

頂点 POISSON 代数の変形量子化

柳田 伸太郎 (名大多元数理)

ABSTRACT. 頂点 Poisson 代数は頂点代数のある種の古典類似である。本稿ではその変形問題を支配する dg Lie 環を導入する。その為に operad 上の代数に関する dg Lie 環の構成と chiral 代数の概念を簡単に説明する。

1. 頂点 POISSON 代数と変形量子化

頂点代数の古典近似として頂点 Poisson 代数が得られることを復習し、その逆として頂点 Poisson 代数の変形量子化を考えたい。C 上で話をする。また Hom や End は断らない限り C 上の線形写像を表す。

1.1. 頂点 Poisson 代数. 頂点 Poisson 代数の定義の説明から始める (詳しくは [FBZ04, Chap. 16] を参照)。頂点代数は [FBZ04, Chap. 1] に従い $(V, |0\rangle, T, Y)$ で表す。

まず頂点 Lie 代数とは

- 線形空間 L
- $T \in \text{End}(L)$
- 各 $A \in L$ について $Y_-(A, z) = \sum_{n \geq 0} A_{(n)} z^{-n-1} \in \text{End}(L) \otimes z^{-1} \mathbb{C}[[z^{-1}]]$ を対応させる $Y_-(-, z)$

からなる三つ組 (L, T, Y_-) で以下の条件を満たすものである。

- (1) $Y_-(TA, z) = \partial_z Y_-(A, z)$
- (2) $Y_-(A, z)B = (e^{zT} Y_-(B, -z)A)_-$
- (3) $[A_{(m)}, Y_-(B, w)] = \sum_{n \geq 0} \binom{m}{n} (w^{m-n} Y_-(A_{(n)}B, w))_-$

但し 2 番目の条件では級数 $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n z^n$ に対し $f(z)_- := \sum_{n < 0} f_n z^n$ とする記号を使った。

頂点 Lie 代数は次の主張が成立するように定義されている: 頂点代数 $(V, |0\rangle, T, Y)$ に対し (V, T, Y_-) を

$$Y_-(A, z) := Y(A, z)_-$$

で定義すると、 (V, T, Y_-) は頂点 Lie 代数である。

頂点代数 $(V, |0\rangle, T, Y)$ が可換であるとは任意の $A, B \in V$ に対し $[Y(A, z), Y(B, w)] = 0$ となることであった。可換な頂点代数 $(V, |0\rangle, T, Y)$ は $|0\rangle$ を単位元、 T を微分とする可換代数 (V, \circ) と同値であることが知られている ([FBZ04, Chap. 1] を参照)。ここで積 \circ と Y は以下のように関係している。

$$A \circ B = A_{(-1)}B; \quad Y(A, z)B = e^{zT}A \circ B.$$

頂点 Poisson 代数とは以下を満たす四つ組 $(V, |0\rangle, T, Y_+, Y_-)$ である。

- (1) $(V, |0\rangle, T, Y_+)$ は可換頂点代数
- (2) (V, T, Y_-) は頂点 Lie 代数
- (3) $Y_-(A, z)$ の (z の級数と見た時の) 各係数は Y_+ から誘導される可換微分代数 (V, \circ, T) の導分

頂点代数から頂点 Poisson 代数を構成する自然な方法を紹介する。 (V^{\hbar}, Y^{\hbar}) を $\mathbb{C}[[\hbar]]$ 上の平坦な頂点代数の族であって $V^0 := V^{\hbar}/\hbar V^{\hbar}$ が $Y^0 := Y^{\hbar} \pmod{\hbar}$ に関して C 上の可換頂点代数であるとする。すると V^0 には

$$Y_-(A, z) := \frac{1}{\hbar} Y^{\hbar}(\bar{A}, z)_- \pmod{\hbar},$$

で頂点 Poisson 代数の構造が入る (但し $\bar{A} \in V^{\hbar}$ は $A \in V^0$ の持ち上げ)。本稿ではこの構成を古典極限と呼ぶ。

古典極限で得られる頂点 Poisson 代数の例を二つあげる (詳しくは [FBZ04, Chap. 16] を参照)。g を有限次元半単純 Lie 環とする。

- (1) 一つ目はアフィン頂点代数 $V_K(\mathfrak{g})$ の古典極限

$$V_{\infty}(\mathfrak{g}) := V_K(\mathfrak{g})/K^{-1}V_K(\mathfrak{g})$$

である。ここで K はレベルを形式的変数にしたものであり、 $V_K(\mathfrak{g})$ は $\mathbb{C}[[K^{\pm 1}]]$ 上定義されてるものとみなす。この頂点 Poisson 代数は穴あき円盤 D^{\times} 上の自明 G 束上の接続の空間上の Poisson 構造を記述しているものと思える (G は \mathfrak{g} に対応する Lie 群)。

- (2) 二つ目の例は \mathfrak{g} とその正則な冪単元 e_{reg} に対応する W 代数 $W_K(\mathfrak{g}, e_{\text{reg}})$ の古典極限

$$W_{\infty}(\mathfrak{g}) := W_K(\mathfrak{g}, e_{\text{reg}})/K^{-1}W_K(\mathfrak{g}, e_{\text{reg}})$$

である。これは oper の空間の Poisson 代数を記述しているものと思える。

1.2. 変形量子化. 古典極限による頂点 Poisson 代数の構成の逆を考えよう。与えられた頂点 Poisson 代数 $(V^0, |0\rangle, T, Y_+, Y_-)$ に対し $C[[\hbar]]$ 上平坦な頂点代数 $(V^\hbar, |0\rangle, T, Y^\hbar)$ であって

$$Y = Y_+ + \hbar Y_- + \hbar^2 Y_2 + \dots$$

となるものの分類問題を考えたい。

この問題は (通常) Poisson 代数の変形量子化の問題とよく似ている。変形量子化とは与えられた Poisson 代数 $(A, \circ, \{ \})$ に対し結合代数 $(A, *)$ であって

$$a * b = a \circ b + \hbar \{a, b\} + \hbar^2 \alpha_2(a, b) + \dots = \sum_{n \geq 0} \hbar^n \alpha_n(a, b) \quad (\alpha_n \in \text{Hom}(A^{\otimes 2}, A))$$

となるものであった。

変形量子化と dg Lie 環の関係についてここで復習しよう (詳しくは例えば [K03, §1, §3] を参照)。

与えられた Poisson 代数 $(A, \circ, \{ \})$ に二つの変形量子化 $(A, *_1)$ と $(A, *_2)$ が与えられたとする。これらが同値であるとは $\varphi = \sum_{n \geq 0} \hbar^n \varphi_n \in \text{End}(A)[[\hbar]]$ があって $\varphi(a *_1 b) = \varphi(a) *_2 \varphi(b)$ が任意の $a, b \in A$ について成立することであった。

変形量子化の同値類は Hochschild 複体 $C^\bullet(A, A) = (\oplus_{n \geq 0} C^n(A, A), d)$, と Hochschild コホモロジー $H^\bullet(A, A)$ で記述される。 $C^\bullet(A, A)$ の定義は

$$(1.1) \quad C^n(A, A) := \text{Hom}(A^{\otimes n}, A),$$

$$df(a_0, \dots, a_n) := a_0 \circ f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(a_0, \dots, (a_{i-1} \circ a_i), \dots, a_n) + (-1)^{n+1} f(a_0, \dots, a_{n-1}) \circ a_n.$$

であった。 $H^\bullet(A, A)$ はこの複体のコホモロジーである。 $(A, \circ, \{ \})$ の変形量子化について次の事実が成立する。

- 変形量子化の同値類は $H^2(A, A)$ の元とみなせる。
- Gerstenhaber 括弧 $[\cdot, \cdot]'$ を

$$\frac{1}{2} [\alpha_i, \alpha_j]'(a, b, c) := \alpha_i(\alpha_j(a, b), c) - \alpha_i(a, \alpha_j(b, c)),$$

で定義すると、* の結合則は次のように書ける。

$$(1.2) \quad d\alpha_m + \frac{1}{2} \sum_{i+j=m} [\alpha_i, \alpha_j]' = 0.$$

これらの性質は dg Lie 環の言葉で簡潔に表現できる。まず結合則と同値な関係式 (1.2) は次の Maurer-Cartan 方程式に書き換えられる。

$$(1.3) \quad d\alpha + [\alpha, \alpha] = 0, \quad \alpha = \sum_n \alpha_n \in \mathfrak{g}^1$$

ここで $[\cdot, \cdot]$ は以下のように定義される。

$$[\alpha, \beta] := \alpha \circ \beta - (-1)^{|\alpha||\beta|} \beta \circ \alpha,$$

$$(\alpha \circ \beta)(a_0, \dots, a_{|\alpha|+|\beta|}) := \sum_{r=0}^{|\alpha|} (-1)^{r|\beta|} \alpha(a_0, \dots, a_{r-1}, \beta(a_r, \dots, a_{r+|\beta|}), a_{r+|\beta|+1}, \dots, a_{|\alpha|+|\beta|}).$$

この括弧によって Hochschild 複体は dg Lie 環 $\mathfrak{g} = (C^\bullet(A, A), [\cdot, \cdot], d)$ の構造を持つ。次数付けは次の通り。

$$\mathfrak{g} = \oplus_{n \geq -1} \mathfrak{g}^n, \quad \mathfrak{g}^n := C^{n+1}(A, A) = \text{Hom}(A^{\otimes(n+1)}, A).$$

従って Poisson 代数 $(A, \circ, \{ \})$ の変形量子化の分類問題は dg Lie 環 $\mathfrak{g} = (C^\bullet(A, A), [\cdot, \cdot], d)$ の Maurer-Cartan 方程式の解 $\alpha = \sum_{n \geq 0} \alpha_n$ であって $\alpha_0 = \circ$ かつ $\alpha_1 = \{ \}$ となるものの分類問題に帰着される。

1.3. dg Lie 環と変形問題. 頂点 Poisson 代数の変形問題に戻ると、付随する dg Lie 環は何かという問題が生じる。これについてヒントになる既存の結果が二つある。

- operad¹の理論によると任意の Koszul operad \mathcal{P} について \mathcal{P} 上の代数の変形問題を支配する dg Lie 環が構成されている。
- Beilinson と Drinfeld の chiral 代数の理論によると頂点代数や頂点 Poisson 代数は operad による定式化がある。次章と次次章でこれらの概念を簡単に説明する。

2. OPERAD

この節で operad について簡単に解説する (詳しくは [LV12, Chap. 5–6] を参照)。以下 \mathfrak{S}_n で n 次対称群を記す。

¹ 数学辞典第 4 版によると operad はオペラードと訳すのですが、本稿では英語のままにします。

2.1. 諸定義. \mathfrak{S} 加群とは右 \mathfrak{S}_n 加群 $M(n)$ の列 $M = \{M(n)\}_{n \geq 0}$ である。 \mathfrak{S} 加群 M を $M = \bigoplus_{n \geq 0} M(n)$ とも書くことにする。例として単位 \mathfrak{S} 加群

$$I := 0 \oplus \mathbb{C} \oplus 0 \oplus 0 \oplus \cdots$$

がある。 \mathfrak{S} 加群の射とは \mathfrak{S}_n 加群準同型の列のことである。

二つの \mathfrak{S} 加群 M と N について新たな \mathfrak{S} 加群 $M \circ N$ を次のように定義する。

$$M \circ N := \bigoplus_{n \geq 0} M(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} N^{\otimes n}.$$

ここで \mathfrak{S}_n は $N^{\otimes n}$ に因子の置換で左作用している。

operad とは

- \mathfrak{S} 加群 $\mathcal{P} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{P}(n)$ ($\mathcal{P}(n)$ を n 項演算子²の空間と呼ぶ)
- \mathfrak{S} 加群の射 $\gamma: \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ (合成写像と呼ぶ)
- \mathfrak{S} 加群の射 $\eta: I \rightarrow \mathcal{P}$ (単位写像と呼ぶ)

からなる三つ組

$$\mathcal{P} = (\mathcal{P}, \gamma, \eta)$$

であってある条件を満たすものことである (公理は省略する)。*operad* の射とは \mathfrak{S} 加群の射であって γ や η と整合的なものことである。

operad は代数構造を引数の対称性に関して抽出したものと思える。代表的な例である結合環、可換環、Lie 環の *operad* をそれぞれ *Assoc*、*Com* および *Lie* で表す。 \mathcal{P} でこれらの例を表すことにすると、それぞれ結合積、可換積、Lie 括弧に対応した 2 引数操作 $\mu \in \mathcal{P}(2)$ がある。

他の例として線形空間 V 上の自己準同型 *operad* End_V がある。 \mathfrak{S} 加群としては

$$(2.1) \quad \text{End}_V := \bigoplus_{n \geq 0} \text{End}_V(n), \quad \text{End}_V(n) := \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes n}, V)$$

であり、合成写像 γ は自己準同型の合成、単位写像 η は単位写像 id_V から自然に定義される。

operad \mathcal{P} と線形空間 V について、 V が \mathcal{P} 代数であるとは *operad* の射

$$\mathcal{P} \longrightarrow \text{End}_V$$

が与えられていることを言う。 $\mathcal{P} = \text{Assoc}, \text{Com}, \text{Lie}$ の場合、 \mathcal{P} 代数はそれぞれ結合、可換、Lie 代数に他ならない。

最後に双対概念である *cooperad* について触れる。これは \mathfrak{S} 加群 \mathcal{C} 、分解写像 $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \circ \mathcal{C}$ および余単位写像 $\varepsilon: \mathcal{C} \rightarrow I$ からなる三つ組

$$\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \Delta, \varepsilon)$$

である条件を満たすものことである (公理は省略)。

2.2. **Koszul operad.** 任意の \mathfrak{S} 加群 E に対し *free operad* と呼ばれる *operad* $\mathcal{F}(E)$ が構成できる (定義は [LV12, Chap. 5] を参照)。*free operad* は重みと呼ばれる次数付け $\mathcal{F}(E) = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{F}(E)^{(d)}$ を持つ。双対概念である *free cooperad* $\mathcal{F}^c(E)$ も定義できる。

quadratic data とは \mathfrak{S} 加群 E と \mathfrak{S} 部分加群 $R \subset \mathcal{F}(E)^{(2)}$ からなる対 (E, R) のことである。このような対に関して、商空間

$$\mathcal{P}(E, R) := \mathcal{F}(E)/(R)$$

は自然に *operad* の構造をもち、 (E, R) の *quadratic operad* と呼ばれる。*Assoc*、*Com* および *Lie* が標準的な例である。双対概念である *quadratic cooperad* $\mathcal{C}(E, R)$ も定義できる。

これまで説明してきた *operad* の諸概念は自然に *dg* 版に拡張できる。例えば *dg* \mathfrak{S} 加群 M は右 \mathfrak{S}_n 作用を持つ複体 $M(n)$ の列である。同様にして *dg* (co)*operad*、自己準同型の *dg* (co)*operad*、*dg free* (co)*operad* が定義できる。

s で複体のシフト。

$$(sM)_p = M_{p-1}$$

を表すことにする。*quadratic operad* $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ の *Koszul dual cooperad* を

$$\mathcal{P}^{\text{cl}} := \mathcal{C}(sE, s^2R)$$

と定義する。*free operad* $\mathcal{F}(E)$ の重みから \mathcal{P}^{cl} 上の次数付けが誘導される。

Koszul operad とは *quadratic operad* であってある性質を満たすものことである。詳しい定義は省略する。同値な定義がいくつかあるが、ここでは「自然な射影 $\Omega \mathcal{P}^{\text{cl}} \rightarrow \mathcal{P}$ が擬同型である」だけ挙げることにする。ここで $\Omega \mathcal{P}^{\text{cl}}$ は \mathcal{P} の cobar resolution と呼ばれる複体である。*Assoc*、*Com* および *Lie* は Koszul である。

² n -ary operation を n 項演算子と訳しました。

2.3. **convolution dg Lie 環**. ここでは Loday と Vallette による重要な結果を紹介する (詳しくは [LV12, Chap. 6] を参照)。

事実 2.1 ([LV12, Chap. 6]). \mathcal{P} を Koszul operad、 V を線形空間とする。線形空間

$$\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{g}_{\mathcal{P},V} \equiv \text{Hom}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{P}^{cl}, \text{End}_V) := \bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(\mathcal{P}^{cl}(n), \text{End}_V(n))$$

は自然な dg Lie 環の構造 $(\mathfrak{g}, [,], \partial)$ を持つ。

$\mathfrak{g}_{\mathcal{P},V}$ を *convolution dg Lie 環* と呼ぶ。複体としての次数付け $\mathfrak{g} = \bigoplus_n \mathfrak{g}^n$ と \mathcal{P}^{cl} 上の重みから誘導される次数付け $\mathfrak{g} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathfrak{g}^{(d)}$ があることに注意する。

ここで Maurer-Cartan 方程式 (1.3) を思い出そう。任意の dg Lie 環 \mathfrak{g} に対して Maurer-Cartan 方程式が定義できる。そこで次のような解空間を考える。

$$\text{Tw}(\mathfrak{g}) := \{ \text{Maurer-Cartan 方程式の } \mathfrak{g}^{n=-1} \text{ の解} \}.$$

事実 2.2 ([LV12, Proposition 10.1.4]). Koszul operad \mathcal{P} と線形空間 V について次の自然な全単射がある。

$$\{ V \text{ 上の } \mathcal{P} \text{ 代数の構造} \} \xleftarrow{1:1} \text{MC}(\mathfrak{g}_{\mathcal{P},V}) := \{ \text{重み } d = 1 \text{ の Tw}(\mathfrak{g}_{\mathcal{P},V}) \text{ の元} \}.$$

$\text{MC}(\mathfrak{g}_{\mathcal{P},V})$ の元 μ が与えられると、twist した dg Lie 環

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{P},V}^{\mu} := (\text{Hom}(\mathcal{P}^{cl}, \text{End}_V), [,], \partial^{\mu} := \partial + [\mu, -]).$$

が定義できる。これは \mathcal{P} 代数構造 μ の変形をパラメトライズする。

$$\text{MC}(\mathfrak{g}_{\mathcal{P},V}^{\mu}) \xleftarrow{1:1} \{ \mathcal{P} \text{ 代数構造であって } \mu \text{ を変形したもの} \}.$$

例えば $\mathcal{P} = \text{Assoc}$ なら $\mu \in \text{MC}(\mathfrak{g}_{\text{Assoc},V})$ は V 上の結合積に対応し、 $\mathfrak{g}_{\text{Assoc},V}^{\mu}$ は $A = (V, \mu)$ に関する Hochschild 複体 (1.1) に一致する。

3. CHIRAL 代数と COISSON 代数

Beilinson と Drinfeld による *chiral* 代数の理論 [BD04] は D 加群の圏上のある operad を使って頂点代数の理論を幾何学的に再構成したものである。また彼らは頂点 Poisson 代数に対応する operad も導入している。これらについてこの節で簡単に説明する。

3.1. **chiral 代数**. *chiral* 代数とは何かを簡単に説明しよう。 X を非特異代数曲線、 $\mathcal{M}(X)$ を右 \mathcal{D}_X 加群 (\mathcal{O}_X 加群として準連接なもののみ考える) のなす圏とする。 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ について $\Delta^{(n)} : X \hookrightarrow X^n$ を対角埋め込み、

$$j^{(n)} : U^{(n)} := \{(x_i) \in X^n \mid x_i \neq x_j \ (\forall i \neq j)\} \hookrightarrow X^n$$

を対角因子の complement とする。

$M \in \mathcal{M}(X)$ に対し \mathfrak{S} 加群 $\text{End}_M^{ch} = \bigoplus_n \text{End}_M^{ch}(n)$ を

$$\text{End}_M^{ch}(n) := \text{Hom}_{\mathcal{M}(X^n)}(j_*^{(n)} j^{(n)*} M^{\boxtimes n}, \Delta_*^{(n)} M)$$

で定義する (線形空間 V に付随した自己準同型 operad End_V (2.1) を参照)。[BD04, Chap. 3] により End_M^{ch} は operad の構造をもつ。これを M 上の *chiral operad* と呼ぶことにしよう。

$M \in \mathcal{M}(X)$ 上の (単位元なしの) *chiral* 代数の構造とは operad の射

$$\varphi : \text{Lie} \longrightarrow \text{End}_M^{ch}$$

のことである。 $\mu_{\text{Lie}} \in \text{Lie}(2)$ を Lie 括弧に対応した元とし、その像 $\varphi(\mu_{\text{Lie}}) \in \text{End}_M^{ch}(2)$ を *chiral* 括弧と呼ぶことにする。

ここで *chiral* 代数と頂点代数の関係を復習しよう。頂点代数 $V = (V, |0\rangle, T, Y)$ から非特異曲線 X 上の局所自由層 \mathcal{V} が定義できる ([FBZ04, Chap. 5] を参照)。もし V が準共形³なら \mathcal{V} には左 \mathcal{D}_X 加群の構造が入る。

$$y^2 : j_*^{(2)} j^{(2)*} \mathcal{V}^{\boxtimes 2} \longrightarrow \Delta_*^{(2)}(\mathcal{V})$$

で Y から誘導される左 \mathcal{D} 加群の射を記す。これは局所的には

$$y_x^2(f(z, w)A \boxtimes B) = f(z, w)Y(A, z-w)B \pmod{V[[z, w]]}$$

で与えられる。 ω_X で X 上の標準層を記すと、左 \mathcal{D}_X 加群 M に対し

$$M^r := M \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X$$

は自然な右 \mathcal{D}_X 加群の構造を持つ。

事実 3.1 ([BD04], [FBZ04, Chap. 19]). 準共形頂点代数 V について、右 \mathcal{D}_X 加群 $\mathcal{V}^r := \mathcal{V} \otimes_{\omega_X}$ は *chiral* 代数の構造を持つ。*chiral* 括弧 $\mu \in \text{End}_{\mathcal{V}^r}^{ch}(2)$ は $\mu = (y^2)^r$ で与えられる。

³quasi-conformal を準共形と訳しました。

3.2. **coisson 代数**. 頂点代数に対応する operad が chiral operad であったのと同様に、頂点 Poisson 代数に対応する operad も存在する。 $M \in \mathcal{M}(X)$ に対し \mathfrak{S} 加群 $\mathcal{E}nd_M^c$ を

$$\mathcal{E}nd_M^c(n) = \bigoplus_{S \in Q([n])} \mathcal{E}nd_M^c(n)_S, \quad \mathcal{E}nd_M^c(n)_S := \text{Hom}_{\mathcal{M}(X^S)}(M^{\boxtimes S}, \Delta_*^{(S)} M) \otimes (\otimes_{t \in S} \mathcal{L}ie(|\pi_S^{-1}(t)|)).$$

で定義する。ここで $Q([n])$ は集合 $[n] = \{1, \dots, n\}$ からの全射 $\pi_S : [n] \rightarrow S$ の同値類のなす集合であり、 $\Delta^{(S)} : X \hookrightarrow X^S$ は対角埋め込みである。[BD04, §2.6] により $\mathcal{E}nd_M^c$ は operad の構造を持つ。それを *compound operad* と呼ぶことにする。 $M \in \mathcal{M}(X)$ 上の *coisson 代数* の構造とは operad の射

$$\mathcal{L}ie \rightarrow \mathcal{E}nd_M^c$$

のことである。事実 3.1 と同様に、頂点 Poisson 代数 V から構成できる曲線 X 上の局所自由層は coisson 代数の構造を持つ。

coisson 代数と chiral 代数の関係を簡単に説明しよう。 $\mathcal{E}nd_M^{ch}$ にはあるフィルトレーション

$$\mathcal{E}nd_M^{ch}(n) = W^0 \supset W^{-1} \supset \dots \supset W^{-n} \supset W^{-n-1} = 0$$

があって、その associated graded について operad の埋め込み

$$(3.1) \quad \text{gr}_W \mathcal{E}nd_M^{ch} \hookrightarrow \mathcal{E}nd_M^c.$$

が存在する。フィルトレーション W^\bullet の定義は省略するが、 ω_X の Cousin 複体から定まるものとだけ説明しておく。

埋め込み (3.1) から次のことが従う: $\mathbb{C}[[t]]$ 上平坦な chiral 代数の族 A_t に対し、 $A_0 := A_t/tA_t$ は coisson 代数の構造を持つ。事実 3.1 とその Poisson 版から、§1.1 で説明した古典極限で準共形頂点代数から頂点 Poisson 代数を構成する方法はこの coisson 極限と同値である。

注意. Beilinson と Drinfeld は pseudo tensor category の言葉を使って諸概念を定義していて、本稿の “chiral operad” や “coisson operad” は筆者が名付けたものである。pseudo tensor category とは colored operad と同値の概念で、category に「 n 個の射の合成」のデータを付け加えたものである。対象が一つである pseudo tensor category が通常の operad に他ならない。

4. CHIRAL DG LIE 環

前々節で operad 上の代数の変形を記述する convolution dg Lie 環を紹介したが、少しだけその議論に手を加えることで、その構成を前節の chiral 代数の文脈に適用することができる。それで得られる dg Lie 環が本稿の主目標に他ならない。

前節と同様、 X を非特異代数曲線とする。

4.1. **chiral dg Lie 環の定義**. 事実 2.1 と同様に次のような dg Lie 環を構成することができる。

命題 4.1. M を右 \mathcal{D}_X 加群とする。 \mathfrak{S} 加群

$$\mathfrak{g}_M^{ch} := \text{Hom}_{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}ie^{cl}, \mathcal{E}nd_M^{ch})$$

は $(\mathfrak{g}_M^{ch}, [\cdot, \cdot], \partial = 0)$ となる dg Lie 環の構造をもつ。

この dg Lie 環について事実 2.2 と同様の主張が成立する。

命題. 右 \mathcal{D}_X 加群 M に対し次の全単射が存在する。

$$\{M \text{ 上の chiral 代数の構造} \} \xleftarrow{1:1} \text{MC}(\mathfrak{g}_M^{ch}).$$

§2.3 での議論と同様に、 $\alpha \in \text{MC}(\mathfrak{g}_M^{ch})$ が与えられると dg Lie 環 \mathfrak{g}_M^{ch} を twist することができる。

定義 4.2. $\alpha \in \text{MC}(\mathfrak{g}_M^{ch})$ に対し、以下の dg Lie 環を *chiral dg Lie 環* と呼ぶことにする。

$$\mathfrak{g}_M^{ch, \alpha} := (\mathfrak{g}_M^{ch}, [\cdot, \cdot], \partial_\alpha), \quad \partial_\alpha := \partial + [\alpha, -] = [\alpha, -].$$

chiral 代数の変形問題は次のように述べられる。

命題. $\alpha \in \text{MC}(\mathfrak{g}_M^{ch})$ について

$$\{M \text{ 上の chiral 代数の構造で } \alpha \text{ の変形であるもの} \} \xleftarrow{1:1} \text{MC}(\mathfrak{g}_M^{ch, \alpha}).$$

coisson 代数についても同様の議論が成立する。即ち \mathfrak{S} 加群

$$\mathfrak{g}_M^c := \text{Hom}(\mathcal{L}ie^{cl}, \mathcal{E}nd_M^c).$$

に dg Lie 環の構造が入る。右 \mathcal{D}_X 加群 M 上の coisson 代数の構造と $\text{MC}(\mathfrak{g}_M^c)$ の元が一対一に対応する。 $\alpha \in \text{MC}(\mathfrak{g}_M^c)$ による twist $\mathfrak{g}_M^{c, \alpha}$ を *coisson dg Lie 環* と呼ぶことにする。

4.2. 変形問題. §3.2 での coisson 代数の議論から、operad の射の列

$$\mathcal{E}nd_M^{ch} \twoheadrightarrow \text{gr } \mathcal{E}nd_M^{ch} \hookrightarrow \mathcal{E}nd_M^c$$

が得られる。[Y16] の主結果は次の通りである。

定理 4.3. 上記の列から dg Lie 環の射

$$\mathfrak{g}_M^{ch} \longrightarrow \mathfrak{g}_M^c$$

が誘導され、それは次の Maurer-Cartan 方程式の解空間の間の写像を定める。

$$\psi : \text{MC}(\mathfrak{g}_M^{ch}) \longrightarrow \text{MC}(\mathfrak{g}_M^c).$$

注意. 通常の変形量子化の問題 (§1.2 を参照) ではこのような Maurer-Cartan 方程式の解空間の間の写像の構成が難しい問題であった。それについて少し復習することにする。

Poisson 代数 $(A, \circ, \{ \})$ の変形問題に付随する dg Lie 環は $\bigwedge_A^\bullet \text{Der}(A)$ とその上の Gerstenhaber 括弧で与えられる。複体の記述に関しては Hochschild-Kostant-Rosenberg 擬同型 $f : \bigwedge_A^\bullet \text{Der}(A) \xrightarrow{\sim} H(C^\bullet(A, A))$ が存在する。難しいポイントは f から誘導される線形写像 $\hat{f} : \bigwedge_A^\bullet \text{Der}(A) \rightarrow C^\bullet(A, A)$ が dg Lie 環の射でない点である。Kontsevich は [K03] で \hat{f} を変形して L_∞ 写像 f_∞ を構成し、その系として dg Lie 環の射を得ている。我々の状況だとこの難点がクリアできている。

定義 4.4. $\mu \in \text{MC}(\mathfrak{g}_M^c)$ と $\mu^c \in \text{MC}(\mathfrak{g}_M^c)$ が $\psi(\mu) = \mu^c$ となっている時、 μ を μ^c の chiral 変形量子化と呼ぶことにする。

ψ が全射なら chiral 変形量子化が常に存在することを意味する。[Y16] の 2 つ目の結果は一意性に関する結果である。

定理 4.5. ψ は単射である。

特に $V_\infty(\mathfrak{g})$ や $W_\infty(\mathfrak{g}, e_{\text{reg}})$ といった古典極限で得られる頂点 Poisson 代数の変形量子化はもとの頂点代数に限られる。

4.3. chiral dg Lie 環の詳細. この副節では dg Lie 環 $\mathfrak{g}_M^{ch} = \text{Hom}(\text{Lie}^{cl}, \text{End}_M^{ch})$ 或いは $\mathfrak{g}_M^c = \text{Hom}(\text{Lie}^{cl}, \text{End}_M^c)$ を書き下してみる。結論には Chevalley 複体上の dg Lie 環の構造によく似たものが現れる。

まず Koszul dual cooperad $\mathcal{L}ie^{cl}$ は簡単な計算で次のように書き下せる。

補題 4.6. sgn_n を \mathfrak{S}_n の符号表現とすると、次数付き \mathfrak{S}_n 加群として

$$\mathcal{L}ie^{cl}(n) \simeq s^{1-n} \text{sgn}_n.$$

次に $\mathcal{E}nd_M^{ch}$ の \mathfrak{S} 加群としての定義を思い出すと

$$\mathcal{E}nd_M^{ch}(n) = \text{Hom}_{\mathcal{M}(X^n)}(j_* j^* M^{\boxtimes n}, \Delta_* M).$$

ここで $\Delta := \Delta^{(n)} : X \hookrightarrow X^n$ は対角埋め込み、 $j := j^{(n)} : U^{(n)} \hookrightarrow X^n$ は対角因子の complement であった。補題 4.6 を使って計算すると次の表式を得る。

補題 4.7. The graded \mathfrak{S} -module structure of \mathfrak{g}_M^{ch} is given by

$$\mathfrak{g}_M^{ch}(n) \simeq s^{1-n} C^{ch,n}(M), \quad C^{ch,n}(M) := \text{Hom}_{\mathcal{M}(X^n)}(j_* j^*(\wedge^n M), \Delta_*(M)).$$

注意. このように \mathfrak{g}^{ch}_M は Lie 環 L の Chevalley-Eilenberg 複体 $C^\bullet(L, L) = \text{Hom}(\wedge^\bullet L, L)$ とよく似ている。

次に Lie 括弧を記述したい。命題 4.1 でその定義を省略してしまったため不完全な説明になるが、本稿では結果だけ紹介する。

まず operad $\mathcal{P} = (\mathcal{P}, \gamma, \eta)$ に対し \circ_i を

$$(4.1) \quad \mu \circ_i \nu := \gamma(\mu; \text{id}, \dots, \text{id}, \nu, \text{id}, \dots, \text{id})$$

で定義する。ここで ν は i 番目に位置しており、また $\text{id} := \eta(1) \in \mathcal{P}(1)$ である。

次に置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & p & p+1 & \cdots & p+q \\ i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{p+q}$$

であって $i_1 < \cdots < i_p$ かつ $j_1 < \cdots < j_q$ となるものものを (p, q) -shuffle と呼ぶことにする。 (p, q) -shuffle の逆を (p, q) -unshuffle と呼ぶ。 $\mathfrak{S}_{p,q}^{-1} \subset \mathfrak{S}_{p+q}$ を (p, q) -unshuffle 達のなす部分集合とする。

補題. $f \in C^{ch,p}(M)$ と $g \in C^{ch,q}(M)$ に対し

$$(4.2) \quad f \star g = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p,q}^{-1}} \text{sgn}(\sigma) (-1)^{(p-1)(q-1)} (f \circ_1 g)^\sigma$$

と定義すると \star は pre Lie 括弧になる。ここで \circ_1 は (4.1) で $\gamma = \gamma^{ch}$ (chiral operad $\mathcal{E}nd_M^{ch}$ の合成写像) としたものである。

* が pre Lie 括弧であるとは等式

$$(f \star g) \star h - f \star (g \star h) = (f \star h) \star g - f \star (h \star g).$$

が成立することを言う。pre Lie 括弧 \star から

$$[f, g] := f \star g - g \star f$$

と $[\cdot, \cdot]$ を定めるとこれは Jacobi 律を満たす。実は命題 4.1 の Lie 括弧は上の補題の \star を反交換させたものと一致する。以上をまとめると

命題 4.8. dg Lie 環 \mathfrak{g}_M^{ch} は次数付き線形空間

$$\mathfrak{g}_M^{ch}(n) \simeq s^{1-n} C^{ch,n}(M), \quad C^{ch,n}(M) := \text{Hom}_{\mathcal{M}(X^n)}(j_* j^*(\wedge^n M), \Delta_*(M)).$$

と自明な微分 $\partial = 0$ 、および (4.2) の \star を使って $[f, g] = f \star g - g \star f$ で定義される Lie 括弧で与えられる。

同様にして

命題 4.9. dg Lie 環 \mathfrak{g}_M^c は次数付き線形空間としては

$$\mathfrak{g}_M^c(n) \simeq s^{1-n} C^{c,n}(M), \quad C^{c,n}(M) := \bigoplus_{S \in Q([n])} \text{Hom}_{\mathcal{M}(X^S)}(\wedge_{s \in S} (M^{\otimes [n]_s}), \Delta_*^{(S)}(M)) \otimes (\otimes_{s \in S} \text{Lie}_{[n]_s}),$$

で与えられる。微分は自明であり、Lie 括弧は (4.2) の \circ_1 において γ^{ch} の代わりに \mathfrak{g}_M^c の合成写像 γ^c を用いたものである。

さて次に $\mu \in \text{MC}(\mathfrak{g}_M^{ch})$ で twist された

$$\mathfrak{g}_M^{ch,\mu} := (\text{Hom}_{\mathfrak{S}}(\text{Lie}^c, \text{End}_M^{ch}), [\cdot, \cdot], \partial_\mu), \quad \partial_\mu := \partial + [\mu, -] = [\mu, -]$$

を書き下してみる。 $\mu \in \text{MC}(\mathfrak{g}_M^{ch}) \subset \mathfrak{g}_M^{ch}(2)$ は 2 項演算子であることを思い出しつつ \mathfrak{g}_M^{ch} の記述 (命題 4.8 を用いて計算すると次の結果を得る。

命題 4.10. $\mathfrak{g}_M^{ch,\mu}$ の微分 ∂_μ は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \partial_\mu(f)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n+1}) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \mu(x_i, f(x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \cdots \wedge x_n)) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j-1} f(\mu(x_i, x_j) \wedge x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \cdots \wedge \hat{x}_j \cdots \wedge x_n). \end{aligned}$$

但し $f \in C^{ch,n}(M) \simeq s^{n-1} \mathfrak{g}_M^{ch}(n)$ および $x_0 \wedge \cdots \wedge x_n \in j_* j^*(\wedge^{n+1} M)$ とした。 \hat{x}_i は x_i を除くという意味。 $\mathfrak{g}_M^{c,\mu}$ についても同様の表式が成立する。

最後に頂点代数の言葉でこの表式を書き換えてみる。chiral 代数と頂点代数の関係 (事実 3.1 を参照) を思い出そう。 $\mu \in \text{MC}(\mathfrak{g}_{\mathcal{V}^r}^{ch})$ が準共形頂点代数 $(V, T, |0\rangle, Y)$ に対応する元だとする。ここで \mathcal{V}^r は V に付随した右 \mathcal{D}_X 加群である。すると命題 4.10 の ∂_μ は

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \partial_\mu f(a_0, \dots, a_n) &= \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r Y(a_r, z) f(a_0, \dots, \hat{a}_r, \dots, a_n) \\ &\quad + \sum_{0 \leq r < s \leq n-1} (-1)^{n+r+s} f(a_0, \dots, \hat{a}_r, \dots, \hat{a}_s, \dots, a_n, Y(a_r, z) a_s) \end{aligned}$$

と書き直せる。但し $a_i \in \mathcal{V}^r$ および $f \in C^{ch,n}(\mathcal{V}^r)$ である。

coisson 代数の場合、 $\mu \in \text{MC}(\mathfrak{g}_{\mathcal{V}^r}^{ch})$ が頂点 Poisson 代数 (V, Y_+, Y_-) に対応するとして、微分 ∂_μ は (4.3) で Y を Y_- に代えたものになる。

注意. (1) 本稿では紹介しなかったが、Beilinson と Drinfeld は End_M^{ch} および End_M^c の他にもう一つ operad 構造 End_M^* を導入している。operad の射 $\text{Lie} \rightarrow \text{End}_M^*$ の定める M 上の代数構造が Lie* 代数である ([FBZ04, Chap. 19] も参照)。実はこれは頂点 Lie 代数と (事実 3.1 の意味で) 対応する概念である。本稿の議論を End_M^* に適用して得られる dg Lie 環 $\mathfrak{g}_M^{*,\mu}$ は μ に対応した頂点 Lie 代数の変形を支配している。複体としてはやはり Chevalley 複体と同様であり、微分は (4.3) で与えられる。

- (2) De Sole と Kac は [DSK09] で “Lie conformal algebra cohomology” という頂点 Lie 代数 (Lie conformal algebra) のコホモロジー理論を展開しているが、そこで用いられている複体は $\mathfrak{g}_M^{*,\mu}$ と一致する。
- (3) Tamarkin は [T02] で chiral 代数の dg Lie 環を導入していて、本稿の $\mathfrak{g}_M^{ch,\mu}$ と似ているのだが、そちらで pro-finite limit を取っている点が違う。今のところそのような極限を取る必要があるか不明である。
- (4) Yi-Zhi Huang は [H14a, H14b] で次数付き頂点代数のコホモロジー理論を展開していて、そこでは種々の収束条件をつけた複体を考えている。収束性の議論を除けば本稿の $\mathfrak{g}_M^{ch,\mu}$ と同じものである。本稿の議論は通常の頂点代数に移行するところで準共形性を課しているので、[H14a, H14b] の方が広い対象を扱っていることになり、その点で収束性が必要になっているのだと考えられる。

謝辞. 本研究は JSPS 科研費 16K17570 の助成を受けたものです。また日本学術振興会 頭脳循環を加速する戦略的国際研究ネットワーク推進プログラム「対称性, トポロジーとモジュライの数理, 数学研究所の国際研究ネットワーク展開」(大阪市立大学数学研究所) の助成も受けています。

本稿は 2016 年夏の UC Davis 滞在中に準備されました。滞在中の厚遇に感謝致します。

桑原敏郎氏に特別の謝辞を述べたいと思います。本研究の発端は桑原敏郎氏の 2015 年 7 月の京都大学での講演がもとになっています。また ALTReT の講演時に文献 [H14a, H14b] を教えて頂きました。重ね重ね感謝致します。

REFERENCES

- [BD04] Beilinson, A., Drinfeld, V., *Chiral algebras*, American Mathematical Society Colloquium Publications, **51**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [B86] Borcherds, R., *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol. **83** (1986), No. 10, 3068–3071.
- [DSK09] De Sole, A., Kac, V., *Lie conformal algebra cohomology and the variational complex*, Comm. Math. Phys. **292** (2009), no. 3, 667–719.
- [FBZ04] Frenkel, E., Ben-Zvi, D., *Vertex algebras and algebraic curves*, Second edition, Mathematical Surveys and Monographs, **88**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [GM88] Goldman, W. M., Millson, J. J., *The deformation theory of representations of fundamental groups of compact Kähler manifolds*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1988), no. 67, 43–96.
- [H14a] Huang, Y., *First and second cohomologies of grading-restricted vertex algebras*, Comm. Math. Phys. **327** (2014), no. 1, 261–278.
- [H14b] Huang, Y., *A cohomology theory of grading-restricted vertex algebras*, Comm. Math. Phys. **327** (2014), no. 1, 279–307.
- [K03] Kontsevich, M., *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. **66** (2003), no. 3, 157–216.
- [LV12] Loday, J., Vallette, B., *Algebraic operads*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **346**. Springer, Heidelberg, 2012.
- [T02] Tamarkin, D., *Deformations of chiral algebras*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002), 105–116, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.
- [Y16] Yanagida, S., *Deformation quantization of vertex Poisson algebras*, preprint, arXiv:1607.02068.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, NAGOYA UNIVERSITY FUROCHO, CHIKUSAKU, NAGOYA, JAPAN, 464-8602.

E-mail address: yanagida@math.nagoya-u.ac.jp