トーラス SKEIN 代数とミラー対称性

柳田伸太郎

1. 概要と導入

本稿の主対象は 2 次元トーラス T に対する Turaev の skein 代数

$$A := \mathrm{Sk}(T)$$

である。有向曲面 Σ に対する skein 代数 $\mathrm{Sk}(\Sigma)$ は Goldman Lie 代数 [Go86] の q 変形として Turaev が [Tu89, Tu91] で導入した。skein 代数については §2 で復習することにする。

近年 Morton と Samuelson [MS17] により代数 A と楕円曲線に付随する Ringel-Hall 代数の関係が明らかにされた。Hall 代数については §3 で復習するが、ここでも簡単に説明をしておこう。

E を有限体上定義されている楕円曲線とする。E 上の連接層のなす圏を $\mathrm{Coh}(E)$ と書く。$\mathrm{Coh}(E)$ は大域次元 1 の有限な Abel 圏なので Ringel-Hall 代数 $\mathrm{Hall}(\mathrm{Coh}(E))$ を考えることができる。これは $\mathrm{Coh}(E)$ の対象の同型類を生成元とし、拡大の数え上げを構造定数とする結合代数である。更に $\mathrm{Hall}(\mathrm{Coh}(E))$ は Hopf pairing を持つ双代数であることも知られている。従ってその Drinfeld ダブル $\mathrm{DHall}(\mathrm{Coh}(E))$ を考えることができる。Burban と Schiffmann の結果 [BS12] によりこの Drinfeld ダブルは 2 パラメータ q, t を持つ代数であって生成元と定義関係式で書き表せる。このことを次のように書き表すことにしよう。

$$B_{q,t} = \mathrm{DHall}(\mathrm{Coh}(E)).$$

Morton と Samuelson の結果は $B_{q,t}$ の特殊化 $B := B_{q,q}$ と A の代数同型である。

$$A \simeq B \tag{1.1}$$

この同型を Morton-Samuelson 同型と呼ぶことにしよう。

彼らの同型の証明は、生成元の対応を明示的に構成し定義関係式を確認する代数的な方法に基づく。しかし今までに述べてきたように 2 つの代数 A, B は共に幾何学的な背景を持つので、より概念的な証明を期待してもよいだろう。

本稿の主目標は、パラメータ q を持つある圏

$$\mathcal{B}_q$$

の導入である。これは楕円曲線上の連接層のなす Abel 圏の $\mathbb{F}_1$ 類似と呼べるものである。$\mathcal{B}_q$ 構成は §§4.2–4.6 で説明する。

圏 $\mathcal{B}_q$ はもはや Abel 圏ではなく、実は加法圏ですらないが、quasi-exact category と呼ばれる圏のクラスに属している。すると Szczesny の構成 [Sz14] を適用することで $\mathcal{B}_q$ から Hall 代数 $\mathrm{Hall}(\mathcal{B}_q)$ を構成できる。また Drinfeld ダブルをとることもできる。こうして代数

$$B' := \mathrm{DHall}(\mathcal{B}_q)$$

が得られる。

また $\mathbb{Z}$ 上の楕円曲線/トーラスのミラー対称性の帰結として、圏 $\mathcal{B}_q$ には A_∞ 構造が入る。A_∞ 圏と思った時の圏 $\mathcal{B}_q$ を $\mathcal{A}_q$ と書こう。それに関する Hall 代数を考えると、別の代数

$$A' := \mathrm{DHall}(\mathcal{A}_q)$$

が得られる。

本研究の主結果は以下の 3 つである。特に Morton-Samuelson 同型 (1.1) をトーラス/楕円曲線のミラー対称性から再証明している。

(1) B' と B は代数同型。
(2) A' と A は代数同型。
(3) ミラー対称性の帰結として A' と B' は代数同型。

本稿ではこのうち (1) について述べることにする。詳細は [Y17] を参照されたい。

2. skein 代数

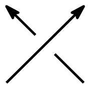
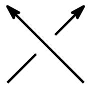
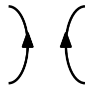
2.1. skein 代数の定義. s, v を不定元とし

$$R := \mathbb{Z}[s^{\pm 1}, v^{\pm 1}]$$

とする。3 次元多様体 M の skein 加群 $S(M)$ を

$$S(M) := \Big\langle \ M \text{ 内の framed link のイソトピー類 } \Big\rangle_{R\text{-lin}} \Big/ (\mathrm{sk}), (\mathrm{fr})$$

と定義する。但し (sk) は次の (HOMFLY-PT) skein 関係式である。(fr) は framing を v で数える関係式だが、本稿では省略することにする。

(sk)  $-$  $=$ $(s-s^{-1})$ 

$I := [0,1] \in \mathbb{R}$ を単位区間とする。有向曲面 Σ の skein 代数 $\mathrm{Sk}(\Sigma)$ とは R 加群

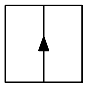
$$\mathrm{Sk}(\Sigma) := S(\Sigma \times I)$$

に「$\Sigma \times I$ を 2 つ取って I 方向に重ねる」ことで得られる乗法を入れたものである。

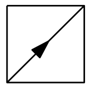
事実 ([Tu91])**.** $\mathrm{Sk}(\Sigma)$ は R 上の結合代数になる。

Σ がトーラス T である場合について skein 代数の乗法を説明しよう。まず $\mathrm{Sk}(T)$ の元として次図の $L_{0,1}, L_{1,1}$ を考える。図の正方形の枠はトーラスを通常のように切り開いたときの境界で、枠内の向き付き直線が閉曲線に対応している。

$L_{0,1}$



$L_{1,1}$



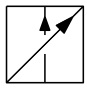
より一般に

$$L_{r,d} \in \mathrm{Sk}(\Sigma)$$

を「右に r 周する間に上に d 周する閉曲線」の類として定義する。

積 $L_{1,1} \cdot L_{0,1}$ は「$L_{1,1}$ を $L_{0,1}$ の上から重ねて」得られるものである。つまり次図で表される 2 本つの閉曲線の類が $L_{1,1} \cdot L_{0,1}$ である。

$L_{1,1} \cdot L_{0,1}$

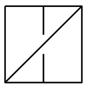


これら 2 元 $L_{1,1}, L_{0,1}$ に関する skein 関係式は

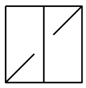
$$L_{1,1} \cdot L_{0,1} - L_{0,1} \cdot L_{1,1} = (s - s^{-1}) L_{1,2}$$

となるが、各項は下の 3 つの図に対応する。但し簡単の為に矢印は省略した。

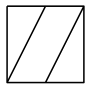
$L_{1,1} \cdot L_{0,1}$



$L_{0,1} \cdot L_{1,1}$



$L_{1,2}$



2.2. skein 代数に関する事実. §1 でも触れたように、Turaev が skein 代数を導入した動機は Goldman Lie 代数の量子化であった。Goldman Lie 代数は有向閉曲面 Σ と Lie 群 G に付随する character variety の symplectic 構造の背景にある代数構造であったので、その量子化を考えることは自然な問題だろう。定理の形で Turaev の結果を書くと次のようになる。

事実 ([Tu91])**.** $\mathrm{Sk}(\Sigma)$ は Σ の Goldman Lie 代数の s 変形である。つまり $s \to 1$ で $\mathrm{Sk}(\Sigma)$ は次で定まる Lie 代数と同型になる。

$$[\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle]_{\mathrm{Goldman}} := \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \pm \langle \alpha_p \beta \rangle.$$

但し閉曲線 $\alpha : S^1 \to \Sigma$ のホモトピー類を $\langle \alpha \rangle \in \pi^1(\Sigma)$ と表し、また $p \in \alpha \cap \beta$ は閉曲線 α と β の交点を表し、$\alpha_p \beta$ で p において α と β をつないでできる閉曲線を表す。

更に $\mathrm{Sk}(\Sigma)$ は s, v がある条件を満たすときに双代数であることも [Tu91] で示されている。

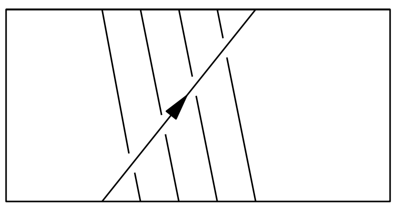
しかし $\mathrm{Sk}(\Sigma)$ の代数構造は一般には複雑で、導入当初の 1990 年前後では次の結果しか知られていなかったようである。

事実 ([Tu89])**.**

$$\mathrm{Sk}(\text{円柱面}) \simeq R[L_d \mid d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}].$$

但し $d > 0$ に対し L_d は次図のような d 周する閉曲線の類とする。この図の長方形の枠は円柱面を切り開いたもので、上下方向を張り合わせると元の円柱面が復元するように描いてある。また $d < 0$ なら L_{-d} の向きを逆向きにした閉曲線の類とする。

L_5



ここで本稿の主題である Morton と Samuelson の結果を思い出しておこう。

事実 ([MS17])**.** T を 2 次元トーラスとすると

$$\mathrm{Sk}(T) \simeq \text{楕円 Hall 代数の特殊化}.$$

3. 楕円 Hall 代数

Ringel は [R90] において有限的かつ大域次元 1 の Abel 圏 $\mathcal{B}$ に対し結合代数を構成する方法を導入した。この方法で得られる代数 $\mathrm{Hall}(\mathcal{B})$ は古典的な Hall 代数及び量子群の上三角部分を含み、現在 Ringel-Hall 代数と呼ばれている。また Green の仕事 [Gr95] によって $\mathrm{Hall}(\mathcal{B})$ 代数は Hopf pairing を持つ双代数であることが分かっている。特に $\mathrm{Hall}(\mathcal{B})$ の Drinfeld ダブル $\mathrm{DHall}(\mathcal{B})$ を考えることができる。

以上が Ringel-Hall 代数に関して本稿で必要な事項である。これら一般論を簡単に復習した後で、Burban と Schiffmann の仕事 [BS12] による、$\mathcal{B}$ が楕円曲線上の連接層のなす圏の Hall 代数の記述を紹介する。

3.1. Ringel-Hall 代数.

$\mathcal{B}$ を有限体 $\mathbb{F}_p$ 上線形な Abel 圏であって射のなす $\mathbb{F}_p$ 線形空間がいつも有限次元なものとする。Ringel-Hall 代数 $\mathrm{Hall}(\mathcal{B})$ とは $\mathbb{C}$ 線形空間

$$\mathrm{Hall}(\mathcal{B}) := \langle [M]; M \in \mathrm{Iso}(\mathcal{B}) \rangle_{\mathbb{C}\text{-lin}}$$

に積 $\cdot$ を

$$[M] \cdot [N] = \sum_{L \in \mathrm{Iso}(\mathcal{B})} g_{M,N}^{L} [L], \quad g_{M,N}^{L} := |\{N' \subset L \mid N' \simeq N,\ L/N' \simeq M\}|$$

で入れたものである。

事実 ([R90])**.** $\mathrm{Hall}(\mathcal{B})$ は結合代数。

この節の最初に触れたように、Ringel-Hall 代数は古典的な Hall 代数及び量子群の上三角部分を含む。この 2 例はどちらも Hopf 代数であるため、一般に Ringel-Hall 代数にも余積構造があると期待される。実際、次の結果が知られている。

事実 ([Gr95])**.** $\mathcal{B}$ が更に大域次元 1 なら $\mathrm{Hall}(\mathcal{B})$ は双代数であり、かつ Hopf pairing $\langle [M], [N] \rangle := \delta_{M,N} / |\mathrm{Aut}_{\mathcal{B}}(M)|$ を持つ。

双代数であるということは、$H := \mathrm{Hall}(\mathcal{B})$ は双線形写像

$$\Delta : H \to H \otimes_{\mathbb{C}} H$$

を持ち、更に Δ が積 $\cdot$ に関して準同型になる、つまり $\Delta(a \cdot b) = \Delta(a) \cdot \Delta(b)$ となるということである。ここで右辺の $\cdot$ は

$$(a_1 \otimes a_2) \cdot (b_1 \otimes b_2) := (a_1 \cdot b_1) \otimes (a_2 \cdot b_2)$$

で定義される $H \otimes_{\mathbb{C}} H$ 上の積である。また H 上の双線形形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \otimes_{\mathbb{C}} H \to \mathbb{C}$ が Hopf pairing であるとは

$$\langle \Delta(a), b \otimes c \rangle = \sum \langle a_{(1)}, b \rangle \langle a_{(1)}, c \rangle$$

が成立することをいう。但し $\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ とした。

3.2. Drinfeld ダブル.

Hopf pairing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を持つ双代数 H の Drinfeld ダブルとは、$\mathbb{C}$ 線形空間

$$DH := H \otimes_{\mathbb{C}} H$$

を次の関係式で割ってできる $\mathbb{C}$ 代数である。

$$\begin{aligned}
&(m \otimes 1) \cdot (1 \otimes n) = m \otimes n, \\
&\textstyle\sum \langle m_{(2)}, n_{(1)} \rangle m_{(1)} \otimes n_{(2)} = \sum \langle m_{(1)}, n_{(2)} \rangle (1 \otimes n_{(1)}) \cdot (m_{(2)} \otimes 1).
\end{aligned}$$

但し 2 行目では $\Delta(m) = \sum m_{(1)} \otimes m_{(2)}$ 等とした。あるいはこの 2 式を DH での積 $\cdot$ の定義とみなしてもよい。

Drinfeld ダブルは量子群ないし Lie 環の包絡代数の上三角部分から全体を復元する手続きの一般化として導入されたものである。詳しくは [J95, §3.2] や [Sc12, §5.2] を参照されたい。

前副節より有限体上線形で大域次元 1 の Abel 圏 $\mathcal{B}$ の Ringel-Hall 代数 $\mathrm{Hall}(\mathcal{B})$ に Drinfeld ダブルの構成を適用できる。得られる代数を以下

$$\mathrm{DHall}(\mathcal{B})$$

と書くことにする。

3.3. **楕円 Hall 代数.** E を有限体 $\mathbb{F}_p$ 上の楕円曲線とすると、E 上の連接層のなす圏 $\mathrm{Coh}(E)$ は $\mathbb{F}_p$ 線形な遺伝的 Abel 圏だから、前副節までの議論を適用できる。それで得られる Ringel-Hall 代数の Drinfeld ダブル $\mathrm{DHall}(\mathrm{Coh}(E))$ は次のような記述を持つことが Burban と Schiffmann の仕事 [BS12] により分かっている。

事実 ([BS12])**.** $p = v^{-2}$ なる複素数 $v \in \mathbb{C}$ を固定する。$\mathrm{DHall}(\mathrm{Coh}(E))$ は

$$\{u_x \mid x \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}\}$$

を生成元とし以下の (1), (2) を定義関係式とする $\mathbb{C}$ 代数である。
(1) $x, y \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ が平行なら

$$[u_x, u_y] = 0.$$

(2) 原点 $(0,0)$ と x 及び $x+y$ を頂点とする $\mathbb{R}^2$ 内の三角形の内部に格子点がなければ

$$[u_x, u_y] = \pm\alpha_{\gcd(y)}\theta_{x+y}/(v - v^{-1}).$$

但し θ_z は $\gcd(z_0) = 1$, $z \in \mathbb{Z}z_0$ なる z_0 を用いて

$$1 + \sum_{k \geq 1} \theta_{kz_0} w^k = \exp((v^{-1} - v)\sum_{n \geq 1} u_{nz_0} w^n)$$

で定義される元。また α_n は

$$\alpha_n := \frac{v^n [n]_v}{n} \, |E(\mathbb{F}_{p^n})|$$

と定義される。ここで $[n]_v := (v^n - v^{-n})/(v - v^{-1})$.

α_d は E の Weil 数で表せる。ここで Weil 数とは有限体上の代数曲線に関する Hasse-Weil の ζ 関数の零点に表れる複素数のことである。$\mathbb{F}_p$ 上の楕円曲線 E の場合なら ζ 関数 $\zeta_E(w)$ は

$$\zeta_E(w) := \exp\Big(\sum \frac{1}{n} \# E(\mathbb{F}_{p^n}) w^n\Big) = \frac{(1 - qw)(1 - w/t)}{(1 - w)(1 - pw)}.$$

となり、特に分子は 2 次式で、その零点に表れる q, t^{-1} が E の Weil 数である。またこの時

$$q/t = p$$

及び $|q| = |t| = 1$ が成立することが知られている。

この記述をよく見ると、q, t を不定元に置き換えても構わないことが分かる。つまり $\{u_x\}$ を生成元とし上記の (1), (2) を定義関係式とする $\mathbb{Q}(q, t)$ 代数を考える。この時 $\{u_x\}$ は integral な基底である。つまり $\{u_x\}$ は $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}, t^{\pm 1/2}]$ 上の基底になっている。後の都合のため、この最後の記述に名前を付けておこう。

定義. $B_{q,t}$ を $\{u_x\}$ で生成され上記 (1),(2) を定義関係式とする $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}, t^{\pm 1/2}]$ 代数とする。

3.4. **Morton と Samuelson の結果.** 以上の準備の下で Morton と Samuelson の結果を正確に述べることができる。

事実 ([MS17])**.** T を 2 次元トーラスとして、次の代数同型が存在する。

$$\mathrm{Sk(T)} \xrightarrow{\sim} B_{s^2,s^2} \otimes_{\mathbb{Z}[s^{\pm 1}]} \mathbb{Z}[s^{\pm 1}, v^{\pm 1}],$$
$$L_{r,d} \longmapsto u_{(r,d)} \text{ if } \gcd(r,d) = 1.$$

この代数同型を Morton-Samuelson 同型と呼ぼう。

4. ミラー対称性からのアプローチ

4.1. **プログラム.** §1 でも触れたように Morton と Samuelson の証明は定義関係式を確認するという代数的なもので、2 つの代数の幾何学的な背景を直接には用いないものである。

幾何学的背景とはトーラスと楕円曲線のことである。すると Moroton と Samuelson も [MS17] で指摘しているように、次のトーラス/楕円曲線のホモロジー的ミラー対称性 [Ko95, PZ98] を思い浮かべるのは自然だろう。

$$D\mathfrak{F}uk(T) \simeq D^b\mathrm{Coh}(E/\mathbb{C}), \quad L_{1,d} \longleftrightarrow \mathcal{L}_d.$$

そこで Morton-Samuelson 同型をこのような圏同値から証明することを考えよう。

少し考えると次のような障害が存在することが分かる。Hall 代数 B_{s^2,s^2} は Weil 数が $q = t = s^2$ となる楕円曲線 E の Hall 代数と思えそうだが、もし E が $\mathbb{F}_p$ 上にあるなら $p = q/t$ だから、この状況だと E は $\mathbb{F}_1$ 上定義されているように見える。

すると $\mathbb{F}_1$ 上の代数幾何学を考える必要がありそうに思える。正確に言うと、ここで必要なのは $\mathrm{Coh}(E)$ や加群圏のような圏であって $\mathbb{F}_1$ 上の代数多様体そのものではない。また Hall 代数だけではなく skein 代数の方も考える必要がある。

幸い楕円曲線の場合は $\mathbb{Z}$ 上のホモロジー的ミラー対称性 [G09, LP12] が知られていて、この 2 つの懸案を同時に解決できる。

具体的には次のようなプログラムを考える。
(B1) モノイダル Tate 曲線 $\widehat{E}_{\mathrm{mon}}$ 上の連接層のなす圏として quasi-exact category $\mathcal{B}_q$ を構成する。$\mathcal{B}_q$ は「$E/\mathbb{F}_1$ 上の連

接層のなす圏」と思える。
(B2) Hall($\mathcal{B}_q$) を Szczesny [Sz14] に従って構成する。
(B3) DHall($\mathcal{B}_q$) $\simeq B_{q,q}$ を確認する。
(A1) トーラスの深谷圏の部分圏から quasi-exact category $\mathcal{A}_s$ を構成する。

(A2) Hall($\mathcal{A}_s$) を構成する。
(A3) DHall($\mathcal{A}_s$) $\simeq$ Sk(T) を確認する。
(HMS) ホモロジー的ミラー対称性 $\mathcal{A}_s \simeq \mathcal{B}_{q=s^2}$ を示す。

4.2. **モノイド上の加群の圏と Quasi-exact category.** 前副節で $\mathbb{F}_1$ 上の代数幾何学ないしスキーム論を考える必要性を論じた。本稿では Deitmar [D05] に従ってモノイダルスキームの理論を簡単に紹介することにする。基本的には通常のスキーム論に表れる可換環を可換モノイドで置き換えるのがこの理論の要旨である。

A を乗法的な積 $\cdot$ を持つ可換モノイドであって absorbing element 0 を持つものとする。つまり任意の $a \in A$ に対し $a \cdot 0 = 0$ である。

(左)A 加群とは点付き集合 $(M, *)$ であって $0 \cdot m = *$ となる A 作用 $\cdot$ を持つものである。

A 加群の射、部分 A 加群、射の像、核は通常のように定義できる。商は $M/N := (M \setminus N) \sqcup \{*\}$ と定義する。

定義. A-mod で A 加群のなす圏を記す。

A-mod は Abel 圏ではない。実際、標準的な射 $\mathrm{coim}(f) \to \mathrm{im}(f)$ は存在するが同型とは限らない。

一方で A-mod には零対象 $\{*\}$, 直和 $M \oplus N := M \sqcup N/\sim$ (但し $\sim$ は基点の同一視)、有限の順極限及び有限の逆極限が存在する。また直積 $M \times N$ も存在して、集合論的直積に A の対角作用を入れたものである。

これから実は A-mod が加法圏ですらないことも分かる。実際、一般に $M \times N \not\simeq M \oplus N$ なので、有限直和と有限直積が一致しない。

このようなモノイド上の加群圏の満たす性質をまとめたものは quasi-exact category と呼ばれる。本稿ではその公理を書き下すことは避ける。

4.3. **モノイド上の加群圏の Hall 代数.** §3 で述べたように Ringel-Hall 代数は Abel 圏に対して定義されていたので、モノイド上の加群圏 A-mod にその構成を適用することはできない。しかし Ringel-Hall 代数が「短完全系列の数え上げ」を構造定数にしていることを思い出すと、Abel 圏でなくても「短完全系列の集合」が適切に指定されていれば Hall 代数を定義することができる。実際、(Quillen の意味での) 完全圏について Hall 代数が定義できることが知られている。

本稿で考えたい圏はモノイド上の加群圏ないしモノイド上の加群層の圏なので加法圏ですらない。その為、完全圏の Hall 代数の構成を用いることはできない。しかしこの副節で述べるような Hall 代数の亜種の構成が Szczesny [Sz14] によって導入されていて、それを適用することができる。

前副節に続き A を 0 を持つ可換モノイドとする。A-mod の射 f は $\mathrm{coim}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(f)$ の時 normal であるという。A-mod^n を A-mod の部分圏であって、同じ対象を持ち normal な射のみからなるものとする。

事実 ([Sz14])**.** normal な射の数え上げで $\mathbb{C}$ 結合代数 Hall(A-mod^n) が定義できる。

4.4. **Tate 曲線.** 次の副節以降ではモノイダルスキームを導入して目的の圏 $\mathcal{B}_q$ を導入する。その準備として、通常の scheme である Tate 曲線 $\widehat{E}$ の復習をしよう。これは「$\mathbb{Z}$ 上の楕円曲線」と思えるものであり、トーリック多様体として実現される。

各 $i \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\begin{aligned} &\rho_i := \mathbb{Q}_{\geq 0}(i, 1) \subset \mathbb{Q}^2, \\ &\rho_i^\vee := \{x \in \mathbb{Q}^2 \mid \langle x, \rho_i \rangle \subset \mathbb{Q}_{\geq 0}\} = \{(x_1, x_2) \mid i x_1 + x_2 \geq 0\}, \\ &\sigma_{i+1/2}^\vee := \rho_i^\vee \cap \rho_{i+1}^\vee. \end{aligned}$$

と定める。可換環 R に対し

$$U_{i+1/2} := \mathrm{Spec}\, R[\sigma_{i+1/2}^\vee \cap \mathbb{Z}^2]$$

とすると、これらは張り合わさって R 上のスキーム X をなす。写像

$$\sigma_{i+1/2} \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad (x, y) \longmapsto y$$

から射 $X \to \mathrm{Spec}\, R[q]$ が定まる。

Tate 曲線 $\widehat{E}$ とは $X \to \mathrm{Spec}\, R[q]$ の q に関する formal thickening

$$\widehat{E} \longrightarrow \mathrm{Spf}\, R[[q]]$$

である。

4.5. モノイダルスキーム. 前副節の Tate 曲線のモノイダルスキーム類似を考えたい。ここでモノイダルスキームとは Deitmar [D05] によって展開されている「$\mathbb{F}_1$ 上のスキーム」である。この副節でこのモノイダルスキームについて簡単に紹介しよう。§4.2 で述べたように、通常のスキーム論に表れる可換環を可換モノイドで置き換えるのがこの理論の基本戦略である。

A を 0 のある可換モノイドとする。A のイデアル $\mathfrak{a}$ とは A の部分集合であって $\mathfrak{a}A \subset \mathfrak{a}$ となるもののことである。素イデアル、局所化なども可換環の時と同様に定義できる。

アフィンモノイダルスキーム $\mathrm{Spec}^{\mathrm{mon}}(A)$ も通常のアフィンスキームと同様に定義できる。つまり A の素イデアルの集合に、通常と同様に定義できる Zariski 位相と、A 及びその局所化で定義できる可換モノイドの層 (構造層) を付随させたものを $\mathrm{Spec}^{\mathrm{mon}}(A)$ とする。

モノイダルスキームとは位相空間 X と可換モノイド層 $\mathcal{O}_X^{\mathrm{mon}}$ の組であって、局所的にアフィンモノイダルスキームと同型であるもののことである。

$\mathcal{O}_X^{\mathrm{mon}}$ 加群層及び連接 $\mathcal{O}_X^{\mathrm{mon}}$ 加群層も通常のスキームの場合と同様に定義できる。

4.6. モノイダル Tate 曲線と圏 $\mathcal{B}_q$. §4.4 で復習した Tate 曲線はトーリックな記述を持っていた。そこに現れる可換環を可換モノイドに置き換えることでモノイダルスキーム $\widehat{E}_{\mathrm{mon}}$ を構成できる。それをモノイダル Tate 曲線と呼ぶ。

つまり

$$\rho_i := \mathbb{Q}_{\geq 0}(i,1), \quad \rho_i^\vee \subset \mathbb{Q}^2, \quad \sigma_{i+1/2}^\vee := \rho_i^\vee \cap \rho_{i+1}^\vee$$

は §4.4 と同じものとし、

$$U_{i+1/2}^{\mathrm{mon}} := \mathrm{Spec}^{\mathrm{mon}}\langle \sigma_{i+1/2}^\vee \cap \mathbb{Z}^2 \rangle$$

とする。これらを張り合わせてモノイダルスキーム X^{mon} を得る。写像 $(x,y) \mapsto y$ からモノイダルスキームの射 $X^{\mathrm{mon}} \to \mathrm{Spec}^{\mathrm{mon}}\langle q \rangle$ が定まる。但し $\mathrm{Spec}^{\mathrm{mon}}\langle q \rangle$ は $\langle q \rangle := q^{\mathbb{N}}$ から定まるモノイダルアフィン直線。この formal thickening をとると

$$\widehat{E}_{\mathrm{mon}} \longrightarrow \mathrm{Spf}^{\mathrm{mon}}\langle\!\langle q \rangle\!\rangle$$

を得る。但し $\mathrm{Spf}^{\mathrm{mon}}\langle\!\langle q \rangle\!\rangle$ は $\langle q \rangle$ の完備化 $\langle\!\langle q \rangle\!\rangle$ に付随する形式的モノイダルスキームである。

これでようやく本稿の目標である圏 $\mathcal{B}_q$ が定義できる。

定義 4.1. $\mathcal{B}_q$ を $\mathcal{O}^{\mathrm{mon}}_{\widehat{E}_{\mathrm{mon}}/\mathrm{Spf}^{\mathrm{mon}}\langle\!\langle q \rangle\!\rangle}$ 加群と normal な射のなす圏とする。

4.7. 主定理. §4.3 で述べた Hall 代数の構成を $\mathcal{B}_q$ に適用できて、$\mathbb{C}$ 代数 $\mathrm{Hall}(\mathcal{B}_q)$ を得る。得られた代数は §3 で述べた通常の Ringel-Hall 代数と同様の性質を持つ。特に Hopf pairing を持つ双代数である。よって Drinfeld ダブル $\mathrm{DHall}(\mathcal{B}_q)$ を得る。この代数は §3.3 と同様 $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$ 上の生成元を持つ。そこで以下 $\mathrm{DHall}(\mathcal{B}_q)$ を $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$ 上の代数とみなす。

これでようやく本稿の主定理を述べることができる。

定理 4.2. $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$ 代数の同型

$$\mathrm{DHall}(\mathcal{B}_q) \simeq B_{q,q}$$

が存在する。

この証明の方針は §3.3 で触れた Burban-Schiffmann の仕事と同様である。まず階数 0 の連接層から構成される $\mathrm{Hall}(\mathcal{B}_q)$ の部分代数を記述し、それから代数全体を Fourier 変換を用いて復元する。

謝辞. 本研究は JSPS 科研費 JP16K17570 の助成を受けたものです。

References

[BS12] Burban, B., Schiffmann, O., *On the Hall algebra of an elliptic curve I*, Duke Math. J. **161** (2012), no. 7, 1171–1231.

[D05] Deitmar, A., *Schemes over* $\mathbb{F}_1$, in *Number Fields and Function Fields - Two Parallel Worlds*, Progress in Mathematics **239**, Birkhäuser Boston (2005), 87–100.

[Go86] Goldman, W. M., *Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations*, Invent. Math. **85** (1986), no. 2, 263–302.

[Gr95] Green, J. A., *Hall algebras, hereditary algebras and quantum groups*, Invent. Math., **120** (1995), no. 2, 361–377.

[G09] Gross, M., chapter 8 of *Dirichlet branes and mirror symmetry*, Clay Mathematics Monographs, **4**, American Mathematical Society, Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2009.

[J95] Joseph, A., *Quantum groups and their primitive ideals*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), **29**. Springer, Berlin (1995).

[Ko95] Kontsevich, M., *Homological algebra of mirror symmetry*, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Zürich, 1994)*, Birkhäuser, 1995, pp. 120–139.

[LP12] Lekili, Y., Perutz T., *Arithmetic mirror symmetry for the 2-torus*, preprint (2012), arXiv:1211.4632.

[MS17] Morton, H., Samuelson, P., *The HOMFLYPT skein algebra of the torus and the elliptic Hall algebra*, Duke Math. J. Vol. 166 (2017), No. 5, 801–854. arXiv:1410.0859v2.

[PZ98] Polishchuk, A., Zaslow, E., *Categorical mirror symmetry: the elliptic curve*, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998), no. 2, 443–470.

[R90] Ringel, C. M., *Hall algebras and quantum groups*, Invent. Math. **101** (1990), no. 3, 583–591.

[Sc12] Schiffmann, O., *Lectures on Hall algebras*, in *Geometric methods in representation theory. II*, 1–141, Sémin. Congr., 24–II, Soc. Math. France, Paris, 2012. arXiv:0611617v2.

[Sz14] Szczesny, M., *On the Hall algebra of semigroup representations over* $\mathbb{F}_1$, Math. Z. **246** (2014), 371–386.

[Tu89] Turaev, V. G., *Algebras of Loops on Surfaces, Algebras of Knots and Quantization*, in *Braid Group, Knot Theory and Statistical Mechanics*, Advanced Series in Mathematical Physics, Vol. **9** (1989), 59–95.

[Tu90] Turaev, V. G., *Conway and Kauffman modules of a solid torus*, J. Soviet. Math. Vol. **167** (1988), 79–89.

[Tu91] Turaev, V. G., *Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **24** (1991), no. 6, 635–704.

[Y17] Yanagida,S., *Elliptic Hall algebra on* $\mathbb{F}_1$, preprint, arXiv:1708.08881.

Graduate School of Mathematics, Nagoya University Furocho, Chikusaku, Nagoya, Japan, 464-8602.
E-mail address: yanagida@math.nagoya-u.ac.jp