Hilbert スキーム概説　1 日目 (8 月 17 日) *1

柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

予定

- 1 日目 Hilbert スキームの一般論と点の Hilbert スキーム
- 2 日目 Macdonald の positivity conjecture の Haiman による証明
- 3 日目 インスタントン・モジュライ
- 4 日目 ADHM 構成と枠付き連接層のモジュライ空間
- 5 日目 インスタントンの数え上げ

1 日目の前提知識

- 圏論の初歩 (MacLane の前半や Gelfand-Manin の第 2 章)
- スキーム論の初歩 (Hartshorne の第 2 章)

1　Hilbert スキームの一般論

[FGA] の §2.1, §5.1, §5.5 に従う。

1.1　表現可能函手と米田の補題

集合のなす圏を $Sets$ と書く。また圏 $\mathcal{C}$ の反対圏 (opposite category) を $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ と書く。

定義. 圏 $\mathcal{C}$ とその対象 X に対し、函手 $h_X : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to Sets$ を次のように定める: まず $\mathcal{C}$ の対象 U に対し

$$h_X(U) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X)$$

と定め、また $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(U, U') = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U', U)$ に対し

$$h_X(\alpha) : \ h_X(U) \longrightarrow h_X(U')$$

を α との合成で定義する。

定義. 圏 $\mathcal{C}$ 上の**表現可能函手**とは函手 $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to Sets$ であって、$\mathcal{C}$ のある対象 X に付随した函手 h_X と同型なもののこと。この時 F **は** X **で表現される**と言う。

命題 (米田の補題の弱形)**.** $\mathcal{C}$ を圏とする。
(1) 射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対し函手の射 (自然変換) $h_f : h_X \to h_Y$ を次のように定義できる: $\mathcal{C}$ の対象 U に対し $h_f(U) : h_X(U) \to h_Y(U)$ を f との合成とする。
(2) 射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対し (1) の h_f を対応させることで定まる写像

$$h : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(h_X, h_Y)$$

は全単射である。

これから次の主張が得られる。

系. 表現可能函手 $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to Sets$ が対象 X 及び Y で表現されるとする。この時 $\mathcal{C}$ における同型 $X \xrightarrow{\sim} Y$ が唯一存在する。

*1 2017/08/17 版, ver. 0.2.

命題 (米田の補題)**.** X を $\mathcal{C}$ の対象、$F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to Sets$ を函手とする。写像

$$\mathrm{Hom}(h_X, F) \longrightarrow F(X), \quad \tau \longmapsto \xi$$

を次のように定める: $\tau : h_X \to F$ に対して $\xi \in F(X)$ を $\mathrm{id}_X \in h_X(X)$ の像とする。

また写像

$$F(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(h_X, F), \quad \xi \longmapsto \tau$$

を次のように定める: $\xi \in F(X)$ が与えられているとして、$\mathcal{C}$ の対象 U に対し $\tau_U : h_X(U) \to F(U)$ を、$f \in h_X(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X)$ を $(F(f))(\xi) \in F(U)$ に写す写像として定める。対応 $U \mapsto \tau_U$ から函手の射 $\tau : h_X \to F$ が定まる。

この時、上記の 2 つの写像は互いに逆写像になっており、特に次の全単射が存在する。

$$\mathrm{Hom}(h_X, F) \xrightarrow{\sim} F(X).$$

証明は難しくない。ここでは本質的でないので省略する。

系. 対応 $X \to h_X$ で定まる函手 $\mathcal{C} \to \mathrm{Hom}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, Sets)$ は $\mathcal{C}$ から表現可能函手のなす部分圏への圏同値を定める。これを**米田埋め込み**と呼ぶ。

以下 $\mathcal{C}$ と米田埋め込みの像を同一視することにする。そして $\mathcal{C}$ の対象 X, U に対し $X(U) := h_X(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X)$ と書く。また函手 $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to Sets$ に対し $\mathrm{Hom}(X, F) := \mathrm{Hom}(h_X, F)$ と書く。

定義. $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to Sets$ を函手とする。F **の普遍対象**とは $\mathcal{C}$ の対象 X と $\xi \in F(X)$ の組 (X, ξ) であって、任意の $\mathcal{C}$ の対象 U と $\sigma \in F(U)$ に対し $(F(f))(\xi) = \sigma$ となる $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X)$ が一意に存在するもののことである。

補題 1.1.1. $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to Sets$ が X で表現される表現可能函手であることと普遍対象 (X, ξ) を持つことは同値。

証明. (X, ξ) が普遍対象であることは ξ に対応する函手の射 $h_X \to F$ が同型であることを意味する。これと米田の補題から直ぐに従う。 □

1.2 Hilbert 函手

以下スキーム論に関する基本的な概念は既知とする。可換環 R と付随するアフィンスキーム $\mathrm{Spec}(R)$ を同一視する。また $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ を $\mathbb{Z}$ 上の n 次元射影空間とする。

定義. S を局所 Noether スキームとする。S **でパラメトライズされた** $\mathbb{P}^n$ **の部分スキームの族**とは部分スキーム $Y \subset \mathbb{P}^n_S := \mathbb{P}^n \times_{\mathbb{Z}} S$ であって S 上平坦であるもののこと。

局所 Noether スキームの射 $f : T \to S$ と、S でパラメトライズされた族 $Y \subset \mathbb{P}^n_S$ が与えられているとする。この時、引き戻し $f^*(Y) = (\mathrm{id} \times f)^{-1}(Y) \subset \mathbb{P}^n_T$ は T でパラメトライズされた族である。

定義. 局所 Noether スキームのなす圏から $Sets$ への反変函手 $\mathfrak{H}ilb_{\mathbb{P}^n}$ を次で定義する。

$$\mathfrak{H}ilb_{\mathbb{P}^n}(S) := \{Y \subset \mathbb{P}^n_S \mid Y \text{ は } S \text{ 上平坦 }\}.$$

定理 1.2.1. $\mathfrak{H}ilb_{\mathbb{P}^n}$ は表現可能函手である。その普遍対象を $(\mathrm{Hilb}_{\mathbb{P}^n}, Z)$ と書く。

補題 1.1.1 を使ってこの定理を言い換えると、局所 Noether スキーム $\mathrm{Hilb}_{\mathbb{P}^n}$ とそれでパラメトライズされる族 $Z \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Hilb}_{\mathbb{P}^n}$ が存在して、任意の族 $Y \subset \mathbb{P}^n_S$ に対して射 $\varphi_Y : S \to \mathrm{Hilb}_{\mathbb{P}^n}$ が存在し $Y \simeq \varphi_Y^*(Z)$ となる。

1.3 Quot 函手

以下ではスキーム S 上の層と言ったら $\mathcal{O}_S$ 加群層のことを意味するものとする。

前副節で考えた局所 Noether スキーム S でパラメトライズされる族 $Y \subset \mathbb{P}^n_S$ は、$\mathbb{P}^n_S$ 上の連接層の商 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_S} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_Y$ であって S 上平坦なものと言い換えられる。そこで次のような $\mathfrak{H}ilb_{\mathbb{P}^n}$ の一般化が考えられる。

定義. r を正の整数とする。局所 Noether スキーム S **でパラメトライズされる** $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus r}$ **の商の族**とは、S 上平坦な $\mathbb{P}^n_S$ 上の連接層 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_S}$ 線形な全射 $q : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_S}^{\oplus r} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$ の組 $(\mathcal{F}, q)$ のことをいう。

S でパラメトライズされる 2 つの族 $(\mathcal{F}, q)$ と $(\mathcal{F}', q')$ が同値であるとは、同型 $f : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}'$ があって $fq = q'$ となることを言う。この同値関係による $(\mathcal{F}, q)$ の同値類を $\langle \mathcal{F}, q \rangle$ と書く。

補題. $f : T \to S$ を局所 Noether スキームの射とする。商 $q : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_S}^{\oplus r} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$ の $\mathrm{id} \times f : \mathbb{P}^n_T \to \mathbb{P}^n_S$ による引き戻し $f^*(q) : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_T}^{\oplus r} \to f^*(\mathcal{F})$ は T でパラメトライズされる商の族を定める。更にこの構成は上記の同値関係を保つ。

証明. テンソル積は右完全で平坦性を保つので前半が従う。後半は同値関係の定義から直ちに従う。 □

定義. 局所 Noether スキームのなす圏から $Sets$ への反変函手 $\mathfrak{Q}uot_{\oplus^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}$ が次で定義できる。

$$\mathfrak{Q}uot_{\oplus^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(S) := \{S \text{ でパラメトライズされる族の同値類 } \langle \mathcal{F}, q \rangle\}.$$

定理 1.3.1. $\mathfrak{Q}uot_{\oplus^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}$ は表現可能。対応する普遍対象を $(\mathrm{Quot}_{\oplus^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}, \mathcal{F})$ と書く。

前節の定理 1.2.1 はこの定理の系である。

1.4 相対化

函手 $\mathfrak{H}ilb_{\mathbb{P}^n}$ や $\mathfrak{Q}uot_{\oplus^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}$ は以下のように相対化できる。S を Noether スキームとし、Sch_S を S 上の局所 Noether スキームのなす圏とする。

定義. $X \to S$ を S 上の有限型スキームとする。$\mathcal{E}$ を X 上の連接層とする。T を S 上の局所 Noether スキームとする。T **でパラメトライズされる** $\mathcal{E}$ **の商の族**とは T 上平坦な $X_T := X \times_S T$ 上の連接層 $\mathcal{F}$ であってそのスキーム論的台が T 上固有なものと $\mathcal{O}_{X_T}$ 線形な全射 $q : \mathcal{E}_T \twoheadrightarrow \mathcal{F}$ の組 $(\mathcal{F}, q)$ のことである。但し $\mathcal{E}_T$ は射影 $X_T \to X$ による $\mathcal{E}$ の引き戻し。

二つの族の同値関係も前副節と同様に定義できる。同値類を $\langle \mathcal{F}, q \rangle$ と書くと、対応

$$T \longmapsto \mathfrak{Q}uot_{\mathcal{E}/X/S}(T) := \{T \text{ でパラメトライズされる商の族 }\}$$

によって Sch_S から $Sets$ への反変函手 $\mathfrak{Q}uot_{\mathcal{E}/X/S}$ が定義できる。

定義. 函手

$$\mathfrak{Q}uot_{\mathcal{E}/X/S} : Sch_S^{\mathrm{op}} \longrightarrow Sets$$

を **Quot 函手**と呼ぶ。$\mathcal{E} = \mathcal{O}_X$ の時に

$$\mathfrak{H}ilb_{X/S} := \mathfrak{Q}uot_{\mathcal{O}_X/X/S}$$

と書きこれを **Hilbert 函手**と呼ぶ。

前副節までの定義を思い出すと以下のようになっている。

$$\mathfrak{H}ilb_{\mathbb{P}^n} = \mathfrak{H}ilb^n_{\mathbb{P}^n/\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}, \quad \mathfrak{Q}uot_{\oplus^r O_{\mathbb{P}^n}} = \mathfrak{Q}uot_{\oplus^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}/\mathbb{P}^n/\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}. \tag{1.1}$$

1.5 Hilbert 多項式による分解

以下ベクトル束とそれの定める局所自由層を同一視する。特に直線束と可逆層を同一視する。連接層の Hilbert 多項式の定義を思い出そう。

定義. X を体 k 上の有限型スキーム、$\mathcal{L}$ を X 上の直線束とする。$\mathcal{F}$ は X 上の連接層であってその台が k 上固有であるとする。このとき多項式 $p(z) \in \mathbb{Q}[z]$ があって

$$p(m) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m})$$

が任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対して成立する。この $p(z)$ を $\mathcal{F}$ **の** $\mathcal{L}$ **に関する Hilbert 多項式**と呼ぶ。

注意 1.5.1. $\mathcal{F}$ の Hilbert 多項式 $p(z)$ の次数は $\mathcal{F}$ の台の次元に等しい。

S を Noether スキーム、X を S 上有限型な Noether スキームとする。$\mathcal{F}$ を X 上の連接層であってそのスキーム論的台が S 上固有なものとする。この時、各閉点 $s \in S$ に対し多項式 $p_s(z) \in \mathbb{Q}[z]$ を $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}|_{X_s}$ の $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}|_{X_s}$ に関する Hilbert 多項式として定める。

また $\mathcal{F}$ が S 上平坦なら半連続性定理 (semi-continuity theorem) から函数 $s \mapsto p_s$ は S 上局所定数である。

以上の議論から函手 $\mathfrak{Quot}_{\mathcal{E}/X/S}$ は次のように直和分解される。

$$\mathfrak{Quot}_{\mathcal{E}/X/S} = \coprod_{p(z)} \mathfrak{Quot}^{p(z),\mathcal{L}}_{\mathcal{E}/X/S}.$$

但し $\mathfrak{Quot}^{p(z),\mathcal{L}}_{\mathcal{E}/X/S}$ は Hilbert 多項式が $p(z)$ で表される商からなる $\mathfrak{Quot}_{\mathcal{E}/X/S}$ の部分函手である。

従って、もし $\mathfrak{Quot}_{\mathcal{E}/X/S}$ が表現可能であれば、対応する普遍対象を $(\mathrm{Quot}_{\mathcal{E}/X/S}, \mathcal{F})$ と書けば

$$\mathrm{Quot}_{\mathcal{E}/X/S} = \coprod_{p(z) \in \mathbb{Q}[z]} \mathrm{Quot}^{p(z),\mathcal{L}}_{\mathcal{E}/X/S}$$

という分解も得られる。$\mathcal{F}$ のことを $\mathrm{Quot}_{\mathcal{E}/X/S}$ の**普遍族** (universal family) という。

定義. $\mathrm{Hilb}^{p(z),\mathcal{L}}_{X/S} := \mathrm{Quot}^{p(z),\mathcal{L}}_{\mathcal{O}_X/X/S}$ と定める。また $\mathrm{Hilb}^{p(z),\mathcal{L}}_{\mathbb{P}^n} := \mathrm{Hilb}^{p(z),\mathcal{L}}_{\mathbb{P}^n/\mathbb{Z}}$ と定める。

例. (1) 射影空間 $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ について

$$\mathbb{P}^n \simeq \mathrm{Quot}^{1,\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}}_{\oplus^{n+1}\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}/\mathbb{Z}}$$

となる。実際

$$\mathbb{P}^n_S \simeq \{\langle \mathcal{F}, q\rangle \mid q : \oplus^{n+1}\mathcal{O}_S \twoheadrightarrow \mathcal{F},\ \mathcal{F} \text{ は } S \text{ 上の可逆層 }\}.$$

この同一視のもと、$\mathrm{Quot}^{1,\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}}_{\oplus^{n+1}\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}/\mathbb{Z}}$ の普遍族は tautological な直線束 $\oplus^{n+1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ である。

(2) $r \geq d \geq 1$ を整数とする。$\mathbb{Z}$ 上の Grassmann 多様体 $\mathrm{Grass}(r, d)$ について

$$\mathrm{Grass}(r, d) \simeq \mathrm{Quot}^{d,\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}}_{\oplus^r \mathcal{O}_{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}/\mathbb{Z}}$$

となる。普遍族は $\mathrm{Grass}(r, d)$ の tautological なベクトル束 $u : \oplus^r \mathcal{O}_{\mathrm{Grass}(r,d)} \to \mathcal{U}$ である。$\mathrm{rk}\,\mathcal{U} = d$ に注意。

(3) 等式 (1.1) と (1) より $\mathrm{Hilb}^{1,\mathcal{O}(1)}_{\mathbb{P}^n} \simeq \mathbb{P}^n$. また $p_d(z) := \binom{z+d}{d} \in \mathbb{Q}[z]$ として

$$\mathrm{Hilb}^{p_d(z),\mathcal{O}(1)}_{\mathbb{P}^n} \simeq \mathrm{Grass}(n+1, d+1)$$

となることが知られている ([FGA, §5.1.5 (3)] 参照)。

1.6　Quot スキームの存在定理

定理 (Grothendieck)**.** S を Noether スキーム、X を S 上の準射影スキーム、$\mathcal{L}$ を X 上の相対的に十分豊富な直線束とする。この時、任意の X 上の連接層 $\mathcal{E}$ と任意の多項式 $p(z) \in \mathbb{Q}[z]$ に対し、函手 $\mathfrak{Quot}^{p(z),\mathcal{L}}_{\mathcal{E}/X/S}$ は S 上の準射影スキーム $\mathrm{Quot}^{p(z),\mathcal{L}}_{\mathcal{E}/X/S}$ で表現される。

これから定理 1.3.1 及び定理 1.2.1 が従う。

この定理は [FGA, TDTE-IV] で Grothendieck が証明の概要を与え、Altman と Kleiman が [AK80] で (Noether 性の仮定を弱めて) その詳細を与えた。詳しくは [AK80] や [FGA, §§5.2–5.6] を参照。大まかな流れは

- まず X が S 上射影的なスキームの場合は、$\pi : X \to S$ を構造射、$\mathcal{V}$ と $\mathcal{W}$ を S 上のベクトル束として $X = \mathbb{P}(\mathcal{V})$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$, $\mathcal{E} = \pi^*(\mathcal{W})$ の場合に帰着できることを示す。
- Mumford-Castelnuovo 正則性から、十分大きい整数 r をとれば任意の $i \geq 1$ と $s \in S$ に対し $H^i(X, \mathcal{E}_s(r)) = 0$ となる。これから函手の埋め込み $\mathfrak{Quot}^{p(z),\mathcal{L}}_{\mathcal{E}/X/S} \hookrightarrow \mathfrak{Grass}(\mathcal{W} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathrm{Sym}^r(\mathcal{V}), p(r))$ を構成できる。これから射影的な場合は $\mathfrak{Quot}^{p(z),\mathcal{L}}_{E/X/S}$ が表現可能であることが従う。射影性は Grassmann 多様体の射影性から従う。
- 準射影的な場合は上記の構成を埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{V})$ での閉包 $\overline{X}$ に適用して $\mathrm{Quot}^{p(z),\mathcal{L}}_{\mathcal{E}/\overline{X}/S}$ を作り、その部分スキームとして $\mathrm{Quot}^{p(z),\mathcal{L}}_{\mathcal{E}/X/S}$ を構成する。

定義. $\mathfrak{Quot}^{p(z),\mathcal{L}}_{\mathcal{E}/X/S}$ を表現する $\mathrm{Quot}^{p(z),\mathcal{L}}_{\mathcal{E}/X/S}$ を **Quot スキーム**と呼ぶ。

また $\mathfrak{Hilb}^{p(z),\mathcal{L}}_{X/S}$ を表現する $\mathrm{Hilb}^{p(z),\mathcal{L}}_{X/S}$ を **Hilbert スキーム**と呼ぶ。

2　点の Hilbert スキーム

参考文献は [FAG] の 7 章。

この節では k を標数 0 の代数閉体、X を k 上の準射影スキーム、$\mathcal{O}(1)$ を X 上の豊富な直線束とする。以下簡単のため次のように略記する。

$$\mathfrak{Hilb}_X := \mathfrak{Hilb}_{X/k}, \quad \mathrm{Hilb}_X := \mathrm{Hilb}_{X/k}\,.$$

2.1　点の Hilbert スキームと Hilbert-Chow 写像

前節の結果から函手 $\mathfrak{Hilb}_X$ は表現可能で、対応する Hilbert スキームは

$$\mathrm{Hilb}_X = \coprod_{p(z)} \mathrm{Hilb}^{p(z)}_X, \quad \mathrm{Hilb}^{p(z)}_X := \mathrm{Hilb}^{p(z),O(1)}_{X/k}$$

と多項式 $p(z) \in \mathbb{Q}[z]$ で分解される。この節では特に $p(z) = n$ の場合を考える。

補題 1.5.1 より Hilb^n_X は

$$\dim_k H^0(Z, \mathcal{O}_Z) = \sum_{q \in \mathrm{Supp}(Z)} \dim_k \mathcal{O}_{Z,q} = n$$

となる部分スキーム $Z \subset X$ をパラメトライズしている。$\dim H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$ は $\mathcal{O}_Z$ のそれ自身上の加群としての長さと一致するので、Hilb^n_X は長さ n の部分スキームをパラメトライズしているとも言える。

定義. 簡単のため n 点の Hilbert スキームと n 次対称積を次のように書く。

$$X^{[n]} := \mathrm{Hilb}^n_X, \quad X^{(n)} := X^n/\mathfrak{S}_n.$$

但し $X^{(n)}$ には被約なスキーム構造を入れておく。

命題. X が非特異準射影多様体なら、集合論的写像

$$X^{[n]} \longrightarrow X^{(n)}, \quad Z \longmapsto \sum_{q \in \mathrm{Supp}(Z)} \dim_k(\mathcal{O}_{Z,q})[q]$$

はスキームの全射 $\rho : X^{[n]}_{\mathrm{red}} \twoheadrightarrow X^{(n)}$ に延長される。これを **Hilbert-Chow 写像**と言う。

2.2　既約性と非特異性

まず連結性については X の次元によらず次の事実が成立する。

命題. X が連結な代数多様体なら $X^{[n]}$ は連結。

既約性については状況は複雑で、X が 2 次元以下の場合なら次のような事実が知られている。

定理. X が非特異既約準射影曲線なら $X^{(n)}$ は非特異かつ既約。そして Hilbert-Chow 写像 $\rho : X^{[n]} \to X^{(n)}$ は同型。

定理 (Forgarty, [F68])**.** X が非特異既約準射影曲面なら $X^{(n)}$ は非特異かつ既約。そして Hilbert-Chow 写像 $\rho : X^{[n]} \to X^{(n)}$ は特異点解消である。

また次の事実も知られている。

定理 (Beauville, [B83])**.** X が K3 曲面もしくは Abel 曲面なら $X^{[n]}$ は正則シンプレクティック多様体。

参考文献

[AK80] A. Altman, S. L. Kleiman, *Compactifying the Picard scheme*, Adv. Math. **35** (1980), no. 1, 50–112.

[B83] A. Beauville, *Variétés Kähleriennes dont la premiére classe de Chern est nulle*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 4, 755–782.

[FAG] B. Fantechi, L. Göttsche, L. Illusie, S. L. Kleiman, N. Nitsure, A. Vistoli, *Fundamental Algebraic Geometry, Grothendieck's FGA Explained*, Mathematical Surveys and Monographs **123** (2005), AMS.

[FGA] A. Grothendieck, Fondements de la géométrie algébrique, Extraits du Séminaire Bourbaki, 1957–1962, Secrétariat mathématique, Paris, 1962.

[F68] J. Fogarty, *Algebraic families on an algbebraic surface*, Amer. J. Math. **90** (1968), 511–521.

以上です。

Hilbert スキーム概説　2 日目 (8 月 18 日) [*1]

柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

2 日目の前提知識

- 対称多項式の初歩、対称群の表現論 (Macdonald [M95] の第 1 章)
- (同変)K 群

3　Macdonald の positivity conjecture

3.1　対称多項式の記号

分割の記号

分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell, 0, 0, \cdots)$ とは $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ かつ $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ なる整数列のこと。
$|\lambda| := \sum_i \lambda_i$, $\ell(\lambda) := \lambda$ の長さ。$\emptyset := () = (0)$ も分割とみなす。$(1^d) := (1, 1, \ldots, 1)$ 等と略記する。
また $(i, j) \in \lambda$ は $1 \leq i \leq \ell(\lambda)$ かつ $1 \leq j \leq \lambda_i\}$ を意味するものとする。

対称関数環の記号

$\Lambda_{(n)}(x) := \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$: n 変数対称多項式環。x を省略して $\Lambda_{(n)}$ とも書く。
$\Lambda := \varprojlim_n \Lambda_{(n)}$: 対称関数環。$\Lambda = \oplus_{d \geq 0} \Lambda^d$: 対称関数の次数による直和分解。

古典的な対称関数

$e_d(x) := \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_d} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_d} \in \Lambda^d(x)$: d 次基本対称関数。
$h_d(x) := \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_d} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_d} \in \Lambda^d(x)$: d 次完全対称関数。
$m_\lambda(x) := \sum_{\alpha : \lambda \text{ の } \mathfrak{S}_\infty \text{ 軌道}} x^\alpha \in \Lambda^{|\lambda|}(x)$: モノミアル対称関数。$m_{(1^d)}(x) = e_d(x)$, $\sum_{|\lambda|=d} m_\lambda(x) = h_d(x)$.
$p_d(x) := \sum_i x_i^d \in \Lambda^d(x)$: d 次冪和対称関数。$p_d(x) = m_{(d)}(x)$.

古典的対称関数の基本性質

Λ は $\{m_\lambda\}_{\lambda:\text{分割}}$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}$ 加群。また環として $\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \ldots] = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \ldots]$ 及び $\Lambda \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$.

3.2　Macdonald 対称関数

$\mathbb{F} := \mathbb{Q}(q, t)$. $\Lambda \otimes \mathbb{F}$ 上の内積を次で定める。

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} := \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1 - q^{\lambda_i}}{1 - t^{\lambda_i}}, \quad z_\lambda := \prod_{j \geq 1} m_j(\lambda)! \cdot j^{m_j(\lambda)}, \quad m_j(\lambda) := \#\{i \mid \lambda_i = j\}.$$

但し $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ に対し $p_\lambda := p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots$. また $p_0 := 1$ と約束する。

定理 (Macdonald)**.** 各分割 λ に対し次の 2 条件で特徴付けられる $P_\lambda(q, t) \in \Lambda_{\mathbb{F}}^{|\lambda|}$ が一意に存在する。これを **Macdonald 対称関数**と言う。

$$P_\lambda(q, t) \in m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} \mathbb{F} m_\mu, \quad \langle P_\lambda(q, t), P_\mu(q, t) \rangle_{q,t} \propto \delta_{\lambda,\mu}.$$

但し $\lambda \geq \mu$ はドミナンス半順序、即ち任意の正の整数 k に対し $\sum_{i=1}^k \lambda_i \geq \sum_{i=1}^k \mu_i$.

[*1] 2017/08/18 版, ver. 0.1.

Macdonald 対称関数の諸性質

- $\{P_\lambda(q,t)\}_\lambda$ は $\Lambda \otimes \mathbb{F}$ の $\mathbb{F}$ 基底。
- $P_\lambda(q,q) = s_\lambda$: Schur 対称関数。
- $P_\lambda(q,1) = m_\lambda$. $P_\lambda(1,t) = e_{\lambda'}$. ここで λ' は λ の転置、$e_\mu := e_{\mu_1} e_{\mu_2} \cdots$.
- 内積値

$$\langle P_\lambda(q,t), P_\lambda(q,t) \rangle_{q,t} = \frac{c'_\lambda(q,t)}{c_\lambda(q,t)},$$
$$c_\lambda(q,t) := \prod_{\square \in \lambda} (1 - q^{a_\lambda(\square)} t^{l_\lambda(\square)+1}), \quad c'_\lambda(q,t) := c_{\lambda'}(t,q) = \prod_{\square \in \lambda} (1 - q^{a_\lambda(\square)+1} t^{l_\lambda(\square)}).$$

  但し $a_\lambda(i,j) := \lambda_i - j$ は arm 長、$l_\lambda(i,j) := a_{\lambda'}(j,i) = \lambda'_j - i$ は leg 長。
- $$Q_\lambda(x;q,t) := \frac{c_\lambda(q,t)}{c'_\lambda(q,t)} P_\lambda(x;q,t)$$

  とすれば $\langle P_\lambda(q,t), Q_\mu(q,t) \rangle_{q,t} = \delta_{\lambda,\mu}$. つまり $\{Q_\lambda(q,t)\}_\lambda$ は双対基底。
- 双対性: $\mathbb{F}$ 代数同型 $\omega_{q,t} \in \mathrm{Aut}(\Lambda \otimes \mathbb{F})$ を

$$\omega_{q,t}(p_n) := p_n \cdot (-1)^{n-1} \frac{1-q^n}{1-t^n}$$

  で定義すると

$$\omega_{q,t} P_\lambda(q,t) = Q_{\lambda'}(t,q), \quad \omega_{q,t} Q_\lambda(q,t) = P_{\lambda'}(t,q).$$

- Cauchy 核函数:

$$\sum_\lambda P_\lambda(x;q,t) Q_\lambda(y;q,t) = \exp\Bigl(\sum_n \frac{1}{n} \frac{1-t^n}{1-q^n} p_n(x) p_n(y)\Bigr)$$

- 整形式 (integral form) $J_\lambda(x;q,t) := c_\lambda(q,t) P_\lambda(x;q,t)$. これは次の性質を満たす。

$$J_\lambda(q,t) \in \Lambda \otimes \mathbb{Z}[q,t].$$

3.3 Macdonald の positivity conjecture

plethysm 変換の記号: $f(x) \in \Lambda(x) \otimes \mathbb{F}$ に対して

$$f[x/(1-t)] := f(x_1, x_2, \ldots, tx_1, tx_2, \ldots, t^2 x_1, t^2 x_2, \ldots) = f|_{p_n \mapsto p_n/(1-t^n)}.$$

また $f[x(1-t)]$ をこの逆変換として定義する。つまり

$$f[x(1-t)] := f|_{p_n \mapsto p_n(1-t^n)}.$$

Big Schur 対称関数 $S_\lambda(x;t)$ を次で定義する。

$$S_\lambda(x;t) := s_\lambda[x(1-t)].$$

この時 $\{S_\lambda(t)\}_\lambda$ は $\Lambda \otimes \mathbb{F}$ の $\mathbb{F}$ 基底になる。

定理 3.3.1 (Macdonald の positivity conjecture)**.** $K_{\lambda\mu}(q,t) \in \mathbb{F}$ を

$$J_\mu(x;q,t) = \sum_\lambda K_{\lambda\mu}(q,t) S_\lambda(x;t)$$

で定義すると $K_{\lambda\mu} \in \mathbb{N}[q,t]$.

これは [M88] で Macdonald が予想したもの。本 [M95] にも書かれている。今日の目的はこの予想の Haiman による解決 [H01a] を概説することである。主に Haiman 自身による概説 [H01b] に従う。

3.4　modified Macdonald 函数

定義. $n(\lambda) := \sum_i (i-1)\lambda_i$ として

$$\widetilde{H}_\lambda(x;q,t) := t^{n(\lambda)} J_\lambda[x/(1-t^{-1});q,t^{-1}].$$

補題. (1) $\widetilde{K}_{\lambda\mu}(q,t) \in \mathbb{F}$ を

$$\widetilde{H}_\mu(x;q,t) := \sum_\lambda \widetilde{K}_{\lambda\mu}(q,t) s_\lambda(x)$$

で定義すると $\widetilde{K}_{\lambda\mu}(q,t) = t^{n(\mu)} K_{\lambda\mu}(q,t^{-1})$.

証明. $\widetilde{H}_\lambda$ 及び $K_{\lambda\mu}$ の定義と plethysm 変換から簡単に確認できる。 □

命題. (1) $\widetilde{H}_{\lambda'}(x;q,t) = \widetilde{H}_\lambda(x;t,q)$. 特に $\widetilde{K}_{\lambda\mu'}(q,t) = \widetilde{K}_{\lambda\mu}(t,q)$.
(2) $\widetilde{H}_\lambda$ は以下の 3 性質を満たし、また逆にこの 3 性質で特徴づけられる。

$$\widetilde{H}_\lambda[x(1-q);q,t] \in \mathbb{F}[s_\mu \mid \mu \geq \lambda], \quad \widetilde{H}_\lambda[x(1-t);q,t] \in \mathbb{F}[s_\mu \mid \mu \geq \lambda'], \quad \langle \widetilde{H}_\lambda, s_{(|\lambda|)}[x(1-t)/(1-q)] \rangle_{q,t} = 1.$$

証明. (1) これは $P_\lambda(x;q,t)$ が Macdonald 作用素の固有関数であることの言い換えである固有方程式

$$\Delta \widetilde{H}_\lambda(x;q,t) = \widetilde{H}_\lambda(x;q,t) \cdot (1-(1-q)(1-t)B_\lambda(q,t)), \quad B_\lambda(q,t) := \sum_{(i,j)\in\lambda} t^{i-1}q^{j-1}$$

において、作用素 Δ が q,t に関し対称であることと $B_\lambda(q,t) = B_{\lambda'}(t,q)$ から従う。作用素 Δ は [H01b, §3.5.2] を参照せよ。
(2) [H01b, §3.5] を参照。 □

3.5　対角余不変式

$E = \{(p_1,q_1),\dots,(p_n,q_n)\} \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ に対し、$2n$ 個の変数 $(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n)$ の多項式 $\Delta_E(\mathbf{x},\mathbf{y})$ を

$$\Delta_E(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \det(x_i^{p_j} y_i^{q_j})_{i,j=1}^n$$

で定義する。$w \in \mathfrak{S}_n$ の $\mathbf{x}$ 変数及び $\mathbf{y}$ 変数への対角作用を考えると

$$w\Delta_E = \mathrm{sgn}(w)\Delta_E.$$

また $|\mu| = n$ なる分割 μ に対し

$$E(\mu) := \{(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid 0 \leq p < \ell(\mu),\ 0 \leq q < \mu_{p+1}\}$$

とし、多項式 $\Delta_\mu(\mathbf{x},\mathbf{y})$ を次式で定義する。

$$\Delta_\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \Delta_{E(\mu)}(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Δ_μ は二重斉次 (doubly homogeneous) な多項式で、$\mathbf{x}$ 変数については次数 $n(\mu)$, $\mathbf{y}$ 変数については次数 $n(\mu')$ である。$\mu = (1^n)$ 及び (n) の時はそれぞれ $\mathbf{x}$ 及び $\mathbf{y}$ の Vandermonde 行列式になっている。
次に Δ_μ の導関数全てのなす空間

$$D_\mu := \{p(\partial_\mathbf{x},\partial_\mathbf{y})\Delta_\mu \mid p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{Q}[\mathbf{x},\mathbf{y}]\}$$

を考える。Δ_μ が二重斉次なので、空間 D_μ も二重次数付けを持つ。

$$D_\mu = \oplus_{r,s}(D_\mu)_{r,s}, \quad (D_\mu)_{r,s} := \{f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in D_\mu \mid \mathbf{x}\text{ に関し } r \text{ 次、}\mathbf{y}\text{ に関し } s \text{ 次な二重斉次多項式}\}.$$

また Δ_μ が交代式なので D_μ は $\mathfrak{S}_n$ の対角作用で閉じている。そこで以下 D_μ を $\mathfrak{S}_n$ 表現と思うことにする。

定理 3.5.1. $|\lambda| = |\mu| = n$ なる任意の分割 λ, μ に対し

$$\sum_{r,s} t^r q^s \operatorname{mult}_\mu(D_\lambda)_{r,s} = \widetilde{K}_{\lambda,\mu}(q,t).$$

特に $\widetilde{K}_{\lambda,\mu}(q,t) \in \mathbb{N}[q,t]$.

これから Macdonald の positivity conjecture(定理 3.3.1) が従う。定理 3.5.1 の証明は Garsia と Haiman の $n!$ 予想 [GH93, GH96] も関係する。

定理 ($n!$ 予想)**.** $\dim D_\mu = n!$.

3.6 Frobenius 級数

定理 3.5.1 を言い換えておく。

定義. $\mathfrak{S}_n$ 表現 V に対し n 次対称函数 $\Phi(V) \in \Lambda(z) \otimes \mathbb{Q}$ を次式で定義する。

$$\Phi(V) := \sum_\lambda \operatorname{mult}_\lambda(V) s_\lambda(z).$$

また二重次数付けのある $\mathfrak{S}_n$ 表現 $D = \oplus_{r,s} D_{r,s}$ に対し、その **Frobenius 級数** $F_D(z;q,t)$ を次式で定義する。

$$F_D(z;q,t) := \sum_{r,s} t^r q^s \Phi(D_{r,s})$$

これで定理 3.5.1 は $F_{D_\mu}(z;q,t) = \widetilde{H}_\mu(z;q,t)$ と言い換えられる。次に $\mathfrak{S}_n$ 表現 D_μ の別の記述を考える。

命題. $\mathbb{Q}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ のイデアル J_μ を

$$J_\mu := \{p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{Q}[\mathbf{x},\mathbf{y}] \mid p(\partial_\mathbf{x}, \partial_\mathbf{y})\Delta_\mu = 0\}$$

で定義すると、商環 $\mathbb{Q}[\mathbf{x},\mathbf{y}]/J_\mu$ は二重次数付き $\mathfrak{S}_n$ 表現として D_μ と同型。

証明. [H01b, §4.1] を参照。 □

次節で幾何学的なアプローチをとる都合上、係数体を $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{C}$ に拡大しておく。イデアル $J_\mu \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{C}$ を同じ記号 J_μ で表し、また環 R_μ を

$$R_\mu := \mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y}]/J_\mu$$

と定める。上の命題から、定理 3.5.1 は次のように言い換えられる。

$$F_{R_\mu}(z;q,t) = \widetilde{H}_\mu(z;q,t).$$

4 等スペクトル Hilbert スキームと positivity conjecture

4.1 平面上の点の Hilbert スキーム

§2 の議論を思い出そう。ここでは全てのスキームは $\mathbb{C}$ 上のものとする。

$\mathbb{C}^2$ 上の n 点の Hilbert スキーム $H_n := \operatorname{Hilb}^n_{\mathbb{C}^2}$ は集合論的には

$$H_n = \{I \subset \mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y}] \mid \text{イデアル}, \dim_\mathbb{C} \mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y}]/I = n\}$$

と書ける。また普遍族 $Z_n \subset H_n \times \mathbb{C}^2$ について、その $I \in H_n$ 上のファイバーはイデアル I に対応する部分スキーム $S \subset \mathbb{C}^2$ で与えられる。

§2.2 で述べた Fogarty の定理から H_n は非特異かつ既約で次元 $2n$ である。また Hilbert-Chow 写像 $\rho : H_n \twoheadrightarrow S^n\mathbb{C}^2 = (\mathbb{C}^2)^{(n)}$ が存在した。

(代数群としての) トーラス $\mathbb{T} := (\mathbb{C}^*)^2 \ni (t,q)$ を $\mathbb{C}^2$ に 2 次対角行列 $\tau_{t,q} := \mathrm{diag}(t^{-1}, q^{-1})$ で線形に作用させる。対応する座標環 $\mathbb{C}[x,y]$ への作用は次のようになる。

$$\tau_{t,q}x = tx, \quad \tau_{t,q}y = qy.$$

この作用から H_n への $\mathbb{T}$ 作用が誘導される。

補題. H_n の $\mathbb{T}$ 固定点集合は $\{I_\mu \mid \mu : 分割, |\mu| = n\}$. 但し $I_\mu \in H_n$ は単項式 $\{x^r y^s \mid (r,s) \notin E(\mu)\}$ の生成する $\mathbb{C}[x,y]$ のイデアル。

4.2　等スペクトル Hilbert スキーム

定義. 等スペクトル Hilbert スキーム X_n とは次の被約ファイバー積で定義されるスキームのこと。

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathbb{C}^{2n} \arrow[d] \\ H_n \arrow[r, "\rho"'] & S^n\mathbb{C}^2 \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

集合論的には X_n は次のように書ける。

$$X_n = \{(I, (x_1,y_1), \dots, (x_n,y_n)) \mid I \in \mathrm{Hilb}^n_{\mathbb{C}^2},\ \rho(I) = [(x_1,y_1), \dots, (x_n,y_n)]\}.$$

定理 4.2.1 (Haiman [H01a])**.** X_n は Cohen-Macaulay かつ Gorenstein. 特に $\phi : X_n \to H_n$ は平坦射。

4.3　positivity conjecture と $n!$ 予想の証明

Hilbert スキーム H_n の普遍族 $Z_n \subset H_n \times \mathbb{C}^2$ を用いて H_n 上の層 B を

$$B := \pi_* \mathcal{O}_{Z_n}$$

と定義する。但し $\pi : H_n \times \mathbb{C}^2 \twoheadrightarrow H_n$ は自然な射影。これは局所自由層であり、$I \in H_n$ でのファイバーは $\mathbb{C}[x,y]/I$ である。特に階数は n.

また $\phi : X_n \to H_n$ を用いて

$$P := \phi_* \mathcal{O}_{X_n}$$

とする。定理 4.2.1 より P も局所自由層。

ここで前節 §3 の最後に定義した環 R_μ を思い出しておく。この時点で $n!$ 予想が導出される。

命題. R_μ は P の I_μ におけるファイバー P_{I_μ} と同型。特に $\dim R_\mu$ は P の階数、即ち $n!$ に一致する。

positivity conjecture については次の命題が重要になる。

命題 4.3.1. $\mathfrak{S}_n$ 加群 $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{C}[\mathbf{x}]}(P_{I_\mu}, \mathbb{C})$ の既約分解に現れる既約表現 V_λ は $\lambda \le \mu'$ を満たす。特に $P_{I_\mu} \simeq R_\mu$ は $\mathfrak{S}_n$ 同変な $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ 上の自由分解であって各項の既約分解に現れる既約表現は全て同じ条件を満たす。

これを認めると $\widetilde{H}_\mu$ の特徴づけの一つ目の条件

$$F_{R_\mu}[(1-t)x; q, t] \in \mathbb{Z}[q,t][s_\lambda \mid \lambda \ge \mu']$$

が直ちに従う。$\mathbf{x}$ の代わりに $\mathbf{y}$ を考えることで二つ目の条件も得られる。三つ目の条件は $\mathfrak{S}_n$ の自明表現の重複度が 1 であることから従う。これで positivity conjecture (定理 3.5.1) が従う。

4.4　導来 McKay 対応

命題 4.3.1 の証明には Bridgeland-King-Reid の導来 McKay 対応 [BKR01] を用いる。この節での状況にその結果を適用すると次のようになる。

定理. 図式 (4.1) から定義される導来函手の合成

$$\Phi := Rf_* \circ \phi^* : D(H_n) \longrightarrow D^{\mathfrak{S}_n}(\mathbb{C}^{2n})$$

は圏同値。但し $D(X)$ は X 上の連接層の有界導来圏、$D^G(X)$ は X 上の G 同変連接層の有界導来圏。

命題 4.3.1 の証明の説明はしない。その代わり、K 群における具体的な公式を一つ書いておく。

Φ は同変 K 群の同型

$$\Phi_K : K^0_{\mathbb{T}}(H_n) \xrightarrow{\sim} K^0_{\mathfrak{S}_n\times\mathbb{T}}(\mathbb{C}^{2n})$$

を誘導する。これら同変 K 群はともに

$$K^0_{\mathbb{T}}(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z}[q, t, q^{-1}, t^{-1}]$$

上の加群である。

$K^0_{\mathfrak{S}_n\times\mathbb{T}}(\mathbb{C}^{2n})$ は自由 $\mathbb{Z}[q, t, q^{-1}, t^{-1}]$ 加群で、自由 $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ 加群の族 $\{V^\lambda \otimes \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]\}_\lambda$ を基底とする。各 $V^\lambda \otimes \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ の Frobenius 級数は

$$F_{V^\lambda\otimes\mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y}]}(z; q, t) = s_\lambda[z/(1-q)(1-t)]$$

と計算できる。但し V^λ は $|\lambda| = n$ なる分割 λ に付随した $\mathfrak{S}_n$ の既約表現。

$K^0_{\mathfrak{S}_n\times\mathbb{T}}(\mathbb{C}^{2n})$ から対称函数環の n 次成分 $\Lambda^n_{\mathbb{F}}$ への写像を

$$F : K^0_{\mathfrak{S}_n\times\mathbb{T}}(\mathbb{C}^{2n}) \longrightarrow \Lambda^n_{\mathbb{F}}, \quad [V] \longmapsto F_V(z; q, t)$$

で定義するとこれは単射である。

命題. $[I_\mu] \in K^0_{\mathbb{T}}(H_n)$ を skyscraper 層 k_{I_μ} の K 群でのクラスとすると

$$F \circ \Phi_K([I_\mu]) = \widetilde{H}_\mu(z; q, t).$$

参考文献

[BKR01] T. Bridgeland, A. King, M. Reid, *The McKay correspondence as an equivalence of derived categories*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 535–554.

[GH93] A. M. Garsia, M. Haiman, *A graded representation model for Macdonald's polynomials*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **90** (1993), no. 8, 3607–3610.

[GH96] A. M. Garsia, M. Haiman, *Some natural bigraded S_n-modules and q, t-Kostka coefficients*, Electron. J. Combin. **3** (1996), no. 2, Research Paper 24, The Foata Festschrift.

[H01a] M. Haiman, *Hilbert schemes, polygraphs and the Macdonald positivity conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 4, 941–1006.

[H01b] M. Haiman, *Combinatorics, symmetric functions, and Hilbert schemes*, Current Developments in Mathematics, 2001, 30–111.

[M88] I. G. Macdonald, *A new class of symmetric functions*, Actes du 20e Séminaire Lotharingien, vol. 372/S-20, Publications I.R.M.A., Strasbourg, 1988, 131–171.

[M95] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd ed., Oxford University Press, New York, 1995, With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.

以上です。

Hilbert スキーム概説　3 日目 (9 月 19 日) [*1]

柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

予定

- 3 日目: 枠付き連接層のモジュライ空間とインスタントン・モジュライ空間
- 4 日目: Nekrasov 分配関数 (中島・吉岡による定義)
- 5 日目: GL(1) 版 AGT 対応 (Heisenberg Fock 表現の中島構成)

5　枠付き連接層のモジュライ空間

前回までと同様に、単にスキーム X 上の層といったら $\mathcal{O}_X$ 加群層のことを意味するものと約束する。

5.1　ベクトル束のモジュライ問題と安定性

§2 で扱った Hilbert 函手 $\mathfrak{H}ilb^n_X$ と Hilbert スキーム Hilb^n_X の関係を復習しよう。X を体 k 上の準射影スキームとする。X 上の n 点の Hilbert スキーム Hilb^n_X は函手

$$\mathfrak{H}ilb^n_X : (k \text{ 上有限型スキーム})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}ets, \quad S \longmapsto \{Y \subset X \times_k S \mid S \text{ 上平坦な長さ } n \text{ の閉部分スキーム }\}$$

を表現するスキームであった。特に $S = \mathrm{Spec}(k) = \mathrm{pt}$ として

$$\mathrm{Hilb}^n_X \simeq \mathfrak{H}ilb^n_X(\mathrm{pt}) = \{Y \subset X \mid \text{長さ } n \text{ の閉部分スキーム }\}$$

と思える。

このように Hilbert スキームは部分多様体のモジュライ空間であるが、この節で扱うのはベクトル束ないし連接層のモジュライ空間である。§2 で Quot スキームはある種の連接層のモジュライ空間と思えるものであったが、ここではまずもっと素朴なモジュライ問題から考えることにする。

次のような函手を考えよう。

$$\mathfrak{V}ect^r_X : (k \text{ 上有限型スキーム})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}ets, \quad S \longmapsto \{X \times_k S \text{ 上の階数 } r \text{ のベクトル束で } S \text{ 上平坦 }\}.$$

但し射 $f : X \to Y$ に対し $\mathfrak{V}ect^r(f)$ は引き戻し f^* で定める。また §2 と同様に、ベクトル束とは代数的ベクトル束 (Zariski 位相に関する自明化をもつベクトル束) のことで、ベクトル束とそれに付随する局所自由な連接層とを常に同一視する。この時

事実. 函手 $\mathfrak{V}ect^r_X$ は (スキームで) 表現可能ではない。

証明の概略は次の通り: スキームで表現可能ならば $\mathfrak{V}ect^r_X(\mathrm{pt})$ の任意の点、即ち X 上のベクトル束の自己同型は自明にならなければならないが、それは一般には起こりえない。

そこで「X 上の全てのベクトル束」を考えるのではなく、適当な条件を満たすベクトル束のみを考える、というのが安定性の導入の動機である。やや不正確だが、安定層のモジュライ空間の存在定理は次のような主張である。

事実. 任意の多項式 $P \in \mathbb{Q}[z]$ に対し函手

$$S \mapsto \{X \times S \text{ 上の安定な連接層であって } S \text{ 上平坦かつ Hilbert 多項式が } P\}$$

はスキームで余表現可能。

余表現可能性や安定性の正確な定義については標準的なテキスト [HL10] を参照されたい。

[*1] 2017/09/19 版, ver. 0.2.

5.2　捩じれのない層

スキーム X 上の**捩じれのない層** (torsion free sheaf) $\mathcal{E}$ とは各 $x \in X$ での茎 (stalk) $\mathcal{E}_x$ が torsion free $\mathcal{O}_x$-module であるような層のことであった。

$\mathcal{F}^\vee := \mathcal{H}om_X(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ で層 $\mathcal{F}$ の双対を書くことにする。自然な射 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\vee\vee}$ が存在する。

補題 5.2.1. X が体上の滑らかな曲面だとし、$\mathcal{E}$ を X 上の捩じれのない連接層とする。この時、自然な射 $\mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\vee\vee}$ は単射で、$\mathcal{E}^{\vee\vee}$ は局所自由。更に余核 $\mathcal{C} := \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}$, 即ち層の短完全系列

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\vee\vee} \to \mathcal{C} \to 0$$

における $\mathcal{C}$ の台の次元は 0 である。

証明. 可換環論の標準的な教科書にある知識で示せる。例えば [HL10, Example 1.1.16] を参照せよ。 □

つまり「曲面上の捩じれのない層は有限個の点 $\mathrm{Supp}(\mathcal{C})$ の上を除いてベクトル束と思える」ということである。

5.3　枠付き連接層のモジュライ空間

以下簡単のため $\mathbb{C}$ 上で考える。$\mathbb{P}^2 = \mathbb{CP}^2$ の斉次座標を $[X : Y : Z]$ と書く。また無限遠直線 $\ell_\infty \subset \mathbb{P}^2$ を

$$\ell_\infty := \{[X : Y : 0]\} \subset \mathbb{P}^2$$

で定める。$\mathbb{P}^2$ 上の**枠付き連接層**とは次式の $(\mathcal{E}, \Phi)$ のことを言う。

$$M(r, n) := \left\{ (\mathcal{E}, \Phi) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{E} : \text{捩じれのない連接層},\ \ell_\infty \text{ の近傍で局所自由},\ \mathrm{rk}(\mathcal{E}) = r,\ c_2(\mathcal{E}) = n \\ \Phi : \mathcal{E}|_{\ell_\infty} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\ell_\infty}^{\oplus r} \end{array} \right\} \Big/ \sim .$$

但し $c_2(\mathcal{E}) = n$ では同型 $H^4(\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{Z}$ を用いている。Φ のことを $\mathcal{E}$ の枠 (framing) と呼ぶ。枠の存在から Chern 類について

$$c_1(\mathcal{E}) = 0.$$

初日や §5.1 と同様に集合 $M(r, n)$ に付随した函手 $\mathfrak{M}(r, n)$ を考えることができる。実は

事実 (Huybrechts-Lehn [HL95][*2])**.** 函手 $\mathfrak{M}(r, n)$ はスキームで表現可能。

特に対応するスキームが存在するが、それを集合と同じ記号 $M(r, n)$ で表す。言い換えると、集合 $M(r, n)$ にはスキームの構造が入る、ということである。

定義. スキーム $M(r, n)$ を階数 r, $c_2 = n$ の **$\mathbb{P}^2$ 上の枠付き連接層のモジュライ空間**と呼ぶ。

ここで補題 5.2.1 から直ぐに分かることを注記しておく。

補題. 次のスキームの同型が存在する。

$$M(1, n) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hilb}^n_{\mathbb{C}^2} .$$

証明. $\mathrm{rk}(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = \mathrm{rk}(\mathcal{E}) = 1$ と $c_1(\mathcal{E}^{\vee\vee}) = c_1(\mathcal{E}) = 0$ より局所自由層 $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ と同型。ここで対応

$$\mathcal{E} \longmapsto \mathcal{C} = \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}$$

を考える。$c_2(\mathcal{C}) = c_2(\mathcal{E}) = n$ より $\mathcal{C}$ は長さ n の 0 次元層。また $\mathcal{E}$ は ℓ_∞ の近傍で局所自由だったから

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}) \subset \mathbb{P}^2 \setminus \ell_\infty = \mathbb{C}^2.$$

以上より $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{C}$ は射 $M(1, n) \to \mathrm{Hilb}^n_{\mathbb{C}^2}$ を定める。逆の対応も同様に作れて同型が従う。 □

[*2] 一般の射影的代数曲面とその上の曲線に関する安定対のモジュライ問題に関して証明されている。

5.4　モナド構成

定理 5.4.1 (Barth [B])**.** 次のようなスキームの同型が存在する。

$$M(r,n) \simeq \left\{ (B_1,B_2,i,j) \;\middle|\; \begin{array}{l} [B_1,B_2]+ij=0, \\ \nexists S \subsetneq V \text{ s.t. } B_\alpha(S)\subset S,\, \operatorname{Im} i \subset S \end{array} \right\} \Big/ \mathrm{GL}(V).$$

但し $V=\mathbb{C}^n$, $W=\mathbb{C}^r$ かつ $(B_1,B_2,i,j)\in \operatorname{End}(V)^{\times 2}\times \operatorname{Hom}(W,V)\times\operatorname{Hom}(V,W)$. また $g\in\mathrm{GL}(V)=\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の作用は次で定まる。

$$g\cdot(B_1,B_2,i,j)=(gB_1g^{-1},gB_2g^{-1},gi,jg^{-1}).$$

この定理をここでは $M(r,n)$ の **ADHM description** と呼ぶことにしよう[*3]。右辺に表れている 2 番目の条件は (B_1,B_2,i,j) に関する**安定性条件**と呼ばれる。

ここでは定理の同型射について写像としての記述だけを説明しよう。

以下 $\mathcal{O}:=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ と略記する。また標準的な記号だが $\mathcal{O}(1)$ を超平面の定める $\mathbb{P}^2$ 上の直線束とし、$\mathcal{O}(n):=\mathcal{O}(1)\otimes_{\mathcal{O}}\cdots\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}(1)$, 及び $\mathbb{P}^2$ 上の層 $\mathcal{F}$ に対し $\mathcal{F}(n):=\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}(n)$ とする。

$\mathcal{Q}$ を Euler 完全列 (Euler sequence)[*4]

$$0\to\mathcal{O}(-1)\to\mathcal{O}^{\oplus 3}\to\mathcal{Q}\to 0$$

で定義する。$\mathcal{Q}$ は局所自由層である。

$(\mathcal{E},\Phi)\in M(r,n)$ に対して

$$V:=H^1(\mathbb{P}^2,\mathcal{E}(-2)),\quad V':=H^1(\mathbb{P}^2,\mathcal{E}(-1)),\quad \widetilde{W}:=H^1(\mathbb{P}^2,\mathcal{E}(-1)\otimes\mathcal{Q}^\vee)$$

とする。実は $\dim V=\dim V'=c_2(E)=n$, $\dim\widetilde{W}=\operatorname{rk}(E)+2c_2(E)=r+2n$ となり、更に複体

$$V\otimes_k\mathcal{O}(-1)\xrightarrow{a}\widetilde{W}\otimes_k\mathcal{O}\xrightarrow{b}V'\otimes_k\mathcal{O}(1) \tag{5.1}$$

があって a は単射、b は全射、$\operatorname{Ker} b/\operatorname{Im} a\simeq\mathcal{E}$ である[*5]。つまり考えている層 $\mathcal{E}$ をベクトル束からなる複体に置き換えることができる。更にこの複体を ℓ_∞ に制限してできる

$$V\oplus V\xrightarrow{(a_X,a_Y)}\widetilde{W}\xrightarrow{\binom{b_X}{b_Y}}V'\oplus V'$$

---

*3 これは標準的ではない用語である。本来 ADHM 構成と呼ばれるのは V,W を Hermete 空間としたもので、モジュライ空間も超 Kähler 商として構成される。

*4 本来は $0\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\to\mathcal{O}(1)_{\mathbb{P}^n}^{\oplus(n+1)}\to\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n}\to 0$ のことを言う。つまり $\mathcal{Q}=\mathcal{T}(-1)$.

*5 [N, §2.1] 及び [OSS, Chap. II, §§3.1–3.2] を参照。次元の計算に関して概略を述べよう。まず対角線 $\Delta\subset\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2$ に関する Beilinson スペクトル系列から

$$H^q(\mathbb{P}^2,\mathcal{E}(-p))=0\quad(p=1,2,\ q=0,2),\qquad H^q(\mathbb{P}^2,\mathcal{E}(-1)\otimes\mathcal{Q}^\vee)=0\quad(q=0,2)$$

が言える。すると Hirzebruch-Riemann-Roch から $\mathcal{F}=\mathcal{E}(-p)$ 及び $\mathcal{E}(-1)\otimes\mathcal{Q}^\vee$ について

$$\dim H^1(\mathbb{P}^2,\mathcal{F})=-\chi(\mathbb{P}^2,\mathcal{F})=\int\operatorname{ch}(\mathcal{F})\operatorname{td}_{\mathbb{P}^2}.$$

以下 $H\in H^2(\mathbb{P}^2)$ を超平面因子、$K=-3H$ を標準因子、$\varrho\in H^4(\mathbb{P}^2)$ を $[\mathbb{P}^2]\in H_4(\mathbb{P}^2)$ の Poincaré 双対とする。$H^4(\mathbb{P}^2)=\mathbb{Z}\varrho$ 及び $H^2=\varrho\in H^4(\mathbb{P}^2)$ に注意する。Todd 類は

$$\operatorname{td}_{\mathbb{P}^2}=1+c_1(\mathbb{P}^2)/2+\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2})=1-K/2+[\mathbb{P}^2]$$

と表せる。Chern 標数は $c_1(\mathcal{E})=0$ から

$$\operatorname{ch}(\mathcal{E})=r-c_2(\mathcal{E})=r-n\varrho,\qquad \operatorname{ch}(\mathcal{E}(-p))=\operatorname{ch}(\mathcal{E})\cdot e^{-pH}=r-prH+(p^2/2-n)\varrho$$

及び

$$\operatorname{ch}(\mathcal{Q})=\operatorname{ch}(\mathcal{O}^{\oplus 3})-\operatorname{ch}(\mathcal{O}(-1))=2+H-\varrho/2,\quad \operatorname{ch}(\mathcal{E}(-1)\otimes\mathcal{Q}^\vee)=\operatorname{ch}(\mathcal{E}(-1))\cdot(2-H-\varrho/2)$$

と計算できる。あとは上記の Riemann-Roch に代入すれば結論を得る。

から

$$\widetilde{W} \simeq V \oplus V \oplus W, \quad W := \operatorname{Ker} b_X \cap \operatorname{Ker} b_Y$$

が分かる。実は $W \simeq H^0(\ell_\infty, \operatorname{Ker} b|_{\ell_\infty})$ が成立する。$ba = 0$ より $b_X a_Y = -b_Y a_X$ だが、これでもって $V \simeq V'$ とみなす。すると $\dim \widetilde{W} = 2r + n$ から決まる自然なブロック化で

$$a_X = \begin{pmatrix} -\mathrm{id}_V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{id}_V \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_X = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{id}_V & 0 \end{pmatrix}, \quad b_Y = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_V & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と書けることが分かる。また $ba = 0$ を $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2|_{Z \neq 0}$ 上で考えれば

$$a_Z = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ j \end{pmatrix}, \quad b_Z = \begin{pmatrix} -B_2 & B_1 & i \end{pmatrix}, \quad [B_1, B_2] + ij = 0$$

と書けることも分かる。以上より複体 (5.1) は

$$V \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{a = \begin{pmatrix} ZB_1 - X \\ ZB_2 - Y \\ Zj \end{pmatrix}} \begin{matrix} V \otimes \mathcal{O} \\ \oplus \\ V \otimes \mathcal{O} \\ \oplus \\ W \otimes \mathcal{O} \end{matrix} \xrightarrow{b = (\, -(ZB_2 - Y)\ ZB_1 - X\ Zi\,)} V \otimes \mathcal{O}(1)$$

と書き直せる。特に $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus \ell_\infty$ 上では非斉次座標 $(x, y) = (X/Z, Y/Z)$ を使って

$$V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \xrightarrow{\begin{pmatrix} B_1 - x \\ B_2 - y \\ j \end{pmatrix}} \begin{matrix} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \\ \oplus \\ V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \\ \oplus \\ W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \end{matrix} \xrightarrow{(\, -(B_2 - y)\ B_1 - x\ i\,)} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}$$

となる。最後に b が全射であることと (B_1, B_2, i, j) に関する安定性条件が同値であることが分かる ([N, Lemma 2.7])。これで定理 5.4.1 の同型射の写像としての記述が完成したことになる。

定理 5.4.1 から次の結果が比較的簡単に従う。

命題. $M(r, n)$ は次元 $2rn$ の非特異代数多様体。

5.5　インスタントン・モジュライ空間

これまで考えてきた $M(r, N)$ と $\mathbb{R}^4$ 上の $U(r)$ インスタントンのモジュライ空間との関係を簡単に述べておく。ここでの記述は [NY, §2] に従っている。[N, Remark 3.51, Exercise 3.53] も参照されたい。

$M_0^{\mathrm{reg}}(r, n)$ を $S^4 = \mathbb{C}^2 \cup \{\infty\}$ 上の枠付き instanton のモジュライ空間とする。[D] により同相写像

$$M_0^{\mathrm{reg}}(r, n) \simeq \left\{ (\mathcal{V}, \Phi) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{V} : \mathbb{P}^2 \text{ 上のベクトル束},\ \mathrm{rk}(\mathcal{V}) = r,\ c_2(\mathcal{V}) = n \\ \Phi : \mathcal{V}|_{\ell_\infty} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\ell_\infty}^{\oplus r} \end{array} \right\} \Big/ \sim .$$

がある。$M_0(r, n)$ を $M_0^{\mathrm{reg}}(r, n)$ の Uhlenbeck コンパクト化、ないし ideal instanton のモジュライ空間とする。これは集合論的には

$$M_0(r, n) = \bigsqcup_{n'=0}^{n} M_0^{\mathrm{reg}}(r, n') \times S^{n-n'} \mathbb{C}^2$$

と書ける。[DK, §3.4] と [N, §3.2] より同相写像

$$M_0(r, n) \simeq \{(B_1, B_2, i, j) \mid [B_1, B_2] + ij = 0\} /\!\!/ \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \tag{5.2}$$

が存在する。但し $X /\!\!/ G$ はアフィン商を表す。即ち代数群 G が代数多様体 X に作用している状況では ($\mathbb{C}$ 上の範疇なら) $X /\!\!/ G := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]^G)$ で与えられる。特に $X /\!\!/ G$ はアフィン代数多様体。$M_0(r, n)$ の場合、その開

部分多様体 $M_0^{\mathrm{reg}}(r,n)$ は閉軌道 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\cdot(B_1,B_2,i,j)$ であって安定化群が自明なもので構成されている。これ以降 $M_0(r,n)$ は (5.2) でスキームとみなすことにする。

ADHM データ (B_1,B_2,i,j) に対しその $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 軌道を考えることで自然な射

$$\pi : M(r,n) \longrightarrow M_0(r,n)$$

ができる。これは射影的である。枠付き連接層 $(\mathcal{E},\Phi)\in M(r,n)$ を使ってこの射を書くと

$$\pi(\mathcal{E},\Phi) = \big((\mathcal{E}^{\vee\vee},\Phi), \mathrm{Supp}(\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E})\big) \in M_0^{\mathrm{reg}} \times S^{n-n'}\mathbb{C}^2$$

となる。

参考文献

[B] W. Barth, *Moduli of bundles on the projective plane*, Invent. math. **42** (1977), 63–91.

[D] S. K. Donaldson, *Instantons and geometric invariant theory*, Comm. Math. Phys. **93** (1984), 453–460.

[DK] S. K. Donaldson, P. B. Kronheimer, *The geometry of four-manifold*, Oxford Math. Monographs, Oxford Univ. Press, 1990.

[HL95] D. Huybrechts, M. Lehn, *Stable pairs on curves and surfaces*, J. Algebraic Geom., **4** (1995), 67–104.

[HL10] D. Huybrechts, M. Lehn, *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves*, 2nd ed., Cambridge University Press, 2010.

[N] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, Univ. Lect. Ser. **18**, AMS, 1999.

[NY] H. Nakajima, K. Yoshioka, *Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory*, Invent. math. **162**, 313–355 (2005).

[OSS] C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler, *Vector bundles on complex projective spaces*, corrected reprint of the 1988 edition, with an appendix by S. I. Gelfand, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.

以上です。

Hilbert スキーム概説　4 日目 (9 月 20 日) [*1]

柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

予定

- 4 日目: Nekrasov 分配関数 (中島・吉岡による定義)
- 5 日目: GL(1) 版 AGT 対応 (Heisenberg Fock 表現の中島構成)

6　Nekrasov 分配関数

6.1　トーラス作用

前回に引き続き $\mathbb{P}^2 = \mathbb{CP}^2$ 上の枠付き連接層のモジュライ空間を考える。フォントを変えて

$$\mathfrak{M}(r,n) := \left\{ (\mathcal{E},\Phi) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{E}: \text{捩じれのない連接層}, \ \ell_\infty \text{ の近傍で局所自由}, \ \mathrm{rk}(E)=r, c_2(E)=n \\ \Phi : \mathcal{E}|_{\ell_\infty} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\ell_\infty}^{\oplus r} \end{array} \right\} \Big/ \sim .$$

と書くことにする。framing Φ は無限遠直線 $\ell_\infty := \{[X:Y:0]\} \subset \mathbb{P}^2$ 上の自明化であった。

$\mathfrak{M}(r,n)$ には $r+2$ 次元トーラス

$$\mathbb{T} := \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times T$$

が自然に作用する。但し

$$T := \{ \text{対角行列} \} \subset \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

は $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ の極大トーラス。まず $(t_1,t_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ に対し

$$F_{t_1,t_2} : [X:Y:Z] \longmapsto [t_1X : t_2Y : Z]$$

を考えることで $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ は底空間 $\mathbb{P}^2$ に作用する。また $\mathrm{diag}(e_1 \ldots, e_r) \in T$ に対し

$$G_{e_1,\ldots,e_r} : \mathcal{O}_{\ell_\infty}^{\oplus r} \ni (s_1,\ldots,s_r) \longmapsto (e_1s_1,\ldots,e_rs_r) \in \mathcal{O}_{\ell_\infty}^{\oplus r}$$

を考えることで T の $\mathcal{O}_{\ell_\infty}^{\oplus r}$ への作用が定まる。これらを組み合わせて

$$\Phi' : (F_{t_1,t_2}^{-1})^*\mathcal{E}|_{\ell_\infty} \xrightarrow{(F_{t_1,t_2}^{-1})^*\Phi} (F_{t_1,t_2}^{-1})^*\mathcal{O}_{\ell_\infty}^r \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\ell_\infty}^r \xrightarrow{G_{e_1,\ldots,e_r}} \mathcal{O}_{\ell_\infty}^{\oplus r}$$

と定める。但し 2 番目は F_{t_1,t_2} の定める同型。これらを用いて

$$(t_1,t_2,e_1,\ldots,e_r)\cdot(\mathcal{E},\Phi) := \big((F_{t_1,t_2}^{-1})^*\mathcal{E}, \Phi'\big)$$

とすると $\mathbb{T}$ の作用が定まる。

同様に $\mathfrak{M}_0(r,n)$ にも $\mathbb{T}$ が作用し、$\pi : \mathfrak{M}(r,n) \to \mathfrak{M}_0(r,n)$ は $\mathbb{T}$ 同変である。

命題 ([NY05, Lemma 2.8]). 上記の $\mathbb{T}$ 作用は ADHM データでは次のように書ける。

$$(B_1,B_2,i,j) \longmapsto (t_1B_1, t_2B_2, ie^{-1}, t_1t_2ej)$$

証明. モナド構成に現れる複体において $\mathbb{T}$ 作用を書き下していけば得られる。 □

これから比較的容易に得られる結論として

[*1] 2017/09/19 版, ver. 0.2.

命題 6.1.1 ([NY05, Proposition 2.9])**.** (1) $\mathbb{T}$ 作用による固定点集合 $\mathfrak{M}(r,n)^{\mathbb{T}}$ は次のように書ける。

$$\mathfrak{M}(r,n)^{\mathbb{T}} = \left\{ (\oplus_{\alpha=1}^{r} \mathcal{I}_{Z_\alpha}, \Phi) \;\middle|\; \begin{array}{l} Z_\alpha\colon \mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus \ell_\infty \text{ の原点に台を持つ 0 次元部分スキーム} \\ \Phi(\mathcal{I}_{Z_\alpha}|_{\ell_\infty}) \subset (\mathcal{O}_{\ell_\infty}^{\oplus r} \text{ の } \alpha \text{ 番目の因子}) \end{array} \right\}$$

但し $\mathcal{I}_Z$ は部分スキーム Z のイデアル層。
(2) $\mathfrak{M}_0(r,n)$ の $\mathbb{T}$ 固定点は $n[0] \in S^n\mathbb{C}^2 \subset \mathfrak{M}_0(r,n)$ のみ。即ち

$$\mathfrak{M}_0(r,n)^{\mathbb{T}} = \{n[0]\}.$$

特に $\mathfrak{M}(r.n)$ の $\mathbb{T}$ 固定点は

$$P(r,n) := \left\{ \overrightarrow{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)}) \;\middle|\; \text{分割の } r \text{ 組},\ |\lambda^{(1)}| + \cdots + |\lambda^{(r)}| = n \right\}$$

でラベル付けすることができる。これ以降、$\overrightarrow{\lambda} \in P(r,n)$ に対応する $\mathbb{T}$ 固定点 $(E,\Phi) \in \mathfrak{M}(r,n)$ を同じ記号 $\overrightarrow{\lambda}$ で表す。

$\mathbb{T}$ は可換群だからその既約加群は 1 次元表現

$$\begin{aligned} \mathbb{T} \ni (t_1, t_2, e_1, \dots, e_r) &\longmapsto e_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, r), \\ \mathbb{T} \ni (t_1, t_2, e_1, \dots, e_r) &\longmapsto t_i \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

で尽くされる。同じことを表現環の言葉で言い直すと、上記の加群を e_α 及び t_i と書けば

$$\mathrm{Rep}(\mathbb{T}) \simeq \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}, e_1^{\pm 1}, \dots, e_r^{\pm 1}]. \tag{6.1}$$

$\mathbb{T}$ 固定点 $\overrightarrow{\lambda}$ における $\mathfrak{M}(r,n)$ の接平面 $T_{\overrightarrow{\lambda}}\mathfrak{M}(r,n)$ は自然に $\mathbb{T}$ 加群である。従って $\mathrm{Rep}(\mathbb{T})$ の元と思えば $t_i^{\pm 1}, e_\alpha^{\pm 1}$ の多項式で書けるはずである。結果は

命題 6.1.2 ([NY05, Theorem 2.11])**.** 同型 (6.1) のもとで

$$\begin{aligned} T_{\overrightarrow{\lambda}}\mathfrak{M}(r,n) &= \sum_{\alpha,\beta}^{r} N_{\alpha,\beta}(t_1,t_2), \\ N_{\alpha,\beta}(t_1,t_2) &:= e_\alpha^{-1} e_\beta \Big\{ \sum_{\square \in \lambda^{(\alpha)}} t_1^{-\ell_\beta(\square)} t_2^{a_\alpha(\square)+1} + \sum_{\blacksquare \in \lambda^{(\alpha)}} t_1^{\ell_\alpha(\blacksquare)+1} t_2^{-a_\beta(\blacksquare)} \Big\}. \end{aligned}$$

但し $a_\alpha(\square)$ は分割 $\lambda^{(\alpha)}$ に関する $\square$ の arm 長、$\ell_\alpha(\square)$ は leg 長である。

証明. モナド構成の複体と ADHM データの対応 (§5.4 を参照) から複体への $\mathbb{T}$ 作用が書き下せる。これから接空間での $\mathbb{T}$ ウェイトが計算できる。 □

6.2 局所化定理

以下簡単のため $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(r,n)$ 及び $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_0(r,n)$ と略記し、同型 (6.1) に関して次のような記号を用いる。

$$R := \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}, e_1^{\pm 1}, \dots, e_r^{\pm 1}], \quad \mathrm{Frac}(R) = \mathbb{Q}(t_1, t_2, e_1, \dots, e_r).$$

そして $\mathrm{Rep}(\mathbb{T})$ 加群 V に対しその係数拡大 V_{loc} を

$$V_{\mathrm{loc}} := V \otimes_{\mathrm{Rep}(\mathbb{T})} \mathrm{Frac}(\mathrm{Rep}(\mathbb{T}))$$

で定める。同型 (6.1) を用いて以下では V_{loc} を次のような係数拡大とみなす。

$$V_{\mathrm{loc}} = V \otimes_R \mathrm{Frac}(R).$$

$K^{\mathbb{T}}(\mathfrak{M})$ 及び $K^{\mathbb{T}}(\mathfrak{M}_0)$ を $\mathfrak{M}$ 及び $\mathfrak{M}_0$ の $\mathbb{T}$ 同変 K 群とする。これらは $K^{\mathbb{T}}(\mathrm{pt}) = \mathrm{Rep}(\mathbb{T})$ 上の加群である。$\iota\colon \mathfrak{M}^{\mathbb{T}} \hookrightarrow \mathfrak{M}$ を $\mathbb{T}$ 固定点集合の埋め込み写像とする。命題 6.1.1(1) より $\mathfrak{M}^{\mathbb{T}} = \{\overrightarrow{\lambda}\} \simeq P(r,n)$ であったから

$$K^{\mathbb{T}}(\mathfrak{M}^{\mathbb{T}}) \simeq \bigoplus_{\overrightarrow{\lambda} \in P(r,n)} K^{\mathbb{T}}(\mathrm{pt}) = \bigoplus_{\overrightarrow{\lambda} \in P(r,n)} R.$$

Thomason による Atiyah-Bott 型局所化定理 [T92] を $\mathfrak{M}$ に適用して、次の主張が得られる。

補題 6.2.1. ι による順像 $\iota_*: K^{\mathbb{T}}(\mathfrak{M}^{\mathbb{T}}) \to K^{\mathbb{T}}(\mathfrak{M})$ から局所化によって同型

$$\iota_*: K^{\mathbb{T}}(\mathfrak{M}^{\mathbb{T}})_{\mathrm{loc}} \xrightarrow{\sim} K^{\mathbb{T}}(\mathfrak{M})_{\mathrm{loc}}$$

が定まる。更にその逆写像は次で与えられる。

$$\iota_*^{-1} = \bigoplus_{\vec{\lambda} \in P(r,n)} \frac{1}{\bigwedge_{-1} T^*_{\vec{\lambda}}\mathfrak{M}} \iota^*_{\vec{\lambda}}.$$

但し $\iota_{\vec{\lambda}}: \vec{\lambda} \hookrightarrow \mathfrak{M}$ は $\mathbb{T}$ 固定点 $\vec{\lambda}$ の埋め込み写像。また $\mathrm{Rep}(\mathbb{T})$ 加群 V に対し $\bigwedge_{-1} V := \sum_{i \geq 0}(-1)^i \bigwedge^i V$.

次に $K^{\mathbb{T}}(\mathfrak{M})$ と $K^{\mathbb{T}}(\mathfrak{M}_0)$ の関係について説明する。まず命題 6.1.1(2) より

$$K^{\mathbb{T}}(\mathfrak{M}_0) = K^{\mathbb{T}}(\mathrm{pt}) = R.$$

また局所化定理を $\mathfrak{M}_0$ に適用すると、$\iota_0: \mathfrak{M}_0^{\mathbb{T}} \hookrightarrow \mathfrak{M}_0$ を埋め込み写像として

$$\iota_{0*}: K^{\mathbb{T}}(\mathfrak{M}_0^{\mathbb{T}})_{\mathrm{loc}} \xrightarrow{\sim} K^{\mathbb{T}}(\mathfrak{M}_0)_{\mathrm{loc}}.$$

一方 $\pi: \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_0$ から次の順像写像が存在する。

$$\pi_*: K^{\mathbb{T}}(\mathfrak{M}) \longrightarrow K^{\mathbb{T}}(\mathfrak{M}_0).$$

補題 6.2.2. 次の $\mathrm{Frac}(R)$ 加群の図式は可換。

$$\begin{tikzcd}
K^{\mathbb{T}}(\mathfrak{M})_{\mathrm{loc}} \arrow[r, "\sim", "(\iota_*)^{-1}"'] \arrow[d, "\pi_*"'] & \bigoplus_{\vec{\lambda} \in P(r,d)} \mathrm{Frac}(R) \arrow[d, "\sum_{\vec{\lambda}}"] \\
K^{\mathbb{T}}(\mathfrak{M}_0)_{\mathrm{loc}} \arrow[r, "\sim", "(\iota_{0*})^{-1}"'] & \mathrm{Frac}(R)
\end{tikzcd}$$

次に $(\iota_{0*})^{-1}$ を明示化しよう。$\mathfrak{M}_0$ の固定点 $n[0]$ は特異点だから ι と違って局所化定理は使えない。

補題 6.2.3.

$$(\iota_{0*})^{-1} = \mathrm{ch}\,.$$

ここで ch は次のように定義される。まず $X^*(\mathbb{T})$ を $\mathbb{T}$ の指標群とし、$\mathbb{T}$ 加群 V の指標を

$$\mathrm{ch}_{\mathbb{T}}(V) := \sum_{\mu \in X^*(\mathbb{T})} (\dim V_\mu) e^\mu$$

で定義する。もちろん各ウェイト空間 V_μ は有限次元だと仮定している。$\mathfrak{M}_0$ 上の $\mathbb{T}$ 同変連接層 $\mathcal{F}$ について $\mathbb{T}$ 加群 $H^0(\mathfrak{M}_0, \mathcal{F})$ の各ウェイト空間は有限次元であることが示せる ([NY05, Lemma 4.2])。そこで

$$\mathrm{ch}(\mathcal{F}) := \mathrm{ch}_{\mathbb{T}}(H^0(\mathfrak{M}_0, \mathcal{F}))$$

と定める。これから $\mathbb{T}$ 同変 K 群からの写像

$$\mathrm{ch}: K^{\mathbb{T}}(\mathfrak{M}_0) \longrightarrow (X^*(\mathbb{T}))^* \simeq \mathrm{Rep}(T) = R$$

が定まる。$\mathrm{ch} \circ \iota_{0*} = \mathrm{id}$ が確認できて、補題 6.2.3 が従う。

命題 6.2.4 ([NY05, Proposition 4.1])**.** $\mathfrak{M}$ 上の $\mathbb{T}$ 同変連接層 $\mathcal{E}$ (もしくは $K^{\mathbb{T}}(\mathfrak{M})$ の元 $\mathcal{E}$) について

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i \mathrm{ch}_{\mathbb{T}}\big(H^i(\mathfrak{M}(r,n), \mathcal{E})\big) = \sum_{\vec{\lambda} \in P(r,n)} \frac{1}{\bigwedge_{-1} T^*_{\vec{\lambda}}\mathfrak{M}} \iota^*_{\vec{\lambda}}(\mathcal{E}).$$

証明. 補題 6.2.1, 6.2.2 から $(\iota_{0*})^{-1}\pi_*(\mathcal{E})$ は結論の右辺と等しい。一方 $R^i\pi_*\mathcal{E}$ は $\mathfrak{M}_0$ 上の $\mathbb{T}$ 同変連接層であり、基底変換定理より $\mathrm{ch}(R^i\pi_*\mathcal{F}) = \mathrm{ch}_{\mathbb{T}} H^i(\mathfrak{M}(r,n), \mathcal{F})$. すると補題 6.2.3 から $(\iota_{0*})^{-1}\pi_*(\mathcal{E})$ が結論の左辺に等しいことが分かる。 □

6.3 ホモロジー的 Nekrasov 分配関数

ホモロジー的 Nekrasov 分配関数を定義するために同変 Borel-Moore ホモロジー群を導入しよう。以下 $\mathbb{C}$ 上の代数多様体を考えることにする。

代数群 G の作用を持つ代数多様体 X に対し、$\mathbb{Q}$ 係数 G 同変 Borel-Moore ホモロジー群 $H_*^G(X)$ を

$$H_n^G(X) := H^{\mathrm{lf}}_{n-2\dim G+2\dim U}(X \times_G U, \mathbb{Q})$$

で定義する。但し U は G の分類空間 $EG \to BG$ の有限次元近似。つまり U は G 作用を持つ非特異多様体であって、$G \to U/G$ が主 G 束であり、更に $i = 1, \ldots, n$ に対して $H^i(U, \mathbb{Q}) = 0$ となるものである。右辺の H_*^{lf} は Borel-Moore ホモロジー群である。この定義では

$$H_n^G(X) = 0 \ (n > 2\dim X), \quad [X] \in H^G_{2\dim X}(X)$$

となるように次数付けしてある。但し $[X]$ は基本類。

通常の同変ホモロジーと同様に $H_*^G(X)$ は $H_G^*(\mathrm{pt})$ 加群である。また $\mathrm{Lie}(G)$ を代数群 G の Lie 代数とすると、$H_G^*(\mathrm{pt})$ は線形双対 $\mathrm{Lie}(G)^*$ 上の対称代数と同型である。

引き続き略記号 $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(r, n)$ を用いる。上の議論から $H_*^{\mathbb{T}}(\mathfrak{M})$ は対称代数 $S(\mathrm{Lie}(\mathbb{T})^*)$ 上の加群である。$t_1, t_2, e_1, \ldots, e_r$ に対応する $\mathrm{Lie}(\mathbb{T})$ の生成元を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \overrightarrow{a}$ とすれば

$$S(\mathrm{Lie}(\mathbb{T})^*) \simeq S := \mathbb{Z}[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \overrightarrow{a}]$$

なので、以下では $H_*^{\mathbb{T}}(\mathfrak{M})$ を S 加群とみなす。また前副節と同様に S 加群 V の係数拡大 V_{loc} を次で定める。

$$V_{\mathrm{loc}} := V \otimes_S \mathrm{Frac}(S)$$

前副節の局所化定理 (補題 6.2.1) と補題 6.2.2 はともに同変ホモロジーでも成立する。特に次の結果が従う。

命題. 次の $\mathrm{Frac}(S)$ 加群の図式は可換。

$$\begin{tikzcd}
H_*^{\mathbb{T}}(\mathfrak{M})_{\mathrm{loc}} \arrow[r, "\sim", "(\iota_*)^{-1}"'] \arrow[d, "\pi_*"'] & \bigoplus_{\overrightarrow{\lambda} \in P(r,d)} \mathrm{Frac}(S) \arrow[d, "\Sigma_{\overrightarrow{\lambda}}"] \\
H_*^{\mathbb{T}}(\mathfrak{M}_0)_{\mathrm{loc}} \arrow[r, "\sim", "(\iota_{0*})^{-1}"'] & \mathrm{Frac}(S)
\end{tikzcd}$$

更に $\alpha \in H_*^{\mathbb{T}}(\mathfrak{M})_{\mathrm{loc}}$ に対し

$$(\iota_{0*})^{-1}\pi_*(\alpha) = \sum_{\overrightarrow{\lambda}} \frac{\iota^*_{\overrightarrow{\lambda}}(\alpha)}{e(T_{\overrightarrow{\lambda}}\mathfrak{M})}.$$

但し右辺分母の e は $\mathbb{T}$ 同変 Euler 類。

右辺は Nekrasov が導入した分配関数と (形式的に) 一致しているので、[NY05] では次を Nekrasov 分配関数の定義としている。

定義. **ホモロジー的分配関数**を次式で定義する。

$$Z(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \overrightarrow{a}; \mathfrak{q}) := \sum_{n \geq 0} \mathfrak{q}^n (\iota_{0*})^{-1}\pi_*[\mathfrak{M}(r, n)].$$

お馴染みの式を思い出しておくと

補題.

$$Z(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \overrightarrow{a}; \mathfrak{q}) = \sum_{n \geq 0} \mathfrak{q}^n \sum_{\overrightarrow{\lambda} \in P(r,n)} \frac{1}{e(T_{\overrightarrow{\lambda}}\mathfrak{M}(r, n))} = \sum_{\overrightarrow{\lambda}} \frac{\mathfrak{q}^{|\overrightarrow{\lambda}|}}{\prod_{\alpha,\beta=1}^r n^{\overrightarrow{\lambda}}_{\alpha,\beta}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \overrightarrow{a})}.$$

但し $a_\alpha := a_{\lambda^{(\alpha)}}$, $\ell_\alpha := \ell_{\lambda^{(\alpha)}}$ として

$$n^{\vec{\lambda}}_{\alpha,\beta}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\vec{a}) := \prod_{\square\in\lambda^{(\alpha)}} \bigl(-\ell_\beta(\square)\varepsilon_1 + (a_\alpha(\square)+1)\varepsilon_2 + a_\beta - a_\alpha\bigr) \prod_{\blacksquare\in\lambda^{(\beta)}} \bigl((\ell_\alpha(\blacksquare)+1)\varepsilon_1 - a_\beta(\blacksquare)\varepsilon_2 + a_\beta - a_\alpha\bigr).$$

証明. 簡単のため $T_{\vec{\lambda}} := T_{\vec{\lambda}}\mathfrak{M}(r,n)$ と書く。同変 Euler 類は

$$e(T_{\vec{\lambda}}) = \lim_{\hbar\to 0} \hbar^{-2nr} \textstyle\bigwedge_{-1} T^*_{\vec{\lambda}}$$

と計算できる。但し右辺で $R = \mathbb{Z}[t_1,t_2,e_1,\dots,e_r]$ の各変数を

$$t_i = e^{-\hbar\varepsilon_i}, \quad e_\alpha = e^{-\hbar a_\alpha}$$

としている。あとは命題 6.1.2 を使って直ちに計算できる。 $\square$

特に階数 $r=1$, 即ち Hilbert スキームの場合は Nekrasov 因子は

$$n^{\vec{\lambda}}_{\alpha,\beta}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\vec{a}) = n^\lambda(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \prod_{\square\in\lambda} \bigl(-\ell_\lambda(\square)\varepsilon_1 + (a_\lambda(\square)+1)\varepsilon_2\bigr)\bigl((\ell_\lambda(\square)+1)\varepsilon_1 - a_\lambda(\square)\varepsilon_2\bigr)$$

だけとなって

$$Z_{r=1} = \sum_\lambda \frac{\mathfrak{q}^{|\lambda|}}{\prod_{\square\in\lambda}\bigl(-\ell_\beta(\square)\varepsilon_1 + (a_\alpha(\square)+1)\varepsilon_2\bigr)\bigl((\ell_\lambda(\square)+1)\varepsilon_1 - a_\lambda(\square)\varepsilon_2\bigr)}.$$

よく知られている ([NY05, §4]) ように

$$Z_{r=1} = \exp\Bigl(\frac{\mathfrak{q}}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\Bigr)$$

である。

参考文献

[NY05] H. Nakajima, K. Yoshioka, *Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory*, Invent. math. **162**, 313–355 (2005).

[T92] R. Thomason, *Une formule de Lefschetz en K-théorie équivariante algébrique*, Duke Math. J. **68**, 447–462 (1992).

以上です。

Hilbert スキーム概説　5 日目 (9 月 22 日) *1

柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

3 日目の前提知識

- Heisenberg 代数とその Fock 表現

7　GL(1)-AGT 対応

7.1　Heisenberg 代数と Fock 表現

$\{b_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ を生成元とし

$$[b_m, b_n] \;=\; m\delta_{m+n,0}b_0$$

を定義関係式とする $\mathbb{Q}$ 上の Heisenberg Lie 代数 $\mathfrak{h}'$ を考える。これは $\deg(b_n) = n$ とすることで $\mathbb{Z}$ 次数付き Lie 代数になる。

各 $h \in \mathbb{Q}$ に対し $\mathfrak{h}'$ の表現 F_h が

$$F_h = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots], \quad b_n \longmapsto \begin{cases} n\frac{\partial}{\partial p_n} & (n > 0) \\ h\,\mathrm{id} & (n = 0) \\ p_{-n} & (n < 0) \end{cases}$$

で定まる。これを $\mathfrak{h}'$ の Fock 表現と呼ぶのであった。$h \neq 0$ なら F_h は既約である。また F_h も自然な次数付け

$$F_h = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} F_h^n, \quad \deg p_n = n$$

を持ち、それでもって次数付き Lie 代数としての表現になる。また反傾形式 (contragredient form)、即ち双線形型式 $\langle\cdot,\cdot\rangle : F_h \times F_h \longmapsto \mathbb{Q}$ であって

$$\langle 1, 1\rangle = 1, \quad \langle uv, w\rangle = \langle v, uw\rangle \quad (u \in \mathfrak{h}',\ v, w \in F_h)$$

を満たすものが一意に存在する。

ここで Heisenberg Fock 表現の Whittaker ベクトルに関して簡単に復習しよう。

補題. x を不定元とする。F_h の (次数付けに関する完備化の) 元

$$w(x) := \exp(xp_1) = \sum_{n\geq 0} x^n \frac{p_1^n}{n!}$$

について

$$b_1 w(x) = xw(x), \quad b_{>1}w(x) = 0, \quad w(0) = 1 \in F_h^0, \tag{7.1}$$
$$\langle w(x), w(x)\rangle = \exp(x^2). \tag{7.2}$$

この補題は簡単な計算で確認できる。(7.1) を満たす元は F_h の **Whittaker** ベクトルと呼ばれる。補題とは逆に、条件 (7.1) から $w(x)$ が一意的に $\exp(xp_1)$ に定まることも簡単に分かる。

*1 2017/09/22 版, ver. 0.4.

7.2 主張

Nekrasov 分配関数

$$Z(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\overrightarrow{a};\mathfrak{q}) := \sum_{n\geq 0}\mathfrak{q}^n(\iota_{0*})^{-1}\pi_*[\mathfrak{M}(r,n)]$$

の階数 $r=1$ の場合、つまり Hilbert スキーム $\mathrm{Hilb}^n_{\mathbb{C}^2}\simeq\mathfrak{M}(1,n)$ の場合は

$$Z_{r=1} = \sum_{\lambda}\frac{\mathfrak{q}^{|\lambda|}}{\prod_{\square\in\lambda}\big(-\ell_\lambda(\square)\varepsilon_1+(a_\lambda(\square)+1)\varepsilon_2\big)\big((\ell_\lambda(\square)+1)\varepsilon_1-a_\lambda(\square)\varepsilon_2\big)} = \exp\Big(\frac{\mathfrak{q}}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\Big) \tag{7.3}$$

となることを思い出す。(7.2) と (7.3) はどちらも指数関数で一致しているが、これは偶然ではない。

次の定義では Borel-Moore ホモロジー群を用いるが、その概説は §7.3 で与える。

定義. $\mathfrak{h}'$ を $H_*(\mathbb{C}^2)$ で拡大した Lie superalgebra を $\mathfrak{h}$ で表す。正確には、H_* で $\mathbb{Q}$ 係数のホモロジー群を表し、H^{lf}_* で $\mathbb{Q}$ 係数の Borel-Moore ホモロジー群を表すことにして、$\mathfrak{h}$ の生成元は

$$b_n(\mu)\quad\big(n\in\mathbb{Z}_{>0},\ \mu\in H^{\mathrm{lf}}_*(\mathbb{C}^2)\big),\quad b_{-n}(\nu)\quad\big(n\in\mathbb{Z}_{>0},\ \nu\in H_*(\mathbb{C}^2)\big),\quad b_0.$$

パリティに関して、$b_{\pm n}(\mu)$ は $\deg(\mu)\pmod 2$ で、b_0 は even で定める。そして定義関係式を以下で与える。

$$[b_m(\mu),b_n(\nu)] = (-1)^{m-1}m\delta_{m+n,0}\langle\mu,\nu\rangle_{\mathbb{C}^2}b_0,\quad [b_n(\nu),b_0]=0.$$

ここで $\langle\mu,\nu\rangle_{\mathbb{C}^2} := \int_{\mathbb{C}^2}\mu\cap\nu$ は交叉形式。

$\mathfrak{h}$ の Fock 表現も自然に定義できる。最高ウェイトが h の Fock 表現を F_h と書くことにする。

定理 7.2.1. (1) 同変ホモロジー群の直和

$$\mathbb{H} := \bigoplus_{n\geq 0}H^{\mathbb{T}}_*(\mathrm{Hilb}^n_{\mathbb{C}^2})_{\mathrm{loc}}$$

は $\mathfrak{h}$ の作用を持ち、$\mathfrak{h}$ 表現としての同型

$$\varphi:\ \mathbb{H}\xrightarrow{\sim}F_1\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$$

がある。但し $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ は前回 §6 の同一視 $S(\mathrm{Lie}(\mathbb{T})^*)=\mathbb{Z}[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$ で現れた同変パラメータ。
(2) φ は $\mathbb{H}$ 上の交叉形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{Hilb}}$ と F_1 上の $\langle\cdot,\cdot\rangle$ について内積空間の同型になる。
(3) 更に φ のもとで基本類の直和の完備化は Whittaker ベクトルに写る。

$$\sum_{n\geq 0}\mathfrak{q}^{n/2}\varphi\big([\mathrm{Hilb}^n_{\mathbb{C}^2}]\big) = w\big((\mathfrak{q}/\varepsilon_1\varepsilon_2)^{1/2}\big).$$

注意. (1) 元来 [N97, G] で述べられていたのは定理 7.2.1(1), (2) の非同変版である。
(2) ここで述べた同変版の (1), (2) は [N96] や [LQW] で扱われている。特に $\mathbb{H}$ の固定点基底 $\{[\overrightarrow{\lambda}]\}$ が φ によって Jack 対称函数のなす基底 $\{P_\lambda(\beta)\}$ に写ることが示されている。但し Jack 対称函数のパラメータ β は $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ 又は $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ で、この choice は内積空間の同型 $F_1\xrightarrow{\sim}\Lambda=$ (対称函数の空間) の取り方に依存する。
(3) 定理 7.2.1(3) は AGT 対応が認識されてから主張されるようになった。形式和 $f:=\sum_{n\geq 0}\mathfrak{q}^{n/2}[\mathrm{Hilb}^n_{\mathbb{C}^2}]$ を考えると、定理 7.2.1(2) と (3) から

$$\langle f,f\rangle_{\mathrm{Hilb}} = \langle w,w\rangle.$$

但し $w=w\big((\mathfrak{q}/\varepsilon_1\varepsilon_2)^{1/2}\big)$. 左辺の交叉形式を書き直すと $\sum_{n\geq 0}\mathfrak{q}^n(\iota_{0*})^{-1}\pi_*[\mathfrak{M}(r,n)]$, つまり Nekrasov 分配函数 $Z_{r=1}$ となる。よって U(1) の (物質場なし)AGT 対応が得られる。

$$(\text{Nekrasov 分配函数})\ Z_{r=1}\ =\ (\mathfrak{h}\text{ の Whittaker ベクトルのノルム})\ \langle w,w\rangle.$$

7.3 convolution algebra

定理 7.2.1 の Heisenberg 代数は $\mathrm{Hilb}^n_{\mathbb{C}^2}$ の convolution algebra を考えることで構成される。convolution algebra の一般論は (K 群版で書いてあるが) [CG] を参照のこと。ここではホモロジー版が必要になる。

まず Borel-Moore ホモロジーについて [N99, §8.2] に従って説明する。暫く可微分多様体の範疇で考えよう。局所コンパクト空間 S に対して $H^{\mathrm{lf}}_*(S)$ で $\mathbb{Q}$ 係数の Borel-Moore ホモロジー群を表す。つまり H^{lf}_* は局所有限な特異チェインで定義されるホモロジーである。通常のホモロジーを H_* で表すと、S の 1 点コンパクト化 $\overline{S}$ について $H^{\mathrm{lf}}_* \simeq H_*(\overline{S}, \{\infty\})$ となる。また n 次元の向き付けられた可微分多様体 M に対して、Poincaré 双対性

$$H^{\mathrm{lf}}_i(M) \simeq H^{n-i}(M), \quad H_i(M) \simeq H^{n-i}_c(M) \tag{7.4}$$

が成立する。

M_1, M_2 を向きづけられた可微分多様体、$Z \subset M_1 \times M_2$ を部分多様体であって射影 $Z \to M_2$ が固有なものとする。Z の基本類は

$$\begin{aligned}[Z] \in H_{\dim_{\mathbb{R}} Z}(M_1 \times \overline{M}_2, M_1 \times \{\infty\}) &\simeq \bigoplus_{i+j=\dim_{\mathbb{R}} Z} H_i(M_1) \otimes H^{\mathrm{lf}}_j(M_2) \\ &\simeq \bigoplus_j \mathrm{Hom}(H_j(M_2), H_{\dim_{\mathbb{R}} Z - d_2 + j}(M_1))\end{aligned}$$

を定める。但し $d_2 := \dim_{\mathbb{R}} M_2$ で、最後の同型は Poincaré 双対性 (7.4) を使った。写像として書くと

$$[Z] : H_j(M_2) \longrightarrow H_{j+\dim_{\mathbb{R}} Z - d_2}(M_1), \quad c \longmapsto p_{1*}(p_2^*(c) \cap [Z]).$$

但し $p_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ は射影。このようにホモロジー群に作用する作用素と見なした時の $[Z]$ を **correspondence** と呼ぶ。

2 つのサイクル $Z \subset M_1 \times M_2$, $Z' \subset M_2 \times M_3$ がある場合は、correspondence の合成 $[Z'] \circ [Z]$ について

$$[Z'] \circ [Z] = p_{13*}\big(p_{12}^*[Z] \cap p_{23}^*([Z'])\big)$$

となることが分かる。但し p_{ij} は射影 $M_1 \times M_2 \times M_3 \to M_i \times M_j$. これを $[Z]$ と $[Z']$ の**対合積**と呼ぶ。特に $M_1 = M_2 = M_3$ の場合は correspondence 達が対合積を積とする代数をなし、更に $H_*(M)$ に作用することが分かる。この代数を **convolution algebra** と呼ぶ。

7.4 nested Hilbert scheme による correspondence

以下暫く $X = \mathbb{C}^2$ と書く[*2]。X 上の点の Hilbert スキーム $X^{[n]} = \mathrm{Hilb}^n_X$ は多項式環 $\mathbb{C}[X,Y]$ のイデアルの集合 $\{I \subset \mathbb{C}[X,Y] \mid \dim \mathbb{C}[X,Y]/I = n\}$ と同一視できた。

定義. $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$\mathfrak{N}_k := \coprod_n \{(J_1, J_2, x) \in X^{[n-k]} \times X^{[n]} \times X \mid J_1 \subset J_2,\ \mathrm{Supp}(J_1/J_2) = \{x\}\}$$

と定める。$k \in \mathbb{Z}_{<0}$ に対しては J_1 と J_2 を入れ替えた式で $\mathfrak{N}_k$ を定義する。

$\mathfrak{N}_k$ ないし $\mathfrak{N}_k \cap (X^{[n-k]} \times X^{[n]} \times X)$ は **nested Hilbert scheme** と呼ばれる。

補題. 各 $\mathfrak{N}_k \cap (X^{[n-k]} \times X^{[n]} \times X)$ は次元 $2n - k + 1$ の非特異代数多様体。

この主張のうち次元の計算は [N99, §8.3 (8.11)] の前後に説明がある。既約性は [L, §3.3] に詳しい。非特異性は (実は Heisenberg 代数の構成には不要だが) [C] で証明されている。

*2 [N99, §8.3] にあるように任意の準射影曲面 X に対して同じ議論が通用する。

Heisenberg 代数 $\mathfrak{h}$ の構成のアイデアは「§7.3 の議論を $M = \coprod_n X^{[n]}$ 及び $Z = \mathfrak{N}_k$ に適用する」というものである。但し $\mathfrak{h}$ が $H_*(X) = H_*(\mathbb{C}^2)$ で拡大されていることを考慮して次のように変更を加える。

$k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\mu \in H_*^{\mathrm{lf}}(X)$ 及び $\mu \in H_*(X)$ に対して

$$N_k[\mu] := \varpi_{12*}(\varpi_3^*\mu \cap [\mathfrak{N}_k]), \quad N_{-k}[\nu] := \varpi_{12*}(\varpi_3^*\nu \cap [\mathfrak{N}_{-k}])$$

と定める。但し

$$\varpi_{12} : \coprod_n (X^{[n-k]} \times X[n] \times X) \longrightarrow \coprod_n (X^{[n-k]} \times X[n]), \quad \varpi_3 : \coprod_n (X^{[n-k]} \times X[n] \times X) \longrightarrow X$$

はそれぞれ自然な射影である。

定理 ([N97, G])**.** $[\cdot,\cdot]$ を super bracket として

$$[N_m[\mu], N_n[\nu]] = (-1)^{m-1} m \delta_{m+n} \langle \mu, \nu \rangle_X \, \mathrm{id}\,.$$

但し $N_m[\mu]$ のパリティは $\deg \mu \pmod 2$ で定める。

以上の議論ではホモロジー H_* の代わりに同変ホモロジー H_*^G を考えることもできる。すると定理 7.2.1(1) の $\mathfrak{h}$ 作用が得られる。

参考文献

[C] J. Cheah, *Cellular decompositions for nested Hilbert schemes of points*, Pacific J. Math. **183** (1998), 39–90.

[CG] N. Chriss, V. Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997.

[G] I. Grojnowski, *Instantons and affine algebras I: the Hilbert scheme and vertex operators*, Math. Res. Letters **3** (1996), 275–291.

[L] M. Lehn, *Lectures on Hilbert schemes*, in *Algebraic structures and moduli spaces*, 1–30, CRM Proc. Lecture Notes, **38**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[N96] H. Nakajima, *Jack polynomials and Hilbert schemes of points on surfaces*, preprint (1996), arXiv:math.AG/9610021.

[N97] H. Nakajima, *Heisenberg algebra and Hilbert schemes of points on projective surfaces*, Ann. of Math. (2) **145** (1997), no. 2, 379–388.

[N99] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, Univ. Lect. Ser. **18**, AMS, 1999.

[LQW] W.-P. Li, Z. Qin, W. Wang, *The cohomology rings of Hilbert schemes via Jack polynomials*, in *Algebraic structures and moduli spaces*, 249–258, CRM Proc. Lecture Notes, **38**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

以上です。