu \in Z^\perp$. つまりこの元は z の作用で -1 倍される. 一方 $\lambda \in Z$ だから平面 P は z の作用で保たれる. そして $z|_P$ は直線 $\mathbb{R}\lambda$ に関する鏡映である.

同様の計算で $(c-1)\mu + \lambda \in Y^\perp$ となる (レポート問題 9.2 (4)) ことから, 平面 P は y の作用で保たれ, $y|_P$ は直線 $\mathbb{R}\mu$ に関する鏡映だと分かる. 従って $w = yz$ は P を保ち, $w|_P$ は回転だと分かる. □

補題 3.7.3 (2) の証明のために, §2.10 で扱った W の基本領域 D を思い出しておく.

補題 3.7.4 (定理 2.10.2, 系 2.10.3)**.** 有限鏡映群 $W = W(\Phi) \le O(V)$ の単純ルート集合 $\Delta \subset \Phi$ を固定する. $C \subset D \subset V$ を次のように定める.

$$C := \{\lambda \in V \mid (\lambda,\alpha) > 0\ \forall\alpha \in \Delta\}, \quad D := \overline{C} = \{\lambda \in V \mid (\lambda,\alpha) \ge 0\ \forall\alpha \in \Delta\}.$$

すると D は V の W 作用に関する基本領域である. 即ち

(1) 任意の $\lambda \in V$ はある $\mu \in D$ と W 共役. (2) $w \in W$ と $\lambda,\mu \in D$ について, $w\lambda = \mu$ ならば $\lambda = \mu$.

更に $\lambda,\mu \in D$ が $w\lambda = \mu$ を満たすなら, $\lambda = \mu$ かつ w は λ を固定する単純鏡映の積. 特に $\lambda \in C$ ならその固定化群 $\{w \in W \mid w\lambda = \lambda\}$ は自明.

補題 3.7.3 (2) の証明. $c_k > 0$ より $\lambda = \sum_{i=1}^r c_i\omega_i$ 及び $\mu = \sum_{j=r+1}^n c_j\omega_j$ は基本領域 D に含まれている. すると平面 $P = \mathbb{R}\lambda + \mathbb{R}\mu$ と C の交叉は $P \cap C = \{a\lambda + b\mu \mid a,b > 0\}$ となって特に空ではない. 従ってもし $(w|_P)^m = \mathrm{id}_P$, 即ち w^m が P の各点を保つなら, $P \cap C$ のある元も保つことになる. すると補題 3.7.4 から $w^m = e$. よって $w|_P$ の位数は w の位数に等しい. □

参考文献

参考書 [H90] の §1.12, §3.16, §3.17.

6 月 22 日分レポート問題

問題 9.1 (2 点)**.** 命題 3.6.2 の証明で用いた主張 $\mathfrak{S}_n = \langle (1,2,\dots,n),(n-1,n)\rangle$ を示せ.

問題 9.2 (10 点)**.** §3.7 で用いた以下の主張を示せ.

(1) $Y = H_1 \cap \cdots \cap H_r$, $Z = H_{r+1} \cap \cdots \cap H_n$.

(2) $\alpha_j = \sum_i \omega_i a_{ij}$.

(3) $1 \le i, l \le r$ で $(\alpha_i, \alpha_l) = \delta_{i,l}$.

(4) $\lambda + (c-1)\mu \in Y^{\perp}$.

問題 9.3 (10 点, Schur 多項式)**.** $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ を $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n \ge 0$ となる長さ n の整数列とする. また $x_1, x_2, \dots, x_n$ を n 個の文字とする. $s_\lambda(x) = s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ を次のように定める.

$$s_\lambda(x) := \frac{\det\bigl((x_i^{\lambda_j+n-j})_{i,j=1}^n\bigr)}{\det\bigl((x_i^{n-j})_{i,j=1}^n\bigr)}.$$

(1) $s_\lambda(x) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$, 即ち $s_\lambda(x)$ が対称多項式であることを示せ.

(2) $0 \le r \le n$ とする. $\lambda = (\underbrace{1,\dots,1}_{r}, \underbrace{0,\dots,0}_{n-r})$ なら $s_\lambda(x) = e_r(x)$, 即ち基本対称多項式 (例 3.3.1) になることを確認せよ.

(3) $0 \le r \le n$ とする. $\lambda = (r, \underbrace{0,\dots,0}_{n-1})$ なら $s_\lambda(x) = h_r(x)$, 即ち完全対称多項式 (例 3.3.1) になることを確認せよ.

(4) $s_\lambda(x) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$, 即ち $s_\lambda(x)$ の各係数は全て整数であることを示せ.

連絡事項

6/23(金) のオフィスアワーはお休みさせて頂きます.

6 月 29 日 有限鏡映群の不変式 4

前回予告した定理 3.6.6 「次数 $=$ 指数 $+1$」の証明を §3.9 で与える．

$W = W(\Phi) \leq O(V)$ を既約かつ本質的な有限鏡映群とする．n を W の階数, h を W の Coxeter 数とする．

3.8　Coxeter 数とルートの数

命題 3.8.1. $h = |\Phi|/n = 2N/n$. 但し N は正ルートの数.

証明. $n = 1$ なら $W = W(\mathrm{A}_1) = \mathfrak{S}_2$ なので $h = 2 = 2/1$ で成立．以下 $n > 1$ と仮定する．

§3.7 で構成した平面 $P \subset V$ を思い出そう．単純ルートおよび正ルートの集合 $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \subset \Pi \subset \Phi$ を一つ取って固定する．また $s_i := s_{\alpha_i}$ と略記する．必要なら Δ の番号を付け直して, $s_1, \ldots, s_r$ が互いに可換かつ $s_{r+1}, \ldots, s_n$ も互いに可換となるようにする．また $\omega_1, \ldots, \omega_n \in V$ を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ の Euclid 内積 $(\cdot, \cdot)$ に関する双対基底とする．実対称行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $a_{ij} := (\alpha_i, \alpha_j)$ は正定値かつ $i \neq j$ なら $a_{ij} \leq 0$ なので, 命題 2.6.4 より A の固有値 $c > 0$ とその固有ベクトル ${}^t(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ で $c_i > 0$ となるものがある．この時 P は

$$P := L + M \subset V, \quad L := \mathbb{R}\lambda, \ M := \mathbb{R}\mu, \ \lambda := \textstyle\sum_{i=1}^r c_i\omega_i, \ \mu := \sum_{j=r+1}^n c_j\omega_j$$

で与えられた．Coxeter 元 $w = s_1 \cdots s_n$ の作用で P は不変であり, $w|_P$ は角度 $\pm 2\pi/h$ の回転になる．特に L と M の w 軌道 $O_{L,M} := \{w^k L, w^k M \mid k \in \mathbb{Z}\}$ は P 内の h 個の直線からなる．これらの直線を以下のように書く．

$$O_{L,M} = \{L_1 = L, L_2, \ldots, L_h = M\}.$$

補題. 各 $\alpha \in \Pi$ に対し整数 $1 \leq k(\alpha) \leq n$ があって $H_\alpha \cap P = L_{k(\alpha)}$.

実際, W の基本領域の内部 $C \subset V$ について $P \cap C = \{a\lambda + b\mu \mid a, b > 0\} \neq \emptyset$ だったので $H_\alpha \not\supset P$. よって $P \cap H_\alpha$ は直線．また $P \setminus \bigcup_{k=1}^h L_k$ の点は $P \cap C$ の点を w の作用で写したものだから, $P \cap H_\alpha$ と $P \setminus \bigcup_{k=1}^h L_k$ は交わらない．よって H_α は L_i 達のうちのどれか.

補題 3.8.2. 正ルート $\alpha \in \Pi$ について, $k(\alpha) = 1 \iff \alpha = \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n$.

まず $L_1 = L \subset Z = H_{r+1} \cap \cdots \cap H_n$ 但し $H_j := H_{\alpha_j}$. よって $j = r+1, \ldots, n$ なら $k(\alpha_j) = 1$. 逆を示そう．$H_\alpha \cap P = L$ なら $\lambda \in L \subset H_\alpha$ だが, $\alpha = \sum_{k=1}^n b_k\alpha_k$, $b_k \geq 0$ と書くと

$$0 = (\lambda, \alpha) = (\textstyle\sum_{i=1}^r c_i\omega_i, \sum_{k=1}^n b_k\alpha_k) = \sum_{i=1}^r c_i b_i$$

なので, $c_i > 0$ より任意の $i = 1, \ldots, r$ について $b_i = 0$. よって $\alpha = \sum_{j=r+1}^n b_j\alpha_j$ と書けるが, s_j 達が可換なことから, このように書ける正ルート α は α_j $(j = r+1, \ldots, n)$ しかない (レポート問題 10.1).

同様にして

補題 3.8.3. $k(\alpha) = h \iff \alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_r$.

以下 L を通る w 軌道を $O_L := \{w^k L \mid k \in \mathbb{Z}\}$ と書き, M についても同様に $O_M := \{w^k M \mid k \in \mathbb{Z}\}$ と書く．$O_{L,M} = O_L \cup O_M$ に注意する．補題 3.8.2 から, 各 $L_k \in O_L$ について $H_\alpha \cap P = L_k$ となる $\alpha \in \Pi$ は $n - r$ 個だと分かる．また補題 3.8.3 から, 各 $L_k \in O_M$ について $H_\alpha \cap P = L_k$ となる $\alpha \in \Pi$ は r 個.

ところで h が偶数なら $O_L \sqcup O_M = O_{L,M}$ かつ $|O_L| = |O_M| = h/2$ であり, h が奇数なら $O_L = O_M = O_{L,M}$ である (レポート問題 10.2). よって h が偶数なら

$$|\{\alpha \in \Pi \mid H_\alpha \cap P \in O_L\}| \;=\; (n-r)h/2, \quad |\{\alpha \in \Pi \mid H_\alpha \cap P \in O_M\}| \;=\; rh/2.$$

特に $|\Pi| = (n-r)h/2 + rh/2 = nh/2$. これから結論を得る. h が奇数でも

$$|\{\alpha \in \Pi \mid H_\alpha \cap P \in O_L\}| \;=\; (n-r)h, \quad |\{\alpha \in \Pi \mid H_\alpha \cap P \in O_M\}| \;=\; rh$$

となるが, $O_L = O_M$ よりこの二つの集合はともに Π に一致する. 特に $r = h/2$. よって同じ結論を得る. □

系 3.8.4. 有限鏡映群の Coxeter 数は以下の表のようになる.

	A_n	B_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2	H_3	H_4	$\mathrm{I}_2(m)$
$\lvert W\rvert$	$(n+1)!$	$2^n n!$	$2^{n-1}n!$	$2^7 3^4 5$	$2^{10}3^4 57$	$2^{14}3^5 5^2 7$	$2^7 3^2$	12	120	14400	$2m$
$\lvert\Phi\rvert$	$n(n+1)$	$2n^2$	$2n(n-1)$	72	126	240	48	12	30	120	$2m$
h	$n+1$	$2n$	$2(n-1)$	12	18	30	12	6	10	30	m

表 3.8.1 有限鏡映群の位数, ルートの数, Coxeter 数

系 3.8.5. $\{m_i\}_{i=1}^n$ を W の指数, $\{d_i\}_{i=1}^n$ を W の次数とすると

$$\sum_{i=1}^n m_i \;=\; N \;=\; \sum_{i=1}^n (d_i - 1).$$

系 3.8.6. $h = 2 \iff N = n = 1 \iff W = W(\mathrm{A}_1)$. 特に $W \neq W(\mathrm{A}_1)$ なら原始 h 乗根 ζ_h (Coxeter 元の固有値の一つ) は虚数.

3.9 次数と指数

以下 $\{m_i\}_{i=1}^n$ を W の指数, $\{d_i\}_{i=1}^n$ を W の次数とする.

定理 3.9.1. $\{d_i\}_{i=1}^n = \{m_i + 1\}_{i=1}^n$. 特に $|W| = \prod_{i=1}^n (m_i + 1)$.

証明のために次の命題を準備する.

命題 3.9.2. $f_1, \dots, f_n \in R = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^W$ を W の基本不変式, $J := \det(\partial f_i / \partial x_j)_{i,j=1}^n$ をその Jacobian とする.

(1) $\deg J = \sum_{i=1}^n (d_i - 1) = N := |\Phi|/2$.

(2) 各 $\alpha \in \Phi$ に対し, $l_\alpha \in S = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ を $\{x \in V \mid l_\alpha(x) = 0\} = H_\alpha$ となる一次式とする (l_α は定数倍を除いて一意に定まる). この時ある $k \in \mathbb{R}$ が存在して

$$J \;=\; k \prod_{\alpha \in \Pi} l_\alpha.$$

証明. (1) Jacobian 判定法 (事実 3.5.2) を思い出すと, $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ が代数的に独立なので $J \neq 0$. 一方で J は行列式だから, $\pm \prod_{i=1}^n \partial f_i / \partial x_{\pi(i)}$ の $\pi \in \mathfrak{S}_n$ に関する和で書ける. これらの単項式の次数はどれも $\sum_{i=1}^n (d_i - 1) = N$ だから, $J \neq 0$ 全体も N 次式である.

(2) $\varphi(x) := (f_1(x), \dots, f_n(x))$ で写像 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を定義する．この時 H_α 上で $J = 0$．実際，もし $a \in H_\alpha$ で $J(a) \neq 0$ なら逆関数定理から φ は a の近傍で単射だが，a の近傍の点 b であって $b \notin H_\alpha$ なるものについて $b \neq s_\alpha(b)$ かつ $\varphi(b) = \varphi(s_\alpha(b))$ となり矛盾．Hilbert の零点定理より J は l_α で割り切れる (レポート問題 10.3)．よって $\prod_{\alpha\in\Pi} l_\alpha$ で J は割り切れる．(1) より J が N 次式だから結論を得る．

□

定理 3.9.1 の証明． $n > 1$ と仮定してよい．Coxeter 元 $w = s_1 \cdots s_n \in W$ を 1 つ固定する．

$V_\mathbb{C} := V \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ とし，w の固有ベクトルからなる $V_\mathbb{C}$ の基底 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ を取る．必要なら λ_i 達の番号を付けかえて $w\lambda_i = \lambda_i \zeta_h^{m_i}$ だとする．特に $m_1 = 1$ より λ_1 の固有値は ζ_h．$n > 1$ だから §3.8 の系より $\zeta_h \notin \mathbb{R}$．

この時任意の $\alpha \in \Phi$ について $\lambda_1 \notin H_\alpha$ である．実際，$P = \mathbb{R}\lambda + \mathbb{R}\mu \subset V$ を §3.7 もしくは §3.8 の平面とし，$P_\mathbb{C} := P \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} \subset V_\mathbb{C}$ とすれば，λ_1 は固有値 $\zeta_h \notin \mathbb{R}$ の固有ベクトルなので $\lambda_1 \in P_\mathbb{C} \setminus P$．もし $(\lambda_1, \alpha) = 0$ なら複素共役を取って $(\overline{\lambda_1}, \alpha) = 0$ だから，$\mathbb{C}\lambda_1 + \mathbb{C}\overline{\lambda_1} = P_\mathbb{C} \subset H_\alpha$ となるが，これは P が基本領域の内部 C の点を含むことと矛盾する．

λ_i と双対な V^* の元を y_i と書くと，$\{y_1, \dots, y_n\}$ は V^* の基底で

$$S = S(V^*) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$$

となっている．$f_1, \dots, f_n$ の Jacobian は x の微分で定義しても，あるいは y の微分で定義しても (0 でない) 定数倍を除いて等しい．そこで以下 $J(y) := \det(\partial f_i / \partial y_j)$ を考える．

命題 3.9.2 より $J(y)$ の零点集合は $\bigcup_{\alpha\in\Pi} H_\alpha$ で与えられる．$\lambda_1 \notin \bigcup_{\alpha\in\Pi} H_\alpha$ なので $J(1, 0, \dots, 0) \neq 0$．必要なら f_i 達の添え字を付け替えることで，全ての i について $\frac{\partial f_i}{\partial y_i}(1, 0, \dots, 0) \neq 0$ と仮定できる．つまり

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_i} = a_i y_1^{d_i - 1} + (y_2, \dots, y_n \text{ を含む項達}), \quad a_i \neq 0$$

が任意の $i = 1, \dots, n$ について成立する．よって

$$f_i = a_i y_1^{d_i-1} y_i + \cdots .$$

両辺に w を作用させると，$wf_i = f_i$ 及び $wy_i = y_i \zeta_h^{-m_i}$ より

$$f_i = a_i \zeta_h^{1-d_i-m_i} y_1^{d_i-1} y_i + \cdots .$$

よって $\zeta_h^{1-d_i-m_i} = 1$．これから $d_i - 1 \equiv h - m_i \pmod{h}$．

ところで補題 3.7.1 より $\{h - m_i\}_{i=1}^n = \{m_i\}_{i=1}^n$ だから，系 3.8.5 と合わせて $\sum_{i=1}^n (h - m_i) = \sum_{i=1}^n (d_i - 1)$．すると $d_i - 1 \equiv h - m_i \pmod{h}$ と $0 < m_i < h$ から $d_i - 1 = h - m_i$．これで前半の主張が得られる．

後半の主張は $\prod_{i=1}^n d_i = |W|$ (定理 3.4.3) と前半から従う． □

3.10　Weyl 群の次数と指数

Weyl 群についてはより強い主張が性質する．

命題 3.10.1. W を既約 Weyl 群，h をその Coxeter 数とする．$1 \leq m \leq h-1$ が h と互いに素なら m は W の指数．

証明. W がルート格子 $\mathbb{Z}\Phi$ を保つので，単純ルートからなる V の基底に関する Coxeter 元 w の表現行列は整数成分である．従って w の特性多項式 $\det(xI - w)$ は整数係数．一方原始 h 乗根 ζ_h について，$\{\zeta_h^m \mid (m, h) = 1,\ 1 \leq m \leq h - 1\}$ は相違なる h 乗根全体の集合であり，それらを根とする円分多項式 $\Phi_h(x) = \prod_{(m,h)=1}(x - \zeta_h^m)$ は整数係数の既約多項式である．ζ_h は w の固有値だから $\Phi_h(x)$ は $\det(xI - w)$ を割り切る．よって $(m, h) = 1$ なら ζ_h^m は w の固有値. □

この時点で Weyl 群の指数を決定することができる．結果は表 3.10.1 の通り．

- $\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{D}_n$ 型については，§3.5 及び 6/15 のレポート問題 8.6, 8.7 の基本不変式の構成から次数が分かって，それと定理 3.9.1 から指数が分かる．
- $\mathrm{G}_2 = \mathrm{I}_2(6)$ 型については二面体群の記述から直ぐにわかる．一般に $\mathrm{I}_2(m)$ 型の指数は $1, m-1$ である．
- F_4 型については，命題 3.10.1 から 12 と互いに素な $1, 5, 7, 11$ が指数だと分かるが，ちょうど階数個あるのでこれで全部である．
- E_8 型は $h = 30$ で，1 以上 29 以下の互いに素な整数は $1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ の 8 個でちょうど階数個ある．よってこれで指数が決定した．
- E_7 型は $h = 18$ で，互いに素なものは $1, 5, 7, 11, 13, 17$ の 6 つ．1 つ足りないが，$\{h - m_i\} = \{m_i\}$ を思い出すと $9 = 18 - 9$ が求める指数である．
- E_6 型は $h = 12$ で，互いに素な $1, 5, 7, 11$ は指数．2 つ足りないが，残りは $\sum m_i = N = 36$ と $\prod(m_i + 1) = |W| = 2^7 3^4 5$ から 4 と 8 だと決定する．

type	$m_1, \ldots, m_n$
A_n	$1, 2, \ldots, n$
B_n	$1, 3, 5, \ldots, 2n-1$
D_n	$1, 3, 5, \ldots, 2n-3, n-1$
E_6	$1, 4, 5, 7, 8, 11$
E_7	$1, 5, 7, 9, 11, 13, 17$
E_8	$1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$
F_4	$1, 5, 7, 11$
G_2	$1, 5$

表 3.10.1 Weyl 群の指数

実は更に次の結果が成立する．

事実 3.10.2 ([H90, §3.20])**.** Weyl 群 W の指数を $m_n = h - 1 \geq \cdots \geq m_1 = 1$ と並べて N の分割とみなし，その (対応する Young 図形の意味で) 転置の分割を $k_1 \geq \cdots \geq k_{h-1} = 1$ と書くと，k_i は高さ i の正ルートの数と一致する．

証明は幾つか知られているが，Poincaré 多項式の因数分解定理の系としても得られる．

参考文献

参考書 [H90] の §3.13, §3.19, §3.20.

6 月 29 日分レポート問題

問題 10.1 (5 点)**.** 命題 3.8.1 の証明中の「このように書ける正ルート α は α_j $(j = r+1, \dots, n)$ しかない」を示せ.

問題 10.2 (5 点)**.** 命題 3.8.1 の証明中の「h が偶数なら $O_L \sqcup O_M = O_{L,M}$ かつ $\#O_L = \#O_M = h/2$ であり, h が奇数なら $O_L = O_M = O_{L,M}$」を示せ.

問題 10.3 (5 点)**.** 命題 3.9.2 の証明を補完せよ. 特に (2) の証明の「Hilbert の零点定理より J は l_α で割り切れる」の部分を説明せよ.

7 月 06 日 Macdonald の論文

4　Poincaré 多項式の因数分解定理

初回に紹介した Weyl 群の Poincaré 多項式の因数分解定理の Macdonald による証明を紹介する．

4.1　Macdonald の定理

V を Euclid 空間とし $(\cdot,\cdot)$ をその内積とする．$\Phi \subset V$ を (結晶的) ルート系, つまり付随する有限鏡映群 $W := W(\Phi) \le O(V)$ が Weyl 群になるものとする．単純ルート集合と正ルート集合 $\Delta \subset \Pi \subset \Phi$ を一組取って固定する．

$\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Pi}$ を Π で添え字づけられた (可換な) 不定元の族とする．また V 上の形式的指数関数 e^v $(v \in V)$ を $e^{v+v'} = e^v e^{v'}$ が成立するものとして定める．$e^0 = 1$ と書く．

最後に補題 1.6.3 の証明と同様に $\Pi(w) := \Pi \cap w^{-1}(-\Pi)$ とする．$n(w) := |\Pi(w)| = \ell(w)$ であった．

定理 4.1.1.

$$\sum_{w\in W}\prod_{\alpha\in\Pi}\frac{1-u_\alpha e^{-w\alpha}}{1-e^{-w\alpha}} = \sum_{w\in W}\prod_{\alpha\in\Pi(w)} u_\alpha.$$

証明は §4 4.3 で与える．

4.2　因数分解定理の導出

まず定理の帰結として Poincaré 多項式の因数分解定理を示しておく．そのために幾つか準備をしておく．

定義 4.2.1. Φ の W 軌道分解を $\Phi = \sqcup_{i\in I}\Phi_i$ と書く．また $\Delta_i := \Delta \cap \Phi_i$ と定める．

注意. Φ が既約だと仮定する．simply-laced (定義 2.11.3) なら Φ は一つの軌道 $(|I| = 1)$, non-simply-laced なら $\Phi = \Phi_s \sqcup \Phi_l$ と二つの軌道 $(I = \{s, l\})$ からなる．

高さ関数 $\mathrm{ht}(\alpha)$ を思い出そう (定義 1.5.1)．$\alpha \in \Phi$ を $\alpha = \sum_{\beta\in\Delta} c_\beta \beta$ と書いたときに $\mathrm{ht}(\alpha) := \sum_{\beta\in\Delta} c_\beta$ と定めた．

定義 4.2.2. 各 $i \in I$ に対し $\mathrm{ht}_i(\alpha)$ を次のように定義する: $\alpha = \sum_{\beta\in\Delta} c_\beta\beta$ に対し $\mathrm{ht}_i(\alpha) := \sum_{\beta\in\Delta_i} c_\beta$.

定義 1.11.1 で Poincaré 多項式 $W(t)$ を導入したが, 以下ではその多変数版 $W(T)$ を導入しよう．まず変数を導入する．

定義 4.2.3. $T = \{T_i\}_{i\in I}$ を I で添え字づけられた不定元とする．

(1) $\alpha \in \Pi$ に対し $\alpha \in \Pi_i$ なら $T_\alpha := T_i$ と定める．

(2) $\alpha \in \Phi$ に対し $T^{\mathrm{ht}(\alpha)} := \prod_{i\in I} T_i^{\mathrm{ht}_i(\alpha)}$.

(3) $w \in W$ に対し $w = s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_q}$ を Δ に関する簡約表示として, $T_w := T_{\alpha_1}\cdots T_{\alpha_q}$ と定める．

注意.　(1) T_w は簡約表示の取り方によらない.

(2) s_β $(\beta \in \Delta_i)$ の生成する W の部分群に関する長さ関数を ℓ_i と書くと, §1.10 の部分ルート系の議論から

$$T_w = \prod_{i \in I} T_i^{\ell_i(w)}. \tag{4.2.1}$$

定義 4.2.4. 多変数版の Poincaré 多項式を以下で定義する.

$$W(T) := \sum_{w \in W} T_w.$$

注意 4.2.5. 特に全ての不定元を $T_i = t$ と共通のものにすれば $T_w = t^{\ell(w)}$ となるから, $W(T)$ は元来の Poincaré 多項式 $W(t) = \sum_{w \in W} t^{\ell(w)}$ (定義 1.11.1) に帰着する.

これで因数分解定理の主張を述べる準備が終わった.

命題 4.2.6.

$$\prod_{\alpha \in \Pi} \frac{1 - T_\alpha T^{\mathrm{ht}(\alpha)}}{1 - T^{\mathrm{ht}(\alpha)}} = W(T).$$

この命題と上の注意から直ちに

系 4.2.7.

$$\prod_{\alpha \in \Pi} \frac{1 - t^{1+\mathrm{ht}(\alpha)}}{1 - t^{\mathrm{ht}(\alpha)}} = W(t).$$

命題 4.2.6 の証明. 定理 4.1.1 を認めて, それから命題 4.2.6 を導出する. 環準同型 $\varphi : \mathbb{Q}(u_\alpha, e^\beta) \to \mathbb{Q}(T_i)$ を

$$\varphi(u_\alpha) := T_\alpha \quad (\alpha \in \Pi), \qquad \varphi(e^{-\beta}) := T_i \quad (\beta \in \Delta_i)$$

で定義する. そして φ を定理 4.1.1 の両辺に施す.

定理 4.1.1 の右辺の和の各項は

$$\prod_{\alpha \in \Pi(w)} T_\alpha = \prod_{i \in I} T_i^{|\Pi_i(w)|}$$

に写される. 但し $\Pi_i(w) := \Pi(w) \cap \Pi_i$. ここで $n_i(w) := |\Pi_i(w)|$ とすると, §1.10 の部分ルート系の議論と §1.6 の議論から $n_i(w) = \ell_i(w)$. すると (4.2.1) から定理 4.1.1 の右辺は

$$\prod_{i \in I} T_i^{n_i(w)} = \prod_{i \in I} T_i^{\ell_i(w)} = T_w$$

の和に写るので確かに $W(T)$ と一致する.

次に定理 4.1.1 の左辺について, 各 $\alpha \in \Phi$ に対し $\varphi(e^{-\alpha}) = T^{\mathrm{ht}(\alpha)}$ となるから, 左辺は

$$\sum_{w \in W} \prod_{\alpha \in \Pi} \frac{1 - T_\alpha T^{\mathrm{ht}(w\alpha)}}{1 - T^{\mathrm{ht}(w\alpha)}}$$

に写ることが分かる. $w = e$ の項のみ残ることを示したい. $w \neq e$ ならある $\beta \in \Delta$ があって $w^{-1}\beta = -\alpha \in -\Pi$. $\beta \in \Delta_i$ なら $\alpha = s_\alpha w^{-1}\beta$ より $\alpha \in \Pi_i$ なので, $T_\alpha = T_\beta = T_i$ が分かる. すると $T^{\mathrm{ht}(w\alpha)} = T^{-\mathrm{ht}(\beta)} = T_i^{-1}$ より $1 - T_\alpha T^{\mathrm{ht}(w\alpha)} = 1 - T_i T_i^{-1} = 0$. よって $w = e$ の項のみが残る. それは命題の左辺に他ならない. □

4.3　定理 4.1.1 の証明

補題 4.3.1. $\delta := \prod_{\alpha\in\Pi}(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})$ とすると

$$\delta \;=\; \sum_{w\in W} \varepsilon(w)e^{w\rho}.$$

但し $\varepsilon(w) := (-1)^{\ell(w)}$, $\rho := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Pi}\alpha$.

注意. $W = \mathfrak{S}_n \le O(\mathbb{R}^n)$ なら

$$\delta = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j^{1/2}/x_i^{1/2} - x_i^{1/2}/x_j^{1/2}) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{(n-1)/2} \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$$

で Vandermonde の行列式 (差積) に比例する.

証明. 簡単のため $P := \frac{1}{2}\mathbb{Z}\Phi \subset V$, $\mathbb{Q}[P] := \mathbb{Q}[e^\gamma; \gamma\in P]$ と書く. $w(e^\gamma) := e^{w\gamma}$ で W の $\mathbb{Q}[P]$ への作用を定義できる. $x\in\mathbb{Q}[P]$ に対し $J(x) := \sum_{w\in W}\varepsilon(w)w(x)$ と定める. また $\mathbb{Q}[P]$ の元 $f = \sum_{\gamma\in P} f_\gamma e^\gamma$ であって任意の $w\in W$ について $w(f) = \varepsilon(w)f$ となるものを交代式と呼ぶことにする. 任意の $x\in\mathbb{Q}[P]$ に対し $J(x)$ が交代式になることが簡単に確認できる.

任意の交代式 f は $f = \sum_{\alpha\in C\cap P} f_\alpha J(e^\alpha)$ と書ける. 但し $C := \{v\in V \mid (v,\beta) > 0\ \forall\beta\in\Delta\}$ は W の基本領域の内部. 実際, $\gamma\in P$ がある $\alpha\in\Pi$ の鏡映面 H_α に含まれるなら $s_\alpha(f) = -f$ から $c_\gamma = 0$ が従い, $\gamma\notin\cup_{\alpha\in\Pi}H_\alpha$ ならある $w\in W$ と $\alpha\in C\cap P$ があって $\gamma = w\alpha$ となるから $f = \sum_{\alpha\in C\cap P}\sum_{w\in W} f_{w(\alpha)}e^{w(\alpha)}$. また $w(f) = \varepsilon(w)f$ より $f_{w(\gamma)} = \varepsilon(w)f_\gamma$ となるので $f = \sum_{\alpha\in C\cap P} f_\alpha J(e^\alpha)$ となる.

次に P 上の順序関係 $\alpha\ge\alpha'$ を $\alpha - \alpha'\in\mathbb{R}_{\ge 0}\Delta$ で定め, $x = \sum_{\gamma\in P} x_\gamma e^\gamma \in\mathbb{Q}[P]$ の項 $x_\gamma e^\gamma$ で γ が $\ge$ に関して極大なものを極大項と呼ぶことにする. この時 $\alpha\in C\cap P$ について $J(e^\alpha)$ の極大項は e^α だけである. 実際, $\overline{C}$ が基本領域であることから, 任意の $w\ne e\in W$ について $w(\alpha) < \alpha$ となる.

ここで δ が交代式であることに注意する. 実際, 単純鏡映 s_β で負ルートに写される正ルートは $\beta\in\Delta$ だけであることから $s_\beta(\delta) = -\delta$ が分かり, これから任意の $w\in W$ について $w(f) = \varepsilon(w)f$ が従う.

よって $\delta = \sum_{\alpha\in C\cap P}\delta_\alpha J(e^\alpha)$ となる. 一方で $\delta = e^\rho\prod_{\alpha\in\Pi}(1 - e^{-\alpha})$ だから δ の極大項は e^ρ だけである. これと $\rho\in C\cap P$ から $\delta = J(e^\rho)$ が分かる. □

定理 4.1.1 の証明. 補題 4.3.1 の δ を使うと定理 4.1.1 の左辺分母は $\prod_{\alpha\in\Pi}(1 - e^{-w\alpha}) = e^{-w\rho}\prod_{\alpha\in\Pi}(e^{w\alpha/2} - e^{-w\alpha/2}) = \varepsilon(w)e^{-w\rho}\delta$. 従って定理 4.1.1 の左辺は次のように書ける.

$$\delta^{-1}\sum_{w\in W}\varepsilon(w)e^{w\rho}\prod_{\alpha\in\Pi}(1 - u_\alpha e^{-w\alpha}). \tag{4.3.1}$$

部分集合 $E\subset\Pi$ に対し $\rho_E := \rho - \sum_{\alpha\in E}\alpha$ と定めると $e^{w\rho}\prod_{\alpha\in\Pi}(1 - u_\alpha e^{-w\alpha}) = \sum_{E\subset\Pi} e^{w\rho_E}\prod_{\alpha\in E}(-u_\alpha)$. よって

$$\delta_E \;:=\; \sum_{w\in W}\varepsilon(w)e^{w\rho_E}$$

とすれば

$$(4.3.1) \;=\; \delta^{-1}\sum_{E\subset\Pi}\delta_E\prod_{\alpha\in E}(-u_\alpha). \tag{4.3.2}$$

もし ρ_E がある $\alpha \in \Pi$ と垂直なら $s_\alpha \rho_E = \rho_E$ なので

$$\delta_E = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\rho_E} = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{ws_\alpha \rho_E} = \sum_{w' \in W} \varepsilon(w's_\alpha) e^{w'\rho_E} = \varepsilon(s_\alpha)\delta_E = -\delta_E,$$

即ち $\delta_E = 0$. 従って (4.3.2) においては ρ_E が任意の $\alpha \in \Pi$ と垂直でないような E のみ考えれば良い. 実は

命題 4.3.2. 任意の $\alpha \in \Pi$ と ρ_E が垂直でない時, ある $w \in W$ が存在して $\rho_E = w\rho$ かつ $E = \Pi(w)$.

この命題を一度認めよう. $E = \Pi(w)$ なら $\Pi(w) = \Pi \cap w^{-1}(-\Pi)$ から

$$\rho_E = \rho_{\Pi(w)} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Pi \setminus \Pi(w)} \alpha - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Pi(w)} \alpha = w\rho.$$

これから $\delta_E = \varepsilon(w)\delta$ が分かる. すると

$$(4.3.2) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \prod_{\alpha \in \Pi(w)} (-u_\alpha) = \sum_{w \in W} \prod_{\alpha \in \Pi(w)} u_\alpha$$

となり定理 4.1.1 の右辺と一致する. よってあとは命題 4.3.2 を証明すれば良い. □

命題 4.3.2 の証明. ρ_E は $\frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Pi} \varepsilon_\alpha \alpha$, $\varepsilon_\alpha \in \{\pm 1\}$ と書けるから, 任意の $w \in W$ について $w^{-1}\rho_E$ も同じ形に書ける. 従って $w^{-1}\rho_E = \rho - \varphi$, $\varphi =$ (互いに異なる正ルートの和) と書ける.

$C \subset V$ を W の基本領域の内部とし, $\beta \in \Delta$ に対し $\beta^\vee := 2\beta/(\beta, \beta)$ とする.

ρ_E はどの鏡映面にも含まれないから, ある $w \in W$ があって $w^{-1}\rho_E \in C$. よって任意の $\beta \in \Delta$ に対して $(w^{-1}\rho_E, \beta^\vee) > 0$. ここで $(\rho, \beta^\vee) = 1$ かつ $(\varphi, \beta^\vee) \in \mathbb{Z}$ だから $(\varphi, \beta^\vee) \leq 0$ となる. 特に $(\varphi, \beta) \leq 0$.

一方で $\varphi = \sum_{\beta \in \Delta} c_\beta \beta$ と書くと $c_\beta \geq 0$ だから $(\varphi, \varphi) = \sum_{\beta \in \Delta} c_\beta (\varphi, \beta) \leq 0$. 従って $\varphi = 0$. つまり $\rho_E = w\rho$.

残る $E = \Pi(w)$ の証明のために, $F \subset \Pi$ に対し $S(F) := \sum_{\alpha \in F} \alpha$ と定める. $\rho_E = \rho - S(E)$, $w\rho = \rho - S(\Pi(w))$ だから次の補題を示せばよい.

補題. $E \subset \Pi$ が $S(E) = S(\Pi(w))$ を満たすなら $E = \Pi(w)$.

この主張を $\ell(w)$ に関する帰納法で示す. $\ell(w) = 0$ なら $w = e$ なので自明. $\ell(w) > 0$ として $w = w's_\beta$, $\beta \in \Delta$, $\ell(w') = \ell(w) - 1$ とする. $\beta \notin \Pi(w)$ だから $\Pi(w) = s_\beta \Pi(w') \sqcup \{\beta\}$.

$\beta \in E$ なら $E' := s_\beta(E \setminus \{\beta\})$ は $E' \subset \Pi$ かつ

$$S(E') = s_\beta(S(E) - \beta) = s_\beta(S(\Pi(w)) - \beta) = s_\beta S(s_\beta \Pi(w')) = S(\Pi(w'))$$

だから, 帰納法の仮定より $E' = \Pi(w')$. よって $E = s_\beta \Pi(w') \sqcup \{\beta\} = \Pi(w)$.

$\beta \notin E$ なら $E'' := s_\beta E \sqcup \{\beta\}$ は $E'' \subset \Pi$ かつ

$$S(E'') = \beta + s_\beta S(E) = \beta + s_\beta S(\Pi(w)) = \beta + s_\beta(s_\beta S(\Pi(w')) + \beta) = S(\Pi(w'))$$

だからやはり $E'' = \Pi(w')$. しかし $\beta \in E''$ かつ $\beta \notin \Pi(w')$ だからこの場合は起きえない. □

参考文献

Macdonald の論文 [M72].

7 月 06 日分レポート問題

問題 11.1 (10 点)**.** 系 4.2.7 の等式 $W(t) = \prod_{\alpha \in \Pi}(1 - t^{1+\mathrm{ht}(\alpha)})/(1 - t^{\mathrm{ht}(\alpha)})$ を使うことで, ADE 型 Weyl 群 W_{X_n} の Poincaré 多項式が以下のようになることを確認せよ

$$W_{\mathrm{X}_n}(t) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - t^{m_i+1}}{1 - t}.$$

但し m_i は W_{X_n} の指数で以下の通り.

type	exponents	type	exponents
A_n	$1, 2, \ldots, n$	B_n	$1, 3, 5, \ldots, 2n-1$
D_n	$1, 3, 5, \ldots, 2n-3, n-1$	F_4	$1, 5, 7, 11$
E_6	$1, 4, 5, 7, 8, 11$	G_2	$1, 5$
E_7	$1, 5, 7, 9, 11, 13, 17$		
E_8	$1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$		

問題 11.2 (15 点)**.** 前問以外の既約な Weyl 群, つまり non simply-laced な Weyl 群 W_{X_n} を考える. ルートの W_{X_n} 軌道の数, 即ちルートの長さが二種類あることに注意して, 二変数 $T = (T_1, T_2)$ の Poincaré 多項式 $W_{\mathrm{X}_n}(T)$ を考える. 但し T_1 が長ルートに対応するものとする. 命題 4.2.6 の等式 $W(T) = \prod_{\alpha \in \Pi}(1 - T_\alpha T^{\mathrm{ht}(\alpha)})/(1 - T^{\mathrm{ht}(\alpha)})$ を使うことで, 以下の等式を確認せよ.

$$\begin{aligned}
W_{\mathrm{B}_n}(T_1, T_2) &= \prod_{i=0}^{n-1}(1 + T_1^i T_2)(1 + T_1 + \cdots + T_1^i), \\
W_{\mathrm{C}_n}(T_1, T_2) &= \prod_{i=0}^{n-1}(1 + T_2^i T_1)(1 + T_2 + \cdots + T_2^i), \\
W_{\mathrm{F}_4}(T_1, T_2) &= \prod_{j=1}^{2}(1 + T_j)(1 + T_j + T_j^2)(1 + T_1 T_2 T_j) \prod_{i=1}^{3}(1 + (T_1 T_2)^i), \\
W_{\mathrm{G}_2}(T_1, T_2) &= (1 + T_1)(1 + T_2)(1 + T_1 T_2 + (T_1 T_2)^2).
\end{aligned}$$

問題 11.3 (計 10 点)**.** 問題 11.2 から, non simply-laced の場合でも問題 11.1 の等式 $W_{\mathrm{X}_n}(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 - t^{m_i+1})/(1 - t)$ が成立することを確認せよ. 但し指数は問題 11.1 の表の通り.

連絡事項

- 来週 7/13 は休講です. 次回は 7/20 です.
- レポートの提出期限は **8/8 (火) の 17 時まで**とします. レポート提出 box を教務支援室に用意しますので, 講義の最終回 (7/27) 以降はそこに提出して下さい.

7 月 20 日アフィン鏡映群 1

5　アフィン鏡映群

残り二回の講義でアフィン Weyl 群を扱います．[H90] の 4 章の内容です．

5.1　アフィン鏡映

今まで通り V を Euclid 空間とし $(\cdot,\cdot)$ をその内積とする．

$\lambda \in V$ に対し V 上の平行移動が $t(\lambda) : v \mapsto v+\lambda$ で定まる．これら平行移動は V と同型な群をなすが，それを V と書く．$\mathrm{GL}(V)$ と V はともに $\mathrm{Aut}(V)$ の部分群である．

定義 5.1.1. V 上の**アフィン変換群** (affine group)$\mathrm{Aff}(V)$ とは，$\mathrm{GL}(V)$ と平行移動のなす群 V で生成される $\mathrm{Aut}(V)$ の部分群のことである．

$g \in \mathrm{GL}(V)$, $\lambda \in V$ について

$$g\,t(\lambda)\,g^{-1} \;=\; t(g\lambda) \tag{5.1.1}$$

となる．これから $\mathrm{Aff}(V)$ は半直積 $\mathrm{Aff}(V) = \mathrm{GL}(V) \ltimes V$ になることが分かる．

定義 5.1.2. $\alpha \in V \setminus \{0\}$ と $k \in \mathbb{Z}$ に対し鏡映面 $H_{\alpha,k}$ を

$$H_{\alpha,k} \;:=\; \{\lambda \in V \mid (\lambda,\alpha) = k\}$$

で定め，また変換 $s_{\alpha,k} \in \mathrm{Aff}(V)$ を次式で定める．

$$s_{\alpha,k}(\lambda) \;:=\; \lambda - ((\lambda,\alpha)-k)\alpha^\vee, \quad \alpha^\vee \;:=\; \frac{2}{(\alpha,\alpha)}\alpha.$$

注意 5.1.3. 鏡映面 $H_{\alpha,k}$ と変換 $s_{\alpha,k}$ に関して以下が成立する．

(1) 定義から $H_{\alpha,k} = H_{-\alpha,-k}$ 及び $H_{\alpha,0} = H_\alpha$ が分かる．また $H_{\alpha,k}$ は H_α を $\frac{k}{2}\alpha^\vee = \frac{k}{(\alpha,\alpha)}\alpha$ だけ平行移動したものである．

(2) $s_{\alpha,k}$ は $H_{\alpha,k}$ に関する鏡映である．特に $s_{\alpha,0} = s_\alpha$．

(3) $s_{\alpha,k}$ と s_α は以下の関係にある．

$$s_{\alpha,k} \;=\; t(k\alpha^\vee)s_\alpha. \tag{5.1.2}$$

定義 5.1.4. $W = W(\Phi) \le O(V)$ を (有限) Weyl 群とする．鏡映面の集合 $\mathcal{H}$ を次のように定める．

$$\mathcal{H} \;:=\; \{H_{\alpha,k} \mid \alpha \in \Phi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

命題 5.1.5. 鏡映面 $H_{\alpha,k}$ と変換 $s_{\alpha,k}$ に関して以下が成立する．

(1) $w \in W$, $\alpha \in \Phi$ に対し

$$wH_{\alpha,k} \;=\; H_{w\alpha,k}, \quad ws_{\alpha,k}w^{-1} \;=\; s_{w\alpha,k}.$$

(2) $(\lambda,\alpha) \in \mathbb{Z}$ となる $\lambda \in V$, $\alpha \in \Phi$ に対し

$$t(\lambda)H_{\alpha,k} \;=\; H_{\alpha,k+(\lambda,\alpha)}, \quad t(\lambda)\,s_{\alpha,k}\,t(-\lambda) \;=\; s_{\alpha,k+(\lambda,\alpha)}.$$

証明はレポート問題 12.2 にする．

5.2　アフィン Weyl 群

引き続き $W = W(\Phi) \leq O(V)$ を Weyl 群とする.

定義 5.2.1. Φ に付随する**アフィン Weyl 群** (affine Weyl group) W_{aff} とは次の $\mathrm{Aff}(V)$ の部分群のことをいう.

$$W_{\mathrm{aff}} := \langle s_{\alpha,k}\ (\alpha \in \Phi, k \in \mathbb{Z}) \rangle \subset \mathrm{Aff}(V).$$

例. $\Phi = \mathrm{A}_1$, $W = \mathfrak{S}_2 = \{e, s_\alpha\}$ なら

$$W_{\mathrm{aff}} = \langle s_\alpha, s_{\alpha,1} \mid s_\alpha^2 = s_{\alpha,1}^2 = e \rangle.$$

この群を無限位数二面体群 (infinite dihedral group) と呼び $\mathcal{D}_\infty$ と書く. またこの W_{aff} を $\widetilde{\mathrm{A}}_1$ 型と呼ぶ.

アフィン Weyl 群の構造を考えるために, いくつか Weyl 群のルート系に纏わる概念を導入する.

定義 5.2.2. 結晶的ルート系 Φ について,

(1) Φ の**ルート格子** (root lattice) $L(\Phi)$ とは

$$L(\Phi) := \mathbb{Z}\Phi = \left\{ \textstyle\sum_i n_i \alpha_i \mid \alpha_i \in \Phi,\ n_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(2) Φ の**ウェイト格子** (weight lattice) $\widehat{L}(\Phi)$ とは

$$\widehat{L}(\Phi) := \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}\ \forall \alpha \in \Phi\}.$$

定義 5.2.3. 結晶的ルート系 Φ の**双対ルート系** (dual root system) $\Phi^\vee$ を次で定める.

$$\Phi^\vee := \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Phi\}.$$

注意 5.2.4. 双対ルート系 $\Phi^\vee$ について,

(1) $\Phi^\vee$ は結晶的ルート系である.

(2) Φ_{X_n} を X_n 型ルート系とすると, X_n が simply-laced の場合, つまり ADE 型なら $(\Phi_{\mathrm{X}_n})^\vee = \Phi_{\mathrm{X}_n}$. また $(\Phi_{\mathrm{B}_n})^\vee = \Phi_{\mathrm{C}_n}$.

定義 5.2.5. $L(\Phi^\vee)$ を W 又は Φ の**余ルート格子** (coroot lattice), $\widehat{L}(\Phi^\vee)$ を**余ウェイト格子** (coweight lattice) と呼ぶ. つまり

$$L(\Phi^\vee) := \mathbb{Z}\Phi^\vee, \quad \widehat{L}(\Phi^\vee) := \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha) \in \mathbb{Z}\ \ \forall \alpha \in \Phi\}.$$

$L(\Phi^\vee) \subset V$ は V 上の平行移動のなす群とみなせるが, それをまた $L(\Phi^\vee) \subset \mathrm{Aff}(V)$ とかく.

命題 5.2.6. W_{aff}, W, $L(\Phi^\vee)$ を $\mathrm{Aff}(V)$ の部分群とみなすと

$$W_{\mathrm{aff}} = W \ltimes L(\Phi^\vee).$$

証明. (5.1.1) より $W' := W \ltimes L(\Phi^\vee)$ は well-defined. (5.1.2) より W_{aff} の生成元は全て W' に含まれる. また同じ (5.1.2) から $t(k\alpha^\vee) = s_{\alpha,k}s_\alpha$ なので $t(k\alpha^\vee) \in W_{\mathrm{aff}}$. よって $L(\Phi^\vee) \leq W_{\mathrm{aff}}$ かつ $W \leq W_{\mathrm{aff}}$ となり $W' \leq W_{\mathrm{aff}}$ が従う. □

(5.1.1) より $W \ltimes \widehat{L}(\Phi^\vee)$ も well-defined である．$L(\Phi^\vee) \le \widehat{L}(\Phi^\vee)$ なので次のような命名が自然である．

定義 5.2.7. 結晶的ルート系 Φ の**拡大アフィン Weyl 群** (extended affine Weyl group) $\widehat{W}_{\mathrm{aff}}$ を次で定義する．

$$\widehat{W}_{\mathrm{aff}} := W \ltimes \widehat{L}(\Phi^\vee).$$

注意. W_{aff} は $\widehat{W}_{\mathrm{aff}}$ の正規部分群であり有限指数である．更に $\widehat{W}_{\mathrm{aff}}/W_{\mathrm{aff}} \simeq \widehat{L}(\Phi^\vee)/L(\Phi^\vee)$.

命題 5.1.5 から

系 5.2.8. $w \in \widehat{W}_{\mathrm{aff}}$ と $H_{\alpha,k} \in \mathcal{H}$ に対し，ある $\beta \in \Phi$, $l \in \mathbb{Z}$ があって $wH_{\alpha,k} = H_{\beta,l}$. 特に $ws_{\alpha,k}w^{-1} = s_{\beta,l}$.

5.3 アルコーブ

引き続き $W = W(\Phi) \le O(V)$ を Weyl 群とする．鏡映面の集合 $\mathcal{H}$ (定義 5.1.4) を思い出して欲しい．

定義 5.3.1. $V^\circ := V \setminus \bigcup_{H\in\mathcal{H}} H$ と定める．また V° の連結成分を**アルコーブ** (alcove) と呼び，その集合を $\mathcal{A}$ と書く．

注意. 系 5.2.8 から W_{aff} 及び $\widehat{W}_{\mathrm{aff}}$ は $\mathcal{A}$ に置換で作用することが分かる．

以下 $\Delta \subset \Pi \subset \Phi$ を固定する．また Φ は既約だと仮定する．

定義 5.3.2.

$$A_\circ := \{\lambda \in V \mid 0 < (\lambda, \alpha) < 1 \ \ \forall \alpha \in \Pi\}.$$

補題 5.3.3. $A_\circ$ はアルコーブである．

証明．$A_\circ \subset V^\circ$ は明らか．定義から $A_\circ$ は凸，つまり $\lambda, \mu \in A^\circ$ なら任意の $0 < t < 1$ について $t\lambda + (1-t)\mu \in A^\circ$ である．従って $A_\circ$ は連結．また $V^\circ \setminus A_\circ$ の任意の元は，アルコーブ $A_\circ$ と H_α もしくは $H_{\alpha,1}$ と書ける鏡映面で隔てられているので，$A_\circ$ は V° の連結成分だと分かる．□

例. Φ が $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \mathrm{G}_2$ 型なら $A_\circ$ は内角 $\pi/k, \pi/l, \pi/m$ の三角形になる．但し $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \mathrm{G}_2$ 型それぞれについて $(k, l, m) = (3, 3, 3), (2, 4, 4), (2, 3, 6)$.

補題 5.3.4. $\widetilde{\alpha}$ を Φ の最高ルート (事実 2.9.3) とすると

$$A_\circ = \{\lambda \in V \mid (\lambda, \widetilde{\alpha}) < 1, \quad 0 < (\lambda, \alpha) \ \ \forall \alpha \in \Delta\}.$$

証明．$\widetilde{\alpha} \in \Pi$ なので $A_\circ$ は右辺に含まれる．λ が右辺の元ならば任意の $\alpha \in \Pi$ について $(\lambda, \alpha) > 0$. $\widetilde{\alpha} - \alpha$ もまた単純ルートの和なので $(\lambda, \widetilde{\alpha} - \alpha) \ge 0$. よって $(\lambda, \alpha) \le (\lambda, \widetilde{\alpha}) < 1$ となって $\lambda \in A_\circ$. □

定義 5.3.5. $A_\circ$ の**壁** (wall) とは H_α $(\alpha \in \Delta)$ 及び $H_{\widetilde{\alpha},1}$ のことである．また S_{aff} を壁に対応する鏡映の集合とする．つまり

$$S_{\mathrm{aff}} := \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\} \sqcup \{s_{\widetilde{\alpha},1}\}.$$

命題 5.3.6. W_{aff} の $\mathcal{A}$ への作用は推移的．また W_{aff} は S_{aff} で生成される．

証明．W' を S_{aff} で生成される W_{aff} の部分群とする．まず W' が $\mathcal{A}$ に推移的に作用することを示す．任意の $A \in \mathcal{A}$ に対しある $w \in W'$ があって $wA = A_\circ$ となることを示せばよい．$\lambda \in A_\circ$, $\mu \in A$ を任意に取って固定

する．平行移動群 $L(\Phi^\vee)$ の作用に関する μ の軌道は V の離散部分集合だから，それを有限群 W で拡大して得られる W_{aff} 軌道及び W' 軌道もまた離散部分集合．よって $W'\mu$ に含まれる元 $\nu = w\mu$ であって λ からの距離が最小になるものがある．$\nu \in A_\circ$ が示せれば $wA \cap A_\circ \neq \emptyset$ なので $wA = A_\circ$．

$\nu \notin A_\circ$ と仮定してみる．すると λ, ν は $A_\circ$ の壁 H で隔てられる．$s \in S_{\mathrm{aff}} \subset W'$ を対応する鏡映とする．$\nu, s\nu, s\lambda, \lambda$ を頂点とする四辺形は等脚台形であって H で二分される．等脚台形の対角線の長さと対辺の長さの関係から $\|s\nu - \lambda\| < \|\nu - \lambda\|$．しかし $s\nu \in W'\mu$ だから ν の選び方と矛盾する．

残っている $W' = W_{\mathrm{aff}}$ を示すには，各 $s_{\alpha,k}$ が W' に含まれることを示せばよい．W' が $\mathcal{A}$ を推移的に置換することが分かったから，任意のアルコーブ A についてその壁を $A_\circ$ の壁の像として定義できる．すると任意の鏡映面はあるアルコーブの壁である．特に $H_{\alpha,k}$ がアルコーブ A の壁だとし，また $w \in W'$ を $wA = A_\circ$ なる元だとする．この時 $A_\circ$ の壁 H が存在して $wH_{\alpha,k} = H$ となる．つまり $ws_{\alpha,k}w^{-1} = s$．H に対応する鏡映 s は W' に含まれるから $s_{\alpha,k} \in W'$ となる． □

参考文献

参考書 [H90] の §§4.1–4.3.

7 月 20 日分レポート問題

問題 12.1 (5 点)**.** 注意 5.1.3 を示せ．

問題 12.2 (5 点)**.** 命題 5.1.5 を示せ．

問題 12.3 (5 点)**.** 注意 5.2.4 を示せ．

問題 12.4 (10 点)**.** 拡大アフィン Weyl 群について，

(1) $W \ltimes \widehat{L}(\Phi^\vee)$ が well-defined であることを確認せよ．

(2) $L(\Phi^\vee) \leq \widehat{L}(\Phi^\vee)$ を確認せよ．

(3) W_{aff} が $\widehat{W}_{\mathrm{aff}}$ の有限指数の正規部分群であることを確認せよ．

問題 12.5 (10 点)**.** $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \mathrm{G}_2$ 型ルート系 Φ について $\mathcal{A}$ がどのような集合になるか調べよ．

レポートの締め切り

レポートの提出期限は **8/8 (火) の 17 時**までとします．講義の最終回 (7/27) 以降はレポート回収 box を教務支援室に用意しますので，そこに提出して下さい．

7 月 27 日 アフィン鏡映群 2

前回と同様に V を Euclid 空間とし $(\cdot,\cdot)$ をその内積とする．Φ を既約な結晶的ルート系とし, $W = W(\Phi) \leq O(V)$ をその Weyl 群とする．また $\Delta \subset \Pi \subset \Phi$ を 1 つ取って固定する．

5.4 Coxeter 表示

前回導入した記号や事実を思い出そう:

- $\mathrm{Aff}(V) := \mathrm{GL}(V) \ltimes V$ で V 上のアフィン変換群を表す．
- $\alpha \in \Phi$ に対し $\alpha^\vee := 2\alpha/(\alpha,\alpha) \in V$．$\Phi^\vee := \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Phi\}$ を Φ の双対ルート系と呼ぶ．
- $\alpha \in \Phi$, $k \in \mathbb{Z}$ に対し $s_{\alpha,k} \in \mathrm{Aff}(V)$ を $s_{\alpha,k}(\lambda) := \lambda - ((\lambda,\alpha) - k)\alpha^\vee$ で定める．$s_{\alpha,0} = s_\alpha$ である．
- アフィン Weyl 群 W_{aff} とは $\{s_{\alpha,k} \mid \alpha \in \Phi, k \in \mathbb{Z}\}$ で生成される $\mathrm{Aff}(V)$ の部分群のこと．
- $W_{\mathrm{aff}} = W \ltimes L(\Phi^\vee)$．但し $L(\Phi^\vee) := \{\sum_i n_i\alpha_i^\vee \mid \alpha_i \in \Phi, n_i \in \mathbb{Z}\}$ は余ルート格子．
- 余ウェイト格子 $\widehat{L}(\Phi^\vee) := \{\lambda \in V \mid (\lambda,\alpha) \in \mathbb{Z}\ \forall \alpha \in \Phi\}$．
- 拡大アフィン Weyl 群 $\widehat{W}_{\mathrm{aff}} := W \ltimes \widehat{L}(\Phi^\vee)$．れは W_{aff} を部分群に含む．
- $s_{\alpha,k}$ の鏡映面 $H_{\alpha,k}$ の集合 $\mathcal{H} := \{H_{\alpha,k} \mid \alpha \in \Phi, k \in \mathbb{Z}\}$．
- アルコーブとは $V^\circ := V \setminus \bigcup_{H\in\mathcal{H}} H$ の連結成分．アルコーブの集合を $\mathcal{A}$ と書く．
- $\widehat{W}_{\mathrm{aff}}$ は $\mathcal{A}$ に置換で作用する．
- W_{aff} の $\mathcal{A}$ への置換作用は推移的.
- $A_\circ := \{\lambda \in V \mid 0 < (\lambda,\alpha) < 1\ \forall \alpha \in \Pi\} = \{\lambda \in V \mid (\lambda,\widetilde{\alpha}) < 1,\ 0 < (\lambda,\alpha)\ \forall \alpha \in \Delta\}$ はアルコーブ．但し $\widetilde{\alpha}$ は最高ルート．
- W_{aff} は $S_{\mathrm{aff}} := \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\} \sqcup \{s_{\widetilde{\alpha},1}\}$ で生成される．

今回の主目標は次の定理の証明である．

定理 5.4.1. $(W_{\mathrm{aff}}, S_{\mathrm{aff}})$ は Coxeter 系.

証明の前にアフィン Weyl 群に対応する Coxeter グラフを考えよう．

- S_{aff} の定義より, Coxeter グラフの頂点集合は有限 Weyl 群のものに $s_{\widetilde{\alpha},1}$ に対応した頂点を加えたものになる．よってあとは各 $\alpha \in \Delta$ に対し $s_\alpha s_{\widetilde{\alpha},1}$ の位数を求めればよい．
- この位数は (二面体群の時の計算を思い出すと) H_α と $H_{\widetilde{\alpha},1}$ のなす角度から決まる．よって §2.8 の既約結晶的ルート系の実現のデータから計算することができる．

結果は

定理 5.4.2. Coxeter 系 $(W_{\mathrm{aff}}, S_{\mathrm{aff}})$ の Coxeter グラフは §2.5 の半正定値グラフである．より正確に述べると, X_n 型ルート系 Φ に付随したアフィン Weyl 群の Coxeter グラフは $\widetilde{X}_n$ 型半正定値グラフになる．

5.5 鏡映面の数え上げ

有限鏡映群の Coxeter 表示の際, 長さ関数 $\ell(w) = n(w)$ が重要であった．アフィン Weyl 群についても関数 ℓ, n の類似を導入することにする．

$\ell(w)$ の類似は安直に導入できる．

定義 5.5.1. $w \in W_{\mathrm{aff}}$ を生成系 S_{aff} の積で表示した時の長さの最小値を w の**長さ** (length) と呼び $\ell(w)$ と書く．またそのような w の表示を**簡約表示** (reduced expression) と呼ぶ．

一方で $n(w)$ の類似は, 鏡映面とアルコーブを使って次のように導入する．

定義 5.5.2. $w \in \widehat{W}_{\mathrm{aff}}$ に対し

$$\mathcal{L}(w) := \{ H \in \mathcal{H} \mid H \text{ はアルコーブ } A_\circ \text{ と } wA_\circ \text{ を隔てる} \}$$

と定める．また $n(w) := |\mathcal{L}(w)|$ とする．

注意. (1) $w^{-1}\mathcal{L}(w) = \mathcal{L}(w^{-1})$ なので $n(w) = n(w^{-1})$.

(2) $n(e) = \ell(e) = 0$.

(3) $s \in S_{\mathrm{aff}} \Longrightarrow \mathcal{L}(s) = \{H_s\} \Longrightarrow n(s) = 1$. 但し s に対応する鏡映を H_s と書いた．

命題 5.5.3. $w \in \widehat{W}_{\mathrm{aff}}$, $s \in S_{\mathrm{aff}}$ とする．s に対応する鏡映を H_s と書く．

(1) H_s は $\mathcal{L}(w^{-1})$ か $\mathcal{L}(sw^{-1})$ のどちらか一方のみに含まれる．

(2) $s(\mathcal{L}(w^{-1}) \setminus \{H_s\}) = \mathcal{L}(sw^{-1}) \setminus \{H_s\}$.

(3) $H_s \in \mathcal{L}(w^{-1})$ なら $n(ws) = n(w) - 1$, そうでなければ $n(ws) = n(w) + 1$.

証明. 簡単のため $H \in \mathcal{H}$ がアルコーブ A と B を隔てることを $A|_H B$ と書き, 隔てないことを $A \nmid_H B$ と書く．$A \nmid_H B$ は A と B が H に関して同じ側にあるということである．

(1) H_s が両方の集合に含まれると仮定する．$H_s \in \mathcal{L}(w^{-1})$ より

$$A_\circ|_{wH_s} wA_\circ. \tag{5.5.1}$$

また $H_s \in \mathcal{L}(sw^{-1})$ より $A_\circ|_{H_s} sw^{-1}A_\circ$ だが, $sH_s = H_s$ より $sA_\circ|_{H_s} w^{-1}A_\circ$. 従って

$$wsA_\circ|_{wH_s} A_\circ. \tag{5.5.2}$$

(5.5.1) と (5.5.2) から $wA_\circ \nmid_{wH_s} wsA_\circ$. すると $A_\circ \nmid_{H_s} sA_\circ$ となり矛盾する．H_s がどちらの集合にも含まれないと仮定しても同様の議論で矛盾を得る．

(2) 左辺が右辺に含まれることを示す．$H \neq H_s$ が $\mathcal{L}(w^{-1})$ に含まれるとする．$sH \neq H_s$ なので $sH \in \mathcal{L}(sw^{-1})$ を示せばよい．そうでないと仮定すると $A_\circ \nmid_{sH} sw^{-1}A_\circ$. よって

$$wsA_\circ \nmid_{wH} A_\circ. \tag{5.5.3}$$

また $H \in \mathcal{L}(w^{-1})$ より $wA_\circ|_{wH} A_\circ$ なので, (5.5.3) と合わせて $wA_\circ|_{wH} wsA_\circ$. つまり

$$sA_\circ|_H A_\circ.$$

これは $H \in \mathcal{L}(s) = \{H_s\}$ を意味するが, H の取り方と矛盾する．逆の包含関係はこの議論で w を ws に置き換えれば従う．

(3) (1) と (2) から直ちに従う．

□

系 5.5.4. $w \in W_{\mathrm{aff}}$ なら $n(w) \leq \ell(w)$.

証明. 有限鏡映群の場合と同様で, 命題 5.5.3(3) を使って $\ell(w)$ に関する帰納法で示せる． □

5.6 $\mathcal{A}$ への作用の単純推移性

定理 5.6.1. アフィン Weyl 群 W_{aff} の作用について,

(1) $w = s_1 \cdots s_r$ を $w \in W_{\mathrm{aff}}$, $w \neq e$ の簡約表示とする. $H_i := H_{s_i}$ とすると

$$\mathcal{L}(w) = \{H_1, s_1H_2, s_1s_2H_3, \ldots, s_1 \cdots s_{r-1}H_r\}.$$

更に右辺に現れる鏡映面は互いに異なる.

(2) $n|_{W_{\mathrm{aff}}} = \ell$.

(3) W_{aff} は $\mathcal{A}$ に単純推移的に作用する.

証明. (1) まず右辺に現れる鏡映面が全て異なることを示す. $1 \leq p < q \leq r$ で $s_1 \cdots s_{p-1}H_p = s_1 \cdots s_{q-1}H_q$ だとすると $H_p = s_p \cdots s_{q-1}H_q$. 系 5.2.8 から $s_p = (s_p \cdots s_{q-1})s_q(s_{q-1} \cdots s_p)$ なので $s_{p+1} \cdots s_{q-1} = s_p \cdots s_q$ となり, 簡約表示であることと矛盾する.
次に等式 $\mathcal{L}(w) = \{H_1, s_1H_2, \ldots\}$ を $\ell(w)$ に関する帰納法で示す. $w = s \in S_{\mathrm{aff}}$ なら $\mathcal{L}(s) = \{H_s\}$ だから正しい. $r = \ell(w) > 1$ なら帰納法の仮定から

$$\mathcal{L}(s_2 \cdots s_r) = \{H_2, s_2H_3, \cdots, s_2 \cdots s_{r-1}H_r\}.$$

もし H_1 がこの $r-1$ 個の鏡映面に現れるなら $H_1 = s_1H_1 \in \{s_1H_2, s_1s_2H_3, \cdots, s_1 \cdots s_{r-1}H_r\}$ となって既に示したことと矛盾する. よって $H_1 \notin \mathcal{L}(s_1w)$. ここで命題 5.5.3 を $s = s_1$, $w^{-1} = s_2 \cdots s_r$ に適用すると, (1) から $H_1 \in \mathcal{L}(w)$ となり, (2) から $\mathcal{L}(w) = \{H_1, s_1H_2, \ldots\}$ が得られる.

(2) (1) から従う.

(3) W_{aff} が $\mathcal{A}$ に推移的に作用することは既に知っているので, $w \neq e$ で固定されるアルコーブが無いことを示せばよい. 固定されるアルコーブ A が存在すると仮定すると, 推移性をもう一度使って $A = A_\circ$ として構わない. すると $wA_\circ = A_\circ$ だが, $\mathcal{L}(w) = \emptyset$ となり (1) と矛盾する.

□

5.7 Coxeter 表示の証明

定理 5.7.1. $w = s_1 \cdots s_r$ を $w \in W_{\mathrm{aff}}$ の簡約表示とする. $s \in S_{\mathrm{aff}}$ が $\ell(ws) < \ell(w)$ を満たすなら, ある $1 \leq i \leq r$ が存在して $ws = s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_r$.

証明. $w^{-1} = s_r \cdots s_1$ が簡約表示であることと定理 5.6.1 (3) から

$$\mathcal{L}(w^{-1}) = \{H_r, s_rH_{r-1}, \ldots, s_r \cdots s_2H_1\}.$$

仮定と命題 5.5.3 (3) 及び定理 5.6.1 (2) から $H_s \in \mathcal{L}(w^{-1})$. そこで $H_s = s_r \cdots s_{i+1}H_i$ $(1 \leq i \leq r)$ とすると系 5.2.8 から $s = (s_r \cdots s_{i+1})s_i(s_{i+1} \cdots s_r)$. つまり $s_{i+1} \cdots s_rs = s_is_{i+1} \cdots s_r$. これから $ws = s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_r$ となる. □

これで §1.9 の有限鏡映群の時と同じ状況になったので, アフィン Weyl 群が Coxeter 群であることも同じ議論で分かる. こうして定理 5.4.1 が証明される.

参考文献

参考書 [H90] の §§4.4–4.7.

7 月 27 日分レポート問題

問題 13.1 (計 15 点)**.** 定理 5.4.2「X_n 型ルート系 Φ に付随したアフィン Weyl 群の Coxeter グラフは $\widetilde{X}_n$ 型半正定値グラフになる」を各 X_n について確認せよ.

レポートの締め切り

レポートの提出期限は **8/8 (火) の 17 時**までとします. レポート回収ボックスを教務支援室に用意しましたので, 今回の講義 (7/27) 以降はそこに提出して下さい.

成績のつけ方

修士の方はレポートの合計点を素点とします. 学部生の方はレポートの合計点 +30 点を素点とします. 素点が 60 点以上で単位を出します.

参考文献

[H90] James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Stud. Adv. Math., **29**, Cambridge University Press, 1990.

[M72] I. G. Macdonald, *The Poincaré series of a Coxeter group*, Math. Ann., **199** (1972), 161–174.

以上です.