Bar-Natan と Kontsevich による Vassiliev 不変量に関する結果の紹介

柳田伸太郎

概要. Vassiliev の結び目不変量は、結び目のイソトピー類の全体がはる線型空間にあるフィルトレーションを導入することで定式化することができる ([BL93] による定式化)。Vassiliev 不変量全体の空間 $\mathcal{V}$ にもフィルトレーション $\mathcal{V} = \cup_{k=0}^{\infty} \mathcal{V}_k$ が入り、付随する商線型空間 $\mathrm{gr}\,(\mathcal{V})$ には可換かつ余可換な Hopf 代数の構造が入る。そのうち原始的な元のなす部分空間を $\mathcal{P} = \oplus_k \mathcal{P}_k$ と書く。Kontsevich と Bar-Natan は $\mathcal{P}_k$ があるグラフ複体 (graph complex) の最低次のホモロジー群と同一視できることを示した。今回の講演では、operad を用いないでこの結果を説明する。基本的には Bar-Natan の論文 [B95] に従う。

1 Vasiliev 不変量

断らない限り線形空間や代数は標数 0 の体上のものを考える。

1.1 定義

[B95] に従う。[大槻 15, §7] も参照のこと。

円周 S^1 を 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ に滑らかに埋め込んだ像を**結び目**という。S^1 に向き付けをつけた結び目を**有向結び目**という。2 つの結び目 K と K' は、h_0 が $\mathbb{R}^3$ の恒等写像であるような微分同相写像の族 $h_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(t \in [0, 1])$ があって $h_1(K) = K'$ となるとき、**イソトピック**であるといい、その時 h_t を**イソトピー**という。

有向結び目のイソトピー類全体ではられる $\mathbb{F}$ 上の線型空間を $\mathcal{K}$ と書く。

S^1 の $\mathbb{R}^2$ へのはめ込み (immersion) で、その特異点が横断的な 2 重点であるようなものを**特異結び目**と呼ぶ。特異結び目に対し、その各 2 重点を

$$X = \text{右上から右下が上} - \text{左上から左下が上}$$

と線型的に解消することで、$\mathcal{K}$ の元とみなすことにする。

d 個の 2 重点をもつような特異結び目がはる $\mathcal{K}$ の部分ベクトル空間を $\mathcal{K}_d$ と書く。これらは $\mathcal{K}$ の (減少する) フィルトレーションを定める。

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \supset \mathcal{K}_1 \supset \mathcal{K}_2 \supset \cdots .$$

定義 1.1.1. $\mathcal{K}_{d+1}$ に制限すると零写像になるような線型写像 $\mathcal{K} \to \mathbb{F}$ を **d 次の *Vassiliev* 不変量**と呼ぶ。d 次の Vassiliev 不変量全体のなす線形空間を $\mathcal{V}_d$ と書く。

定義より $\mathcal{V}_d$ は $\mathcal{K}/\mathcal{K}_{d+1}$ の双対線型空間と自然に同一視される。$\mathcal{V}_d$ 達はフィルトレーションをなす。

$$\mathcal{V} := \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \cdots .$$

$\mathcal{V}$ には代数構造が自然に入る（不変量の足し算と掛け算)。また、$\mathcal{K}$ が結び目の連結和について加群になることの双対で、$\mathcal{V}$ には余積が入るが、これらの演算で $\mathcal{V}$ は Hopf 代数になる。

注意 1.1.2. (1) よく言及されることだが、この定義は Vassiliev による元来の定義 [V90] とは異なる。両者が一致することは [BL93] による。

(2) Vassiliev 不変量は有限型不変量 (finite type invariant) とも呼ばれる。これは $\mathcal{K}/\mathcal{K}_{d+1}$ が有限次元であることに由来する。注意 1.2.6 も参照。

例 1.1.3 ([大槻 15, §7.1]). (1) 0 次の Vassiliev 不変量 v は、任意の有向結び目 K に対して、

$$v(K) = v(\mathrm{triv})$$

を満たす。但し triv は自明な有向結び目。実際、K は交叉の上下を入れ替える操作を有限回繰り返すことで triv にできる。

$$K = K_0 \rightsquigarrow K_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow K_n = \mathrm{triv}. \tag{1.1}$$

各操作において $v(K_i) - v(K_{i+1}) = \pm v(K_{i,0})$ となる $K_{i,0} \in \mathcal{K}_1$ があることに注意すると、v は $\mathcal{K}_1$ 上では 0 なので $v(K_i) - v(K_{i+1}) = 0$。よって $v(K) = v(\mathrm{triv})$。
従って任意の 0 次の Vassiliev 不変量は定数関数で、$\mathcal{V}_0 = \mathbb{F}$ となる。

(2) 実は 1 次の Vassiliev 不変量も必ず定数関数になり、$\mathcal{V}_1 = \mathbb{F}$ となる。
1 次の Vassiliev 不変量 v の結び目 K での値 $v(K)$ を考える。(1) と同様に列 (1.1) を考える。各 i について $v(K_i) - v(K_{i+1}) = \pm v(K_{i,0})$ となる $K_{i,0} \in \mathcal{K}_1$ がある。さらに $K_{i,0}$ に交叉の上下を入れ替える操作を施すことで

$$K_{i,0} \rightsquigarrow K_{i,1} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow K_{i,n_i} = oo \tag{1.2}$$

とできるが、右端の特異結び目は $\mathcal{K}$ の元としては 0 である。また $v(K_{i,j}) - v(K_{i,j+1}) = \pm v(K_{i,j,0})$ となる $K_{i,j,0} \in \mathcal{K}_2$ があることに注意すると、$v(K_{i,0}) = v(K_{i,n}) = 0$。よって $v(K) = v(\mathrm{triv})$。

(3) 2 次の Vassiliev 不変量 v を考える。(2) までと同様に、有向結び目 K について列 (1.1) と各 $K_{i,0}$ について列 (1.2) を考える。さらに各 $K_{i,j,0}$ に交叉の入れ替えを施すと

$$K_{i,j,0} \rightsquigarrow K_{i,j,1} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow K_{i,j,n_{i,j}} = \begin{cases} ooo = 0 \\ \text{non-triv} \end{cases} \tag{1.3}$$

とできる。ここで 2 重点を 2 つ持つ特異結び目の分類を用いたが、これは次のように示せる: 2 つの 2 重点に A および B と名前を付けると、S^1 の向きにそって 2 重点が現れる巡回順序は AABB と ABAB しかない。これらの特異結び目は**コード図**を用いて次のように表せる。
これらの特異結び目に対する v の値を

$$W_v(oo) = 0, \quad W_v(\text{non-triv})$$

と書くことにすると (W は *weight* の w)、$v(K_{i,j,0})$ は $W_v(oo) = 0$ または $W_v()$。よって各 i について $v(K_{i,0}) = W_v(\text{non-triv})$ の整数倍 であり、

$$v(K) = a_2(K) W_v(\text{non-triv}) + v(\mathrm{triv})$$

を得る。ここで $a_2(K)$ は K から決まる整数 (Conway 多項式の 2 つ目の係数)。

同様に、一般の d 次の Vassiliev 不変量 v からも線型写像

$$W_v : \mathrm{span}_{\mathbb{F}} \left\{ S^1 \text{ 上の } d \text{ 次のコード図} \right\} \longrightarrow \mathbb{F} \tag{1.4}$$

が定まる。このようにコード図が自然に現れるので、次節でその定義を思い出しておく。

1.2 コード図と線形空間 $\mathcal{A}$

[大槻 15, §6,§7] を参照。

定義 1.2.1. (1) 各頂点が 1 価または 3 価であるグラフを $1,3$ 価グラフと呼ぶ。

(2) 3 価頂点から出る 3 つの辺の巡回順序が指定されているとき、その 3 価頂点を有向であるという。

(3) X を有向コンパクト 1 次元多様体とする。X 上の *Jacobi* **図**とは、$1,3$ 価グラフであってその 1 価頂点たちが X の異なる点であり、各 3 価頂点が有向であるもののことである。

(4) $1,3$ 価グラフの連結成分で 3 価頂点をもたないものをコードという。

(5) コードのみからなるような Jacobi 図を**コード図**という。コード図の**次数**をコードの本数で定める。

補題 1.2.2. (1.4) の線型写像 W_v は以下の 2 つの条件を満たす。

(1)

$$W_v(\text{chord diagram with an isolated chord}) = 0$$

(2)

$$W_v(N) - W_v(E) = W_v(S) - W_v(W)$$

そこで (1.4) の定義域 $\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\left\{S^1 \text{ 上の } d \text{ 次のコード図}\right\}$ を 2 種類の関係式[*1]

$$\begin{aligned} \text{FI}: &\quad \text{isolated chord} \\ \text{4T}: &\quad N - E - S + W \end{aligned}$$

で割った商空間上で W_v を考えるのが自然である。この商空間に関連して、次の補題 1.2.4 を用意しておく。

定義 1.2.3. X 上の Jacobi 図の全体がはる線型空間を次の 3 つの関係式でわってできる商空間を $\mathcal{A}(X)$ と書き、X 上の Jacobi 図の空間と呼ぶ。

$$\begin{aligned} \text{AS}: & \\ \text{IHX}: & \\ \text{STU}: & \end{aligned}$$

また $\mathcal{A} := \mathcal{A}(S^1)$ と略記する。

命題 1.2.4 (Bar-Natan)**.** 以下の線型空間の同型がある。

$$\mathcal{A} \simeq \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\left\{S^1 \text{ 上の } d \text{ 次のコード図}\right\}/4\text{T}.$$

この補題により (1.4) の W_v は

$$\mathcal{A}/\text{FI} \longrightarrow \mathbb{F}$$

という線型写像と思える。特に、d 次のコード図で張られる $\mathcal{A}$ の部分ベクトル空間を $\mathcal{A}_d$ と書くと、d 次の Vassiliev 不変量 $v \in \mathcal{V}_d$ は次の線型写像を定める。

$$W_v : \mathcal{A}_d/\text{FI} \longrightarrow \mathbb{F} \tag{1.5}$$

[*1] FI は frame invariance の略。

定義 1.2.5. (1.5) の W_v を v の**重み系** (weight system) と呼ぶ。重み系全体のなす線型空間を $\mathcal{W}$ とかく。

$$\mathcal{W} = \cup \mathcal{W}_d, \quad \mathcal{W}_d := \{W_v \mid v \in \mathcal{V}_d\}.$$

注意 1.2.6. 重み系は以下のように言い換えることもできる。

(1) d 次のコード図 D に対し、各コードを 1 点につぶすように D を $\mathbb{R}^3$ にはめ込むことでできる特異結び目を K_D と書く。このような K_D は一意には決まらないが、それらは交叉を上下させる操作で移りあう。従って、$K_D \in \mathcal{K}_d$ に注意すると、線型写像

$$\widetilde{\varphi} : \mathrm{span}_{\mathbb{F}} \left\{ S^1 \text{ 上の } d \text{ 次のコード図} \right\} \longrightarrow \mathcal{K}_d/\mathcal{K}_{d+1}, \quad D \longmapsto K_D$$

が well-defined になる。これは全射であり、一方で d 次のコード図は有限個しかないので、$\mathcal{K}_d/\mathcal{K}_{d+1}$ が有限次元であることがわかる。特に d 次 Vassiliev 不変量の空間 $\mathcal{V}_d$ は有限次元。

(2) さらにこの構成が関係式 FI および 4T を経由することがわかる。補題 1.2.4 を用いると、線型写像

$$\varphi : \mathcal{A}_d/\mathrm{FI} \longrightarrow \mathcal{K}_d/\mathcal{K}_{d+1}$$

が well-defined であることがわかる。特に φ も全射である。実は W_v は合成写像

$$\mathcal{A}_d/\mathrm{FI} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{K}_d/\mathcal{K}_{d+1} \subset \mathcal{K}/\mathcal{K}_{d+1} \xrightarrow{v} \mathbb{F}$$

に一致する。

この議論から線型写像

$$\mathcal{V}_d/\mathcal{V}_{d+1} \longrightarrow \mathcal{W}_d, \quad [v] \longmapsto W_v$$

があるが、

定理 1.2.7 (Kontsevich)**.** $\mathbb{R}$ 上で線形同型 $\mathrm{gr}\,(\mathcal{V}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}$ が存在する。

Kontsevich は上記の線型写像の逆写像を “Vassiliev 不変量の KZ 構成” で明示的に構成した。これについては今回は深く扱わない[*2]。定義体を $\mathbb{R}$ にしているのは、KZ 構成で配置空間上の積分をする必要があるからである。

1.3 Hopf 代数の構造

[B95] と [大槻 15, §6] を参照。

Jacobi 図の空間 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(S^1)$ 上の代数構造の定義を思い出す。

補題 1.3.1. (1) 有向線分 $\downarrow$ の両端をつなげて S^1 をつくることで定まる写像 $\mathcal{A}(\downarrow) \to \mathcal{A}(S^1)$ は線型空間の同型写像。

(2) 有向 1 次元多様体 X の連結成分を 1 つ指定しておく。S^1 とその連結成分の連結和をとることで $\mathcal{A}(S^1)$ の $\mathcal{A}(X)$ への作用が定まる。

(3) $\mathcal{A} = \mathcal{A}(S^1)$ は S^1 と S^1 の連結和をとる操作で可換代数になる。さらに J_{triv} を単位元にもつ。

*2 また機会があればお話しします

$\mathcal{A}$ 上の余積 Δ を

$$\Delta(D) := \sum_{(D',D'')} D' \otimes D''$$

で定める。但し D' は D の（1,3 価グラフの）連結成分をいくつか取り除いたもの、D'' は除いた連結成分からなる Jacobi 図である。

補題 1.3.2. この余積について $\mathcal{A}$ は可換かつ余可換な Hopf 代数。

特に $\mathcal{A}$ は原始的な元で生成される対称代数になる。

$$\mathcal{A} = S(\mathcal{P}), \quad \mathcal{P} \equiv \mathcal{P}(\mathcal{A}) := \{a \in \mathcal{A} \mid \Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a\}.$$

注意 1.3.3. 連結な $1,3$ 価グラフからなる Jacobi 図がはる $\mathcal{A}(S^1)$ の部分空間 $\mathcal{A}(S^1)_{\mathrm{conn}}$ は、$\mathcal{A}(S^1)$ の原始的な元全体のなす部分空間と一致する。

1.4 主定理

さてようやく今回の話の主定理を述べることができる。$\mathcal{A}^*$ を Hopf 代数 $\mathcal{A}$ の graded linear dual とする。$\mathcal{P}(\mathcal{A}^*)$ を原始的な元のなす部分空間とし、その中で次数が 1 でないもののなす部分空間を $\mathcal{P}'$ と書く。

$$\mathcal{P}' := \{a \in \mathcal{P}(\mathcal{A}^*) \mid \deg(a) \neq 1\}$$

定理 1.4.1 (Bar-Natan, Kontsevich, Lin)**.** (1) 対称代数 $S(\mathcal{P}')$ と重み系のなす空間 $\mathcal{W}$ は Hopf 代数として同型。

(2) 定理 1.2.7 の同型 $\mathrm{gr}\,(\mathcal{V}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}$ のもと、$\mathcal{P}'$ の元に対応した Vassiliev 不変量は additive、すなわち結び目の連結和に関して加法的な不変量である。

参考文献

[B95] Bar-Natan, D., *On the Vassiliev knot invariants*, Topology **34** (1995), no. 2, 423–472.

[BL93] Birman, J. S., Lin, X. S., *Knot polynomials and Vassiliev's invariants*, Invent. Math. **111** (1993), 225–270.

[K] Kontsevich, M., *Feynman diagrams and low-dimensional topology.*

[大槻 15] 大槻知忠, **結び目の不変量**, 共立講座 数学の輝き **4** (2015).

[V90] Vassiliev, V. A., *Cohomolgy of knot spaces*, Theory of singularities and its applications, 23–69, Adv. Soviet Math. **1**, Amer. Math. Soc. (1990).

以上です。