オペラッドとグラフ複体

柳田伸太郎*1

概要. 昨年は Vassiliev 不変量から定まる可換かつ余可換な次数付き Hopf 代数 $P=\oplus_k P_k$ を紹介した。この空間があるグラフ複体の最低次のホモロジー群と同一視できる、というのが Kontsevich と Bar-Natan の定理である。正確に書くと

$$P_k \simeq \bigoplus_{\substack{(g,n)\\ k=g-1+n,\\ n>0,\ g\geq 0}} H_{1-g}\left(\mathcal{S}^{-1}\otimes_H \mathsf{F}(\mathcal{C}om)\right)((g,n))_{\mathfrak{S}_n}.$$

ここで $\mathcal{C}om$ は可換オペラッド、F は Feynman 変換 (モジュラーオペラッドのある変換)、$\mathcal{S}^{-1}\otimes_H$ は符号表現に対応するモジュラーオペラッドをテンソル積する変換、下添え字の $\mathfrak{S}_n$ は余不変式の空間を表す。

今年はオペラッドとその "高次種数" 類似であるモジュラーオペラッド、更に (時間があれば)Kontsevich による三すくみ (オペラッド - グラフ複体 - 無限次元 Lie 代数) の紹介をする。

1 オペラッド

オペラッド*2は代数構造 (加法、非可換積、リー括弧など) の合成規則の対称性を記述する概念である。ここでは [LV12] に従って "モノイダルな定義" で導入する。また Koszul 分解の紹介もする。

1.1 $\mathfrak{S}$ 加群とオペラッド

$\mathbb{F}$ は適当な体とする。線形空間と言えば断らない限り $\mathbb{F}$ 上のもののことを指す。

定義. (1) ($\mathbb{F}$ 上の)$\mathfrak{S}$ **加群** M とは右 $\mathbb{F}[\mathfrak{S}_n]$ 加群の族 $M=\{M(n)\mid n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ のことである。

$\mathfrak{S}$ 加群の射 $f: M\to N$ とは $\mathfrak{S}_n$ 準同型の族 $f=\{f_n\in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(M(n),N(n))\}$ のことである。

$\mathfrak{S}$ 加群のなす圏を $\mathfrak{S}$-Mod と書く。

(2) 2 つの $\mathfrak{S}$ 加群 M,N の**テンソル積** $M\otimes N$ を次式で与えられる $\mathfrak{S}$ 加群とする。

$$(M\otimes N)(n) := \bigoplus_{i+j=n} \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_i\times\mathfrak{S}_j}^{\mathfrak{S}_m} M(i)\otimes_{\mathbb{F}} N(j). \tag{1.1}$$

(3) 2 つの $\mathfrak{S}$ 加群 M,N の**合成***3$M\circ N$ を次式で定まる $\mathfrak{S}$ 加群として定義する。

$$(M\circ N)(n) := \bigoplus_{k\geq 0} M(k)\otimes_{\mathfrak{S}_k} N^{\otimes k}(n).$$

ここで $N^{\otimes k}$ は $\mathfrak{S}$ 加群としてのテンソル積 (1.1) で、左から $\mathfrak{S}_k$ が因子の置換で作用している。この $\mathfrak{S}_k$ 作用と右からの $\mathfrak{S}_n$ 作用が可換なことに注意する。

(4) $\mathfrak{S}$ 加群の射 $f: M\to M'$ と $g: N\to N'$ が与えられれば $f\circ g: M\circ N\to M'\circ N'$ も自然に定義される。

(5) **単位 $\mathfrak{S}$ 加群** I を $I(1):=\mathbb{F}$ (自明表現), $I(n):=0$ $(n\neq 1)$ で定義する。

補題 1.1.1. $\mathfrak{S}$ 加群の圏 $\mathfrak{S}$-Mod はモノイダル圏*4の構造 $(\mathfrak{S}\text{-Mod},\circ,I)$ を持つ。

定義. **オペラッド** $\mathcal{O}=(\mathcal{O},\gamma,\eta)$ とはモノイダル圏 $(\mathfrak{S}\text{-Mod},\circ,I)$ のモノイド対象のことである。

つまりオペラッドとは $\mathfrak{S}$ 加群 $\mathcal{O}$ と

- $\mathfrak{S}$ 加群の射 $\gamma:\mathcal{O}\circ\mathcal{O}\to\mathcal{O}$ (**合成写像**と呼ばれる)
- $\mathfrak{S}$ 加群の射 $\eta: I\to\mathcal{O}$ (**単位写像**と呼ばれる)

---

*1 yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

*2 operad の訳語です。数学辞典第四版では「オペラード」と訳しています。

*3 composite の訳語です。

*4 [Mac98] の意味の monoidal category の訳語です。

であって次の 2 つの図式が可換 (結合則と単位則) が成立するもののことである。

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{O}\circ\mathcal{O})\circ\mathcal{O} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\gamma\circ\mathrm{id}"'] & \mathcal{O}\circ(\mathcal{O}\circ\mathcal{O}) \arrow[r, "\mathrm{id}\circ\gamma"] & \mathcal{O}\circ\mathcal{O} \arrow[d, "\gamma"] \\ \mathcal{O}\circ\mathcal{O} \arrow[rr, "\gamma"] & & \mathcal{O} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I\circ\mathcal{O} \arrow[r, "\eta\circ\mathrm{id}"] \arrow[dr, equal] & \mathcal{O}\circ\mathcal{O} \arrow[d, "\gamma"'] & \mathcal{O}\circ I \arrow[l, "\mathrm{id}\circ\eta"'] \arrow[dl, equal] \\ & \mathcal{O} & \end{tikzcd}$$

注意. 定義の気持ちを説明すると、各 $\mathcal{O}(n)$ は “n 項演算のなす空間[*5]”であり、γ は “演算の合成”を記述している。η は “何もしない演算”に対応する。合成写像 γ について更に補足しよう。$\mathfrak{S}$ 加群 M, N の合成 $M\circ N$ は

$$(M\circ N)(n) \simeq \bigoplus_{k\geq 0} M(k)\otimes_{\mathfrak{S}_k}\Big(\bigoplus \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{i_1}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{i_k}}^{\mathfrak{S}_n} N(i_1)\otimes\cdots N(i_k)\Big) \tag{1.2}$$

とも書ける。但し右辺 2 つめの直和は $i_1+\cdots+i_k=n$ なる非負整数の組 $(i_1,\ldots,i_k)$ をわたる。従って γ は以下のような線形写像達からなることが分かる。

$$\gamma(i_1,\ldots,i_k):\ \mathcal{O}(k)\otimes\mathcal{O}(i_1)\otimes\cdots\otimes\mathcal{O}(i_k)\longrightarrow\mathcal{O}(i_1+\cdots+i_k) \tag{1.3}$$

これは i_j 項演算たち $(j=1,\ldots,k)$ を合成して $(i_1+\ldots+i_k)$ 項演算にする際の規則を表しているものと思える。なお、元々の May の定義 [May72] はこの $\gamma(i_1,\ldots,i_k)$ について公理を書き下したものである。

以下では (1.2) を用いて $M\circ N$ の元を次式のように書くことにする。

$$(\mu;\nu_1,\ldots,\nu_k).$$

例 1.1.2. (0) 単位 $\mathfrak{S}$ 加群 I は自明なオペラッド構造 $(I,\gamma,\eta=\mathrm{id}_I)$ を持つ。これを**単位オペラッド**と呼ぶ。
(1) 線形空間 V に対し**自己準同型オペラッド** $\mathcal{E}nd_V$ を $\mathcal{E}nd_V(n):=\mathrm{Hom}(V^{\otimes n},V)$ で、γ を準同型の合成に対応するように定義する。正確には $f:V^{\otimes k}\to V,\ f_j:V^{\otimes i_j}\to V\ (j=1,\ldots,k)$ として

$$\gamma(i_1,\ldots,i_k)(f;f_1,\ldots,f_k):=f(f_1\otimes\cdots\otimes f_k):\ V^{\otimes(i_1+\cdots+i_k)}\longrightarrow V.$$

(2) **可換オペラッド** $\mathcal{C}om$. $\mathfrak{S}$ 加群としては $\mathcal{C}om(0):=0$ 及び $n>0$ なら $\mathcal{C}om(n):=\mathbb{F}$(自明表現) とする。$\gamma$ は自明に与える。つまり (1.3) を全て恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{F}}$ とする。これは加法の合成則に対応していると見なせる。
(3) **結合オペラッド** $\mathcal{A}ssoc$. $\mathfrak{S}$ 加群としては $\mathcal{A}ssoc(n):=\mathbb{F}[\mathfrak{S}_n]$(正則表現)。$\gamma$ は非可換積に対応するように与える。例えば (1.3) において $k=2,\ i_1=l,\ i_2=m$ の場合、$\sigma\in\mathfrak{S}_l\subset\mathcal{A}ssoc(l)$ と $\tau\in\mathfrak{S}_m\subset\mathcal{A}ssoc(m)$ に対し

$$\gamma(l,m)(1;\sigma,\tau):=\sigma\times\tau,\quad \gamma(l,m)((1,2);\sigma,\tau):=(1,2)_{l,m}\circ(\sigma\times\tau)$$

とする。ここで $\sigma\times\tau\in\mathfrak{S}_{l+m}\subset\mathcal{A}ssoc(l+m)$ は $\{1,\ldots,l\}$ を σ で置換し $\{l+1,\ldots,l+m\}$ を τ で置換するもの。$(1,2)_{l,m}$ はブロック置換、即ち

$$(1,2)_{l,m} := \begin{pmatrix}1,\ldots,l,l+1,\ldots,l+m\\ l+1,\ldots,l+m,1,\ldots,l\end{pmatrix}.$$

一般には次のようにすればよい (記号の定義は省く)。

$$\gamma(i_1,\ldots,i_k)(\sigma;\tau_1,\ldots,\tau_k):=\sigma_{i_1,\ldots,i_k}\circ(\tau_1\times\cdots\times\tau_k).$$

(4) **Lie オペラッド** $\mathcal{L}ie$. $\mathfrak{S}$ 加群としては $\mathcal{L}ie(n)$ は $x_1,\ldots,x_n$ の生成する自由 Lie 代数の中で各 x_i がちょうど 1 度現れる Lie 単項式の張る部分空間である。γ は Lie 括弧に対応するように与える。$\mathbb{F}=\mathbb{C}$ なら Klyatchko の定理 [Kl74] より $\mathcal{L}ie(n)\simeq\mathrm{Ind}_{\mathbb{Z}_n}^{\mathfrak{S}_n}\chi$. 但し χ は $\mathbb{Z}_n$ の原始指標 ($\mathbb{Z}_n$ の生成元 $\mapsto 1$ の原始 n 乗根)。

定義. $\mathcal{O},\mathcal{P}$ をオペラッドとする。**オペラッドの射** $\alpha:\mathcal{O}\to\mathcal{P}$ とは $\mathfrak{S}$ 加群の射であって合成写像 γ 及び単位写像 η と整合的なもののことである。

[*5] 英語ではしばしば the space of n-ary operations と書かれます

定義. 線形空間 A が**オペラッド $\mathcal{O}$ 上の代数** (もしくは $\mathcal{O}$ 代数) であるとは、オペラッドの射 $\mathcal{O} \to \mathcal{E}nd_A$ が与えられていることを言う。

注意. $\mathfrak{S}$ 加群 M と線形空間 V に対し線形空間 $M(V)$ を $M(V) := \oplus_{n\geq 0} M(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} V^{\otimes n}$ で定義する。$(M \circ N)(V) = M(N(V))$ に注意する[*6]。$\mathfrak{S}$ 加群の射 $f: M \to N$ と線形空間 V に対し $\mathfrak{S}$ 加群の射 $f(V): M(V) \to N(V)$ が自然に定義できる。また線形写像 $\varphi: V \to W$ に対し $\mathfrak{S}$ 加群の射 $M(\varphi): M(V) \to M(W)$ が同様に定義できる。

するとオペラッド上の代数の定義は次のように言い換えられる: 線形空間 A と線形写像 $\gamma_A: \mathcal{O}(A) \to A$ が与えられていて、次の 2 つの図式が可換 (結合則と単位則) になる。

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{O}\circ\mathcal{O})(A) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\gamma(A)"'] & \mathcal{O}(\mathcal{O}(A)) \arrow[r, "\mathcal{O}(\gamma_A)"] & \mathcal{O}(A) \arrow[d, "\gamma_A"] \\
\mathcal{O}(A) \arrow[rr, "\gamma_A"] & & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I(A) \arrow[r, "\eta(A)"] \arrow[dr, equal] & \mathcal{O}(A) \arrow[d, "\gamma_A"] \\
& \mathcal{O}
\end{tikzcd}$$

例 1.1.3. $\mathcal{C}om, \mathcal{A}ssoc, \mathcal{L}ie$ 上の代数は通常の意味の可換代数、結合代数、Lie 代数に他ならない。例えば $\mathcal{O} = \mathcal{A}ssoc$ 上の代数 A は

$$\mathcal{O}(A) = \oplus_{n\geq 0} \mathcal{O}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} A^{\otimes n} \simeq \oplus_{n\geq 0} A^{\otimes n} = T(A) \text{ (テンソル代数)}$$

より $\gamma_A: T(A) \to A$ が積に対応し、γ との整合性は積の結合則に他ならないことが分かる。

注意 1.1.4. オペラッドの定義で各 $\mathcal{O}(n)$ は線形空間としたが、線形空間の圏の代わりに任意の対称モノイダル圏[*7]を用いてもよい。詳しくは [MSS02] や [LV12] を参照。

次副節で Koszul 双対性を紹介するが、そのためにオペラッドの双対概念を導入しておく。

まず $\mathfrak{S}$-Mod 上のモノイダル構造で使った合成 $M \circ N := \oplus_n M(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} N^{\otimes n}$ を思い出す。これは $M \circ N = \oplus_n (M(n) \otimes_{\mathbb{C}} N^{\otimes n})_{\mathfrak{S}_n}$ と余不変式の空間としても記述できる。但しここでは $N^{\otimes n}$ を右 $\mathfrak{S}_n$ 加群と見なしていて、$\mathfrak{S}_n$ は対角作用させている。

これの自然な双対は不変式の空間であるから、次のような定義をしてみる。

$$M \bar{\circ} N := \oplus_n (M(n) \otimes_{\mathbb{C}} N^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}.$$

すると補題 1.1.1 と同様に ($\mathfrak{S}$-Mod, $\bar{\circ}, I$) はモノイダル圏になる。

定義. **余オペラッド**[*8]$\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \Delta, \varepsilon)$ とはモノイダル圏 ($\mathfrak{S}$-Mod, $\bar{\circ}, I$) の余モノイド対象[*9]のことである。

つまり余オペラッドとは $\mathfrak{S}$ 加群 $\mathcal{C}$ と

- $\mathfrak{S}$ 加群の射 $\Delta: \mathcal{C} \to \mathcal{C} \bar{\circ} \mathcal{C}$ (**分解写像**)
- $\mathfrak{S}$ 加群の射 $\varepsilon: \mathcal{C} \to I$ (**余単位写像**)

であって次の 2 つの図式が可換 (余結合則と余単位則) が成立するもののことである。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & & \mathcal{C} \bar{\circ} \mathcal{C} \arrow[d, "\Delta \bar{\circ} \mathrm{id}"] \\
\mathcal{C} \bar{\circ} \mathcal{C} \arrow[r, "\mathrm{id} \bar{\circ} \Delta"'] & (\mathcal{C} \bar{\circ} \mathcal{C}) \bar{\circ} \mathcal{C} \arrow[r, "\sim"'] & \mathcal{C} \bar{\circ} (\mathcal{C} \bar{\circ} \mathcal{C})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathcal{C} \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "\sim"] & \\
I \bar{\circ} \mathcal{C} & \mathcal{C} \bar{\circ} \mathcal{C} \arrow[l, "\varepsilon \bar{\circ} \mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id} \bar{\circ} \varepsilon"'] & \mathcal{O} \bar{\circ} I
\end{tikzcd}$$

例 1.1.5. (1) オペラッド $(\mathcal{O}, \gamma, \eta)$ について $\mathcal{O}$ の線形双対 $\mathcal{O}^*$ には自然に余オペラッドの構造が入る。
(2) 特に線形空間 V の**自己準同型余オペラッド** $\mathcal{E}nd_V^c$ を $\mathcal{E}nd_V^c(n) := \mathrm{Hom}(V, V^{\otimes n})$ で定義できる。

[*6] 記号が少し違うのですが [LV12, Proposition 5.1.3] で示されている主張と同じです
[*7] [Mac98] の意味の symmetric monoidal category の訳語です。
[*8] cooperad の訳語です。
[*9] comonoid の訳語です。

1.2 Koszul 双対

[GiK94] で Koszul オペラッドと双対性が導入された。ここでは [LV12, Chap. 7] の説明に従ってそれを概説する。まず自由オペラッドを導入する必要がある。

定義. 忘却函手 (オペラッド)$\longmapsto$($\mathfrak{S}$ 加群) の左随伴函手で得られるオペラッドを M 上の**自由オペラッド**と呼ぶ。

もう少し詳しく述べると、$\mathfrak{S}$ 加群 M 上の自由オペラッドとはオペラッド $\mathcal{F}(M)$ と $\mathfrak{S}$ 加群の射 $\eta_M : M \to \mathcal{F}(M)$ の組 $(\mathcal{F}(M), \eta_M)$ であって普遍的なもの、即ち任意のオペラッド $\mathcal{O}$ への $\mathfrak{S}$ 加群射 $f : M \to \mathcal{O}$ が $f = \widetilde{f}\eta_M$ と $\mathcal{F}(M)$ を経由するもののことである。

抽象的にはこの定義でよいが、実際には具体的に構成できるのでそれを説明する。$\mathfrak{S}$ 加群 M に対し $\mathfrak{S}$ 加群 $\mathcal{T}_n M$ を帰納的に定義する。

$$\mathcal{T}_0 M := I, \quad \mathcal{T}_1 M := I \oplus M, \quad \mathcal{T}_n M := I \oplus (M \circ \mathcal{T}_{n-1} M), \quad \ldots.$$

$\mathfrak{S}$ 加群の単射 $i_n : \mathcal{T}_{n-1}M \hookrightarrow \mathcal{T}_n M$ を $i_1 : I \hookrightarrow I \oplus M$ は 1 番目の因子への埋め込みで定義し、それ以降は $i_n := \mathrm{id}_I \oplus (\mathrm{id}_M \circ i_{n-1})$ と定義する。i_n 達が与える帰納系の帰納極限を $\mathcal{T}M$ と書く。

$$\mathcal{T}M := \mathrm{colim}_n \mathcal{T}_n M \tag{1.4}$$

また単射 $\mathcal{T}_m M \hookrightarrow \mathcal{T}_n$ を (添え字を省略して)i で、2 番目の因子への単射 $M \circ \mathcal{T}_{n-1}M \hookrightarrow \mathcal{T}_n M$ 及びそれが引き起こす単射 $M \hookrightarrow \mathcal{T}M$ を j と書く。

命題 ([LV12, Theorem 5.5.1])**.** M の自由オペラッドは $(\mathcal{F}(M), \eta_M) = ((\mathcal{T}M, \gamma, \eta), j)$ と書ける。

ここでは γ の構成の概略のみ述べる。$\gamma_{m,n} : \mathcal{T}_m M \circ \mathcal{T}_n M \to \mathcal{T}_{m+n}M$ を帰納的に定義する。$m = 0$ なら $I \circ \mathcal{T}_N M = \mathcal{T}_n M$ より $\gamma_{0,n} := \mathrm{id}_{\mathcal{T}_n M}$ とすれば良い。$m > 0$ なら次のように与える。

$$\mathcal{T}_m M \circ \mathcal{T}_n M \simeq \mathcal{T}_n M \oplus M \circ (\mathcal{T}_{m-1}M \circ \mathcal{T}_n M) \xrightarrow{(\mathrm{id}, \mathrm{id}\circ\gamma_{m-1,n})} \mathcal{T}_n M \oplus M \circ \mathcal{T}_{m+n-1}M \xrightarrow{i+j} \mathcal{T}_{m+n}M.$$

$\mathcal{F}(M)$ 上のウェイト w を $\mathrm{id} \in I(1) = \mathbb{F}\,\mathrm{id} \subset I \subset \mathcal{F}(M)$ に対して $w(\mathrm{id}) := 0$, 全ての $\mu \in M(n)$ に対して $w(\mu) := 1$ で定義する。そして一般には

$$w(\mu; \nu_1, \ldots, \nu_n) := w(\mu) + w(\nu_1) + \cdots + w(\nu_n)$$

とする。$\mathcal{F}(M)^{(r)}$ を $\mathcal{F}(M)$ のウェイト r の部分空間とする。特に $\mathcal{F}(M)^{(0)} = \mathbb{F}\,\mathrm{id}$, $\mathcal{F}(M)^{(1)} = M$ である。

次に二次オペラッドを導入したい。その為にまず

定義. オペラッド $\mathcal{O}$ の**イデアル** $\mathcal{I}$ とは部分 $\mathfrak{S}$ 加群であって $\mathcal{O}$ のオペラッド構造が $\mathcal{O}/\mathcal{I}$ に遺伝するものである。

つまり $\{\mu; \nu_1, \ldots, \nu_k\}$ の何れか一つが $\mathcal{I}$ に属するのなら $\gamma(\mu; \nu_1, \ldots, \nu_k) \in \mathcal{I}$ となる。

定義. $\mathfrak{S}$ 加群 E と部分 $\mathfrak{S}$ 加群 $R \subset \mathcal{F}(E)^{(2)}$ が与えられたとき、(E, R) に付随する**二次オペラッド**[*10]とは商オペラッド $\mathcal{O}(E, R) := \mathcal{F}(E)/(R)$ のことである。但し (R) は R の生成する $\mathcal{F}(E)$ のイデアル。

例 1.2.1. $\mathcal{C}om, \mathcal{A}ssoc, \mathcal{L}ie$ は二次オペラッドである。その説明のために $\mathfrak{S}$ 加群 E として $E(2) = V$, $E(n) = 0$ $(n \neq 2)$ となるものを考える。この時定義から $\mathcal{F}(E)(0) = 0$, $\mathcal{F}(E)(1) = \mathbb{F}$, $\mathcal{F}(E)(2) = V$ が分かる。更に

$$\mathcal{F}(E)(3) = V \otimes \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_3} V \simeq 3V \otimes V.$$

そこで $\mu, \nu \in V$ に対し $\mu \circ_I \nu, \mu \circ_{II} \nu, \mu \circ_{III} \nu \in \mathcal{F}(E)(3)$ を

$$\mu \circ_I \nu(x, y, z) = \mu(\nu(x, y), z), \quad \mu \circ_{II} \nu(x, y, z) = \mu(\nu(z, x), y), \quad \mu \circ_{III} \nu(x, y, z) = \mu(\nu(y, z), x)$$

[*10] quadratic operad の訳語です。

に対応する元とする。これらへの $\mathfrak{S}_3$ の作用が $\mathcal{F}(E)(3)$ を決定することになる。

特に $V=\mathbb{F}\mu$ と 1 次元の場合の E を E_1 と書くことにする。$u_I := \mu \circ_I \mu$ 等と略記すると $\{u_I, u_{II}, u_{III}\}$ が $\mathcal{F}(E_1)(3)$ の基底になる。$R_{\mathcal{C}om} := \langle u_I - u_{II}, u_{II} - u_{III}\rangle$ とすると $\mathcal{O}(E_1, R_{\mathcal{C}om}) = \mathcal{C}om$ が直ちに分かる。実は $R_{\mathcal{L}ie} := \langle u_I + u_{II} + u_{III}\rangle$ とすれば $\mathcal{O}(E_1, R_{\mathcal{L}ie}) = \mathcal{L}ie$ である。

$\mathcal{A}ssoc$ は E_1 からは作れないが $V=\mathbb{F}\mu\oplus\mathbb{F}\nu$ と 2 次元の場合の E から作れる。この E を E_2 と書く。$\mathcal{F}(E_2)(3)$ は 12 次元で、基底を以下のように名付ける。

$$\begin{aligned} &u_1 := \mu \circ_I \mu, \quad u_2 := \nu \circ_{II} \mu, \quad u_3 := \nu \circ_{II} \nu, \quad u_4 := \mu \circ_{III} \nu, \quad u_5 := \mu \circ_{III} \mu, \quad u_6 := \nu \circ_I \mu, \\ &u_7 := \nu \circ_I \nu, \quad u_8 := \mu \circ_{II} \nu, \quad u_9 := \mu \circ_{II} \mu, \quad u_{10} := \nu \circ_{III} \mu, \quad u_{11} := \nu \circ_{III} \nu, \quad u_{12} := \mu \circ_I \nu. \end{aligned}$$

ここで $R_{\mathcal{A}ssoc} := \langle u_i - u_{i+1} \mid i = 1,3,5,6,9,11\rangle$ とすれば $\mathcal{O}(E_2, R_{\mathcal{A}ssoc}) = \mathcal{A}ssoc$ である。

自由オペラッドと二次オペラッドの双対概念も必要になるのでここで導入しよう。まず

定義. $\mathfrak{S}$ 加群 M 上の**余自由余オペラッド**[*11]とは余オペラッド $\mathcal{F}^c(M)$ と $\mathfrak{S}$ 加群射 $\mathcal{C} \to \mathcal{F}^c(M)$ の組であって普遍的なもの、即ち任意の余オペラッド $\mathcal{C}$ への $\mathfrak{S}$ 加群射 $\mathcal{C} \to M$ が $\mathcal{F}^c(M)$ を経由するもののことである。

自由オペラッドと同様に $\mathcal{F}^c(M)$ も具体的に構成できる。$\mathfrak{S}$ 加群としては自由オペラッドと同じ $\mathcal{T}M$ を用いる。そして分解写像 Δ は帰納的に、まず I 上では $\Delta(\mathrm{id}) := \mathrm{id}\,\bar{\circ}\,\mathrm{id}$ と定義し、更に $\nu \in M(n)$ に対し

$$\Delta(\mu) := \mathrm{id}\,\bar{\circ}\,\mu + \mu\,\bar{\circ}\,\mathrm{id}^{\otimes n} \in I\,\bar{\circ}\,M \oplus M\,\bar{\circ}\,I \subset \mathcal{T}_1 M\,\bar{\circ}\,\mathcal{T}_1 M$$

と定めることで $\mathcal{T}_1 M$ 上で定義する。$\mathcal{T}_n = I \oplus (M\,\bar{\circ}\,\mathcal{T}_{n-1}M)$ 上では $(\mu;\nu_1,\dots,\nu_k) \in M\,\bar{\circ}\,\mathcal{T}_{n-1}M$ について

$$\Delta(\mu;\nu_1,\dots,\nu_k) := \mathrm{id}\,\bar{\circ}\,(\mu;\nu_1,\dots,\nu_k) + \Delta^+(\mu;\nu_1,\dots,\nu_k)$$

と定める。但し Δ^+ は次で定まる写像である (i と j は (1.4) の次の行で定義したもの)。

$$M\,\bar{\circ}\,\mathcal{T}_{n-1}M \xrightarrow{\mathrm{id}_M\,\bar{\circ}\,\Delta} M\,\bar{\circ}\,(\mathcal{T}_{n-1}M\,\bar{\circ}\,\mathcal{T}_{n-1}M) \simeq (M\,\bar{\circ}\,\mathcal{T}_{n-1}M)\,\bar{\circ}\,\mathcal{T}_{n-1}M \xrightarrow{j\,\bar{\circ}\,i} \mathcal{T}_n M\,\bar{\circ}\,\mathcal{T}_n M.$$

$\mathcal{F}^c(M)$ にも $\mathcal{F}(M)$ と同様にウェイトを定義することができる。$\mathcal{F}^c(M)^{(r)}$ でウェイト r の部分空間を表す。

定義. $\mathfrak{S}$ 加群 E と部分 $\mathfrak{S}$ 加群 $R \subset \mathcal{F}^c(E)^{(2)}$ が与えられたとき、(E,R) に付随する**二次余オペラッド**[*12]$\mathcal{C}(E,R)$ とは $\mathcal{F}^c(E)$ の部分余オペラッド $\mathcal{C}$ であって $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{F}^c(E) \twoheadrightarrow \mathcal{F}^c(E)^{(2)}/R$ が 0 になるもののうち普遍的なもののことである。

つまり上述のような任意の $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{F}^c(E)$ は $\mathcal{C} \to \mathcal{C}(E,R) \hookrightarrow \mathcal{F}^c(E)$ と $\mathcal{C}(E,R)$ を必ず経由する。

定義 1.2.2. 二次オペラッド $\mathcal{O} = \mathcal{O}(E,R)$ の **Koszul 双対余オペラッド** $\mathcal{O}^{¡}(E,R)$ [*13]を次の二次余オペラッドとして定義する。

$$\mathcal{O}^{¡}(E,R) := \mathcal{C}(sE, s^2R).$$

ここで s は次数付き $\mathfrak{S}$ 加群の懸垂[*14]を表している。正確には、まず次数付き $\mathfrak{S}_n$ 加群 $K = \oplus_{p\in\mathbb{Z}} K_p$ に対し $(sK)_p := K_{p-1}$ で次数付き $\mathfrak{S}_n$ 加群 sK を定義し、次に次数付き $\mathfrak{S}$ 加群 M に対して $(sM)(n) := s(M(n))$ で定義する。次数構造がない場合は $M(n) = M_0(n)$ と次数付きのものと見なす。

また上記の定義では二次 (余) オペラッドの定義を次数付き $\mathfrak{S}$ 加群に関するものに拡張して適用している。

補題. 任意の二次オペラッド $\mathcal{O} = \mathcal{O}(E,R)$ について $(\mathcal{O}^{¡})^{¡} \simeq \mathcal{O}$.

定義. $\mathcal{S} := \mathcal{E}nd_{s\mathbb{F}}$ を次数 1 に 1 次元空間 $\mathbb{F}$ がある次数付き $\mathfrak{S}$ 加群 $s\mathbb{F}$ の自己準同型オペラッド (例 1.1.2(1)) とする。同様に $\mathcal{S}^c := \mathcal{E}nd^c_{s\mathbb{F}}$ を自己準同型余オペラッドとする。

[*11] cofree cooperad の訳語です。
[*12] quadratic cooperad の訳語です。
[*13] この記号は [LV12] によるもので、180 度回転した ! は anti-shriek と発音します。
[*14] shift の s ではなく suspension の s です。

次数付き $\mathfrak{S}$ 加群の定義をしてないので導出は省くが、実は右 $\mathfrak{S}_n$ 表現として

$$\mathcal{S}(n) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}((s\mathbb{F})^{\otimes n}, s\mathbb{F}) \simeq s^{1-n}\mathrm{sgn}_{\mathfrak{S}_n},$$

つまり次数 $1-n$ に集中している符号表現になっている。

定義. (1) $\mathfrak{S}$ 加群 M, N の **Hadamard 積** $M \otimes_H N$ とは $(M \otimes_H N)(n) := M(n) \otimes N(n)$ を対角 $\mathfrak{S}_n$ 作用で右表現としてできる $\mathfrak{S}$ 加群のことである。
(2) オペラッド $\mathcal{O}, \mathcal{P}$ の Hadamard 積とは $\mathfrak{S}$ 加群としての Hadamard 積 $\mathcal{O} \otimes_H \mathcal{P}$ に自然にオペラッド構造を入れたもの[*15]である。同様に余オペラッドの Hadamard 積も定義できる。
(3) オペラッド $\mathcal{O}$ の**オペラッド的懸垂**[*16]とはオペラッドの Hadamard 積 $\mathcal{S} \otimes_H \mathcal{O}$ のことである。同様に余オペラッド $\mathcal{C}$ の余オペラッド的懸垂とは余オペラッドの Hadamard 積 $\mathcal{S}^c \otimes_H \mathcal{O}$ のこと。

定義 1.2.3. 二次オペラッド $\mathcal{O}(E,R)$ の **Koszul 双対オペラッド**[*17]$\mathcal{O}^!(E,R)$ を次で定義する。

$$\mathcal{O}^!(E,R) := (\mathcal{S}^c \otimes_H \mathcal{O}¡)^*.$$

ここで $*$ は線形双対を表す。混乱がなければ (E,R) を省略して $\mathcal{O}^!$ 等と書くことにする。

例 1.2.4 ([GiK94, (2.1.11)])**.** 以下の (有名な) オペラッドの同型が成り立つ。

$$\mathcal{C}om^! \simeq \mathcal{L}ie, \quad \mathcal{A}ssoc^! \simeq \mathcal{A}ssoc, \quad \mathcal{L}ie^! \simeq \mathcal{C}om.$$

証明は二次オペラッドとしての記述 (例 1.2.1) と比較的簡単な対称群の表現の計算による。

実は一般に

定理 ([GiK94])**.** $\mathcal{O} = \mathcal{O}(E,R)$ が $E(0) = 0$ かつ各 $E(n)$ が有限次元である二次オペラッドならば

$$(\mathcal{O}^!)^! \simeq \mathcal{O}.$$

1.3 (余) バー構成

[GiK94] は結合代数のバー分解のオペラッド類似を導入した。その話を [LV12, §6.6] に従って紹介する。

“オペラッドの分解”はやはり複体的なオペラッドを用いてなされる。そのため注意 1.1.4 で触れたように $\mathfrak{S}$ 加群の圏 $\mathfrak{S}$-Mod を dg $\mathfrak{S}$ 加群の圏 dg $\mathfrak{S}$-Mod に代える必要がある。

dg $\mathfrak{S}_n$ 加群 $M(n)$ とは次数付き $\mathfrak{S}_n$ 加群 $M(n) = \oplus_{p\in\mathbb{Z}} M_p(n)$ と次数 (-1) の微分 $d : M_p(n) \to M_{p-1}(n)$ の組である。**dg $\mathfrak{S}$ 加群** (M,d) は dg $\mathfrak{S}_n$ 加群の族のことである。$H_*(M)$ でホモロジー (次数付き $\mathfrak{S}$ 加群) を表す。

dg $\mathfrak{S}$ 加群の圏 dg $\mathfrak{S}$-Mod は補題 1.1.1 と同様にモノイダル圏の構造 (dg $\mathfrak{S}$-Mod$, \circ, I$) を持つ。そのモノイド対象 $(\mathcal{O}, \gamma, \eta)$ を **dg オペラッド**と呼ぶ。つまり dg $\mathfrak{S}$ 加群 $(\mathcal{O}, d)$ に次数付きオペラッドの構造があり、また $\gamma : \mathcal{O} \circ \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ と $\eta : I \to \mathcal{O}$ は次数 0 の dg $\mathfrak{S}$ 加群射で結合則と単位則を満たす。

同様に **dg 余オペラッド** $(\mathcal{C}, \Delta, \varepsilon)$ が定義できる。

バー構成は次のような函手として定義される。

$$\mathsf{B} : \{\text{ 添加 dg オペラッド }\} \longrightarrow \{\text{ 余添加 dg 余オペラッド }\}$$

ここで**添加 dg オペラッド**[*18]とは dg オペラッド $\mathcal{O}$ と次数 0 の dg オペラッド射 $\varepsilon : \mathcal{O} \to I$ の組のことである。同様に**余添加 dg 余オペラッド**[*19]とは dg 余オペラッド $\mathcal{C}$ と次数 0 の dg 余オペラッド射 $\eta : I \to \mathcal{C}$ の組のこと。

---

*15 $\mathfrak{S}$ 加群を次数付きにした場合は符号が入る。
*16 operadic suspension の訳語です。オペラッド $\mathcal{O}$ の $\mathfrak{S}$ 加群としての懸垂 $s\mathcal{O}$ はオペラッドになるとは限りません。
*17 [GiK94] では quadratic dual operad と呼ばれています。
*18 augmented dg operad の訳語です。
*19 coaugmented dg cooperad の訳語です。

ここではバー構成の双対である**余バー構成**

$$\Omega : \{\text{ 余添加 dg 余オペラッド }\} \longrightarrow \{\text{ 添加 dg オペラッド }\}$$

だけを説明する。$\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \Delta, \varepsilon, \eta)$ を余添加 dg 余オペラッドとして、その余添加余イデアル[*20]を $\overline{\mathcal{C}} := \mathrm{coker}(\eta : I \to \mathcal{C})$ と表す。オペラッドとしては

$$\Omega(\mathcal{C}) \ := \ \mathcal{F}(s^{-1}\overline{\mathcal{C}})$$

と定義する。次数構造は $\mathcal{C}$ の次数構造と自由オペラッドの構成からから自然に定まる。微分はまず $d_2 : \mathbb{F}s^{-1} \otimes \overline{\mathcal{C}} \to \mathcal{F}(s^{-1}\overline{\mathcal{C}})$ を

$$\begin{aligned}\mathbb{F}s^{-1} \otimes \overline{\mathcal{C}} &\xrightarrow{\Delta_s \otimes \Delta_{(1)}} (\mathbb{F}s^{-1} \otimes \mathbb{F}s^{-1}) \otimes (\overline{\mathcal{C}} \circ_{(1)} \overline{\mathcal{C}}) \\ &\xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}} (\mathbb{F}s^{-1} \otimes \overline{\mathcal{C}}) \circ_{(1)} (\mathbb{F}s^{-1} \otimes \overline{\mathcal{C}}) \ \simeq \ \mathcal{F}(s^{-1}\overline{\mathcal{C}})^{(2)} \hookrightarrow \mathcal{F}(s^{-1}\overline{\mathcal{C}})\end{aligned}$$

で定義する。$d_2^2 = 0$ が言えるので $\mathcal{F}(s^{-1}\overline{\mathcal{C}}, d_2)$ は dg オペラッドである。次に d_1 を $\mathcal{C}$ の微分 $d_{\mathcal{C}}$ から自然に誘導される $\Omega(\mathcal{C})$ 上の微分とする。d_1 と d_2 が反可換であることが分かるので、最終的に dg オペラッドとして

$$\Omega(\mathcal{C}) \ := \ \big(\mathcal{F}(s^{-1}\overline{\mathcal{C}}), d_1 + d_2\big)$$

と定義できる。$\Omega(\mathcal{C})$ の添加写像の説明は省略する。

実はこの構成はグラフを用いた説明もできるがここでは触れない。[LV12, §6.5.2] を参照のこと。

バー構成については何も説明していないが、次の主張が成立する。

定理. 函手 Ω と B は随伴である。

$$\mathsf{B} : \{\text{ 添加 dg オペラッド }\} \rightleftharpoons \{\text{ 余添加 dg 余オペラッド }\} : \Omega$$

余バー構成を二次余オペラッドに適用すると次のような主張が得られる。

命題 ([GiK94], [LV12, Prop. 7.3.2])**.** $\mathcal{C} = \mathcal{C}(E, R)$ を二次余オペラッドとし、$\mathcal{C}^{\text{¡}} = \mathcal{O}(s^{-1}E, s^{-2}R)$ を Koszul 双対オペラッド[*21]とする。自然な全射 $p : \Omega(\mathcal{C}) \twoheadrightarrow \mathcal{C}^{\text{¡}}$ があって、それは次のようなオペラッドの同型を与える。

$$p : \ H_0(\Omega(\mathcal{C})) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{C}^{\text{¡}}.$$

ホモロジーを取る前から p が擬同型を与えるのであれば、それは余バー分解のオペラッド的拡張だと思える。そこで

定義. $p : \Omega(\mathcal{O}^{\text{¡}}) \twoheadrightarrow \mathcal{O}$ が擬同型となるような二次オペラッド $\mathcal{O}$ のことを **Koszul オペラッド**と呼ぶ。

Koszul オペラッドには様々な特徴づけがあって、例えば「バー構成の誘導する単射 $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathsf{B}(\mathcal{P})$ が dg 余オペラッドの擬同型」という条件も同値である。

定理. $\mathcal{C}om, \mathcal{A}ssoc, \mathcal{L}ie$ は全て Koszul オペラッドである。

これらは直接高次ホモロジーが消えることを確認して証明できる (が簡単ではない)。現在では様々なオペラッドについて Koszul 性が判定されている。その方法論は [LV12, Chap 8] を参照。

定義. Koszul オペラッド $\mathcal{O}$ に対し $\Omega(\mathcal{O}^{\text{¡}})$ を **Koszul 分解**と呼ぶ。

1.4 ホモトピー $\mathcal{O}$ 代数

$C_\infty, A_\infty, L_\infty$ 代数と呼ばれる強ホモトピー代数の族がある。余バー構成によってこれらの代数は Koszul オペラッド上のホモトピー代数に拡張される。このことを説明してオペラッドの解説を終えよう。

$\mathcal{O}$ を Koszul オペラッドとする。Koszul 分解 $\Omega(\mathcal{O}^{\text{¡}})$ は dg オペラッドであることに注意して

[*20] coaugmentation coideal の訳語です。
[*21] ここでは定義 1.2.3 ではなく定義 1.2.2 の余オペラッド版を指しています。

定義. $\Omega(\mathcal{O}^{¡})$ 上の代数 A のことを**ホモトピー $\mathcal{O}$ 代数**もしくは **$\mathcal{O}_\infty$ 代数**と呼ぶ。

つまり $\mathcal{O}_\infty$ 代数とは dg 線形空間 A と dg オペラッド射 $\Omega(\mathcal{O}^{¡}) \longrightarrow \mathcal{E}nd_A$ の組のことである。特に $\mathcal{O}$ 代数 A は $\Omega(\mathcal{O}^{¡}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O} \to \mathcal{E}nd_A$ より $\mathcal{O}_\infty$ 代数である。

定理. $\mathcal{O} = \mathcal{C}om, \mathcal{A}ssoc, \mathcal{L}ie$ の場合は $\mathcal{O}_\infty$ 代数は $C_\infty, A_\infty, L_\infty$ 代数と一致する。

2 モジュラーオペラッド

通常のオペラッドは代数操作の「種数 0 のグラフに対応した」合成を表していると思える。次副節で扱うモジュラーオペラッドは「種数 1 以上のグラフにも対応した」合成を表すものである。その説明のためグラフに関する用語の説明から始める。

2.1 グラフに関する用語集

本稿ではいわゆる half edge を使うグラフの定義を用いる。**有限集合 S の分割**とは空でない有限集合 T への全射 $\lambda : S \twoheadrightarrow T$ のことである。T の各元のことを λ の**ブロック**と呼び、$s_1, s_2 \in S$ は $\lambda(s_1) = \lambda(s_2)$ を満たすとき「λ の同じブロックに属する」と言うことにする。

定義 2.1.1. (1) **グラフ** Γ とは有限集合 $\mathrm{Flag}(\Gamma)$ と $\mathrm{Flag}(\Gamma)$ の上の対合 σ 及び $\mathrm{Flag}(\Gamma)$ の分割 λ からなる三つ組 $(\mathrm{Flag}(\Gamma), \sigma, \lambda)$ のことである。

(2) $\mathrm{Flag}(\Gamma)$ の元を Γ の flag(もしくは half-edge) と呼ぶ。

(3) λ のブロックを Γ の**頂点**と呼ぶ。Γ の頂点の集合を $\mathrm{Vert}(\Gamma)$ と書く。つまり $\lambda : \mathrm{Flag}(\Gamma) \twoheadrightarrow \mathrm{Vert}(\Gamma)$ である。頂点 $v \in \mathrm{Vert}(\Gamma)$ に対し $\mathrm{Leg}(v) := \lambda^{-1}(v) \subset \mathrm{Flag}(\Gamma)$ と書き、$\mathrm{Leg}(v)$ の元を **v の足**と呼ぶ。また $n(v) := |\mathrm{Leg}(v)|$ を頂点 v の**価数**と呼ぶ。

(4) 対合 σ の作用で 2 サイクルをなす flag の組 (a, b) を Γ の**辺**と呼びその集合を $\mathrm{Edge}(\Gamma)$ と書く。σ の固定点を **Γ の足**と呼び $\mathrm{Leg}(\Gamma)$ と書く。また $n(\Gamma) := |\mathrm{Leg}(\Gamma)|$ とする。

各 flag は Γ の足か辺のどちらかなので次の等式が成り立つ。

$$\sum_{v \in \mathrm{Vert}(\Gamma)} n(v) = 2\,|\mathrm{Edge}(\Gamma)| + n(\Gamma). \tag{2.1}$$

グラフ $\Gamma = (\mathrm{Flag}(\Gamma), \sigma, \lambda)$ に対し以下のようにして 1 次元有限セル複体 $|\Gamma|$ を作ることができる。各 flag に対し区間 $[0, 1]$ を用意し次の規則で貼り合わせる：各頂点 $v \in \mathrm{Vert}(\Gamma)$ について $\mathrm{Leg}(v)$ に属する flag 達の $0 \in [0, 1]$ を一点に貼り合わせる。また Γ の各辺に属する 2 つの flag について $1 \in [0, 1]$ を一点に貼り合わせる。

定義. (1) $|\Gamma|$ のことを Γ の**幾何学的実現**と呼ぶ。

(2) $|\Gamma|$ が連結の時 Γ は連結だという。

図 1 は $\mathrm{Flag}(\Gamma) = \{1, \ldots, 9\}$, $\sigma = (46)(57)$, $\lambda = \{1, \ldots, 5\} \sqcup \{6, 7, 8, 9\}$ で与えられる Γ [*22]の幾何学的実現である。

定義. (1) 2 つのグラフ $\Gamma_i = (\mathrm{Flag}(\Gamma_i), \sigma_i, \lambda_i)$ $(i = 1, 2)$ の間の**写像** $\varphi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ とは写像 $\varphi : \mathrm{Flag}(\Gamma_1) \to \mathrm{Flag}(\Gamma_2)$ であって対合と分割に関して整合的なもの、即ち $\varphi \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \varphi$ かつ $\lambda_1(f) = \lambda_1(f')$ なら $\lambda_2(\varphi(f)) = \lambda_2(\varphi(f'))$ となるもののことである。

(2) グラフの**同型**をグラフの写像から自然に定める。

最後にモジュラーオペラッドの定義に必要な安定グラフの概念を導入する。

[*22] [GeK98] によるとロシア人はこの形のグラフをスプートニクと呼ぶ。

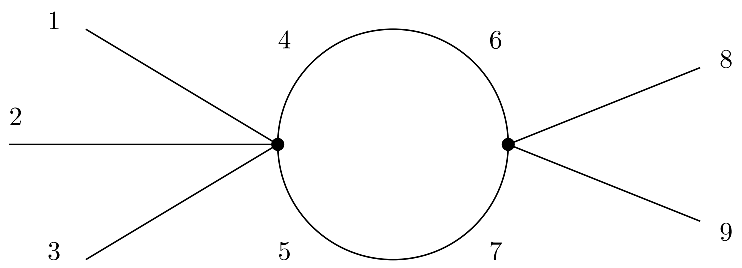

図 1　Γ の幾何学的実現

定義. (1) $(g,n)\in\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ は $(2g-2)+n>0$ のとき**安定**であると言う。
(2) **安定グラフ**とはグラフ Γ と写像 $g:\mathrm{Vert}(\Gamma)\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の組 (Γ,g) であって、各 $v\in\mathrm{Vert}(\Gamma)$ について $(g(v),n(v))$ が安定であるもののことである。
(3) 安定グラフ Γ の**種数** $g(\Gamma)$ を次の式で定義する。

$$g(\Gamma):=\dim H_1(|\Gamma|)+\sum_{v\in\mathrm{Vert}(\Gamma)}g(v). \tag{2.2}$$

2.2　モジュラーオペラッド

モジュラーオペラッドは [GeK98] で Feynman 変換によるグラフ複体の解析を遂行するために導入された。前副節でも触れたようにオペラッドの高種数版とも思える。

安定 $\mathfrak{S}$ 加群とは $\mathbb{F}$ 線形空間の族 $V=\{V((g,n))\mid g,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ であって各 $V((g,n))$ に $\mathfrak{S}_n$ 作用がありまた (g,n) が安定でなければ $V((g,n))=0$ なるものである。

安定 $\mathfrak{S}$ 加群 V と有限集合 I に対し、$n:=|I|$ として線形空間 $V((g,I))$ を

$$V((g,I))\ :=\ [\oplus V((g,n))]_{\mathfrak{S}_n}$$

と定める。但し直和は全ての全単射 $\{1,\dots,n\}\to I$ にわたる。

安定グラフ $\Gamma=(\Gamma,g)$ と安定 $\mathfrak{S}$ 加群 V に対し線形空間 $V((\Gamma))$ を次で定義する。

$$V((\Gamma)):=\otimes_{v\in\mathrm{Vert}(\Gamma)}V((g(v),\mathrm{Flag}(v))).$$

モジュラーオペラッドは安定 $\mathfrak{S}$ 加群のなす圏上の自己函手[*23]$V\mapsto\mathrm{colim}_\Gamma V(\Gamma)$ を用いて定義される。colim の説明のために安定グラフの圏を導入しよう。

安定グラフ (Γ,g) とその辺 $e\in\mathrm{Edge}(\Gamma)$ に対し、e をつぶすことで新しいグラフ Γ_e を作ることができる。$g_e:\Gamma_e\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $g:\Gamma\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$ から自然に定義する[*24]ことで (Γ_e,g_e) は安定グラフになる[*25]。この操作 $\Gamma\to\Gamma_e$ を安定グラフの**縮約**[*26]と呼ぶ。

$(g,n)\in\mathbb{Z}^2$ に対し $\mathcal{SG}((g,n))$ を次のような圏とする。対象は $g(\Gamma)=g$ の安定グラフ (Γ,g) と全単射 $\varphi:\{1,\dots,n\}\to\mathrm{Leg}(\Gamma)$ の組 (Γ,g,φ) であり、射は縮約から得られる写像 $(\Gamma,g,\varphi)\to(\Gamma_e,g,\varphi)$ とする。

命題 2.2.1. 安定 $\mathfrak{S}$ 加群のなす (加法) 圏からそれ自身への自己函手 $\mathbb{M}$ を

$$\mathbb{M}V((g,n)):=\operatorname*{colim}_{G\in\mathrm{Iso}\,\mathcal{SG}((g.n))}V((G))$$

[*23] endfunctor の訳語です。
[*24] $e=\{f,f'\}\in\mathrm{Flag}(\Gamma)$ なら、Γ の分割を $\lambda:\mathrm{Flag}(\Gamma)\to\mathrm{Vert}(\Gamma)$ として、新しくできた頂点は $v=\lambda(f)$ と $v'=\lambda(f')$ を 1 点 w にしたものだから、$g'(w):=g(v)+g(v')$, 他の頂点については $g_e=g$ とすればよい。
[*25] 特に $g(\Gamma_e)=g(\Gamma)$.
[*26] contraction の訳語です。

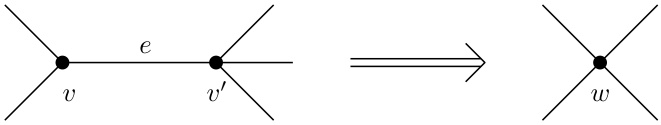

図 2　縮約

で定義する。但し $\mathrm{Iso}\,\mathcal{SG}((g,n))$ は $\mathcal{SG}((g,n))$ の同型射のなす部分圏であり、colim は圏論的余極限[*27]。函手 $\mathbb{M}$ は [Mac98] の意味でモナド[*28]である。但しモナド構造 $(\mathbb{M},\mu,\eta)$ の積 $\mu:\mathbb{M}^2\to\mathbb{M}$ は縮約から誘導される自然変換。単位射 $\eta_V:V\to\mathbb{M}(V)$ は頂点が 1 点で足が n 本のグラフ Γ_n^1 を考えて $V\to V((\Gamma_n^1))\hookrightarrow\mathbb{M}V$ とする。

ここでモナドに関する諸定義を思い出しておく。

定義. (1) 圏 $\mathcal{C}$ 上の自己函手 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ が**モナド**であるとは、自然変換 $\mu:F^2\to F$ 及び $\eta:\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\to F$ があって結合則及び単位則を満たすもののことである。
(2) **モナド** $(F:\mathcal{C}\to\mathcal{C},\mu,\eta)$ **上の代数** (C,γ) とは対象 $C\in\mathcal{C}$ と射 $\gamma:F(C)\to C$ であって $\gamma\circ F(\gamma)=\gamma\circ\mu_C:F^2(C)\to C$ 及び $\gamma\circ\eta_C=\mathrm{id}_C$ を満たすもののことである。

定義 2.2.2. モジュラーオペラッドとはモナド $\mathbb{M}$ 上の代数のことである。

注意. (1) $\mathbb{M}V(g,n)\simeq\oplus_{\Gamma\in[\mathcal{SG}(g,n)]}V((\Gamma))_{\mathrm{Aut}(\Gamma)}$ とも書ける。ここで $[\mathcal{SG}(g,n)]$ は安定グラフの同型類の集合、下添え字の $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ は余不変部分を表す。
(2) 安定 $\mathfrak{S}$ 加群 V 上のモジュラーオペラッドの構造は 2 種類の写像で記述される。

$$\begin{aligned}\circ_i:\ &V((g,n))\otimes V((g',n'))\longrightarrow V((g+g',n+n'-2)),\\ \xi_{i,j}:\ &V((g,n))\longrightarrow V((g+1,n-2))\end{aligned}$$

例. モジュラーオペラッドの自然な例は点付き代数曲線のモジュライ空間の Deligne-Mumford コンパクト化 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ から現れる。しかし正確に述べるには安定 $\mathfrak{S}$ 加群の定義を少し拡張して、$\mathbb{F}$ 線形空間の圏を対称モノイダル圏に代える必要がある。特に Deligne-Mumford スタックの圏 (位相空間の圏と思えば良い) でモジュラーオペラッドを定義すると、$\overline{\mathcal{M}}((g,n)):=\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ がその例になっている。構造射 $\mu_{\overline{\mathcal{M}}}$ は点での貼り合わせに対応する。

2.3　種数 0 のモジュラーオペラッド

抽象的な定義が続いたので、種数 0 の場合にモジュラーオペラッドを制限することで状況を理解してみよう。

まず $\mathcal{SG}((0,n))$ を考えると安定性条件より $n>2$. 種数の定義式 (2.2) より $(\Gamma,g,\varphi)\in\mathcal{SG}((0,n))$ は足が n 本あるグラフ Γ であって $H_1(\Gamma)$ が自明であるもの、即ち "ループがないもの" と $g(v)=0$ $(\forall v\in\mathrm{Vert}(\Gamma))$ なる $g:\mathrm{Vert}(\Gamma)\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の組である。次に安定 $\mathfrak{S}$ 加群 V は種数 0 だと $\mathfrak{S}_n$ 加群の列 $\{V(n)\}_{n>2}$ だけ考えればよい。

定義 2.3.1. 巡回オペラッド[*29]$\mathcal{O}$ とはオペラッドであって各 $\mathcal{O}(n)$ への $\mathfrak{S}_n$ 作用が $\mathfrak{S}_{n+1}=\langle\mathfrak{S}_n,\tau_n:=(0,1,\ldots,n)\rangle$ の作用に拡張されていて、任意の $a\in\mathcal{O}(m)$、$b\in\mathcal{O}(n)$ について

$$(a\circ_m b)^*=b^*\circ_1 a^*$$

が成立するものである。ただし $a^*:=\tau_m a\in\mathcal{O}(m)$。

例. オペラッド $\mathcal{C}om,\mathcal{A}ssoc,\mathcal{L}ie$ はどれも巡回オペラッドの構造を持つ。

[*27] 函手 $F:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ の余極限 $\mathrm{colim}_{x\in\mathcal{D}}F(x)$ とは $\mathcal{C}$ の対象 C と射のクラス $\{\iota_y:F(y)\to C\}_{y\in\mathcal{D}}$ であって $\iota_z F(f)=\iota_y$ が任意の $y,z\in\mathcal{D}$ 及び $f:y\to z$ について成り立つもののうち普遍的なもののことである。
[*28] monad の訳語です。triple とも呼ばれます。
[*29] cyclic operad の訳語です。

命題. モジュラーオペラッド $\mathcal{O}$ の種数 0 部分 $\{\mathcal{O}((0,n))\}$ は巡回オペラッドである。

定義. 巡回オペラッド $\mathcal{O}$ の**モジュラー閉包** $\overline{\mathcal{O}}$ を忘却函手 (モジュラーオペラッド)$\longmapsto$(巡回オペラッド) の左随伴函手で定義する。

命題. モジュラー閉包はいつでも存在する。

例. $\mathcal{C}om_{\mathrm{cyc}}$ を可換オペラッドを巡回オペラッドとみなしたものとする。$\mathcal{C}om_{\mathrm{cyc}}$ 上の代数は可換 Frobenius 代数に他ならない。そのモジュラー閉包 $\overline{\mathcal{C}om}_{\mathrm{cyc}}$ は $\overline{\mathcal{C}om}_{\mathrm{cyc}}((g,n)) = \mathbb{F}$(自明表現) で与えられる。

3　グラフ複体

この節の目的は Kontsevich による無限次元 Lie 代数と曲線のモジュライ空間のコホモロジーとの関係に関する定理 [K93, K94] を紹介することである。両者を結び付ける役割をするのが表題のグラフ複体である。そしてこれはオペラッド、特に Koszul 分解に深いレベルで関係している。

3.1　リボングラフ

定義 3.1.1. **リボングラフ**とは各頂点 v に対し足の集合 $\mathrm{Leg}(v)$ 上の巡回順序 o_v が与えられているグラフ Γ のこと、つまり組 $\left(\Gamma, \{o_v\}_{v\in\mathrm{Vert}(\Gamma)}\right)$ のことである。

注意 3.1.2. リボングラフ Γ は各頂点について足の巡回順序が定められているので、(幾何学的実現を考えて) 各頂点の近傍を平面に埋め込み、更に各 half-edge (flag) を太らせてリボンにすることができる。リボンの裾を向き付けを保つように貼り合わせることで、元のグラフが埋め込まれている境界付き有向曲面 $\mathrm{Surf}(\Gamma)$ を得る。このような事情で「リボングラフ」と呼ばれている。

リボングラフ $\left(\Gamma, \{o_v\}_{v\in\mathrm{Vert}(\Gamma)}\right)$ の Vert, Edge 等は underlying graph Γ の Vert, Edge 等で定める。
連結なリボングラフ $\left(\Gamma, \{o_v\}_{v\in\mathrm{Vert}(\Gamma)}\right)$ とは Γ が連結なもののこととする。
これ以降、混乱がなさそうならば、リボングラフ $\left(\Gamma, \{o_v\}_{v\in\mathrm{Vert}(\Gamma)}\right)$ のことを単に Γ と書く。

定義 3.1.3. リボングラフ Γ の**向き付け**を頂点集合 $\mathrm{Vert}(\Gamma)$ 上の全順序と各辺 $e \in \mathrm{Edge}(\Gamma)$ の向き付けの組を「偶数回変更を加えると一致する」という同値関係に関して同値類をとったもの[*30]

定義 3.1.4. (1) 2 つの向き付けリボングラフが同型であるとは、underlying graph の同型があってそれがリボン構造と向き付けを保つときのことである。
(2) リボングラフ Γ の自己同型群を $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ と書く。

リボングラフ Γ とその辺 $e \in \mathrm{Edge}(\Gamma)$ に対し、Γ/e で "e を頂点に潰して得られる" [*31]リボングラフを表す。

リボングラフ Γ が向き付けられていれば Γ/e にも向き付けが定まる。$\mathrm{Vert}(\Gamma/e)$ 上の順序だけ述べることにすると、もし e の向き付けが 1 番目の頂点から 2 番目の頂点に向かうものであれば、潰してできる新しい頂点を $\mathrm{Vert}(\Gamma/e)$ の 1 番目にする。他の場合は $\mathrm{Vert}(\Gamma)$ の全順序を適当に取り直すことで上述の場合に帰着される。

操作 $\Gamma \to \Gamma/e$ を (Γ の e での) **縮約**と呼ぶ。

[*30] 次のように言ったほうが分かりやすい方もいらっしゃると思います: 頂点集合 $\mathrm{Vert}(\Gamma)$ 上の全順序 ord と各辺 $e \in \mathrm{Edge}(\Gamma)$ の向き付け $or_e \in \{\pm 1\}$ の組 $\left(ord, \{or_e\}_{e\in\mathrm{Edge}(\Gamma)}\right)$ 全体の集合 O_Γ を考える。$s, t \in O_\Gamma$ は一か所だけ違うときに連接であるという。つまり $s = \left(ord, \{or_e\}_{e\in\mathrm{Edge}(\Gamma)}\right)$, $t = \left(ord', \{or'_e\}_{e\in\mathrm{Edge}(\Gamma)}\right)$ としたときに $ord \neq ord'$ かつ $or_e = or'_e$ $(\forall e \in \mathrm{Edge}(\Gamma))$, 又は $ord = ord'$ かつ $\exists 1\, f \in \mathrm{Edge}(\Gamma)$, $or_f \neq or'_f$, $or_e = or'_e$ '$(\forall e \neq f)$ の時 s, t は隣接であるという。そして O_Γ 上の同値関係 $s \sim t$ を $\exists u \in O_\Gamma$, s, u と u, t がそれぞれ連接として定義する。$O_\Gamma/\sim$ の元を Γ の向き付けと呼ぶ。

[*31] まず underlying graph について詳しく述べると、$\Gamma = (F = \mathrm{Flag}(\Gamma), \sigma, \lambda)$ 及び $e = \{f_1, f_2\} \subset F$ について、Γ/e の flag の集合は $F' := F \setminus \{f_1, f_2\}$, 対合は σ を F' に制限したもの、F' の分割 λ' は $v_i := \lambda(f_i) \in \mathrm{Vert}(\Gamma)$ として $\lambda' := \left(F' \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Vert}(\Gamma) \twoheadrightarrow \mathrm{Vert}(\Gamma)/(v_1 \sim v_2)\right)$ で与えられる。次にリボン構造について、同じ記号で e でつぶしてできる頂点を v と書けば、v_i の各巡回置換から自然に v の巡回置換が得られる。

3.2 グラフ複体

これ以降は $\mathrm{Leg}(\Gamma)=\emptyset$ かつ全ての頂点の価数は 3 以上 のグラフ Γ のみ考えることにする。そしてこの条件 を満たす向き付けリボングラフのことを単にリボングラフと呼ぶことにする。

リボングラフ Γ に対しその逆の向き付けが入ったリボングラフを $\Gamma^{\dagger}$ と書く。

定義 3.2.1. リボングラフの同型類の張る線形空間を関係 $\Gamma^{\dagger}=-\Gamma$ で割った線形空間を $\mathcal{RG}$ と書く。辺の本数 $|\mathrm{Edge}(\Gamma)|$ を次数付けにすることで Γ は次数付き線形空間になる。それを $\mathcal{RG}_{\bullet}$ と書く。

以下リボングラフと対応する $\mathcal{RG}_{\bullet}$ の元を区別せず Γ 等と書くことにする。

命題. $\mathcal{RG}_{\bullet}$ 上の線形写像 ∂ を

$$\partial(\Gamma) := \sum_{e\in\mathrm{Edge}(\Gamma)}\Gamma/e$$

で定義すると ∂ は微分になり、$(\mathcal{RG}_{\bullet},\partial)$ は複体になる。

定義 3.2.2. 複体 $(\mathcal{RG}_{\bullet},\partial)$ を *(リボン)* **グラフ複体**と呼ぶ。そのホモロジー $H\mathcal{RG}_{\bullet}$ を**グラフホモロジー**と呼ぶ。$H\mathcal{RG}_{\bullet}$ の（次数付き）線形双対を $H\mathcal{RG}^{\bullet}$ と書き**グラフコホモロジー**と呼ぶ。

3.3 グラフホモロジーとオペラッド

連結なグラフたちは $(\mathcal{RG}_{\bullet},\partial)$ の部分複体 $\mathcal{RG}_{\mathrm{conn}}$ をなす。そのホモロジーの線形双対を $H\mathcal{RG}^{\bullet}_{\mathrm{conn}}$ と書く。

定理 3.3.1. 次のような複体の同型がある。

$$H\mathcal{RG}^{\bullet}_{\mathrm{conn}} \simeq \bigoplus_{g\geq 0}\overline{\mathcal{S}^{-1}\otimes_{H}\Omega\mathcal{A}ssoc^{\text{!`}}}\,((g,0)).$$

証明は両辺の具体的な記述の比較してなされる。モジュラー閉包はグラフ的な構成の仕方があり、また $\Omega\mathcal{A}ssoc^{\text{!`}}$ は結合代数のバー複体に対応するオペラッドなのでやはりグラフを用いて書き下せて、比較が可能になる。

3.4 Kontsevich の無限次元 Lie 代数に関する定理

Chevalley-Eilenberg 複体を思い出そう。Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対し、$\bigwedge_{\bullet}(\mathfrak{g})$ で $\mathfrak{g}$ の外積代数に $\deg x;=1$ $(x\in\mathfrak{g})$ で次数を入れたものを表す。$\mathfrak{g}$ の Chevalley-Eilenberg 複体とは、$\bigwedge_{\bullet}$ 上の

$$d(x_1\wedge\cdots\wedge x_n) := \sum_{1\leq i<j\leq n}(-1)^{i+j-1}[x_i,x_j]\wedge x_1\wedge\cdots\widehat{x}_i\wedge\cdots\widehat{x}_j\wedge\cdots\wedge x_n$$

で定まる微分 $d:\bigwedge_n(\mathfrak{g})\to\bigwedge_{n-1}(\mathfrak{g})$ で与えられる複体 $C_{\bullet}(\mathfrak{g}):=(\bigwedge_{\bullet}(\mathfrak{g}),d)$ のことであった。このホモロジーを $H^{\mathrm{CE}}_{\bullet}(\mathfrak{g})$ と書く。

さてグラフ複体と関係する無限次元 Lie 代数 a_{∞} を導入しよう。$p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n$ の生成する単位元のない自由結合代数を考える。その上の導分 θ であって

$$\theta\big(\textstyle\sum_{i=1}^{n}(p_iq_i-q_ip_i)\big)=0$$

を満たすもの達がなす Lie 代数を a_n で表す。自然な単射 $a_n\hookrightarrow a_{n+1}$ で帰納系ができるので、その極限として無限次元 Lie 代数 $a_{\infty}:=\varinjlim a_n$ を導入する。

定理 3.4.1 ([K93, K94])**.** $H^{|CE}_{\bullet}(a_{\infty})$ は可換かつ余可換な双代数の構造をもち、その原始部分 $\mathrm{Prim}\,H_{\mathrm{CE}}(a_{\infty})$ は次のような記述を持つ。

$$\mathrm{Prim}\,H^{\mathrm{CE}}_{k}(a_{\infty}) \simeq \mathrm{Prim}\,H^{\mathrm{CE}}_{k}(\mathfrak{sp}_{\infty})\oplus\bigoplus_{s>,\,2g-2+s>0}H_{2g+s-1+k}(\mathcal{RG}^{g,s}_{\bullet};\mathbb{Q}).$$

ここで $\mathcal{RG}^{g,s}_{\bullet}$ は $\mathrm{Surf}(\Gamma)$(注意 3.1.2 を参照) が種数 g で境界を s 個もつ曲面のなす部分複体である。

3.5 リボングラフと Riemann 面

相異なる点 $\{p_1,\dots,p_s\}$ が付いた滑らかで向き付きのある種数 g の曲面 $\Sigma_{g,s}$ を 1 つ取る。安定性条件 $2g-2+s>0$ を仮定する。$\Sigma_{g,s}^{-} := \Sigma_{g,s}\setminus\{p_1,\dots,p_s\}$ とする。有限面積の完備双曲曲面 X と同相写像 $f\colon X\to\Sigma_{g,s}^{-}$ のホモトピー類 $[f]$ の組 $(X,[f])$ を X のマーク付け[*32]と呼ぶ。マーク付き曲面 $(X,[f])$ と $(Y,[g])$ の同値性を、等長写像 $h\colon X\to Y$ があって $g\circ h\colon X\to Y\to\Sigma_{g,s}^{-}$ と f がホモトピーを除いて一致することと定める。**Teichmüller 空間** $\mathcal{T}_{g,s}$ とはマーク付き曲面の同値類の全体のなす集合であった。これには Finchel-Nielson 座標から定まる位相が入り、その位相に関して同相写像 $\mathcal{T}_{g,s}\xrightarrow{\sim}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0})^{3g-3}$ が存在する。

$(X,[f])\in\mathcal{T}_{g,s}$ の**装飾**[*33]とは X の各穴[*34]の周りの界線[*35]を指定することである。穴の周りの**界線**とは単純閉測地線であって X を 2 つの連結部分に分け、そのうち 1 つは穴を抜いた円盤になっているものである。$\mathcal{T}_{g,s}^{\mathrm{dec}}$ で装飾付きのマーク付き曲面の同値類の集合を $\mathcal{T}_{g,s}^{\mathrm{dec}}$ と書き**装飾付き Teichmüller 空間**と呼ぶ。

装飾を忘れる写像 $\mathcal{T}_{g,s}^{\mathrm{dec}}\twoheadrightarrow\mathcal{T}_{g,s}$ のファイバーは各穴の周りの界線の集合、つまり正の実数の組 $(a_1,\dots,a_s)$ の集合 $(\mathbb{R}_{>0})^s$ と同一視できる。Penner[P87] により実は同相写像 $\mathcal{T}_{g,s}^{\mathrm{dec}}\xrightarrow{\sim}(\mathbb{R}_{>0})^{6g-6+3s}$ が存在する。

$\mathrm{MC}_{g,s}$ で写像類群、即ち向き付けを保つ $\Sigma_{g,s}$ の同相写像 (穴は置換しても良い) のイソトピー類のなす群を表す。$\mathrm{MC}_{g,s}$ は $\mathcal{T}_{g,s}$ に $g.(X,[f]) := (X,[gf])$ で作用し、更にこの作用は $\mathcal{T}_{g,s}^{\mathrm{dec}}$ 上に延びて忘却写像 $\mathcal{T}_{g,s}^{\mathrm{dec}}\twoheadrightarrow\mathcal{T}_{g,s}$ は $\mathrm{MC}_{g,s}$ 同変になる。

$\mathfrak{M}_{g,s} := \mathcal{T}_{g,s}/\mathrm{MC}_{g,s}$ が s 穴付き種数 g の曲面のモジュライ空間であり、$\mathfrak{M}_{g,s}^{\mathrm{dec}} := \mathcal{T}_{g,s}^{\mathrm{dec}}/\mathrm{MC}_{g,s}$ が装飾付き曲面のモジュライ空間である[*36]。

$\mathcal{T}_{g,s}$ の場合と同様に忘却写像 $\mathfrak{M}_{g,s}^{\mathrm{dec}}\twoheadrightarrow\mathfrak{M}_{g,s}$ があって、そのファイバーは $(\mathbb{R}_{>0})^s$ である。これから有理係数コホモロジーの同型が誘導される:

$$H^*(\mathfrak{M}_{g,s}^{\mathrm{dec}},\mathbb{Q})\xrightarrow{\sim}H^*(\mathfrak{M}_{g,s},\mathbb{Q}). \tag{3.1}$$

各リボングラフ Γ に対して境界付き有向曲面 $\Sigma(\Gamma)$ を注意 3.1.2 のように構成できる。$\Sigma(\Gamma)$ が s 個の境界つき種数 g の曲面になるような (連結な) リボングラフ Γ の同型類の集合を $\mathrm{RGr}_{g,s}$ で表す。各 $\Gamma\in\mathrm{RGr}_{g,s}$ は $|\mathrm{Vert}(\Gamma)|-|\mathrm{Edge}(\Gamma)| = 2-2g-s$ を満たす。

リボングラフ Γ 上の**計量**とは写像 $\mathrm{Edge}(\Gamma)\to\mathbb{R}_{>0}$ のことである。計量付きリボングラフ $\Gamma\in\mathrm{RGr}_{g,s}$ の集合を $\mathrm{RGr}_{g,s}^{\mathrm{met}}$ と書く。

計量を忘れる写像 $\mathrm{RGr}_{g,s}^{\mathrm{met}}\twoheadrightarrow\mathrm{RGr}_{g,s}$ の $\Gamma\in\mathrm{RGr}_{g,s}$ 上のファイバー σ_Γ は $\sigma_\Gamma\simeq\mathbb{R}^{|\mathrm{Edge}(\Gamma)|}/\mathrm{Aut}(\Gamma)$ となる。$\mathrm{RGr}_{g,s}^{\mathrm{met}}$ にはオービフォールドの構造が入る[*37]ことが知られている。実は

定理 3.5.1 ([P87])**.** オービフォールドとして $\mathrm{RGr}_{g,s}^{\mathrm{met}}\simeq\mathfrak{M}_{g,s}^{\mathrm{dec}}$.

これからグラフ複体を使って $\mathfrak{M}_{g,s}$ のコホモロジーを (同型 (3.1) を通じて) 計算することができる。$\mathcal{M}_{g,s}$ は有理的には写像類群の分類空間であることにも注意すると次の同型が得られる。

定理 3.5.2 ([MSS02, Theorem 5.67])**.**

$$H_{6g-6+3s-*}(\mathcal{RG}_*^{g,s})\simeq H^*(\mathfrak{M}_{g,s},\mathbb{Q})\simeq H^*(\mathcal{M}_{g,s},\mathbb{Q})\simeq H^*(B\mathrm{MC}_{g,s},\mathbb{Q}).$$

3.6 グラフ複体と自由群の外部自己同型

以下グラフといったら定義 2.1.1 の意味（つまりリボン構造のないもの）とする。

[*32] marking の訳語です。makring には色々な定義があるので注意。
[*33] decoration の訳語です。
[*34] puncture の訳語です。
[*35] horocycle の訳語です。
[*36] $\mathfrak{M}_{g,s}$ と $\mathfrak{M}_{g,s}^{\mathrm{dec}}$ どちらもパラメトライズする曲面の s 個の点にはラベルが付いていないことに注意。よく代数幾何学や表現論で扱われる点付き代数曲線のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{g,s}$ では点にラベルが付いている。
[*37] 直感的な説明をすると: Γ の辺を 1 つ取って短くしていくと別のグラフ Γ' に退化する。これで "セル"σ_Γ から "セル"$\sigma_{\Gamma'}$ への境界写像が定まる。これを続けていってすべてのセルを貼り合わせることでオービフォールドの構造が決まる。

連結なグラフ Γ であってすべての頂点の価数は 3 以上かつ $\chi(\Gamma) = 1 - n$ となるものの同型類のなす集合を $\mathrm{Gr}^{(n)}$ と書く。

$\Gamma \in \mathrm{Gr}^{(n)}$ 上の計量とは、以前と同様に写像 $\mathrm{Edge}(\Gamma) \to \mathbb{R}_{>0}$ のこととする。$\mathrm{Gr}^{(n)}$ に属するグラフに計量がついたものの同型類のなす集合 $\mathrm{Gr}^{(n)}_{\mathrm{met}}$ は非特異 orbifold で仮想次元が $3n-3$ になる。これには向き付け層 ϵ が定義できて、コンパクト台のオービフォールドホモロジーの Poincaré 双対が適用できる。

$$H^c_{3n-3-*}(\mathrm{Gr}^{(n)}_{\mathrm{met}}, \epsilon) \simeq H^*(\mathrm{Gr}^{(n)}_{\mathrm{met}}, \mathbb{Q}). \tag{3.2}$$

$\Gamma \in \mathrm{Gr}^{(n)}$ の向き付けを定義 3.1.3 と同様に与える。定義 3.2.2 と同様にして複体 $\mathcal{G}^{(n)}$ が定義できる。$|\mathrm{Vert}(\Gamma)|$ を次数とする*38ことで複体 $\mathcal{G}^{(n)}_\bullet = (\mathcal{G}^{(n)}_\bullet, \partial)$ が定義できる。(コ) ホモロジー (3.2) は $\mathcal{G}^{(n)}$ で計算できる。

定理 3.5.2 の類似が自由群の外部自己同型群 $\mathrm{Out}(n)$ について知られている。

定理 3.6.1 (Culler-Vogtmann の定理 [CV86])**.** 複体 $\mathcal{G}^{(n)}_\bullet$ は分類空間 $B\mathrm{Out}(n)$ の有理係数ホモロジーを計算する。

$$H_{2n-2-*}(\mathcal{G}^{(n)}_\bullet, \partial) \simeq H^*(B\mathrm{Out}(n), \mathbb{Q}).$$

$\mathcal{G}$ に対応する無限次元 Lie 環が以下で与える c_∞ であると見抜いたのが [K93, K94] である。

$\mathbb{Q}[p_1, \ldots, p_n]$ 上の導分であって $\sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ を保つもののなす Lie 代数を c_n と書く。自然な埋め込み $c_n \hookrightarrow c_{n+1}$ に関する帰納極限を c_∞ と書く。

定理 3.6.2. c_∞ の Chevalley-Eilenberg コホモロジーの原始部分 $\mathrm{Prim}\, H^{\mathrm{CE}}_*(c_\infty)$ について

$$\mathrm{Prim}\, H_k(c_\infty) \simeq \mathrm{Prim}\, H_k(\mathfrak{sp}_\infty) \oplus \bigoplus_{n \geq 2} H_k(\mathcal{G}^{(n)}_\bullet).$$

参考文献

[CV86] Culler, M., Vogtmann, K., *Moduli of graphs and automorphisms of free groups*, Invent Math., **84** (1986), 91–119.

[GeK98] Getzler, E., Kapranov, M. M., *Modular operads*, Compositio Math., **110** (1998), no. 1, 65–126.

[GiK94] Ginzburg, V., Kapranov, M., *Koszul duality for operads*, Duke Math. J., **76** (1994), no. 1, 203–272.

[Kl74] Klyatchko, A. A., *Lie elements in the tensor algebra*, Siberian Math. J., **15** (1974), 914–920.

[K93] Kontsevich, M., *Formal noncommutative symplectic geometry*, in *The Gelfand Mathematical Seminars, 1990–1992*, 173–187, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993.

[K94] Kontsevich, M., *Feynman diagrams and low-dimensional topology*, in *First European Congress of Mathematics, Vol. 2 (Paris, 1992)*, 97–121, Progr. Math., **120**, Birkhäuser, Basel, 1994.

[L] Loday, J., *Cyclic homology*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **301**, 2nd ed., Springer 1998.

[LV12] Loday, J., Vallette, B., *Algebraic operads*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **346**. Springer, Heidelberg, 2012.

[Mac98] Mac Lane, S., *Categories for the working mathematician*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, **5**, Springer-Verlag, New York, (1998).

[MSS02] Markl, M., Shnider, S., Stasheff, J., *Operads in algebra, topology and physics*, Mathematical Surveys and Monographs, **96**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[May72] May, J. P., *The geometry of iterated loop spaces*, Lectures Notes in Mathematics, **271**, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[P87] Penner, R. C ., *The decorated Teichmüller space of punctured surfaces*, Comm. Math. Phys., **113** (1987), 299–339.

*38 $\mathcal{RG}$ の次数と違うことに注意。