秋の数学散策講座 「二項定理と q 類似」

2017 年 9 月 9 日
柳田伸太郎 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

1 二項係数と二項定理

n 個の (区別できる) ものから k 個のものを選ぶ方法の数を $\binom{n}{k}$ で表す。日本の中学・高校数学では ${}_n\mathrm{C}_k$ と書く。$\binom{n}{k}$ は次のように階乗を使って計算できた。

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\cdots\cdot 1} \tag{1.1}$$

問. この式では $\binom{n}{k}$ は有理数として表示されているが、実際は整数である。このことを証明せよ。

$\binom{n}{0}=1$ と約束すると、$\binom{n}{k}$ の母関数は次のような性質を満たす。

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n. \tag{1.2}$$

あるいは、実質同じことだが

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n.$$

このため $\binom{n}{k}$ は**二項係数**と呼ばれる。

問. 等式 (1.2) を示せ。

$n<k$ なら $\binom{n}{k}=0$ と約束すれば、(1.2) は更に次のように書き換えられる。

$$\boxed{\sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n. \tag{1.3}}$$

この等式は**二項定理**と呼ばれる。

(計算欄)

二項係数の式 (1.1) の最右辺に注目しよう。分子にある n を文字 x に置き換えても

$$\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

となって意味を持つ。そこで

定義. 実数 α と 1 以上の整数 k に対して

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

と定める。また $\binom{\alpha}{0} := 1$ と定める。

特に α を負の整数 $-n$ にしても $\binom{-n}{k}$ が定義されている。

ここで二項定理 (1.3) を思い出して $-n = -1$ としてみよう。左辺は $(1+x)^{-1}$ だが、$|x| < 1$ なら

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^k x^k + \cdots$$

と展開できる。一方、右辺の $\sum_{k\geq 0} \binom{-1}{k} x^k$ の各項は

$$\binom{-1}{k} x^k = \frac{(-1)(-2)\cdots(-k)}{k!} x^k = (-1)^k x^k$$

と書ける。従って (1.3) で $n = -1$ とした次の等式が正しいことが分かる。

$$(1+x)^{-1} = \sum_{k\geq 0} \binom{-1}{k} x^k.$$

実は任意の負の整数 $-n$ についても次の二項定理が成立する。

$|x| < 1$ なら

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k\geq 0} \binom{-n}{k} x^k. \tag{1.4}$$

問. 等式 (1.4) を証明せよ。

(計算欄)

2　q 類似と多項式版 q 二項定理

正の整数

$$1,\ 2 = 1+1,\ 3 = 1+1+1,\ \ldots,\ n = \overbrace{1+\cdots+1}^{n},\ \ldots$$

の q 類似として、次のような q **整数**が知られている。

$$[1]_q := 1,\ [2]_q := 1+q,\ [3]_q := 1+q+q^2,\ \ldots,\ [n]_q := 1+q+\cdots+q^{n-1},\ \ldots.$$

二項定理 (1.2) の q 類似を考えたい。そのためにまず左辺の $(1+x)^n$ の q 類似を考えよう。

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2, \quad (1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3,$$

の 2 や 3 の代わりに $1+q$ や $1+q+q^2$ が現れるはずだと考える。そこで

$$(1+x)(1+qx), \quad (1+x)(1+qx)(1+qx^2)$$

を展開してみると

$$\begin{aligned}(1+x)(1+qx) &= 1+(1+q)x+qx^2,\\ (1+x)(1+qx)(1+q^2x) &= 1+(1+q+q^2)x+(q+q^2+q^3)x^2+q^3x^2.\end{aligned}$$

ここで $q \to 1$ とすれば確かに $(1+x)^2$ や $(1+x)^3$ の展開式に戻る。

問. $(1+x)(1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)$ を展開して $q \to 1$ とすることで $(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$ が復元されることを確認せよ。

(計算欄)

次に二項定理 (1.2) の右辺について、階乗 $n!$ の q 類似として次のものを考える。

$$[n]_q! := [n]_q[n-1]_q\cdots[1]_q, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}.$$

二項定理の q 類似は次の等式で与えられる。

$$(1+x)(1+qx)(1+q^2x)\cdots(1+q^{n-1}x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2}x^k. \tag{2.1}$$

ここで

$$(y;q)_n := (1-y)(1-qy)\cdots(1-q^{n-1}y)$$

という記号を用意すると

$$(1+x)(1+qx)(1+q^2x)\cdots(1+q^{n-1}x) = (-x;q)_n, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}}$$

だから、二項定理の q 類似 (2.1) は次のように書き直せる。これを**多項式版 q 二項定理**と呼ぼう。

$$\boxed{(-x;q)_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2}x^k. \tag{2.2}}$$

問. 二項係数の漸化式 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ の q 類似である次の等式を示せ。

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q.$$

(計算欄)

3　級数版 q 二項定理

前述の二項定理の q 類似 (2.2) は右辺が有限和であった。実は右辺を無限和にしたものも成立するのでそれを紹介する。

まず多項式版 q 二項定理

$$(z;q)_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2}(-z)^k$$

の右辺について

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2}(-z)^k &= \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(q;q)_k} q^{k(k-1)/2}(-z)^k \\ &= \frac{(1-q^{-n})(1-q^{-(n-1)})\cdots(1-q^{-(n-k+1)})}{(q;q)_k}(-1)^k q^{(2n-k+1)k/2} q^{k(k-1)/2}(-z)^k \\ &= \frac{(q^{-n};q)_k}{(q;q)_k}(q^n z)^k. \end{aligned}$$

よって

$$(z;q)_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n};q)_k}{(q;q)_k}(q^n z)^k.$$

更に $z \mapsto q^{-n}z$ と変換して

$$(q^{-n}z;q)_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{-n};q)_k}{(q;q)_k} z^k.$$

右辺を無限和にしたが、実際は $k \geq n+1$ で分子が 0 になるので有限和である。

(計算欄)

ここで少し天下りだが、両辺に共通する q^{-n} を勝手な文字 a に置き換えることを考える。しかし左辺が n 個の積になっているのが問題になる。それは

$$(z;q)_\infty := (1-z)(1-qz)(1-q^2z)\cdots$$

という無限積の記号を用意して

$$(q^{-n}z;q)_n = \frac{(q^{-n}z;q)_\infty}{(z;q)_\infty}$$

と表せば解決できる。

以上の推測で次のような等式が得られる。

$$\frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} z^k.$$

この等式は a, z, q に適当な条件を課すと実際に成立して、**級数版 q 二項定理**と呼ばれている。

(計算欄)

以上です。