モチーフ的Hall代数と量子トロイダル代数

柳田　伸太郎　(京大数理研)*

概　要

有限体上定義された代数曲線に対し，その連接層のなすアーベル圏に付随して Ringel-Hall 代数が定義できる．90 年代後半の Kapranov による仕事や 2000 年代の Burban-Schiffmann の仕事等により，この代数のある部分代数 (composition subalgebra) はよく研究されていて, 曲線が射影直線なら量子アファイン $\mathfrak{sl}_2$ 環の上三角部分に, 楕円曲線なら Ding-Iohara-Miki 代数の上三角部分と同型であることが知られている．

本稿では, 射影直線達のなす tree や cycle など, 楕円曲面の特異ファイバー上に現れる曲線に対する Ringel-Hall 代数とその composition subalgebra を導入する．この際元来の Hall 代数ではなく, モティヴィック Hall 代数を考える事で定義体は複素数体 (もしくは代数閉体) とすることができる．

また，楕円曲面上の相対 Fourier-Mukai 変換が composition subalgebra の Drinfeld ダブル上に (代数) 自己同型を誘導することについても説明する．特異ファイバーの小平分類に応じて, 各 composition subalgebra は ADE 型の量子トロイダル代数と同型であること, 更に上記の Fourier 変換が量子トロイダル代数の自己同型を説明することも説明する．

0. はじめに

量子トロイダル代数は単純 Lie 代数の 2 変数ループ化の変形として [GKV] により導入された代数である．A_n 型の場合は変形パラメータを 2 つとることが出来て, また $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ に同型な部分代数を 2 つ持つことから, $\mathfrak{gl}_n$ 量子トロイダル代数 $\mathcal{E}_n$ と呼ばれる．$\mathcal{E}_n$ は 90 年代後半から良く研究されている．

一方 2000 年代後半から $\mathfrak{gl}_1$ 量子トロイダル代数と呼ぶべき代数 $\mathcal{E}_1$ が複数の文脈で発見された．恐らく最初にこの代数を発見したのは [BS12] で, そこでは (有限体上定義された) 楕円曲線の連接層のなすアーベル圏の Ringel-Hall 代数 (の Drinfeld ダブル) として導入されている．[Mi07] では $W_{1+\infty}$ 代数の 2 パラメータ変形として導入された．[FT11] では平面上の点の Hilbert 概型の同変 K 群を表現空間とする, 普遍族から定まる Hecke 作用素のなす代数として $\mathcal{E}_1$ が導入された．[FHHSY] では Macdonald 対称函数及び Macdonald 差分作用素 (族) の自由場表示に現れる bosonic vertex operator から $\mathcal{E}_1$ 及びその Fock 表現が発見された．(そこでは $\mathcal{E}_1$ を Ding-Iohara 代数と呼んでいた.) [FFJMM1] 及び [FFJMM2] では $\mathcal{E}_n$ $(n \geq 2)$ の類似としてベクトル表現, Fock 表現などの組み合わせ論的構成がなされている．

本稿は $\mathcal{E}_n$ $(n \geq 3)$ の非自明な代数自己同型の存在を幾何学的アプローチから説明する．これは代数的には [Mi99] で明示的に構成されているものである．

アイデアは $n = 1$ の時に [BS12] が与えているものである．$\mathcal{E}_1$ を楕円曲線の連接層のなす圏 $\mathcal{A}$ の Ringel-Hall 代数の Drinfeld ダブルとみなすと, $\mathcal{A}$ の導来圏上の自己同値から $\mathcal{E}_1$ の自己同型が誘導される．特に自己同値として Poincaré 束から定まる Fourier 向

* 〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町　京都大学 数理解析研究所
e-mail: `yanagida@kurims.kyoto-u.ac.jp`
web: `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~yanagida/`

井変換 [Muk81] を考えると, 誘導される自己同型は非自明で, これは Miki の導入したものと一致する.

$n \geq 3$ の場合は n 個の $\mathbb{P}^1$ からなるサイクル C_n を考える, その上の連接層のなす圏の Ringel-Hall 代数の Drinfeld ダブルが $\mathcal{E}_n$ となる. $\mathcal{E}_n$ の自己同型に対応する $D^b\operatorname{Coh}(C_n)$ の自己同値には相対 Fourier 向井変換 [B98] を用いる. C_n を特異ファイバーに持つような楕円曲面 $Y \to S$ を考え, 相対 Poincaré 束に付随する相対 Fourier 向井変換をとると, 誘導される $\mathcal{E}_n$ の自己同型が Miki の与えたものに一致する.

1. A 型量子トロイダル代数

まず量子トロイダル代数の紹介から本文を始める. ここでは [FJMM] の記述に従う.

1.1. 定義

d と q は複素数であって

$$q_1 := dq^{-1}, \quad q_2 := q^2, \quad q_3 := d^{-1}q^{-1}$$

と置いた時に

$$q_1^{n_1}q_2^{n_2}q_3^{n_3} = 1 \text{ for } n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z} \iff n_1 = n_2 = n_3$$

が成立するものとする.

定義 1.1. A 型量子トロイダル代数 $\mathcal{E}_n$ $(n \geq 3)$ とは $\mathbb{C}$ 上の結合的代数であって

$$E_{i,k}, F_{i,k}, H_{i,r}, K_i^{\pm 1}, q^{\pm c} \qquad (i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{Z}/\{0\}).$$

を生成元とし, 定義関係式が以下で与えられているものとする.

$$\begin{aligned}
&K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1, \quad q^{\pm c}\text{は中心元}, \quad q^cq^{-c} = q^{-c}q^c = 1,\\
&K_i^{\pm}(z)K_j^{\pm}(w) = K_j^{\pm}(w)K_i^{\pm}(z),\\
&\frac{g_{i,j}(q^{-c}z, w)}{g_{i,j}(q^cz, w)}K_i^-(z)K_j^+(w) = \frac{g_{j,i}(w, q^{-c}z)}{g_{j,i}(w, q^cz)}K_j^+(w)K_i^-(z),\\
&d_{i,j}g_{i,j}(z,w)K_i^{\pm}(q^{(1\mp 1)c/2}z)E_j(w) + g_{j,i}(w,z)E_j(w)K_i^{\pm}(q^{(1\mp 1)c/2}z) = 0,\\
&d_{j,i}g_{j,i}(w,z)K_i^{\pm}(q^{(1\pm 1)c/2}z)F_j(w) + g_{i,j}(z,w)F_j(w)K_i^{\pm}(q^{(1\pm 1)c/2}z) = 0,\\
&[E_i(z), F_j(w)] = \frac{\delta_{i,j}}{q-q^{-1}}(\delta(q^cw/z)K_i^+(z) - \delta(q^cz/w)K_i^-(w)),\\
&d_{i,j}g_{i,j}(z,w)E_i(z)E_j(w) + g_{j,i}(w,z)E_j(w)E_i(z) = 0,\\
&d_{j,i}g_{j,i}(w,z)F_i(z)F_j(w) + g_{i,j}(z,w)F_j(w)F_i(z) = 0,\\
&[X_i(z), X_j(w)] = 0, \quad \mathrm{Sym}_{z_1,z_2}[X_i(z_1), [X_i(z_2), X_{i\pm 1}(w)]_q]_{q^{-1}} = 0 \quad (X = E, F,\ j \neq i, i \pm 1),
\end{aligned}$$

ここでカレント

$$E_i(z) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} E_{i,k}z^{-k}, \quad F_i(z) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_{i,k}z^{-k}, \quad K_i^{\pm}(z) := K_i^{\pm 1}\exp\Big(\pm(q-q^{-1})\sum_{j=1}^{\infty} H_{i,\pm r}z^{\mp r}\Big)$$

を用いた．また函数 $g_{i,j}(z,w)$, $d_{i,j}$ は以下で与えられるものとする．

$$g_{i,j}(z,w):=\begin{cases} z-q_2w & (i\equiv j \mod n),\\ z-q_1w & (i\equiv j-1),\\ z-q_3w & (i\equiv j+1),\\ z-w & (i\not\equiv j,j+1),\end{cases}\qquad d_{i,j}:=\begin{cases} d^{\mp 1} & (i\equiv j\mp 1),\\ 1 & (\text{otherwise}).\end{cases}$$

そして $\mathrm{Sym}_{z,w}$ は z と w に関する対称化, $[X,Y]_q:=XY-qYX$ である．

$1_i:=(0,\dots,\overset{i-th}{1},\dots,0)\in\mathbb{Z}^n$ として, 代数 $\mathcal{E}_n$ は

$$\deg E_{i,k}=(1_i,k),\quad \deg F_{i,k}=(-1_i,k),\quad \deg H_{i,r}=(0,r),\quad \deg K_i=\deg q^c=(0,0),$$

で $(\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z})$ による次数付けを持つ．また以下の (位相的) 余積を持つ．

$$\Delta E_i(z)=E_i(z)\otimes 1+K_i^-(C_1z)\otimes E_i(C_1z),\quad \Delta F_i(z)=F_i(C_2z)\otimes K_i^+(C_2z)+1\otimes F_i(z),$$
$$\Delta K_i^+(z)=K_i^+(z)\otimes K_i^+(C_1^{-1}z),\quad \Delta K_i^-(z)=K_i^-(C_2^{-1}z)\otimes K_i^-(z),\quad \Delta q^c=q^c\otimes q^c.$$

但し $C_1:=q^c\otimes 1$ and $C_2:=1\otimes q^c$. これで $\mathcal{E}_n$ は (位相的) 双代数になる．

1.2. 2つの部分代数と自己同型

$\mathcal{E}_n$ は $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ と同型な部分代数を2つもつ．これらを $h(U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_n))\subset\mathcal{E}_n$ 及び $v(U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_n))\subset\mathcal{E}_n$ と書くことにする．ここではそれらのうち $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n))\subset U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ の部分について明示的に説明する．

$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の Chevalley 生成元を

$$e_i,\ f_i,\ t_i^{\pm 1}\quad (0\le i\le n-1)$$

と表し, Drinfeld 生成元を

$$x_{i,k}^{\pm},\ h_{i,r},\ k_i^{\pm 1},\ q^{\pm c}\quad (1\le i\le n-1,\ k\in\mathbb{Z},\ r\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$$

と書くと, これらは以下の関係式で結ばれている．

$$\begin{aligned}
&e_i=x_{i,0}^+,\quad f_i=x_{i,0}^-,\quad t_i=k_i\quad (1\le i\le n-1),\\
&t_0t_1\cdots t_{n-1}=q^c,\\
&e_0=q^c(k_1\cdots k_{n-1})^{-1}[\cdots[x_{1,1}^-,x_{2,0}]_q,\cdots,x_{n-1,0}^-]_q,\\
&f_0=[x_{n-1,0}^+,\cdots[x_{2,0}^+,x_{1,-1}^+]_{q^{-1}},\cdots]_{q^{-1}}k_1\cdots k_{n-1}q^{-c}.
\end{aligned}$$

包含写像 $h:U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)\hookrightarrow\mathcal{E}_n$ は Chevalley 生成元で以下のように与えられる．

$$e_i\mapsto E_{i,0},\quad f_i\mapsto F_{i,0},\quad t_i\mapsto K_{i,0}\ (0\le i\le n-1).$$

もう一つの包含写像 $v:U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)\hookrightarrow\mathcal{E}_n$ は Drinfeld 生成元で以下のように与えられる．

$$x_{i,k}^+\mapsto d^{ik}E_{i,0},\quad x_{i,k}^-\mapsto d^{ik}F_{i,0},\quad k_i\mapsto K_i,\quad h_{i,r}\mapsto d^{ir}H_{i,r},\quad q^c\mapsto q^c\ (1\le i\le n-1).$$

Miki が [Mi99, Mi01] で導入した代数自己同型 $\theta_n : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ はこれら 2 つの $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ 同士を (殆ど) 写し合うものである.

$$\theta \circ v = h, \quad \theta \circ h = v \circ \tau \circ \sigma.$$

ここで σ と τ は以下のような $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の反自己同型である.

$$\sigma : e_i \mapsto e_i, \quad f_i \mapsto f_i, \quad t_i \mapsto t_i^{-1}$$
$$\tau : x_{i,k}^{\pm} \mapsto x_{i,-k}^{\pm},\ h_{i,r} \mapsto -q^{rc} h_{i,-r},\ k_i \mapsto k_i^{-1},\ q^c \mapsto q^c.$$

2. スタックの Grothendieck 環

次節でモチーフ的 Hall 代数を導入するが, それには代数多様体並びにスタックの Grothendieck 環が必要になる. ここでは Joyce [J07] 及び Bridgeland [B12] に従ってそれらの準備をする. 以下代数多様体やスキーム及びスタックは $\mathbb{C}$ 上定義されているものとするが, (適当な変更を施せば) 定義体は何でも構わない.

2.1. 代数多様体の Grothendieck 環

以下, 代数多様体といったら $\mathbb{C}$ 上有限型で被約かつ分離的なスキームのこととする. $\mathrm{Var}/\mathbb{C}$ で代数多様体のなす圏を記す.

定義 2.1. 1. 代数多様体の Grothendieck 群 $K(\mathrm{Var}/\mathbb{C})$ とは, 代数多様体の同型類の生成する自由アーベル群を以下の形の関係式で割ったものである.

$$[X] = [Y] + [X \setminus Y],$$

ここで Y は代数多様体 X の閉部分多様体.

2. $K(\mathrm{Var}/\mathbb{C})$ 上に積 $\cdot$ を

$$[X] \cdot [Y] = [(X \times Y)_{\mathrm{red}}],$$

で定めると $K(\mathrm{Var}/\mathbb{C})$ は可換環になる. この環のことを代数多様体の Grothendieck 環と呼ぶ.

アフィン直線 $\mathbb{A}^1$ の Grothendieck 環 $K(\mathrm{Var}/\mathbb{C})$ での類を

$$\mathbb{L} := [\mathbb{A}^1] \in K(\mathrm{Var}/\mathbb{C})$$

で記すことにすると, 次の公式が成立する.

補題 2.2. *1. d 次一般線形群 GL_d について*

$$[\mathrm{GL}_d] = \mathbb{L}^{d(d-1)/2} \prod_{k=1}^{d} (\mathbb{L}^d - 1) = \mathbb{L}^{d(d-1)/2} (\mathbb{L} - 1)^d [d]_{\mathbb{L}}! \in K(\mathrm{Var}/\mathbb{C}).$$

但し不定元 q に対し $[n]_q := 1 + q + \cdots + q^n$ 及び $[n!]_q := [1]_q \cdot [2]_q \cdot \cdots \cdot [n]_q$ と記した.

2. Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}(d,n)$ $(0 \le d \le n)$ について

$$[\mathrm{Gr}(d,n)] = \begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix}_{\mathbb{L}} := \frac{[n]_{\mathbb{L}}!}{[d]_{\mathbb{L}}! [n-d]_{\mathbb{L}}!} \in K(\mathrm{Var}/\mathbb{C}).$$

2.2. Kapranov のモチーフ的ゼータ函数

Kapranov[K00] に従い代数多様体のゼータ函数の類似物を導入する.

定義 2.3. 準射影多様体 X のモチーフ的ゼータ函数 $Z_{\mathrm{mot}}(X;t)$ を次で定義する.

$$Z_{\mathrm{mot}}(X;t) := \sum_{n\geq 0}[\mathrm{Sym}^n(X)]t^n \in 1 + t\cdot K(\mathrm{Var}/\mathbb{C})[[t]].$$

事実 2.4 ([K00, (1.1.9) Theorem], [Mus11, Theorem 7.33])**.** X が非特異射影曲線なら

$$Z_{\mathrm{mot}}(X;t) = \frac{f(t)}{(1-t)(1-\mathbb{L}t)}$$

と書ける. ここで $f(t)$ は $K(\mathrm{Var}/\mathbb{C})$ 係数で次数 $2g$ の多項式.

2.3. スタックの Grothendieck 環

モチーフ的 Hall 代数の定義にはスタックの Grothendieck 環が必要である. 以下スタックといったら $\mathbb{C}$ 上局所有限型な Artin スタックのこととする. スキーム S とスタック X について, $X(S)$ で X の S-valued point たちのなす groupoid を記す.

定義 2.5.

1. スタック X がアフィン固定群を持つとは, 任意の $\mathbb{C}$ 値点 $x\in X(\mathbb{C})$ について同型射のなす群 $\mathrm{Iso}_{\mathbb{C}}(x,x)$ がアフィンであることをいう.
2. スタックの射 $f: X\to Y$ が幾何学的全単射であるとは, $\mathbb{C}$ 値点での groupoid 間の間手 $f(\mathbb{C}): X(\mathbb{C})\to Y(\mathbb{C})$ が圏同値であることをいう.

定義 2.6.

1. スタックの Grothendieck 群 $K(\mathrm{St}/\mathbb{C})$ とはアフィン固定群を持つスタックの同型類で生成される自由アーベル群を以下の同値関係で割って得られるもののこととする.
   (a) $[X_1\sqcup X_2] = [X_1]+[X_2]$.
   (b) 幾何学的全単射 $f: X\to Y$ があるなら $[X]=[Y]$
   (c) Zariski ファイブレーション $f_i : X_i \to Y$ $(i=1,2)$ が同じファイバーをもつなら $[X_1]=[X_2]$.
2. スタックのファイバー積で $K(\mathrm{St}/\mathbb{C})$ に積構造を定義すると $K(\mathrm{St}/\mathbb{C})$ は可換環になる. これをスタックの Grothendieck 群 $K(\mathrm{St}/\mathbb{C})$ とは

スタックの Grothendieck 環は定義からすると非常に大きな環に見えるが, 実は次の定理が成り立つ.

事実 2.7 ([B12, Lemma 3.9])**.** 代数多様体をスタックとみなすことで写像 $K(\mathrm{Var}/\mathbb{C})\to K(\mathrm{St}/\mathbb{C})$ が定義できる. この写像は次の環同型を与える.

$$K(\mathrm{Var}/\mathbb{C})\big[[\mathrm{GL}_d]^{-1}\mid d\in\mathbb{Z}_{\geq 1}\big] \xrightarrow{\sim} K(\mathrm{St}/\mathbb{C}).$$

2.4. 相対的 Grothendieck 群

アフィン固定群を持つスタック S を一つ取る．S 上の代数スタック全体は 2-category をなす．

定義 2.8. S 上の相対的 Grothendieck 群 $K(\mathrm{St}/S)$ とは，S 上の代数スタック $X \to S$ で $\mathbb{C}$ 上有限型でありアフィン固定群をもつものの同型類の生成する自由加群を以下の関係式で割って得られるものである．

(a) 任意の S 上のスタック $f_i : X_i \to S$ $(i = 1, 2)$ について

$$[X_1 \sqcup X_2 \xrightarrow{f_1 \sqcup f_2} S] = [X_1 \xrightarrow{f_1} S] + [X_2 \xrightarrow{f_2} S]$$

(b) スタックの可換図式

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

で g が幾何学的全単射となるものについて

$$[X_1 \xrightarrow{f_1} S] = [X_2 \xrightarrow{f_2} S]$$

(c) 任意の $g : Y \to S$ と同じファイバーをもつ Zariski ファイブレーション $h_i : X_i \to Y$ $(i = 1, 2)$ に対し

$$[X_1 \xrightarrow{g \circ h_1} S] = [X_1 \xrightarrow{g \circ h_2} S].$$

群 $K(\mathrm{St}/S)$ は作用

$$[X] \cdot [Y \xrightarrow{f} S] = [X \times Y \xrightarrow{f \circ p_2} S]$$

及びその線形拡張によって $K(\mathrm{St}/\mathbb{C})$ 上の加群の構造を持つ．

事実 2.9 ([B12, §3.5])**.** 以下現れるスタックは全てアフィン固定群をもつものとする．

1. スタックの射 $a : S \to T$ は $[X \xrightarrow{f} S] \mapsto [X \xrightarrow{a \circ f} T]$ によって $K(\mathrm{St}/\mathbb{C})$ 上の加群の射 (push-forward)
$$a_* : K(\mathrm{St}/S) \longrightarrow K(\mathrm{St}/T)$$
を誘導する．

2. スタックの有限型射 $a : S \to T$ から $K(\mathrm{St}/\mathbb{C})$ 上の加群の射 (pull-back)
$$a^* : K(\mathrm{St}/T) \longrightarrow K(\mathrm{St}/S)$$
が $[Y \xrightarrow{g} T] \mapsto [X \xrightarrow{f} S]$ によって誘導される．ここで f は以下の Cartesian square で定義される．
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d] \\ S \arrow[r, "a"'] & T \end{tikzcd}$$

3. push-forward と pull-backs は関手的である. つまり, 合成可能なスタックの射 a と b について $(b \circ a)_* = b_* \circ a_*$ 及び $(b \circ a)^* = a^* \circ b^*$ が成立する.

4. スタックの射からなる Cartesian square

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{c} & V \\ {\scriptstyle d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ S & \xrightarrow[a]{} & T \end{array}$$

が与えられたとき, 以下が成立する.

$$b^* \circ a_* = c_* \circ d^* : K(\mathrm{St}/S) \longrightarrow K(\mathrm{St}/V).$$

5. スタック S_1 と S_2 に対し $K(\mathrm{St}/\mathbb{C})$ 上の加群の射

$$K : K(\mathrm{St}/S_1) \otimes K(\mathrm{St}/S_2) \longrightarrow K(\mathrm{St}/S_1 \times S_2)$$

が次式で与えられる.

$$[X_1 \xrightarrow{f_1} S_1] \otimes [X_2 \xrightarrow{f_2} S_2] \longmapsto [X_1 \times X_2 \xrightarrow{f_1 \times f_2} S_1 \times S_2].$$

3. モチーフ的 Hall 代数

前節で導入したスタックの Grothendieck 群を用いてモチーフ的 Hall 代数を導入する.

3.1. 旗のモジュライ

X を非特異射影多様体とする. $\mathcal{M}^{(n)} = \mathcal{M}^{(n)}(X)$ で X 上の連接層からなる長さ n の旗のモジュライスタックを記す. つまり, S をスキームとすると $\mathcal{M}^{(n)}(S)$ のオブジェクトは

$$0 = E_0 \hookrightarrow E_1 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow E_n = E \tag{3.1}$$

という $S \times X$ 上の連接層の鎖であり, 各因子 $F_i := E_i/E_{i-1}$ は S 平坦である.

以下 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(X) := \mathcal{M}^{(1)}$ と略記する. $\mathcal{M}^{(n)}$ と $\mathcal{M}$ の間には以下のような射が定義できる.

$$\begin{aligned} a_i &: \mathcal{M}^{(n)} \to \mathcal{M}, \quad (3.1) \longmapsto F_i = E_i/E_{i-1} \quad (1 \le i \le n) \\ b &: \mathcal{M}^{(n)} \to \mathcal{M}, \quad (3.1) \longmapsto E_n = E \end{aligned}$$

3.2. モチーフ的 Hall 代数

定義 3.1. 1. 非特異射影多様体 X に対し

$$H(X) := K(\mathrm{St}/\mathcal{M}(X)).$$

2. 図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^{(2)} & \xrightarrow{b} & \mathcal{M} \\ {\scriptstyle (a_1,a_2)}\downarrow & & \\ \mathcal{M} \times \mathcal{M} & & \end{array}$$

を考える．ここで射 $a_1,\ a_2,\ b$ はそれぞれ旗 $E_1 \hookrightarrow E$ を $E_1,\ E/E_1,\ E$ に写す．$K(\mathrm{St}/\mathbb{C})$ 上の加群の射 $m : H(X)\otimes H(X) \to H(X)$ を以下の射の合成で定義する．

$$\begin{aligned} m : H(X)\otimes H(X) =& K(\mathrm{St}/\mathcal{M})\otimes K(\mathrm{St}/\mathcal{M}) \xrightarrow{K} K(\mathrm{St}/\mathcal{M}\times\mathcal{M}) \\ & \xrightarrow{(a_1,a_2)^*} K(\mathrm{St}/\mathcal{M}^{(2)}) \xrightarrow{b_*} K(\mathrm{St}/\mathcal{M}) = H(X). \end{aligned}$$

これを積演算とみなして記号 $\diamond$ で記すこともある．

注意 3.2. 積 $\diamond$ は

$$[E_1 \xrightarrow{f_1} \mathcal{M}] \diamond [E_2 \xrightarrow{f_2} \mathcal{M}] = [Z \xrightarrow{b\circ h} \mathcal{M}],$$

と表せる．ここで Z 及び h は以下の Cartesian square で定義される．

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] \arrow[d] & \mathcal{M}^{(2)} \arrow[r, "b"] \arrow[d, "(a_1,a_2)"] & \mathcal{M} \\ E_1\times E_2 \arrow[r, "f_1\times f_2"'] & \mathcal{M}\times\mathcal{M} & \end{tikzcd}$$

次の結果が Ringel-Hall 代数 [R90] のモチーフ類似を与える．

事実 3.3 ([B12, Theorem 4.3])**.** m によって $H(X)$ は $K(\mathrm{St}/\mathbb{C})$ 上の単位的結合代数の構造を持つ．

非特異射影多様体 X に対し，$K(\mathrm{St}/\mathbb{C})$ 上の代数 $H(X)$ を X のモチーフ的 Hall 代数と呼ぶ．以下 $H(X)$ の元 $[E \xrightarrow{f} \mathcal{M}]$ を単に $[E]$ と略記する．

3.3. 余積構造

Ringel-Hall 代数の時と同様，モチーフ的 Hall 代数 $H(X)$ には余積構造を導入でき，X が 1 次元なら $H(X)$ は双代数になる．また Ringel-Hall 代数には twisted Hall algebra や extended Hall algebra といった拡大版や，Hall pairing 及び Drinfeld ダブルを考えることが出来る．ここではそれらの概念のモチーフ類似を導入する．

以下 X は非特異射影多様体とする．アーベル圏 $\mathrm{Coh}(X)$ 上の Euler form

$$\chi(E,F) := \sum_i \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}^i(E,F)$$

は $\mathrm{Coh}(X)$ の Grothendieck 群 $K(\mathrm{Coh}(X)$ 上に双線型形式を誘導する．それに関する left radical (Serre 双対性により right radical と同一) を $K(\mathrm{Coh}(X))^{\perp}$ と記し，

$$N(X) := K(\mathrm{Coh}(X))/K(\mathrm{Coh}(X))^{\perp}$$

と定める (数値的 Grothendieck 群と呼ばれる)．$\Gamma \subset N(X)$ を effective class (連接層 E の類 $[E]$ と表せるもの) のなすモノイドとする．

するとスタック $\mathcal{M} = \mathcal{M}(X)$ は

$$\mathcal{M} = \bigsqcup_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{M}_\alpha$$

という直和分解を持つ．ここで $\mathcal{M}_\alpha$ は $N(X)$ での類が $\alpha \in \Gamma$ で与えられる連接層たちのモジュライスタックで，$\mathcal{M}$ のサブスタックとしては開かつ閉である．

包含射$\mathcal{M}_\alpha \hookrightarrow \mathcal{M}$から$K(\mathrm{St}/\mathbb{C})$加群の包含写像$K(\mathrm{St}/\mathcal{M}_\alpha) \hookrightarrow K(\mathrm{St}/\mathcal{M})$が定まり，上の直和分解から

$$H(X) = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} H(X)_\alpha, \quad H(X)_\alpha := K(\mathrm{St}/\mathcal{M}_\alpha) \tag{3.2}$$

という$K(\mathrm{St}/\mathbb{C})$加群の直和分解が得られる．$H(X)$は積$\diamond$に関して$\Gamma$-gradedな代数となる．

以下$\mathbb{L}$の平方根$\sqrt{\mathbb{L}}$で$K(\mathrm{St}/\mathbb{C})$を拡大した環

$$\widetilde{K} := K(\mathrm{St}/\mathbb{C})[\sqrt{\mathbb{L}}, 1/\sqrt{\mathbb{L}}]$$

を係数環に取る．補題2.2と事実2.7より次のことがわかる．

$$\widetilde{K} \simeq K(\mathrm{Var}/\mathbb{C})(\sqrt{\mathbb{L}})$$

定義 3.4.

1. $H_{\mathrm{tw}}(X)$を，$\widetilde{K}$上の加群としては$H(X) = K(\mathrm{St}/\mathcal{M}(X))$と同じものに積

$$[E_\alpha] * [E_\beta] := \sqrt{\mathbb{L}}^{\chi(\alpha,\beta)}[E_\alpha] \diamond [E_\beta]$$

を入れた$\widetilde{K}$上の代数と定義する．ここで$[E_\alpha]$と$[E_\beta]$は直和分解(3.2)で各々$H(X)_\alpha$, $H(X)_\beta$に属する類とする．

2. $H_{\mathrm{tw}}(X)$を$\{k_\alpha \mid \alpha \in N(X)\}$で拡大した$\widetilde{K}$上の代数を$H_{\mathrm{ext}}(X)$で記す．ここで$k_\alpha$達には以下の関係式を課す．

$$k_\alpha * k_\beta = k_{\alpha+\beta}, \quad k_\alpha * [E_\beta] = \sqrt{\mathbb{L}}^{\chi(\alpha,\beta)+\chi(\beta,\alpha)}[E_\beta] * k_\alpha.$$

但し$\alpha, \beta \in N(X)$．また$[E_\beta]$は$H(X)_\beta$の元とする．

次にGreenの余積[G95]のモチーフ類似を導入する．(3.2)に関するテンソル積の完備化を$\widehat{\otimes}$で記す．

定義 3.5.

1. $H(X)$上の余積$\Delta : H(X) \to H(X) \,\widehat{\otimes}\, H(X)$を次のように定義する．

$$\begin{aligned}\Delta : H(X) =& K(\mathrm{St}/\mathcal{M}) \xrightarrow{b^*} K(\mathrm{St}/\mathcal{M}^{(2)}) \xrightarrow{(a_1,a_2)_*} K(\mathrm{St}/\mathcal{M}\times\mathcal{M}) \\ &\to K(\mathrm{St}/\mathcal{M}) \,\widehat{\otimes}\, K(\mathrm{St}/\mathcal{M}) = H(X) \,\widehat{\otimes}\, H(X).\end{aligned}$$

2. $H_{\mathrm{ext}}(X)$上の余積$\Delta : H_{\mathrm{ext}}(X) \to H_{\mathrm{ext}}(X) \,\widehat{\otimes}\, H_{\mathrm{ext}}(X)$を$\Delta([E]k_\alpha) = \delta_\alpha \Delta(E)$で定義する．但し$\delta_\alpha : H(X) \,\widehat{\otimes}\, H(X) \to H_{\mathrm{ext}}(X) \,\widehat{\otimes}\, H_{\mathrm{ext}}(X)$は$[A] \otimes [B_\beta] \longmapsto [A]k_{\alpha+\beta} \otimes [B_\beta]k_\alpha$を線形拡張して得られるものとする．ここで$[B_\beta]$は$H(X)_\beta$の元，$[A]$は$H(X)$の元．

Ringel-Hall代数の場合と同様の議論により，以下の結論を得る．

命題 3.6. Xが非特異射影曲線なら，$H_{ext}(X)$は$*$とΔについて$\widetilde{K}$上の双代数の構造を持つ．

3.4. composition subalgebra と Drinfeld ダブル

以下 X は非特異射影曲線とする.

定義 3.7. $\mathcal{M}_{\mathrm{tor}} = \mathcal{M}_{\mathrm{tor}}(X)$ を X 上の捩れ連接層のモジュライスタック, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1(X)$ を X 上の直線束のモジュライスタックとする. これらのサブスタックの類及び $\{k_\alpha \mid \alpha \in N(X)\}$ で生成される $H_{\mathrm{ext}}(X)$ の部分代数を composition subalgebra と呼び, $U(X)$ と記す.

余積の定義により次の結果を得る.

命題 3.8. $U(X)$ は余積 Δ で閉じており, $\widetilde{K}$ 上の双代数となる.

最後に Drinfeld ダブルに関する準備をする. $H_{\mathrm{ext}}(X)$ 上の非退化双線型形式 $(\cdot,\cdot)_H$ を

$$(\cdot,\cdot)_H : H_{\mathrm{ext}}(X) \otimes H_{\mathrm{ext}}(X) \to \widetilde{K}, \quad ([A]k_\alpha, [B]k_\beta)_H := \delta_{A,B} a_A \sqrt{L}^{\chi(\alpha,\beta)}$$

で導入する. 但し $a_A := [\mathrm{Aut}(A)] \in K(\mathrm{St}/\mathbb{C})$ は A の自己同型の類.

命題 3.9. X が非特異射影曲線なら $(\cdot,\cdot)_H$ は *Hopf pairing,* つまり $(x * y, z)_H = (x \otimes y, \Delta z)_H$ が成立する. ここでテンソル積上には $(x \otimes y, z \otimes w)_H := (x,z)_H (y,w)_H$ で双線型形式を定めている.

この Hopf pairing に関する reduced Drinfeld ダブルを, 以下単にダブルと呼ぶ.

定義 3.10. $DU(X)$ で双代数 $U(X)$ のダブルを記す.

4. 射影直線の場合

ここではモチーフ的 Hall 代数及びその composition subalgebra を射影直線 $\mathbb{P}^1$ の場合に記述する.

事実 4.1. $\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^1)$ の indecomposable object は次の 2 種類である.

1. 直線束 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$,
2. 捩れ連接層 $T_{x,l} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}/\mathfrak{m}_x^t$ (x: $\mathbb{P}^1$ の閉点, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$).

$\mathcal{M}_{\mathrm{tor}} = \mathcal{M}_{\mathrm{tor}}(\mathbb{P}^1)$ で $\mathbb{P}^1$ 上の捩れ連接層のモジュライを記す. 上の結果によりこれは

$$\mathcal{M}_{\mathrm{tor}} = \bigsqcup_{l \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\, x \in \mathbb{P}^1} \mathcal{M}_{\mathrm{tor},x,l},$$

という分解を持つ. ここで $\mathcal{M}_{\mathrm{tor},x,l}$ は x に台を持つ長さ l の捩れ連接層のモジュライスタックである.

$\mathbb{P}^1$ 上の連接層 E に対し $\overline{E} := (\mathrm{rk}(E), \deg(E)) \in \mathbb{Z}^2$ で E の階数及び次数を記す.

定義 4.2. $H(\mathbb{P}^1)_{\mathrm{tor}} := K(\mathrm{St}/\mathcal{M}_{\mathrm{tor}}(\mathbb{P}^1))$ を捩れ連接層のみから構成される $\mathbb{P}^1$ 上のモチーフ的 Hall 代数とする. $K(\mathrm{St}/\mathbb{C})$ 上の代数として $H(\mathbb{P}^1)_{\mathrm{tor}} \subset H(\mathbb{P}^1)$ となっている.

1. $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し

$$1_{(0,l)} := \sum_{x \in \mathbb{P}^1,\, l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} [\mathcal{M}_{\mathrm{tor},x,l} \hookrightarrow \mathcal{M}] \quad \in H(\mathbb{P}^1)_{\mathrm{tor}}.$$

2. $\{T_l\}_{l\geq 1} \subset H(\mathbb{P}^1)_{\mathrm{tor}}$ を次の母函数で定義する.

$$1+\sum_{l=1}^{\infty} 1_{(0,l)} t^l = \exp\Big(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{T_l}{[l]_{\mathbb{L}}} t^l\Big).$$

3. $\{\Theta_l\}_{l\geq 1} \subset H(\mathbb{P}^1)_{\mathrm{tor}}$ を次の母函数で定義する.

$$1+\sum_{l=1}^{\infty} \Theta_{(0,l)} t^l = \exp\Big((\mathbb{L}^{-1}-\mathbb{L})\sum_{l=1}^{\infty} T_l t^l\Big).$$

4. 最後に $1_{(0,0)} = T_0 = \Theta_0 := [\mathcal{M}_0 \hookrightarrow \mathcal{M}] = 1$ と定める.

以下はKapranovの定理[K97]のモチーフ版である.

事実 4.3. $U_{\sqrt{\mathbb{L}}}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ と $DU(\mathbb{P}^1)$ は以下の写像により代数同型となる.

$$\begin{aligned} &x^+_{1,n} \longmapsto L^+_n, \quad x^-_{1,n} \longmapsto L^-_n \quad (n\in\mathbb{Z}),\\ &h_{1,r} \longmapsto T^+_r, \quad h_{1,-r} \longmapsto -T^-_r \quad (r\in\mathbb{Z}_{>0}),\\ &k_1 \longmapsto K, \quad q^c \longmapsto C. \end{aligned}$$

5. 射影直線のサイクルの場合

ここでは X を $\mathbb{P}^1$ からなるサイクルとしてモチーフ的Hall代数を調べる.

5.1. 代数構造

以下 C_n で $\mathbb{P}^1$ の n サイクルを記す. 各 $\mathbb{P}^1$ を $1,2,\ldots,n$ と番号付けしておく. C_n 上の連接層は i 番目の $\mathbb{P}^1$ 上の連接層 $E^{(i)}$ $(1\leq i\leq n)$ とそれらの張り合わせデータで完全に記述される.

定義 5.1. 1. i $E^{(i)} \cong \mathcal{O}(n)$ 及び $E^{(j)} \cong \mathcal{O}$ $(j\neq i)$ と書ける C_n 上の連接層のモジュライスタックを $\mathcal{M}_{(i),1,n}$ と記す.

2. i 番目にのみ台を持ち長さが r である C_n 上の捩れ連接層のモジュライスタックを $\mathcal{M}_{(i),0,r}$ と記す.

3. $n\in\mathbb{Z}$, $r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\alpha\in K(\mathcal{A})$ に対し

$$L_{i,n} := [\mathcal{M}_{(i),1,n} \hookrightarrow \mathcal{M}], \quad T_{i,r} := [\mathcal{M}_{(i),0,r} \hookrightarrow \mathcal{M}], \quad k_\alpha$$

とし, これらで生成される $H^{\mathrm{ext}}(\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^1))$ の部分代数を $U(C_n)$ と記し, C_n のモチーフ的Hall代数のcomposition subalgebraと呼ぶ.

$U(C_n)$ は余積 Δ で閉じていて, ダブル $DU(C_n)$ を考えることができる. [Y15]の主定理の一つは次の通りである.

定理 5.2. 量子トロイダル代数 $\mathcal{E}_n$ は $U(C_n)$ の *Drinfeld* ダブル $DU(C_n)$ と以下の写像で同型である.

$$E_{i,k} \mapsto L^+_{i,k}, \quad F_{i,k} \mapsto L^-_{i,k}, \quad H_{i,\pm r} \mapsto \pm T^{\pm}_{i,r} \quad (n\in\mathbb{Z},\ r\in\mathbb{Z}_{>0}).$$

5.2. 自己同型

Cramerの結果[C10]により, アーベル圏$\mathcal{A}$に付随する通常のHall代数$\mathcal{H}(\mathcal{A})$のDrinfeldダブル上には, $\mathcal{A}$の導来圏の自己同値から自己同型が誘導される. 殆ど同様の議論により, モチーフ的Hall代数にも類似の性質がある.

定理 5.3. *1. Xが1次元非特異射影多様体なら$D^b\,\mathrm{Coh}(X)$の自己同値Φから$DH^{ext}(\mathrm{Coh}(X))$の自己同型$\Phi^H$が誘導される.*

2. Φ^Hはcomposition subalgebraのダブル$DU(X)$を保つ.

C_nの場合は次のような結果になる.

定理 5.4. *nを3以上の整数とする. $Y \to S$を相対的極小楕円曲面であってC_nを特異ファイバーに持つものとする. Φをcompactified relative Jacobianの普遍族に付随する$D^b(\mathrm{Coh}(Y))$の相対的Fourier向井変換とする. するとΦのC_nへの制限が$DU(C_n) = \mathcal{E}_n$の自己同型θ_nを誘導する.*

注意 5.5. 1. Burban-Schiffmannの仕事[BS12]により$n = 1$の場合は以下のような主張が成立する. Xを楕円曲線とするとPoincaré束に付随するFourier向井変換Φが$DU(X) = \mathcal{E}_1$の自己同型$\Phi^H = \theta_1$を誘導する.

2. $n = 1, 2$でも我々の構成は適用可能である. 但し$\mathcal{E}_n$の定義, 特にSerre(型)関係式と構造函数g_n, d_nは変更する必要がある. また$n = 1$の場合は[BS12]と幾何学的設定が少し違うが, 得られるHall代数は同型になる.

6. ADE型量子トロイダル代数

我々の自己同型の構成法は相対的に極小な楕円曲面$Y \to S$の特殊ファイバーCに適用できる. まず代数構造については(小平の分類に応じて)次の主張が成立する.

命題 6.1. *ダブル$DU(C)$はADE型量子トロイダル代数と同型である.*

これは通常のRingel-Hall代数の場合に[GKV]で主張されたもののモチーフ類似である. 我々の構成は次の主張を導く.

定理 6.2. *楕円曲面$Y \to S$の相対Fourier向井変換から$DU(C)$の(非自明な)自己同型が誘導される.*

参考文献

[BS12] I. Burban, O. Schiffmann, *On the Hall algebra of an elliptic curve I*, Duke Math. J. **161** (2012) no. 7, 1171–1231.

[B98] T. Bridgeland, *Fourier-Mukai transforms for elliptic surfaces*, J. reine angew. math. **498** (1998), 115–133.

[B12] T. Bridgeland, *An introduction to motivic Hall algebras*, Adv. Math. **229** (2012) 102–138.

[C10] T. Cramer, *Double Hall algebras and derived equivalences*, Adv. Math. **224** (2010), no. 3, 1097–1120.

[FHHSY] B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi, S. Yanagida, *A commutative algebra on degenerate CP1 and Macdonald polynomials*, J. Math. Phys. **50** (2009), no. 9, 095215, 42 pp.

[FFJMM1] B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa and E. Mukhin, *Quantum continuous* $\mathfrak{gl}_\infty$*: Semi-infinite construction of representations*, Kyoto J. Math. **51** (2011), no. 2, 337–364.

[FFJMM2] B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa and E. Mukhin, *Quantum continuous* $\mathfrak{gl}_\infty$*: Tensor product of Fock modules and* W_n *characters*, Kyoto J. Math. **51** (2011), no. 2, 365–392.

[FJMM] B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin *Branching rules for quantum troidal* $\mathfrak{gl}_n$, preprint (2013), arxiv:1309.2147.

[FT11] B. Feigin, A. Tsymbaliuk, *Equivariant* K*-theory of Hilbert schemes via shuffle algebra*, Kyoto J. Math. **51** (2011), no. 4, 831–854.

[GKV] V. Ginzburg, M. Kapranov, E. Vasserot, *Langlands reciprocity for algebraic surfaces*, Math. Res. Lett. **2** (1995), no. 2, 147–160.

[G95] J. Green, *Hall algebras, hereditary algebras and quantum groups*, Invent. Math. **120** (1995), no. 2, 361–377.

[J07] D. Joyce, D, *Configurations in abelian categories. II. Ringel-Hall algebras*, Adv. Math. **210** (2) (2007) 635–706.

[K97] M. Kapranov, *Eisenstein series and quantum affine algebras*, J. Math. Sci. (New York) **84** (1997), no. 5, 1311–1360.

[K00] M. Kapranov, *The elliptic curve in the S-duality conjecture and Eisenstein series for Kac-Moody groups*, preprint (2000), arXiv:math.AG/0001005v2.

[Mi99] K. Miki, *Toroidal braid group action and an automorphism of toroidal algebra* $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1,tor})$ Lett. Math. Phys. **47** (1999), 365–378.

[Mi01] K. Miki, *Quantum toroidal algebra* $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1,tor})$ *and* R *matrices*, Journal of Math. Phys. **42** (2001), no. 5, 2293–2308.

[Mi07] K. Miki, *A* (q,γ)*-analog of the* $W_{1+\infty}$ *algebra*, Journal of Math. Phys. **48** (2007), no. 12, 1–35.

[Muk81] S. Mukai, *Duality between* $D(X)$ *and* $D(\widehat{X})$ *with its application to Picard sheaves*, Nagoya Math. J. **81** (1981), 153–175.

[Mus11] M. Mustata, *Zeta functions in algebraic geometry*, (2011), available at the webpage http://www.math.lsa.umich.edu/˜mmustata/.

[R90] C. Ringel, *Hall algebras and quantum groups*, Invent. Math. **101** (1990), no. 3, 583–591.

[Y15] S. Yanagida, *Quantum toroidal algebras and motivic Hall altebras*, preprint (2015).