秋の数学散策講座　「組み合わせ論と母関数」

2017 年 1 月 16 日
柳田伸太郎 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

1 自然数の分割

自然数 n の**分割**: n を自然数の和に分解する方法のこと。
和の順番を変えたものは同じ方法とみなす。例えば

$$
\begin{aligned}
n=1: &\quad 1=1 \\
n=2: &\quad 2=2,\ 1+1 \\
n=3: &\quad 3=3,\ 2+1,\ 1+1+1 \\
n=4: &\quad 4=4,\ 3+1,\ 2+2,\ 2+1+1,\ 1+1+1+1 \\
n=5: &\quad 5=5,\ 4+1,\ 3+2,\ 3+1+1,\ 2+2+1,\ 2+1+1+1+1,\ 1+\cdots+1
\end{aligned}
$$

練習. $n=6$ と $n=7$ の場合に n の分割を全て求めよ。

n の分割の総数を $p(n)$ と書くと、n が小さいところでは次のような結果になる。

n	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	$\cdots$

問. $p(n)$ を全ての n について求めるにはどうすればよいだろうか。

2 数列

$\{a_n\}$ と書いたら数列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ のこととする。例えば
(1) $a_n = 1$ なら $1,1,1,1,1,1,1,\ldots$
(2) $b_n = n$ なら $1,2,3,4,5,6,7,\ldots$
(3) $s_n = n^2$ なら $1,2,4,9,16,25,\ldots$
(4) $q_n = n$ 番目の素数 なら $2,3,5,7,11,13,17,19,\ldots$
(5) n 番目のフィボナッチ数を f_n と書くと $f_1 = 1,\ f_2 = 2,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

練習. $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ を示せ。

問. $p(n)$ は n の式で書けるだろうか？

3　母関数

実は $p(n)$ には簡単な表示はない。しかし別の方法で理解できる。
これから先、数列 $\{a_n\}$ は 0 番目から並べることにする: $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$
数列 $\{a_n\}$ の (文字 x を変数とする) **母関数**とは

$$\begin{aligned} &a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots \end{aligned}$$

という (無限) 和のこと。例えば
(1) $a_n = 1$ $(a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1, \ldots)$ の母関数は

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots .$$

(2) $b'_n = n + 1$ $(b'_0 = 1, b'_1 = 2, b'_2 = 3, \ldots)$ の母関数は

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots .$$

(3) $p(n) :=$ (n の分割の数) の母関数は次のようになる。但し $p(0) := 1$ と定める。

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + \cdots .$$

実は (1) と (2) の母関数はもっと簡単に表せる。

公式. (1) について

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}. \qquad (\sharp)$$

"証明". $1 + x + \cdots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x}$ で $|x| < 1$ なら $n \to \infty$ で $x^n \to 0$ なので。
実際、$x = 0.1$ なら

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= 1 + 0.1 + (0.1)^2 + (0.1)^3 + \cdots \\ &= 1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots = 1.111\cdots, \\ (\text{右辺}) &= \frac{1}{1-0.1} = \frac{1}{0.9} = \frac{10}{9} = 1.111\cdots . \end{aligned}$$

練習. (2) について

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

問. $p(n)$ の母関数について、似たような表示は得られるだろうか?

4 分割数の母関数

少し天下り的だが、公式 ($\sharp$) で x を x^m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ に取り換えた

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$
$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$$
$$\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots$$

を考える。これらを「m の小さいものから順に掛け算して $p(n)$ の母関数に近づけていく」と

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} &= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) \\
&= 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + \cdots \\
\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2}(1 + x^3 + x^6 + \cdots) \\
&= (1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + \cdots) \\
&\qquad \times (1 + x^3 + x^6 + \cdots) \\
&= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + 8x^7 + \cdots \\
\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^4} &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3}(1 + x^4 + \cdots) \\
&= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 9x^6 + 11x^7 + \cdots \\
\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{1-x^5} &= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 10x^6 + 13x^7 + \cdots \\
\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{1-x^6} &= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 14x^7 + \cdots \\
\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{1-x^7} &= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + \cdots
\end{aligned}$$

7 の分割数まで (つまり x^7 まで) 母関数を合わせるには、7 つの積が必要。

(計算欄)

公式. 分割数 $p(n)$ の母関数は次のような無限積と等しい。

$$p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + \cdots + p(n)x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{1-x^n} \cdot \cdots .$$

無限和と無限積の記号

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots , \quad \prod_{n=1}^{\infty} a_n := a_1 \cdot a_2 \cdots \cdot$$

を使うと

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} \qquad (\clubsuit)}$$

と書ける。この等式 ($\clubsuit$) は Euler が発見したとされる。

練習. 等式 ($\clubsuit$) を証明せよ。

(計算欄)

5 Jacobi の三重積公式

分割数の母関数の公式 (♣) の右辺に現れた $\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{-1}$ の「逆数」$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)$ を考えよう。

練習. $\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)$ を展開せよ。

試しにやってみると

$$
\begin{aligned}
&(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\cdots \\
&= (1-x-x^2+x^3)(1-x^3)\cdots \\
&= (1-x-x^2+x^4+x^5-x^6)(1-x^4)\cdots \\
&= (1-x-x^2+2x^5+\cdots)(1-x^5)\cdots \\
&= (1-x-x^2+x^5+x^6+x^7+\cdots)(1-x^6)\cdots \\
&= 1-x-x^2+x^5+x^7+\cdots
\end{aligned}
$$

実は次の等式が成立する。

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{3n^2-n}{2}} \tag{♡}$$

x の冪が小さい所で確かめてみると

n	-3	-2	-1	0	1	2	3
$(3n^2-n)/2$	15	7	2	0	1	5	12

より

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= (-1)^0x^0+(-1)^1x^1+(-1)^{-1}x^2+(-1)^2x^5+(-1)^{-2}x^7 \\
&= 1-x-x^2+x^5+x^7+\cdots.
\end{aligned}
$$

等式 (♡) も Euler が発見したもので、**Euler の五角数定理**と呼ばれる。

練習. $e_n := \dfrac{3n^2-n}{2}$ は五角数と呼ばれるものである。このことを確認せよ。

(計算欄)

実は (♡) は次のように拡張される。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2} y^n = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - x^{2j})(1 + x^{2j-1}y)(1 + x^{2j-1}y^{-1}) \qquad (\spadesuit)$$

この等式 (♠) を **Jacobi の三重積公式**という。

練習. 分割数の母関数の公式 (♣) と Euler の五角数定理 (♡) から、分割数 $p(n)$ と五角数 e_k に関する次の関係式を導け。

$$\begin{aligned} p(n) &= p(n-e_1) + p(n-e_{-1}) - p(n-e_2) - p(n-e_{-2}) + p(n-e_3) + p(n-e_{-3}) - \cdots \\ &= \sum_{k \neq 0} (-1)^{k-1} p(n-e_k). \end{aligned}$$

但し最後の式で $n - e_k < 0$ となる場合は $p(n-e_k) = 0$ と約束する (従って有限和である)。

練習. (♠) から (♡) を導け。

(計算欄)

以上です。