種々の VIRASORO 代数の WHITTAKER ベクトル

柳田伸太郎　(RIMS)

Abstract. （アフィン）W 代数の Whittaker ベクトルは、近年 AGT 予想に現れるまで殆ど注目されることがなかった。AGT 予想ではその幾何学的実現が問題になったが、講演では対称函数による組合せ論的実現に関する結果を、Virasoro 代数と変形 Virasoro 代数の場合に紹介した。この報告集ではこれらの場合に加え、講演のアブストラクトで触れていた $N = 1$ 超共形代数の場合を解説する。

Contents

0. はじめに

有限次元 Lie 環の Whittaker ベクトルは Kostant が [Ko78] で導入した概念で、その時の動機は（一般）戸田格子の古典可積分系を表現論的に扱うこと [Ko79] であった。その定義の復習からはじめよう。以下断らない限り全ての対象は複素数体 $\mathbb{C}$ 上定義されているものとする。

定義 0.1. $\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 環、V をその表現とする。$\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ を極大冪零部分 Lie 環とし、$\eta : \mathfrak{n} \to \mathbb{C}$ を中心指標、即ち（$\mathbb{C}$ を自明な Lie 環とみなした時の）Lie 環の準同型とする。

$w \in V$ が η に関する **Whittaker ベクトル**であるとは、任意の $x \in \mathfrak{n}$ に対し $xw = \eta(x)w$ が成立することをいう。

Virasoro 代数も（無限次元ではあるが）Lie 環であり、特に Verma 加群における Whittaker ベクトルを考えることができる。しかしこの Whittaker ベクトルは、AGT 予想の退化版を Gaiotto が考えた [G08] ときまで本格的に扱われることはなかった。

§1.3 で詳しく述べるが、[G08] は AGT 予想 [AGT10] の不確定共形ブロック[1]への退化を述べたもので、特に最も不確定性の高い場合がこの報告で扱う話に対応する。

表面的な説明になるが、Virasoro 代数の Whittaker ベクトルはある種の量子可積分系と関係しており、従来の Whittaker ベクトルが上述のように古典可積分系と関係することの一種の量子化とも思える。これがこの報告で扱う内容の主な動機である。

1. Virasoro 代数の Whittaker ベクトル

この節では（通常の）Virasoro 代数の Whittaker ベクトルを扱う。

Date: October 22, 2015.

[1]irregular conformal block の日本語訳はまだ決まっていないようですが、このように訳しました。

1.1. **Virasoro 代数.** Vir で Virasoro 代数を表すことにする。生成元は L_n（$n \in \mathbb{Z}$）及び C と記す。定義関係式は以下のように通常のものとする。

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{C}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0}, \quad [L_n, C] = 0. \tag{1.1}$$

$\mathrm{Vir}_n := \mathbb{C}L_n$ および $\mathrm{Vir}_0 := \mathbb{C}L_0 \oplus \mathbb{C}C$ と定めれば、Vir の $\mathbb{Z}$ による次数付け $\mathrm{Vir} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Vir}_n$ が決まる。この次数付けは L_0 によるウェイト分解である。またこの次数付けに沿った Vir の三角分解が

$$\mathrm{Vir} = \mathrm{Vir}_+ \oplus \mathrm{Vir}_0 \oplus \mathrm{Vir}_-, \qquad \mathrm{Vir}_\pm := \oplus_{\pm n \in \mathbb{Z}_{>0}} \mathbb{C}L_n$$

で定まる。

普遍包絡環 $\mathcal{U}(\mathrm{Vir})$ の基底として PBW 基底

$$\{L_{-\lambda} L_0^n L_\mu \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \lambda, \mu : 分割\ \} \tag{1.2}$$

を考えることにする。但し分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ に対し $L_\lambda := L_{\lambda_\ell} \cdots L_{\lambda_1}$ 及び $L_{-\lambda} := L_{-\lambda_1} \cdots L_{-\lambda_\ell}$ と定めた。

$c, h \in \mathbb{C}$ に対して、中心荷電 c 及び最高ウェイト h の Verma 加群を $M(c,h)$ と記す。つまり $M(c,h)$ は

$$L_n \left|c,h\right\rangle = 0\ (n>0), \quad L_0 \left|c,h\right\rangle = h \left|c,h\right\rangle, \quad C \left|c,h\right\rangle = c \left|c,h\right\rangle$$

を満たす最高ウェイトベクトル $\left|c,h\right\rangle$ で生成される Vir 加群である。これは自然な L_0 ウェイト分解

$$M(c,h) = \oplus_{n\geq 0} M(c,h)_n, \quad M(c,h)_n := \{v \in M(c,h) \mid L_0 v = (h+n)v\}$$

を持つ。また PBW 基底 (1.2) から $M(c,h)_n$ が

$$\{L_{-\lambda} \left|c,h\right\rangle \mid \lambda \vdash n\} \tag{1.3}$$

を基底にすることも分かる。

同様に双対 Verma 加群を $M(c,h)^*$ と書く。ここでは右加群として定義したものを考える。即ち $M(c,h)^*$ は

$$\left\langle c,h\right| L_n = 0\ (n<0), \quad \left\langle c,h\right| L_0 = h \left\langle c,h\right|, \quad \left\langle c,h\right| C = c \left\langle c,h\right|$$

を満たす最高ウェイトベクトル $\left\langle c,h\right|$ で生成される Vir 右加群である。L_0 ウェイト分解や基底については $M(c,h)$ と同様のことが成立する。

双線形型式 $\cdot : M(c,h)^* \times M(c,h) \to \mathbb{C}$ で以下の性質を満たすものを **Shapovalov 型式**と呼ぶ。

$$\left\langle c,h\right| \cdot \left|c,h\right\rangle = 1, \quad uL_n \cdot v = u \cdot L_n v\ (u \in M(c,h)^*, v \in M(c,h)).$$

2 番目の性質から

$$\left\langle c,h\right| L_\lambda L_{-\mu} \left|c,h\right\rangle := \left\langle c,h\right| L_\lambda \cdot L_{-\mu} \left|c,h\right\rangle$$

と略記しても構わないので、以下そうすることにする。

定義から $|\lambda| \neq |\mu|$ ならば $\left\langle c,h\right| L_\lambda L_{-\mu} \left|c,h\right\rangle = 0$ である。但し分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ に対し $|\lambda| := \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i$ と定義した。また $\left\langle c,h\right| L_\lambda L_{-\mu} \left|c,h\right\rangle = \left\langle c,h\right| L_{-\mu} L_\lambda \left|c,h\right\rangle$. であることも分かる。

Shapovalov 形式を用いて $M(c,h)$ の既約性の判定をすることができる。正方行列

$$K_n := \left(\left\langle c,h\right| L_\lambda L_{-\mu} \left|c,h\right\rangle\right)_{\lambda,\mu\vdash n} \tag{1.4}$$

を考える。但し $\lambda \vdash n$ は λ が n の分割を走ることを意味する。この時

$$任意の\ n\ について\ \det K_n \neq 0 \iff M(c,h)\ は既約$$

が成立する。そこで $\det K_n$ の計算が問題になるが、これに関しては Kac が [Ka79] で以下の因子化公式を予想した。証明は B. Feigin と Fuchs が [FF82] で与えている。

事実 1.1 (Kac の予想 [Ka79], Feigin-Fuchs の定理 [FF82])**.**

$$\det K_n \propto \prod_{\substack{r,s\in\mathbb{Z}_{>0} \\ 1\leq rs\leq n}} (h - h_{r,s})^{p(n-rs)}. \tag{1.5}$$

但し $p(m) := \#\{\lambda \mid \lambda \vdash m\}$ は分割数、零点 $h_{r,s}$ は以下の式で与えられる。

$$h_{r,s} := \frac{1}{48}\left[(13-c)(r^2+s^2) - 24rs - 2(1-c) + \sqrt{(1-c)(25-c)}(r^2-s^2)\right]. \tag{1.6}$$

以下任意の非負整数 n について $\det K_n \neq 0$ となる $(c,h) \in \mathbb{C}^2$ を **generic** であるということにする。即ち gene cit な (c,h) に対して Verma 加群 $M(c,h)$ は既約である。

B. Feigin と Fuchs の証明は Fock 表現（自由場表示）を用いるものである。Fock 表現は我々の Whittaker 表現の実現においても重要になるので、§1.4 で復習することにする。

1.2. **Whittaker ベクトル.** Vir-加群 $M(c,h)$ に Whittaker ベクトルの定義 0.1 を適用したものを考えたいが、実はこのままの定義だと Whittaker ベクトルは存在しない。そこで $M(c,h)$ のかわりに L_0 ウェイト分解に関する完備化 $\widehat{M}(c,h) := \prod_{n\geq 0} M(c,h)_n$ を考えることにする。

定義 1.2. $\xi \in \mathbb{C}$ とする。**（Virasoro 代数の）Whittaker ベクトル** $w(\xi) \in \widehat{M}(c,h)$ とは以下を満たす元のことである。

$$L_1 w(\xi) = \xi w(\xi), \quad L_n w(\xi) = 0 \ (n \geq 2),$$
$$w(\xi) = |c,h\rangle + (L_0\text{-ウェイトに関し高次の項}).$$

双対 Whittaker ベクトル $w^*(\xi) \in \widehat{M}(c,h)^*$ も同様に

$$w^*(\xi) L_{-1} = \xi w^*(\xi), \quad w^*(\xi) L_{-n} = 0 \ (n \geq 2),$$
$$w^*(\xi) = \langle c,h| + \cdots$$

となるもののことをいう。

Kostant の定義 0.1 と比較すると、$w(\xi)$ は $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ を $\mathrm{Vir}_+ \subset \mathrm{Vir}$ に、V を $\widehat{M}(c,h)$ にしたものである。中心指標 $\eta : \mathrm{Vir}_+ \to \mathbb{C}$ について考えると、Vir の定義関係式 (1.1) から Vir_+ が L_1 と L_2 で生成されることが分かるので、η は L_1 と L_2 の行き先で決まる。特に定義 1.2 の $w(\xi)$ は $\eta(L_1) = \xi$, $\eta(L_2) = 0$ で定まる η に関する Whittaker ベクトルであることが分かる。

定義 1.2 から次の補題が比較的に容易に従う。

補題 1.3. $(c,h) \in \mathbb{C}^2$ は generic だと仮定する。この時任意の $\xi \in \mathbb{C}$ に対し $w(\xi)$ は一意に存在し、また

$$w(\xi) = |c,h\rangle + \sum_{n\geq 1} \xi^n w_n \quad w_n \in M(c,h)_n \ (\xi \text{ に依存しない}),$$

の形でかける。さらに w_n 達は以下の関係式を満たす。

$$w_n = L_1 w_{n+1}, \quad L_2 w_n = 0. \tag{1.7}$$

(1.7) を使うと、w_n 達を基底 (1.3) で展開した時の表示を帰納的に決定できる。実際に計算してみると

$$\begin{aligned}
w_1 =& \frac{1}{2h} L_{-1} |c,h\rangle, \\
w_2 =& \frac{(8h+8c)L_{-1}^2 - 12hL_{-2}}{4h(16h^2+2ch-10h+c)} |c,h\rangle, \\
w_3 =& \frac{1}{24h(3h^2+ch-7h+2)(16h^2+2ch-10h+c)} \times \\
& \Big[12h(7h-c-3)L_{-3} - 12(9h^2+3ch-7h+c)L_{-2}L_{-1} + (24h^2-26h+11ch+8c+c^2)L_{-1}^3\Big] |c,h\rangle
\end{aligned}$$

等となる。この分母に現れている有理式は Kac 行列式 (1.5) に他ならない。補題 1.3 において $(c,h) \in \mathbb{C}^2$ を generic としたのはこの事に起因している。

1.3. **Gaiotto の予想（AGT 予想の退化版）.** 2009 年 [AGT10] において物理学者の Alday、Gaiotto と立川は（2 次元）Liouville 場の理論と 4 次元の $N=2$ 超対称性 SU(2) Yang-Mills 理論の等価性を主張した。特に共形場理論の共形ブロック（$\mathbb{P}^1$ 上の 4 点相関関数及びトーラス上の 1 点関数）が Nekrasov 分配函数（$N_f = 4$ 及び adjoint matter 付）に一致するという予想を出した。この函数等式の予想は両辺とも数学的に定式化されている[2]ので、数学者でも理解できる予想である。この予想を **AGT 予想**ないし AGT 対応と呼ぶ。

定義 1.2 の Whittaker ベクトル $w(\xi)$ は Gaiotto による退化版の予想 [G08] に現れる。なおこの予想は既に証明されているので事実として引用する。

事実. $(c,h) \in \mathbb{C}^2$ が generic なら、Whittaker ベクトル $w(\xi)$ と双対 Whittaker ベクトル $w(\xi)^*$ の Shapovalov 型式は階数 2 の（物質場なし）Nekrasov 分配函数に一致する。

$$w^*(\xi) \cdot w(\xi) = Z_{\mathrm{rank}=2}(x; \epsilon_1, \epsilon_2, \overrightarrow{a}).$$

但し両辺のパラメータは以下で対応させる。

Virasoro	Nekrasov
c	$13 + 6(\epsilon_1/\epsilon_2 + \epsilon_2/\epsilon_1)$
h	$(\epsilon_1/\epsilon_2 + \epsilon_2/\epsilon_1 + 2)/4 - (a_2 - a_1)^2/\epsilon_1\epsilon_2$
ξ	$x^{1/2}/(\epsilon_1\epsilon_2)$

[2]但し Liouville 場の共形ブロックについては微妙な点もあります。

ここで Nekrasov 分配函数の定義を思い出しておく。$\mathfrak{M}(r,n)$ で $\mathbb{C}^2$ 上の階数 r、インスタントン数 n のインスタントン・モジュライ空間を記す。これは代数幾何学的には $\mathbb{P}^2$ 上の階数 r、$c_2=n$ の枠付き torsion free 層のモジュライ空間として実現できて、特に次元 $2rn$ の非特異準射影多様体である。また一方で ADHM 構成による記述もある。

$$\mathfrak{M}(r,n) = \left\{ (B_1,B_2,j,k) \;\middle|\; \begin{array}{c} B_1,B_2 \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n), \\ j \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^n), \quad \text{s.t. (1) \& (2)} \\ k \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^r) \end{array} \right\} \Big/ \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

$$(1)[B_1,B_2]+jk=0$$

$$(2)B_i(S)\subset S \text{ かつ } \mathrm{Im}\, j \subset S \text{ なる真部分空間 } S\subset\mathbb{C}^n \text{は存在しない}$$

$\mathfrak{M}(r,n)$ にはトーラス $\mathbb{T}:=T^2\times T^{r-1}$（$T:=\mathbb{C}^\times$）が作用する。ADHM 構成による記述を用いると、この作用は

$$(B_1,B_2,j,k)\longmapsto(t_1B_1,t_2B_2,js^{-1},t_1t_2sk) \quad t_i\in T,\ s=(s_\alpha)_{\alpha=1}^r\in T,\ \prod_\alpha s_\alpha=1 \tag{1.8}$$

と書ける。

Nekrasov は $\mathfrak{M}(r,n)$ の $\mathbb{T}$ 同変積分を用いて 4 次元 $N=2$ 超対称性 Yang-Mills 理論の（変形）分配函数を以下のように導入した。

$$Z^{N_f=0,\mathrm{inst}}_{\mathrm{rank}=r}(x;\epsilon_1,\epsilon_2,\vec{a})\equiv Z_{\mathrm{rank}=r}(x;\epsilon_1,\epsilon_2,\vec{a}):=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\int_{\mathfrak{M}(r,n)}1 \qquad \big(1\in H^*_{\mathbb{T}}(\mathfrak{M}(r,n))\big). \tag{1.9}$$

この同変積分は厳密には局所化定理を用いて定義されるものであり、その結果、この函数の x の係数は $H^*_{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})$ の商体の元である。$\mathbb{T}=T^2\times T^{r-1}$ にあわせて $\mathbb{T}$ の表現環を

$$\mathrm{Rep}(\mathbb{T})=\mathbb{Z}[e^{\pm\epsilon_1},e^{\pm\epsilon_2},e^{\pm\vec{a}}]$$

と表すことにする。$\mathbb{T}$ 作用 (1.8) の記号と対応させると $t_1=e^{\epsilon_1}$、$t_2=e^{\epsilon_2}$、$s_\alpha=e^{a_\alpha}$ としている。同変コホモロジーの一般論から $H^*_{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})\simeq\mathrm{Lie}(\mathrm{Rep}(\mathbb{T}))$ なので、分配函数 (1.9) は $\mathbb{Q}(\epsilon_1,\epsilon_2,\vec{a})[[x]]$ の元であることが分かる。

$\mathbb{T}$ 同変コホモロジーの局所化定理を用いると、以下のような組み合わせ論的な表示が得られる。

$$Z(x;\epsilon_1,\epsilon_2,\vec{a})=\sum_{\vec{Y}}\frac{x^{|\vec{Y}|}}{\prod_{1\le\alpha,\beta\le r}n^{\vec{Y}}_{\alpha,\beta}(\epsilon_1,\epsilon_2,\vec{a})},$$

$$n^{\vec{Y}}_{\alpha,\beta}(\epsilon_1,\epsilon_2,\vec{a}):=\prod_{\square\in Y_\alpha}\left[-l_{Y_\beta}(\square)\epsilon_1+(a_{Y_\alpha}(\square)+1)\epsilon_2+a_\beta-a_\alpha\right]$$
$$\times\prod_{\blacksquare\in Y_\beta}\left[(l_{Y_\alpha}(\blacksquare)+1)\epsilon_1-a_{Y_\beta}(\blacksquare)\epsilon_2+a_\beta-a_\alpha\right].$$

但し分割 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_\ell)$ と箱 $\square=(i,j)\in\mathbb{Z}^2$ に対し $a_\lambda(\square)$ と $l_\lambda(\square)$ を

$$a_\lambda(\square):=\lambda_i-j,\quad l_\lambda(\square):=\lambda'_j-i \tag{1.10}$$

で定義した。但し λ_i は $1\le i\le\ell$ でなければ 0 と約束する。また λ' は λ の転置である。

1.4. **Fock 表現.** Virasoro 代数 Vir の Verma 加群 $M(c,h)$ は $(c,h)\in\mathbb{C}^2$ が generic なら以下に述べる Fock 表現と同型であって、具体的な同型が知られている（ボソン化、自由場表示とも呼ばれる）。Fock 表現は対称函数の空間と同一視できるので、Whittaker ベクトル $w(\xi)$ を対称函数とみなすことができる。この対称函数が実は明示公式を持つ、というのがこの節の主定理 1.7 である。

この明示公式では **Jack 対称函数** $P_\lambda(\beta)$ が用いられる。Vir の表現論と Jack 対称函数の関係は三町と山田の仕事 [MY95] に遡る。そこでは、Verma 加群 $M(c,h)$ の**特異ベクトル**の対称函数による実現が、長方形の Young 図形に対応する分割に付随した $P_{(r^s)}(\beta)$ と一致するというものであった。

この副節ではまず Virasoro 代数の Fock 表現について必要な事項を説明する。

Vir の Fock 加群を導入するために Heisenberg Fock 空間を思い出すことにする。生成元が a_n（$n\in\mathbb{Z}$)、関係式が

$$[a_n,a_m]=n\delta_{n+m,0}a_0$$

で与えられる Heisenberg 代数を Heis と記すことにする。$\mathrm{Heis}_n:=\mathbb{C}a_n$ とすれば Heis の $\mathbb{Z}$-grading $\mathrm{Heis}=\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Heis}_n$ で定まる。これは a_0 ウェイト分解でもある。

最高ウェイト $\alpha\in\mathbb{C}$ の Fock 加群を $F(\alpha)$ と書くことにする。つまり $F(\alpha)$ は

$$a_0\left|\alpha\right\rangle_F=\alpha\left|\alpha\right\rangle_F,\quad a_n\left|\alpha\right\rangle_F=0\ (n\in\mathbb{Z}_{>0})$$

を満たす最高ウェイトベクトル $|\alpha\rangle$ で生成される Heis 加群である。これは

$$\{a_{-\lambda}\left|\alpha\right\rangle_F \mid \lambda:\text{分割}\} \tag{1.11}$$

を基底に持つ。但し分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ に対し $a_\lambda := a_{\lambda_\ell} \cdots a_{\lambda_1}$ 及び $a_{-\lambda} := a_{-\lambda_1} \cdots a_{-\lambda_\ell}$ とした。また $F(\alpha)_n := \{v \in F(\alpha) \mid a_0 v = (n+\alpha)v\}$ と置くと、$F(\alpha)$ の a_0 ウェイト分解が $F(\alpha) = \oplus_{n\ge 0} F(\alpha)_n$ と書ける。

以上の準備のもとで Vir の自由場表示は次のように説明できる。

事実 1.4 (Feigin-Fuchs [FF82]). $\rho \in \mathbb{C}$ に対し以下の写像は代数準同型を定める。

$$\begin{array}{rccl} \iota(\rho): & \mathcal{U}(\mathrm{Vir}) & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{U}}(\mathrm{Heis}) \\ & C & \longmapsto & c(\rho) := 1 - 12\rho^2 \\ & L_n & \longmapsto & \mathcal{L}_n := \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} {}^\circ_\circ a_m a_{n-m} {}^\circ_\circ - (n+1)\rho a_n \end{array} \tag{1.12}$$

但し $\widehat{\mathcal{U}}(\mathrm{Heis})$ は Heis の $\mathbb{Z}$-grading に関する完備化、${}^\circ_\circ \; {}^\circ_\circ$ は Heis の正規積。

ここらか直ちに線形写像

$$\begin{array}{rccc} \wp(\alpha,\rho): & M\left(c(\rho), h(\alpha,\rho)\right) & \longrightarrow & F(\alpha) \\ & L_{-\lambda} \left|c(\rho), h(\alpha,\rho)\right\rangle & \longmapsto & \mathcal{L}_{-\lambda} \left|\alpha\right\rangle_F \end{array}$$

で $F(\alpha)$ が Vir 加群になることが分かる。但し

$$h(\alpha,\rho) := \frac{1}{2}\left((\alpha-\rho)^2 - \rho^2\right). \tag{1.13}$$

特に $F(\alpha)$ は最高ウェイト Vir 加群であって、C は $c(\rho)$ 倍で、L_0 は $h(\alpha,\rho)$ 倍で最高ウェイトベクトル $\left|\alpha\right\rangle_F$ に作用する。

1.5. **特異ベクトルと Jack 対称函数.** 次に Fock 空間と対称函数の空間の同一視を述べる。そのために対称函数に関する記号を用意しておく。

Λ で $\mathbb{Z}$ 係数の対称函数の空間を表すことにする。Λ_n を n 次の対称函数の空間とすれば $\Lambda = \oplus_{n\ge 0}\Lambda_n$ である。また環 A に対し $\Lambda_A := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} A$ 及び $\Lambda_{n,A} := \Lambda_n \otimes_{\mathbb{Z}} A$ で係数拡大を表すことにする。

Λ の古典的な基底を幾つか導入しよう。モノミアル対称函数を

$$m_\lambda(x) := \sum_{\alpha:\lambda\text{の異なる置換}} x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \cdots x_{\alpha_\ell}$$

と書くと、$\{m_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ は Λ_n の基底である。ここで $\lambda \vdash n$ は (1.4) と同様 λ が n の分割を走ることを意味する。また冪和対称函数

$$p_k = p_k(x) := \sum_i x_i^k \in \Lambda_k, \quad p_\lambda := p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_\ell}$$

については、$\{p_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ が $\Lambda_{n,\mathbb{Q}}$ の基底になる。

$\beta \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする。Heisenberg Fock 空間 $F(\alpha)$ と $\mathbb{C}$ 係数対称函数の空間 $\Lambda_{\mathbb{C}}$ との線形同型を

$$\varsigma(\beta): F(\alpha) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathbb{C}}, \quad a_{-\lambda}\left|\alpha\right\rangle_F \longmapsto \sqrt{\beta/2}\, p_\lambda$$

で定める。この同型はさらに

$$a_n \longmapsto n\sqrt{\frac{2}{\beta}} \frac{\partial}{\partial p_n} \quad (n>0)$$

で $\Lambda_{\mathbb{C}}$ を Heis 加群と見なせば表現としての同型になる。特に Vir の自由場表示 (1.12) によって $\Lambda_{\mathbb{C}}$ を Vir 加群と見なすことができる。generic な $(c,h) \in \mathbb{C}$ に対してこの加群は既約であり、Verma 加群 $M(c,h)$ と同型である。

前節の自由場表示と合わせると、Verma 加群 $M(c,h)$ から対称函数の空間 $\Lambda_{\mathbb{C}}$ への写像が $\wp(\alpha,\rho)$ と $\varsigma(\beta)$ の合成で定義できる。ここで天下りになるが、ρ と β を

$$\rho = \rho(\beta) := \left(\sqrt{\beta} - 1/\sqrt{\beta}\right)/\sqrt{2} \tag{1.14}$$

で関係させる。このとき (1.12) の $c = c(\rho)$ は

$$c = c(\beta) := 13 - 6(\beta + 1/\beta) \tag{1.15}$$

と読み替えられる。また以降簡単のため

$$h(\alpha,\beta) := h\left(\alpha, \rho(\beta)\right)$$

と略記することにする[3]。これら β を使う表示を用いて Verma 加群から $\Lambda_{\mathbb{C}}$ への写像を

$$s(\alpha,\beta): M\left(c(\beta), h(\alpha,\beta)\right) \xrightarrow{\wp(\alpha,\rho(\beta))} F(\alpha) \xrightarrow{\varsigma(\beta)} \Lambda_{\mathbb{C}} \tag{1.16}$$

と定義しよう。これで Verma 加群の元を対称函数と思うことができる。

同型 $\varsigma(\beta)$ の定義では冪和対称函数を用いたが、ここで別の Λ の基底を与える、Jack 対称函数を導入しよう。

[3]記号 $c(-)$ 及び $h(-)$ が重複してしまいましたが、お許しください。

事実. $\beta\in\mathbb{C}$ とする。各分割 λ に対し、以下の性質で特徴付けられる対称函数 $P_\lambda(\beta)=P_\lambda(x;\beta)$ が唯一存在する。これを Jack 対称函数という。

(1) $P_\lambda(\beta)$ はモノミアル対称函数での展開に関し三角性を持つ。

$$P_\lambda(\beta)=m_\lambda+\sum_{\mu<\lambda}c_{\lambda,\mu}(\beta)m_\mu,\quad c_{\lambda,\mu}(\beta)\in\mathbb{C}.$$

但し分割の順序 $<$ はドミナンス半順序とする。

$$\lambda\geq\mu\overset{\text{def}}{\iff}|\lambda|=|\mu|,\quad \sum_{k=1}^{i}\lambda_k\geq\sum_{k=1}^{i}\mu_k\ (i=1,2,\ldots). \tag{1.17}$$

(2) $P_\lambda(\beta)$ は $H(\beta):=\varprojlim_N H^{(N)}(\beta)$ の固有関数。但し

$$H^{(N)}(\beta):=\sum_{i=1}^{N}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2+\beta\sum_{1\leq i<j\leq N}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}-x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

は N 変数対称多項式に作用する微分作用素であり、$H(\beta)$ は変数の数 N に関する極限。

(1) の三角性より、Jack 対称函数の族 $\{P_\lambda(\beta)\mid\lambda\vdash n\}$ は $\Lambda_{n,\mathbb{C}}$ の基底になることが分かる。また (2) の $H^{(N)}(\beta)$ は Calogero-Sutherland ハミルトニアンのゲージ変換である。そのため $H(\beta)$ 自身を Calogero-Sutherland ハミルトニアンと呼ぶこともある。詳しくは白石 [白石 03, 第 2 章] を参照。

Jack 対称函数と Virasoro 代数の特異ベクトルに関する三町と山田の定理 [MY95] を結果だけここで復習する。

$v\in M(c,h)_n$ は任意の $n\in\mathbb{Z}_{ge1}$ について $L_nv{=}0$ が成立する時（レベル n の）特異ベクトルと呼ばれる。事実 1.1 の Kac 行列式の因子化公式 (1.5) より、$h=h_{r,s}$ ならレベル rs に特異ベクトルが定数倍を除いて一意に存在する。それを $\chi_{r,s}$ と書く。

以下 $\beta\in\mathbb{C}^*$ を固定する。写像 $s(\alpha,\beta)$ による $\chi_{r,s}$ の像を考えたいが、そのために $h\,(\alpha,\beta)=h_{r,s}$ となる α を決定する。β を使った読み替え (1.15) を用いると $h_{r,s}$ は

$$h_{r,s}=h_{r,s}(\beta):=\frac{\left((\beta r-s)^2-(\beta-1)^2\right)}{4\beta}$$

と書ける。これを使うと

$$h\,(\alpha,\beta)=h_{r,s}(\beta)\iff\alpha=\alpha_{r,s}:=\frac{1}{\sqrt{2}}\left((s+1)\sqrt{\beta}-(r+1)/\sqrt{\beta}\right)$$

となることが分かる。なお (1.14) の $\rho(\beta)$ は $\alpha_{0,0}$ に一致する。

以上の準備により対称函数

$$s(\alpha_{r,s},\beta)(\chi_{r,s})\in\Lambda_{n,\mathbb{C}}$$

を考えることができる。

事実 1.5 ([MY95])**.** Vir の特異ベクトル $\chi_{r,s}$ の自由場表示 $s(\alpha_{r,s},\beta)(\chi_{r,s})$ は Jack 対称函数 $P_{(s^r)}(\beta)$ に比例する[4]。

$$s(\alpha_{r,s},\beta)(\chi_{r,s})\propto P_{(s^r)}(\beta). \tag{1.18}$$

Jack 対称函数と Virasoro 代数の関係は Calogero-Sutherland ハミルトニアン $H(\beta)$ の $\widehat{\mathcal{U}}(\text{Heis})$ での実現にも現れる。$\beta,\rho\in\mathbb{C}$ に対し、$\widehat{\mathcal{U}}(\text{Heis})$ の元 $\widehat{E}(\beta,\rho)$ を

$$\widehat{E}(\beta,\rho):=\sqrt{2\beta}\sum_{n>0}a_{-n}\mathcal{L}_n+\sum_{n>0}a_{-n}a_n\left(\beta-1-\sqrt{2\beta}a_0\right)$$

で定義する。ここで $\mathcal{L}_n$ は Vir の自由場表示 (1.12) に現れたものであり、そこにパラメータ ρ が入っている。

事実 1.6 ([AMOS])**.** 同型 $\varsigma:F(\alpha)\simeq\Lambda_{\mathbb{C}}$ のもと $E(\beta,\rho)$ を $\Lambda_{\mathbb{C}}$ 上の作用素と見なすと

$$E\,(\beta,\rho(\beta))=H(\beta),$$

---

[4] この主張は [AMOS] に従っていて、[MY95] のものとは一見違います。[MY95] では同型 $\varsigma(\beta)$ のかわりに $\varsigma'(\beta)\,:\,a_{-n}\longmapsto(-1)^{n-1}\sqrt{2\beta}$ を用いていて、合成 $s'(\alpha,\beta):=\varsigma'(\beta)\circ\wp(\alpha,\rho(\beta)):M(c(\beta),h(\alpha,\beta))\longrightarrow\Lambda_{\mathbb{C}}$ によって

$$s'(\alpha_{r,s},\beta)(\chi_{r,s})\propto P_{(r^s)}(\beta)$$

となることが証明されています。(1.18) とこの関係式は $\Lambda_{\mathbb{C}}$ の自己同型 $\omega_\beta:p_n\longmapsto(-1)^{n-1}\beta p_n$ で $\omega_\beta(P_\lambda(\beta))\propto P_{\lambda'}(1/\beta)$ となる [M95, Chap. VI, §10] ことから同値だとが分かります。

なおこの説明で使った記号も [MY95] の記号とは違っていて、パラメータの対応は $\beta=t_{\text{MY}}$, $(s,r)=(r_{\text{MY}},s_{\text{MY}})$, $\rho=\alpha_{0,\text{MY}}$ となっています。ここで [MY95] の記号に添え字に MY を付けました。

1.6. **Whittaker ベクトルの明示公式.** 以上の準備の下、ようやく主定理を述べる事ができる。ここで紹介する公式は、もともと粟田と山田が [AY10] で予想した、変形 Virasoro 代数の Whittaker ベクトルの明示公式の退化版として筆者が [Y11] で考えたものである。変形版については次節 §2 で扱うことにする。

$\wp$ と ς の合成 (1.16)

$$s(\alpha,\beta) : M\left(c(\beta), h\left(\alpha,\beta\right)\right) \xrightarrow{\wp(\alpha,\rho(\beta))} F(\alpha) \xrightarrow{\varsigma(\beta)} \Lambda_{\mathbb{C}}$$

を思い出そう。(α,β) を generic にとると $\wp$ が同型になることから $s(\alpha,\beta)$ も同型になる。

定理 1.7 ([Y11])**.** (α,β) を generic にとる。同型 $s(\alpha,\beta) : M\left(c(\beta), h\left(\alpha,\beta\right)\right) \simeq \Lambda_{\mathbb{C}}$ のもと、Whittaker ベクトル $w(\xi) = \sum_{n\geq 0} \xi^n w_n \in \widehat{M}\left(c(\beta), h\left(\alpha,\beta\right)\right)$ は次のように表示できる。

$$s_{\alpha,\beta}(w_n) = \sum_{\lambda\vdash n} c_\lambda(\alpha,\beta) P_\lambda(\beta) \in \Lambda_{n,\mathbb{C}},$$

$$c_\lambda(\alpha,\beta) = \prod_{\square\in\lambda} \frac{1}{a_\lambda(\square)+1+\beta l_\lambda(\square)} \prod_{(i,j)\in\lambda\setminus\{(1,1)\}} \frac{\beta}{(j+1)+\sqrt{2\beta}\alpha-(i+1)\beta}.$$

但し $a_\lambda(\square)$ と $l_\lambda(\square)$ は (1.10) で定義した arm と leg。

証明は、Calogero-Sutherland ハミルトニアンの自由場表示 $\widehat{E}_\beta$ と Jack 対称多項式の Pieri 公式を用いて c_λ の漸化式を導出し、上記の関数がそれを満たすことをチェックする。

2. 変形 Virasoro 代数の Whittaker ベクトル

Nekrasov 分配函数と Virasoro 代数には双方とも q 類似がある。そこで AGT 予想にも q 類似があるはず、と考えて発見されたのが粟田と山田の予想 [AY10] である。そこでは Virasoro 代数の q 類似である変形 Virasoro 代数 [SKAO] の Whittaker ベクトルが定義されており、さらに Macdonald 対称函数を用いた明示公式の予想もされている。この節ではその周辺の解説をする。

2.1. **変形 Virasoro 代数とその Whittaker ベクトル.** §1.4 の冒頭でも触れたように、三町と山田 [MY95] によって Virasoro 代数の Verma 加群の特異ベクトルは Jack 対称函数で実現できる。一方で Jack 対称函数の q 類似として Macdonald 対称函数 [M88, M95] がある。そこで、Virasoro 代数の q 変形であって特異ベクトルに Macdonald 対称函数が現れるようなものはないか、と考えたのが白石・久保・粟田・小竹 [SKAO] である。

定義 ([SKAO])**.** $q,t\in\mathbb{C}^*$ を q と t 及び q/t がどれも 1 の冪根でないように取る。生成元 T_n（$n\in\mathbb{Z}$）と定義関係式

$$[T_n,T_m] = -\sum_{l=1}^{\infty} f_l(T_{n-l}T_{m+l} - T_{m-l}T_{n+l}) - \frac{(1-q)(1-t^{-1})}{1-q/t}\left((q/t)^n - (q/t)^{-n}\right)\delta_{n+m,0}$$

で定義される結合代数を変形 Virasoro 代数と呼び、$\mathrm{Vir}_{q,t}$ と書く。但し f_l 達は

$$\sum_{l=0}^{\infty} f_l z^l = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)(1-t^{-n})}{1+(q/t)^n}\frac{z^n}{n}\right]$$

で定義する。

定義関係式に無限和が現れるので注意が必要だが、$\mathrm{Vir}_{q,t}$ は well-defined である。もちろん Lie 環の包絡環にはならないし、頂点代数の構造すら入らない。しかしそれでも Virasoro 代数の変形だと呼ばれているのは、

$$t = e^{\beta\hbar}, \quad q = e^{\hbar}, \quad \hbar\to 0 \tag{2.1}$$

の極限で $T(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_n z^{-n}$ を

$$T(z) = 2 + \beta\hbar^2\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n} + \frac{(1-\beta)^2}{4\beta}\right) + O(\hbar^4)$$

と展開して L_n を定めると、これらが Virasoro 代数の定義関係式を満たすことによる。但し中心荷電は $c = 1-6(1-\beta)^2/\beta$ で[5]与えられる。

$\deg T_n := -n$ で $\mathrm{Vir}_{q,t}$ は $\mathbb{Z}$-grading を持つ。最高ウェイト $h\in\mathbb{C}$ の Verma 加群 $M(h)$ を

$$T_n\left|h\right\rangle = 0\ (n>0), \quad T_0\left|h\right\rangle = h\left|h\right\rangle$$

を満たす $\left|h\right\rangle$ で生成される $\mathrm{Vir}_{q,t}$ 加群として定義する。$M(h)$ も $\mathrm{Vir}_{q,t}$ の次数から誘導される次数付けを持っていて、$M(h) = \oplus_{n\geq 0} M(h)_n$ となっている。

$\left\langle h\right|$ で生成される双対 Verma 加群（右加群）$M(h)^*$ も Virasoro 代数の時と同様に定義できる。

[5]前節の自由場表示で現れた式 (1.15) と同じですね。

変形版の Shapovalov 形式も定義することが可能である。即ち

$$\langle h|\cdot|h\rangle=1,\quad \langle h|\,u_1u\cdot u_2\,|h\rangle=\langle h|\,u_1\cdot uu_2\,|h\rangle$$

を満たす双線形形式 $\cdot : M_h^*\times M_h\to\mathbb{C}$ が一意に定まる。

Shapovalov 型式に関しては Kac 行列式の因子化公式 (1.5) の類似が成立する。Vir の時と同様に、正方行列 K_n を次数 n の部分空間に制限した Shapovalov 形式で定める。

事実 ([SKAO] の予想、[BP98] の定理)**.**

$$\det K_n\propto\prod_{r,s\geq1\, rs\leq n}(h^2-h_{r,s}^2)^{p(n-rs)},\quad h_{r,s}:=q^{-s/2}t^{r/2}+q^{s/2}t^{-r/2}.$$

どの n についても $\det K_n\neq 0$、即ち $M(h)$ が既約になる $(q,t,h)\in\mathbb{C}^3$ を generic と呼ぶことにする。

$v\in M(h)_n$ は任意の $n\in\mathbb{Z}_{ge1}$ について $T_nv{=}0$ が成立する時（レベル n の）特異ベクトルと呼ばれる。上の行列式公式から $h=h_{r,s}$ の場合レベル rs に特異ベクトルが定数倍を除いて一意に存在することが分かる。

さて、$M(h)$ に関して Whittaker ベクトルの類似を考えたいのだが、Lie 環や冪零部分環の構造がないので少し躊躇する。しかし、以下のように結果だけみると素直な類似になっている。Virasoro 代数の時と同様、$\mathbb{Z}$-grading に関する $M(h)$ の完備化を $\widehat{M}(h)$ と書こう。

定義 ([AY10])**.** $\xi\in\mathbb{C}$ とする。$w_{q,t}(\xi)\in\widehat{M}(h)$ で次の条件を満たすものを**（変形 Virasoro 代数の）Whittaker ベクトル**と呼ぶ。

$$w_{q,t}(\xi)=|h\rangle+(\text{高次項}),\qquad T_1w_{q,t}(\xi)=\xi w_{w,t}(\xi),\quad T_nw_{q,t}(\xi)=0\ (n\geq 2).$$

双対 Whittaker ベクトル $w_{q,t}^*(\xi)$ も同様に定義される。

2.2. K **理論的 AGT 予想.** Gaiotto の予想の K 理論版である粟田・山田の予想 [AY10] をここで紹介しよう。

K 理論的 Nekrasov 分配函数は、インスタントン・モジュライ空間 $\mathfrak{M}(r,n)$ の $\mathbb{T}$ 同変 K 理論を用いて

$$Z^K_{\text{rank}=r}(x;\epsilon_1,\epsilon_2,\overrightarrow{a}):=\sum_{n=0}^{\infty}(xe^{-r(\epsilon_1+\epsilon_2)/2})^n\sum_i(-1)^i\operatorname{ch}_{\mathbb{T}}\left[H^i\left(\mathfrak{M}(r,n),\mathcal{O}\right)\right]$$

で定義される。ここで $\operatorname{ch}_{\mathbb{T}}$ は $\mathbb{T}$ 作用に関する指標の意味である。また §1.3 と同様のパラメータ

$$\operatorname{Rep}(\mathbb{T})=\mathbb{Z}[e^{\pm\epsilon_1},e^{\pm\epsilon_2},e^{\pm a_\alpha}]$$

を考えていて、結果としてこの分配函数は $\mathbb{Q}(e^{\pm\epsilon_1},e^{\pm\epsilon_2},e^{\pm a_\alpha})$ に係数を持つ級数である。§1.3 の (1.9) で導入した（コホモロジー的）Nekrasov 分配函数 $Z_{\text{rank}=r}(x;\epsilon_1,\epsilon_2,\overrightarrow{a})$ は実は

$$Z_{\text{rank}=r}(x;\epsilon_1,\epsilon_2,\overrightarrow{a})=\lim_{\hbar\to0}Z^K_{\text{rank}=r}(x;\hbar\epsilon_1,\hbar\epsilon_2,\hbar\overrightarrow{a})$$

と K 理論版の退化になっている。局所化定理による組合せ論的表示も同様の関係があり、

$$Z^K_{\text{rank}=r}(x;\epsilon_1,\epsilon_2,\overrightarrow{a})=\sum_{\overrightarrow{Y}}\frac{x^{|\overrightarrow{Y}|}}{\prod_{1\leq\alpha,\beta\leq r}N_{\alpha,\beta}^{\overrightarrow{Y}}},$$

$$N_{\alpha,\beta}^{\overrightarrow{Y}}:=\prod_{\square\in Y_\alpha}\left(1-\exp\left[l_{Y_\beta}(\square)\epsilon_1-(a_{Y_\alpha}(\square)+1)\epsilon_2-a_\beta+a_\alpha\right]\right)$$
$$\times\prod_{\blacksquare\in Y_\beta}\left(1-\exp\left[-(l_{Y_\beta}(\blacksquare)+1)\epsilon_1+a_{Y_\alpha}(\blacksquare)\epsilon_2-a_\beta+a_\alpha\right]\right)$$

と明示できる。

以上の準備の下、[AY10] の予想を述べることができる。これには幾何学を用いない証明が与えられている。

定理 2.1 ([Y2])**.** (q,t,h) が generic なら

$$w_{q,t}^*(\xi)\cdot w_{q,t}(\xi)=Z^K_{\text{rank}=2}(x;\epsilon_1,\epsilon_2,\overrightarrow{a})$$

但しパラメータの対応は以下の通り。

$\mathrm{Vir}_{q,t}$	Nekrasov
q	$e^{-\epsilon_1}$
t	e^{ϵ_2}
h	$e^{(a_1-a_2)/2}+e^{(a_2-a_1)/2}$
ξ	$x^{1/2}$

2.3. Fock 表現と Macdonald 対称函数. 粟田と山田は [AY10] で $w_{q,t}(\xi)$ の明示化も予想した。これが定理 1.7 のもとになった予想である。Virasoro 代数の時と同様、$\mathrm{Vir}_{q,t}$ の自由場表示に基づく実現なので、自由場表示の話から復習することにする。

引き続き $q,t\in\mathbb{C}^*$ は q と t 及び q/t が 1 の冪根でないように取っているものとする。$\mathrm{Heis}_{q,t}$ を $\{b_n \mid n\in\mathbb{Z}\}$ で生成され

$$[b_n,b_m]=n\frac{1-q^{|n|}}{1-t^{|n|}}\delta_{n+m,0}b_0$$

を定義関係式とする Lie 代数とする。また

$$b_0\left|\alpha\right\rangle_F=\alpha\left|\alpha\right\rangle_F,\quad b_n\left|\alpha\right\rangle_F=0\ (n>0)$$

なる $\left|\alpha\right\rangle_F$ で生成される $\mathrm{Heis}_{q,t}$ 加群を $F(\alpha)$ で表し Fock 加群と呼ぶ。

事実 ([SKAO])**.** 代数準同型 $\iota_{q,t}:\mathrm{Vir}_{q,t}\to\widehat{\mathcal{U}}(\mathrm{Heis}_{q,t})$ が以下で定まる。

$$T(z)\longmapsto\mathcal{T}(z)=\Lambda_+(z)+\Lambda_-(z),$$

$$\Lambda_\pm(z):=(q/t)^{\pm1/2}\exp\left[\mp\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-t^n}{1+(q/t)^n}\frac{b_{-n}}{n}t^{-n}(q/t)^{\mp n/2}z^n\right]\exp\left[\pm\sum_{n=1}^{\infty}(1-t^n)\frac{b_n}{n}(q/t)^{\pm n/2}z^{-n}\right]t^{\pm b_0}.$$

また線形写像

$$\wp_{q,t}(\alpha):\ M\left(h_{q,t}(\alpha)\right)\longrightarrow F(\alpha),\quad T_{-\lambda}\left|h_{q,t}(\alpha)\right\rangle\longmapsto\mathcal{T}_{-\lambda}\left|\alpha\right\rangle_F$$

は $\iota_{q,t}$ と整合的。但し

$$h_{q,t}(\alpha):=(q/t)^{1/2}t^{\alpha}+(q/t)^{-1/2}t^{-\alpha}. \tag{2.2}$$

§1.4 と同様、線形同型

$$\varsigma:F(\alpha)\longrightarrow\Lambda_{\mathbb{C}},\qquad b_{-\lambda}\left|\alpha\right\rangle_F\longmapsto p_\lambda$$

は $\mathrm{Heis}_{q,t}$ 加群の同型に拡張される。これと $\wp_{q,t}(\alpha)$ との合成を

$$s_{q,t}(\alpha):M(h_{q,t}(\alpha))\xrightarrow{\wp_{q,t}(\alpha)}F(\alpha)\xrightarrow{\varsigma}\Lambda_{\mathbb{C}}$$

と書く。$\alpha\in\mathbb{C}$ が generic なら $\wp_{q,t}(\alpha)$ は同型であり、$s_{q,t}(\alpha)$ も同型である。

次に Macdonald 対称函数を導入する。

事実. 任意の分割 λ に対し Macdonald 対称函数 $P_\lambda(q,t)\in\Lambda_{\mathbb{C}}$ が次の 2 条件で一意に決定される。

(1) モノミアル対称函数に関する三角性。

$$P_\lambda^{(q,t)}=m_\lambda+\sum_{\mu<\lambda}c_{\lambda,\mu}m_\mu\quad(c_{\lambda,\mu}\in\mathbb{C}).$$

ここで分割の順序は Jack 対称函数の時と同じドミナンス半順序 (1.17) とする。

(2) Macdonald 内積に関する直交性。

$$\langle P_\lambda(q,t),P_\mu(q,t)\rangle_{q,t}=0\quad\text{ for }\mu\neq\lambda.$$

ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle_{q,t}$ は次の式で定まる $\Lambda_{\mathbb{C}}$ 上の内積である。

$$\langle p_\lambda,p_\mu\rangle_{q,t}:=\delta_{\lambda,\mu}z_\lambda\prod_{k\geq1}\frac{1-q^{\lambda_k}}{1-t^{\lambda_k}}.$$

但し分割 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell)$ に対し $m_i(\lambda):=\#\{1\leq j\leq\ell\mid\lambda_j=i\}$ を用いて $z_\lambda:=\prod_{i\geq1}i^{m_i(\lambda)}m_i(\lambda)!$ と定めた。

m_λ での展開に関する三角性から $\{P_\lambda(q,t)\mid\lambda\vdash n\}$ は $\Lambda_{n,\mathbb{C}}$ の基底になる。Macdonald 対称函数はパラメータを退化させると古典的に知られている対称函数を復元する。Figure 1 の退化図式では、$P_\lambda(\beta)$ が Jack 対称函数、$\widetilde{P}_\lambda(q)$ が Hall-Littlewood 対称函数（[M95, Chap. III]）、s_λ が Schur 対称函数である。

$$\begin{tikzcd}
& P_\lambda(\beta) \arrow[dr, "\beta\to1"] & \\
P_\lambda(q,t) \arrow[ur, "t=q^\beta,\ q\to1"'] \arrow[dr, "t\to0"'] & & s_\lambda \\
& \widetilde{P}_\lambda(q) \arrow[ur, "q\to0"'] &
\end{tikzcd}$$

FIGURE 1. 対称函数の退化図式

Macdonald 対称函数と変形 Virasoro 代数との関係の一つとして特異ベクトルに関する次の事実があげられる。§2.1 の最後に述べたように、$h = h_{r,s}$ であれば $M(h)_{rs}$ に特異ベクトルが定数倍を除いて一意に存在する。それを $\chi_{r,s}$ と書くことにしよう。また (2.2) の $h_{q,t}(\alpha)$ を用いて $h_{q,t}(\alpha_{r,s}) = h_{r,s}$ で $\alpha_{r,s}$ を定めることにする。

事実 2.2 ([SKAO]). $\mathrm{Vir}_{q,t}$ の特異ベクトル $\chi_{r,s}$ の自由場表示 $s_{q,t}(\alpha_{r,s})(\chi_{r,s})$ は Macdonald 対称函数 $P_{(s^r)}(q,t)$ に比例する。

直交性を用いて Macdonald 対称函数を導入したが、実は Jack 対称函数の時と同様、作用素の固有函数としても特徴付けができる[6]。但し今回必要になるのは差分作用素である。

N 変数函数 $f(x_1,\dots,x_N)$ の変数 x_i に作用する q 差分作用素 T_{q,x_i} を次のように書く。

$$T_{q,x_i} f(x_1,\dots,x_N) := f(x_1,\dots,qx_i,\dots,x_N).$$

そして整数 $1 \le r \le N$ について差分作用素[7]

$$D_r^{(N)}(q,t) := \sum_{\substack{J\subset\{1,2,\dots,N\}\\ \#J=r}} \Big[t^{r(r-1)/2} \prod_{\substack{j\in J\\ k\notin J}} \frac{tx_j - x_k}{x_j - x_k} \prod_{j\in J} T_{q,x_j} \Big]$$

を考える。すると各分割 λ に対し N 変数対称多項式 $P_\lambda^{(N)}(x;q,t)$ がモノミアル対称多項式に関する三角性と固有方程式

$$D_1^{(N)}(q,t) P_\lambda^{(N)}(x;q,t) = P_\lambda^{(N)}(x;q,t)\cdot(\text{固有値}).$$

で一意に決定される。ここで固有方程式には $D_r^{(1)}(q,t)$ のみが現れているが、実際には $P_\lambda^{(N)}(x;q,t)$ は差分作用素族 $\{D_r^{(N)}(q,t) \mid 1 \le r \le N\}$ の同時固有函数になっている。

Jack 対称函数で用いた Calogero-Sutherland ハミルトニアン $H(\beta) = \varprojlim_N H^{(N)}(\beta)$ のように $D^{(N)}(q,t)$ の極限を考えたいが、実はこの作用素は対称多項式の制限写像

$$\Lambda_{\mathbb{C}}^{(M)} \longrightarrow \Lambda_{\mathbb{C}}^{(N)}, \quad x_i \longmapsto 0 \ (i > N)$$

と整合的ではない。ここで $\Lambda_{\mathbb{C}}^{(N)} := \mathbb{C}[x_1,\dots,x_N]^{\mathfrak{S}_N}$ は N 変数対称多項式の空間であり、また $M \ge N$ としている。しかし $\Lambda_{\mathbb{C}}^{(N)}$ 上の差分作用素 $E_r^{(N)}$ を

$$E_r^{(N)} := \sum_{j=0}^{r} \frac{t^{-Nr-\binom{r-j+1}{2}}}{(t^{-1};t^{-1})_{r-j}} D_j^{(N)}, \quad (x;q)_k := \prod_{i=0}^{k-1} (1 - xq^i)$$

で定義すると、これは制限写像と整合的で、極限

$$E_r(q,t) := \varprojlim_N E_r^{(N)}(q,t) : \Lambda_{\mathbb{C}} \longrightarrow \Lambda_{\mathbb{C}}$$

が well-defined になる。そして $P_\lambda(q,t)$ に関する次の固有方程式が成立する。

$$E_r(q,t) P_\lambda(x;q,t) = P_\lambda(x;q,t) \cdot e_r(s_\lambda).$$

ここで右辺の $e_r(s_\lambda)$ は分割 $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_\ell)$ に対し

$$s_\lambda := (q^{\lambda_1}t^{-1}, q^{\lambda_2}t^{-2}, \dots, q^{\lambda_\ell}t^{-\ell}, t^{-\ell-1}, t^{-\ell-2}, \dots)$$

と定めた無限変数に関する r 次の基本対称函数 e_r である。

実は $E_1(q,t)$ は Virasoro 代数の自由場表示と深く関係する。頂点作用素

$$\eta(z) := \exp\Big(\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} b_{-n} z^n \Big) \exp\Big(-\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} b_n z^{-n} \Big)$$

を考える。$\eta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \eta_n z^{-n}$ と展開した時の各 η_n は $\widehat{\mathcal{U}}(\mathrm{Heis}_{q,t})$ の元と思える。特に零モード η_0 に注目すると次の事実[8]が成立する。

事実 ([SKAO]). 同型 $\varsigma : F(\alpha) \simeq \Lambda_{\mathbb{C}}$ で η_0 を $\Lambda_{\mathbb{C}}$ に作用する作用素と思うと

$$E_1(q,t) = \frac{\eta_0 - 1}{t - 1}.$$

---

[6][M95] では内積を用いて $P_\lambda^{(q,t)}$ を定義し、差分作用素を用いて存在を証明しています。

[7]Macdonald の教科書 [M95] では D_N^r と書かれています。

[8][白石 03, 第 3 章] に明瞭な説明があります。この事実は [M88, Chap. VI] で Macdonald が導入した核函数 $\Pi[x,y;q,t] := \prod_{n\ge1} \exp\Big(\frac{1}{n}\frac{1-t^n}{1-q^n} p_n(x) p_n(y)\Big)$ が展開 $\Pi[x,y;q,t] = \sum_\lambda P_\lambda(x;q,t) Q_\lambda(y;q,t)$ を持つことの帰結として得られます。

この $\eta(z)$ は $\mathrm{Vir}_{q,t}$ の生成元の母函数 $T(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_n z^{-n}$ と

$$\eta(z) = \psi(z)T(z) - q^{-1}t^{1-2b_0}$$

という関係をもつ。実はこの関係から事実 2.2 が従う。

1 階の差分作用素 $E_1(q,t)$ の自由場表示の拡張として、高階の差分作用素 $E_r(q,t)$ $(r \geq 2)$ の（Feigin-Odesskii の）シャッフル積を用いた表示が [FHHSY] で得られている。また上述の $\eta(z)$ は Ding-Iohara-Miki 代数（又は量子トロイダル $\mathfrak{gl}_1$ 代数）の生成元の一部を Fock 表現で書いたものになっている。

2.4. **Whittaker ベクトルの明示公式.** 以上の準備の下、[AY10] で予想された変形 Virasoro 代数の Whittaker ベクトルの明示化公式を述べる。

定理 2.3 ([Y1])**.** α が generic なら

$$s_{q,t}(\alpha)\,(w_{q,t}(\xi)) = \sum_{\lambda} \xi^{|\lambda|} P_\lambda(q,t) \prod_{(i,j)\in\lambda} \frac{(q/t)^{1/2}t^{\alpha}}{1-q^{j+1}t^{2\alpha-i-1}} \frac{q^{\lambda_i - j}}{1-q^{\lambda_i-j+1}t^{\lambda'_j-i}}.$$

但し $P_\lambda(q,t)$ は Macdonald 対称函数。

この公式で (2.1) の極限 $t=q^{\beta}$, $q=e^{\hbar}$, $\hbar\to 0$ をとれば Virasoro 代数の Whittaker ベクトルの公式（定理 1.7）に帰着する。

[Y1] での証明は、Macdonald 差分作用素と変形 Virasoro 代数の関係を用いて、Virasoro 代数の場合と同様の（Heisenberg 代数における）計算をする。但し、変形 Virasoro 代数そのものを用いるより、Ding-Iohara-Miki 代数（量子トロイダル $\mathfrak{gl}_1$ 代数）を使った方が計算がしやすい。

3. $N=1$ 超共形代数

この節では講演で扱えなかった超共形代数の場合を考える。代数の定義を始める前にこの節の動機を説明する。

Macdonald 対称函数から Jack 対称函数への退化（§2.3 Figure 1 参照）では (2.1) の極限 $t=q^{\beta}$,$q\to 1$ を考えた。これは変形 Virasoro 代数から Virasoro 代数への退化での極限の方法と一致した。

これと似た極限のとり方が Uglov の仕事 [U98] に現れている。そこでは ζ_M を p 次の 1 の冪根として、

$$t=\zeta_p e^{\beta\hbar}, \quad q=\zeta_p e^{\hbar}, \quad \hbar\to 0 \tag{3.1}$$

という極限を考える。この極限で Macdonald 対称函数を退化させたものを [U98] は Jack $\mathfrak{gl}_p$ 対称函数と呼んでいるが、この報告では単に Uglov 対称函数と呼ぶことにする。

AGT 対応でこの種の類似を考えると、4 次元の場の理論の設定は平面 $\mathbb{C}^2$ 上のインスタントンを考える代わりに $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ の特異点解消の上のインスタントンのモジュライ空間を考えることになる。これは箙多様体で記述できるものであり、Nekrasov 函数の幾何学的定義も従来と同様である。組合せ論的表示はもとの函数でパラメータの極限 (3.1) をとったものである。

しかし 2 次元の理論の方では、対応する W 代数のが何なのかは俄かには分からない。$p=2$ の場合、これが $N=1$ 超共形代数であると予想したのが Belavin、Bershtein 及び Tarnopolsky の仕事 [BBT13] である。

この節ではこの $p=2$ の場合に、これまでの本報告の流れに合わせて特異ベクトルや Whittaker ベクトルの対称函数による実現を解説する。

3.1. **超共形代数.** この節では $N=1$ 超共形代数の Neveu-Schwarz セクターを SVir と書く。これは L_n（$n\in\mathbb{Z}$）と G_k（$k\in\mathbb{Z}+1/2$）及び中心元 C を生成元とし定義関係式

$$\begin{aligned} &[L_m,L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{C}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}, \quad [L_n,G_k] = \left(\frac{n}{2}-k\right)G_{n+k}, \\ &[G_k,G_l]_+ = 2L_{k+l} + \frac{C}{3}\left(k^2-\frac{1}{4}\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

で定まる超 Lie 代数である。SVir は $\deg L_n = n$、$\deg G_k = k$ 及び $\deg C = 0$ で定まる $\mathbb{Z}/2$-grading を持つ。

$c,h\in\mathbb{C}$ に対し、Verma 加群 $M(c,h)$ が

$$L_n\,|c,h\rangle = 0,\ (n>0) \quad L_0\,|c,h\rangle = h\,|c,h\rangle\,, \quad G_k\,|c,h\rangle = 0,\ (k>0) \quad C\,|c,h\rangle = c\,|c,h\rangle$$

を満たす $|c,h\rangle$ で生成される SVir 加群として定義される。$M(c,h)$ は PBW 基底

$$\{G_{-\lambda^b}L_{-\lambda^a}\,|c,h\rangle \mid \lambda^a\in\mathcal{P},\ \lambda^b\in\mathcal{P}'\}$$

を持つ。ここで $\mathcal{P}$ は分割の集合、$\mathcal{P}'$ は正の半整数の狭義単調減少数列の集合

$$\mathcal{P}' := \{\nu=(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_\ell) \mid \nu_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}+\tfrac{1}{2},\ \nu_1>\nu_2>\cdots>\nu_\ell\}$$

である。以下簡単のため

$$\mathcal{SP} := \mathcal{P}\times\mathcal{P}'$$

と略記することにする。その元を $\lambda = (\lambda^a, \lambda^b)$ と書くことにする。$\lambda \in \mathcal{SP}$ に対し

$$|\lambda| := \sum_i \lambda_i^a + \sum_j \lambda_j^b$$

と定める。SVir の $\mathbb{Z}/2$-grading は $M(c,h)$ 上に次数付け $M(c,h) = \oplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}/2} M(c,h)_n$ を誘導する。

双対加群や Shapovalov 型式も同様に定義される。Shapovalov 行列式の因子化公式は Kac が Virasoro 代数の時と同時に [Ka79] で予想しており、加藤・松田が [KM88] で解決している。

事実 ([Ka79] の予想、[KM88] の定理). $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}/2$ に対し正方行列 K_n^{NS} を

$$K_n^{\mathrm{NS}} := \left(\langle c,h| \, L_{\lambda^a} G_{\lambda^b} G_{-\mu^b} L_{-\mu^a} \, |c,h\rangle \right)_{\lambda,\mu \in \mathcal{SP},\ |\lambda|=|\mu|=n}$$

で定めると

$$\det(K_n^{\mathrm{NS}}) \propto \prod_{r,s \in \mathbb{Z}_{>0},\ rs \leq 2n,\ r \equiv s} \left(h - h_{r,s}^{\mathrm{NS}}\right)^{p^{\mathrm{NS}}(n - rs/2)}.$$

但し $h_{r,s}^{\mathrm{NS}}$ は

$$h_{r,s}^{\mathrm{NS}} := \frac{1}{8}\left(rt_+ + st_-\right)^2 - \frac{\rho^2}{2}, \quad c = \frac{3}{2} - 12\rho^2, \quad t_\pm := \rho \pm \sqrt{\rho^2 + 1} \tag{3.3}$$

で定めており、また $p^{\mathrm{NS}}(n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は母函数を使って

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}/2} p^{\mathrm{NS}}(n) x^n = \prod_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} + 1/2} (1 + x^k) \Big/ \prod_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} (1 - x^n)$$

で定めている。

前節までと同様、任意の n について $\det(K_n) \neq 0$ であることと $M(c,h)$ が既約であることは同値である。このような $(c,h) \in \mathbb{C}^2$ を今後 generic であると呼ぶ。特異ベクトルの定義も同様である。$M(c, h_{r,s}^{\mathrm{NS}})$ に定数倍を除いて一意に存在する特異ベクトルを $\chi_{r,s}^{\mathrm{NS}}$ と表すことにする。

[KM88] の証明は [FF82] の議論の類似をたどっている。それに触れるために SVir の自由場表示を導入する。SVir にはフェルミオニックな元 G_k があるため、Heisenberg 代数だけでなく Clifford 代数も必要になる。次副節でこの自由場表示を説明する。

3.2. **自由場表示.** ボソン的な生成元 a_n（$n \in \mathbb{Z}$）とフェルミオン的な生成元 b_k（$k \in \mathbb{Z} + 1/2$）（及び中心元 1）に定義関係式

$$[a_m, a_n] = m\delta_{m+n,0}, \quad [b_k, b_l]_+ = \delta_{k+l,0}, \quad [a_n, b_k] = 0 \tag{3.4}$$

を課して定義される超 Lie 代数を HC と表し[9]、Heisenberg-Clifford 代数と呼ぶ。

最高ウェイト $\alpha \in \mathbb{C}$ の Fock 加群は

$$a_n \left|\alpha\right\rangle_F = 0 \ (n > 0), \quad a_0 \left|\alpha\right\rangle_F = \alpha \left|\alpha\right\rangle_F \quad b_k \left|\alpha\right\rangle_F = 0 \ (k > 0)$$

を満たす $\left|\alpha\right\rangle_F$ で生成される HC 加群として定義される。これを $F^{\mathrm{HC}}(\alpha)$ で表すことにする。

超共形代数 SVir の自由場表示を説明するため、カレント

$$a(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}, \quad b(z) := \sum_{k \in \mathbb{Z}+1/2} b_k z^{-k-1/2},$$

を用意しておく。(3.4) は OPE を使って

$$a(z)a(w) \sim \frac{1}{(z-w)^2}, \quad b(z)b(w) \sim \frac{1}{z-w}$$

と書き直せる。

事実. $\rho \in \mathbb{C}$ に対し以下の写像で代数準同型 $\iota^{\mathrm{NS}}(\rho) : \mathcal{U}(\mathrm{SVir}) \to \widehat{\mathcal{U}}(\mathrm{HC})$ が定まる。

$$\begin{aligned}
T(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2} \quad &\longmapsto \quad \mathcal{T}(z) := \frac{1}{2} {}^\circ_\circ a(z)^2 {}^\circ_\circ + \rho \partial_z a(z) + \frac{1}{2} {}^\circ_\circ \partial_z b(z) b(z) {}^\circ_\circ, \\
G(z) := \sum_{k \in \mathbb{Z}+1/2} G_k z^{-k-3/2} \quad &\longmapsto \quad \mathcal{G}(z) := b(z)a(z)^2 + 2\rho \partial_z b(z), \\
C \quad &\longmapsto \quad c^{\mathrm{NS}}(\rho) := 3/2 - 12\rho^2.
\end{aligned}$$

また $\iota^{NS}(\rho)$ は SVir 加群の準同型

$$\wp^{\mathrm{NS}}(\alpha, \rho) : M(c^{\mathrm{NS}}(\rho), h(\alpha,\rho)) \longrightarrow F^{\mathrm{HC}}(\alpha), \qquad h(\alpha, \rho) := \alpha^2/2 - \rho\alpha$$

[9] HC は Heisenberg-Clifford の略のつもりです。あまり良い記号ではない気がしますが、特に慣習的に使われるものがないのでこうしました。また生成元の記号が前節までの Heis や $\mathrm{Heis}_{q,t}$ のものと重複しますが、お許しください。

を誘導し、$(c^{\mathrm{NS}}(\rho), h(\alpha, \rho))$ が generic であれば $\wp^{\mathrm{NS}}(\alpha, \rho)$ は同型である。

これは Feigin-Fuchs による Virasoro 代数の自由場表示（事実 1.4）の自然な拡張になっている。但し $T(z)$ の行き先に $b(z)$ を含む項が入っているため、中心荷電の式が (1.12) と少しずれている。

加藤と松田は [KM88] で遮蔽作用素による特異ベクトルの構成を行った。この構成を簡単に紹介する[10]。
$t \in \mathbb{C}$ とする。Vir の場合 [FF82] では、頂点作用素

$$V_t(z) := {}^{\circ}_{\circ} e^{t\varphi(z)} {}^{\circ}_{\circ}, \quad \varphi(z) := a_0 \log z - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} a_n z^{-n}$$

が遮蔽作用素の構成に用いられた。ここで $V_t(z)$ を少し変更して

$$W_t(z) := tb(z)V_t(z)$$

を考える。

事実 ([KM88])**.** $W_t(z)$ と SVir の生成カレント[11]の $\wp^{\mathrm{NS}}$ での像 $\mathcal{T}(z)$ 及び $\mathcal{G}(z)$ は以下の関係式を満たす。

$$\mathcal{T}(z)W_t(w) \sim \frac{1}{(z-w)^2}\left(\frac{1}{2}t^2 - \rho t + \frac{1}{2}\right)W_t(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w W_t(w),$$
$$\mathcal{G}(z)W_t(w) \sim \frac{1}{(z-w)^2}\left(t^2 - 2\rho t\right)V_t(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w V_t(w).$$

特に $t^2 - 2\rho t = 1$ なら

$$\mathcal{T}(z)W_t(w) \sim \frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{1}{z-w}W_t(w)\right], \quad \mathcal{G}(z)W_t(w) \sim \frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{1}{z-w}V_t(w)\right]$$

と全微分の形で書ける。$t^2 - 2\rho t = 1$ の解が (3.3) に現れた $t_\pm := \rho \pm \sqrt{\rho^2+1}$ であることにも注意する。以上より

$$\oint dz W_{t_\pm}(z)$$

は（もし適切な積分路がとれて積分が非自明なら）生成カレントと可換になる。このようなものは遮蔽作用素と呼ばれる。

生成カレントと可換であることから、遮蔽作用素は特異ベクトルの構成に用いることができる。正確には、

$$h(\alpha, \rho) = h^{\mathrm{NS}}_{r,s} \iff \alpha = \alpha^{\mathrm{NS}}_{r,s} := (1-r)t_\pm/2 - (1+s)t_\mp/2$$

に注意して、以下のような事実が成立する。

事実. 特異ベクトル $\chi^{\mathrm{NS}}_{r,s} \in M(c^{\mathrm{NS}}(\rho), h^{\mathrm{NS}}_{r,s})$ の写像 $\wp^{\mathrm{NS}}(\alpha^{\mathrm{NS}}_{r,s}, \rho)$ による像と

$$\oint dz_1 \cdots dz_r W_{t_\pm}(z_1) \cdots W_{t_\pm}(z_r) \left|\alpha^{\mathrm{NS}}_{r,s}\right\rangle_F$$

は定数倍を除いて一致する。

3.3. **特異ベクトルと Uglov 対称函数.** Virasoro 代数や変形 Virasoro 代数の特異ベクトルと対称函数との関係（事実 1.5 及び 2.2）の類似を超共形代数の場合に考えたい。しかし HC の Fock 空間 $F^{\mathrm{HC}}(\alpha)$ にはフェルミオン的な元があるため、前節までに用いた対称函数の空間との同一視 ς をそのまま適用することはできない。

しかしボソン・フェルミオン対応によりフェルミオンをボソンの頂点作用素で実現できるので、それと ς との合成で同型 $F^{\mathrm{HC}}(\alpha) \to \Lambda_{\mathbb{C}}$ を構成することができる。頂点作用素の選び方には任意性があるが、ここでは [BBT13] の取った方法に従う。

事実. $\Lambda_{\mathbb{C}}$ 上の作用素のカレント

$$\phi_+(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \partial_{p_{2n+1}} z^{-2n-1}, \quad \phi_-(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \frac{p_{2n+1}}{2n+1} z^{2n+1}$$

を用いて定義される写像

$$a_{-n} \longmapsto \frac{1}{2}p_{2n}\ (n > 0), \quad a_n \longmapsto \frac{2n}{2}\partial_{p_{2n}}\ (n > 0), \quad b(z^2) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{8}}\left(e^{\phi_-(z)}e^{2\phi_+(z)} - e^{-\phi_-(z)}e^{-2\phi_+(z)}\right)$$

は HC 加群の同型 $\varsigma^{\mathrm{HC}} : F^{\mathrm{HC}}(\alpha) \to \Lambda_{\mathbb{C}}$ を誘導する。

---

[10] Virasoro 代数の場合は [山田 06, §3.11] で詳しく説明されています。
[11] generating current の訳で、「生成元のなすカレント」の意味です。

この同型では grading が $n \mapsto 2n$ と 2 倍になっていることに注意する。また頂点作用素 $\exp(\phi^{\pm}(z))$ は

$$\phi^{+}(z)\phi^{-}(w) \sim \frac{1}{2}\log\frac{1-w/z}{1+w/z}$$

となるように選んでいる。上の写像が同型であることはこの OPE から容易に確認できる。

以上の準備から

$$s^{\mathrm{NS}}(\alpha,\rho) : M(c^{\mathrm{NS}}(\rho), h(\alpha,\rho)) \xrightarrow{\wp^{\mathrm{NS}}(\alpha,\rho)} F^{\mathrm{HC}}(\alpha) \xrightarrow{\varsigma^{\mathrm{HC}}} \Lambda_{\mathbb{C}}$$

により Verma 加群の元を対称函数と思うことができる。特に SVir の特異ベクトル $\chi^{\mathrm{NS}}_{r,s}$ の場合に Uglov 対称函数に一致すると予想したのが Belavin、Bershtein と Tarnopolsky の仕事 [BBT13] である。

ここで Uglov 対称函数の定義 [U98] を述べておく。

定義. p を正の整数、ζ_p を 1 の原始 p 乗根、$\beta \in \mathbb{C}$ とする。Macdonald 対称函数 $P_\lambda(q,t)$ の極限

$$P^{(p)}_\lambda(\beta) := \lim_{q\to 1} P_\lambda(\zeta_p q, \zeta_p q^{\beta})$$

を Uglov 対称函数[12]と呼ぶ。

定理 ([BBT13] の予想、[Y3] の定理)**.**

$$s^{\mathrm{NS}}(\alpha^{\mathrm{NS}}_{r,s},\rho)(\chi_{r,s}) \propto P^{(2)}_{(s^r)}(t_+^2/2).$$

[Y3] の証明は Virasoro 代数と Calogero-Sutherland ハミルトニアンの関係（事実 1.6）の類似を用いる。ここでは Uglov 対称函数がスピン Calogero-Sutherland ハミルトニアンの固有函数であることの説明をするだけにとどめよう。線形空間

$$F_{p,M} := (V(z_1)\otimes\cdots\otimes V(z_M))_{\mathrm{asym}}, \quad V := \mathbb{C}^p = \langle v_1,\cdots,v_p\rangle, \quad V(z) := \mathbb{C}[z^{\pm 1}]\otimes V$$

上の作用素

$$H^{(p,M)}(\beta) := \sum_{i=1}^{M} D_i^2 + \beta\sum_{i=1}^{M}(2i-M-1)D_i \ + 2\beta\sum_{i<j}\frac{z_i}{z_i-z_j}\left(D_i - D_j - \frac{z_j}{z_i-z_j}(P_{ij}+1)\right)$$

を考える。但し $D_i := z_i\partial_{z_i}$ であり、また P_{ij} は置換作用素である。この作用素をスピン Calogero-Sutherland ハミルトニアンと呼ぶ。

空間 $F_{p,M}$ と対称函数の空間には以下のような関係がある。$k \in \mathbb{Z}$ に対し $\underline{k} \in \{1,\ldots,M\}$ かつ $k = \underline{k} - p\overline{k}$ で $\underline{k}$ と $\overline{k}$ を定め、

$$u_k := z^{\overline{k}} \otimes v_{\underline{k}} \in V(z)$$

とおく。すると

$$\left\{\widehat{u}_{\lambda'} := u_{\lambda'_1}\wedge u_{\lambda'_2}\wedge\cdots\wedge u_{\lambda'_M} \mid \lambda' = (\lambda'_1 > \lambda'_2 > \cdots > \lambda'_M) \in \mathbb{Z}^M\right\}$$

は $F_{p,M}$ の基底になる。そこで $F_{p,M}$ から対称 Laurent 多項式の空間への写像を

$$\omega : F_{p,M} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[x_1^{\pm 1},\ldots,x_M^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_M}, \quad \widehat{u}'_\lambda \longmapsto s_{\lambda'+\delta_M}(x)$$

で定めることができる。但し $\delta_M := (0,1,\ldots,M-1)$ であり、s_μ は Schur 多項式の行列式による定義を分割とは限らない数列 μ に拡張したものである。すると $F_{p,M}$ の部分空間

$$F^{+}_{p,M} := \bigoplus_{\lambda'+\delta_M\geq 0}\mathbb{C}\widehat{u}_{\lambda'}$$

について $\omega(F^{+}_{p,M}) = \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_M]^{\mathfrak{S}_M}$ となる。$H^{(p,M)}(\beta)$ が $F^{+}_{p,M}$ を保つことも確認できる。

実は $\varprojlim_M F^{+}_{p,M} \simeq \Lambda_{\mathbb{C}}$. に作用する $H^{(p)}(\beta) := \varprojlim_M H^{(p,M)}(\beta)$ が存在することも分かる。Uglov 対称函数はこの $H^{(p)}(\beta)$ の固有函数になっている。

[12] [U98] では $P^{(\gamma,N)}$ と書かれています。本報告のパラメータとの対応は $\gamma=\beta$、$N=p$ です。本報告集の [小寺] では Varagnolo による affine Yangian の幾何学的実現と Uglov 対称函数との関係が述べられています。

3.4. **Whittaker ベクトル.** SVir は（スーパー）Lie 環なので Whittaker ベクトルの類似をとるのは変形 Virasoro 代数 $\mathrm{Vir}_{q,t}$ の時ほど難しくない。

定義. $\xi \in \mathbb{C}^*$ とする。$w(\xi) \in \widehat{M}(c,h)$ は次の条件を満たすとき SVir **の Whittaker ベクトル**と呼ばれる。

$$G_{1/2}w(\xi) = \sqrt{\xi}w(\xi), \quad G_{3/2}w(\xi) = 0,\ L_2 w(\xi) = 0.$$

定義関係式 (3.2) から Whittaker ベクトル $w(\xi)$ は

$$L_1 w(\xi) = \xi w(\xi), \quad G_{1/2+n}w(\xi) = 0,\ L_{1+n}w(\xi) = 0\ (n \geq 1)$$

を満たすことが分かる。また $w(\xi)$ は定数倍を除いて唯一存在し、

$$w(\xi) = \sum_{2k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \xi^k w_k, \quad w_k \in M(c,h)_k, \quad G_{1/2}w_k = w_{k-1/2}, \quad G_{3/2}w_k = 0, \quad L_2 w_k = 0$$

と書ける。

前節までと同様に、$w(\xi)$ の自由場表示を Uglov 対称函数を用いて明示的に書き下すことができる。

$$s^{\mathrm{NS}}(\alpha,\rho)(w_n) = \sum_{\lambda \vdash 2n} P_\lambda^{(2)}(\beta) c_\lambda(\alpha,\beta),$$

$$c_\lambda(\alpha,\beta) := \frac{\prod_{(i,j)\in\lambda}(-1)^{\lambda_i - j}}{(-2)^{m(\lambda)} \prod_{(i,j)\in\lambda^{(1)}} (j+1+\beta(2\alpha-i-1)) \prod_{(i,j)\in\lambda^{(2)}} \left(\lambda_i - j + 1 + \beta(\lambda'_j - i)\right)}.$$

但し $\beta = t_+^2/2$ であり、また分割 λ に対し以下の記号を用いている。

$$\lambda^{(1)} := \{(i,j)\in\lambda \mid i \equiv j \pmod 2\}, \quad \lambda^{(2)} := \{(i,j)\in\lambda \mid \lambda_i - i \equiv \lambda'_j - j + 1 \pmod 2\},$$
$$m(\lambda) := 4n - |\lambda^{(1)}| - |\lambda^{(2)}|$$

この式は変形 Virasoro 代数の場合の明示式で極限をとったものである。証明は Virasoro 代数の場合と同様、スピン Calogero-Sutherland ハミルトニアンから w_k に関する漸化式を作り、上式がそれを満たすことを確認すればよい。

謝辞. ALTReT の初回である今回の集会で講演することができ、嬉しく感じております。声をかけてくださった池田先生に改めて感謝いたします。また何人かの方々に講演で触れられなかった §3 の内容に興味を持って戴けたことを感謝します。

References

[AGT10] Alday, L. F., Gaiotto, D., Tachikawa, Y., *Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories*, Lett. Math. Phys. **91** (2010), 167–197.

[AMOS] Awata, H., Matsuo, Y., Odake, S., Shiraishi, J., *Collective field theory, Calogero-Sutherland model and generalized matrix models*, Phys. Lett. B. **347** (1995), 49–55.

[AY10] Awata, H., Yamada, Y., *Five-dimensional AGT Conjecture and the Deformed Virasoro Algebra*, J. High Energy Phys. **2011**, no. 1, 125, 11pp.

[BBT13] Belavin, A. A., Bershtein, M. A., Tarnopolsky, G. M., *Bases in coset conformal field theory from AGT correspondence and Macdonald polynomials at the roots of unity*, J. High Energy Phys. **2013**, no. 3, 019, 35pp.

[BP98] Bouwknegt, P., Pilch, K., *The deformed Virasoro algebra at roots of unity*, Comm. Math. Phys. **196** (1998), no. 2, 249–288.

[FF82] Feigin, B. L., Fuchs, D. B., *Skew-Symmetric differential operators on the line and Verma modules over the Virasoro algebra*, Funct. Anal. and Appl. **16** (1982), 47–63.

[FHHSY] Feigin, B., Hashizume, K., Hoshino, A., Shiraishi, J., Yanagida, Y., *A commutative algebra on degenerate* $\mathbb{CP}^1$ *and Macdonald polynomials*, J. Math. Phys. **50** (2009), no. 9, 095215.

[G08] Gaiotto, D., *Asymptotically free* $N=2$ *theories and irregular conformal blocks*, arXiv:0908.0307.

[KM88] Kato, M., Matsuda, S., *Null Field Construction in Conformal and Superconformal Algebras* in *Conformal Field Theory and Solvable Lattice Models*, 205–254, Adv. Std. in Pure Math. **16**, Kinokuniya, 1988.

[Ka79] Kac, V., *Contravariant form for infinite dimensional Lie algebras and superalgebras*, Lect. Notes in Phys. **94** (1979), 441–445.

[小寺] 小寺諒介, *Affine Yangian action on the Fock space*, 本報告集.

[Ko78] Kostant, B., *On Whittaker vectors and representation theory*, Invent. Math. **48** (1978), no. 2, 101–184.

[Ko79] Kostant, B., *The Solution to a Generalized Toda Lattice and Representation Theory*, Invent. Math. **48** (1978), no. 2, 101–184.

[M88] Macdonald, I. G., *A new class of symmetric functions*, Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1988, 372/S–20, Actes 20e Séminaire Lotharingien, 131–171.

[M95] Macdonald, I. G., *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd ed. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1995.

[MY95] Mimachi, K., Yamada, Y., *Singular vectors of the Virasoro algebra in terms of Jack symmetric polynomials*, Comm. Math. Phys. **174** (1995), no. 2, 447–455.

[白石 03] 白石潤一, 量子可積分系入門 *Lectures on Quantum Integrable Systems*, SGC ライブラリ **28**, サイエンス社, 2003.

[SKAO] Shiraishi, J., Kubo, H., Awata, H., Odake, S., *A Quantum Deformation of the Virasoro Algebra and the Macdonald Symmetric Functions*, Lett. Math. Phys. 38 (1996), 33–51.

[U98] Uglov, D., *Symmetric functions and the Yangian decomposition of the Fock and Basic modules of the affine Lie algebra* $\mathfrak{sl}_N$, in *Quantum many-body problems and representation theory*, 183–241, MSJ Mem. **1**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1998.

[山田 06] 山田泰彦, 共形場理論, 数理物理シリーズ **1**, 培風館, 2006.

[Y11] Yanagida, S., *Whittaker vectors of the Virasoro algebra in terms of Jack symmetric polynomial*, J. Algebra **333** (2011), 273–294.

[Y1] Yanagida, S., *Whittaker vector of deformed Virasoro algebra and Macdonald symmetric functions*, arXiv:1402.2946.

[Y2] Yanagida, S., *Norm of the Whittaker vector of the deformed Virasoro algebra*, arXiv:1411.0462.

[Y3] Yanagida, S., *Singular vectors of $N = 1$ super Virasoro algebra via Uglov symmetric functions*, arXiv:1508.06036.

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan
E-mail address: yanagida@kurims.kyoto-u.ac.jp