An arithmetic group appearing in the Fourier-Mukai transforms on abelian surfaces

柳田　伸太郎*

神戸大学理学研究科　数学専攻　博士後期課程 2 年

概要

Fourier-向井変換は代数曲面上の安定層を調べる上で重要な役割を果たします. Abel 曲面の場合についてこの変換のコホモロジー上での作用を調べると, 安定層のモジュライと点の Hilbert スキームとの間の双有理写像が具体的に構成できます. またコホモロジーへの作用や双有理写像を記述するのに, 2 元 2 次不定方程式や算術群が活躍します.

Abel 曲面の Fourier-向井変換を調べる際に重要なのが, 半等質層とよばれる半安定層です. この半等質層と Fourier-向井変換を基に一般の安定層を構成したい, というのが本研究の主な動機です. 構成の際には "半等質表示" と言う層の分解の概念が重要になります. 今回の講演における主定理は, 曲面の Picard 数が 1 の時, 半等質表示の存在が安定層の Chern 指標のみを用いて判定できるこというものです. この定理から, 向井茂先生が 30 年ほど前に出した予想も肯定的に解決できます.

また安定層の Fourier-向井変換における振舞いの記述において, 算術群や整数係数 2 次形式が重要な役割を果たす事も分かります. これと半等質表示の存在から, 安定層のモジュライと Abel 曲面上の点の Hilbert スキームとの間の双有理変換を明示的に構成する事もできます.

講演は吉岡康太先生との共著のプレプリント [YY09] に基づいたものでした. 本稿は講演中に使ったプレゼンテーション資料と同一内容で, 目次もその資料に (殆ど) 揃えています.

目次

* yanagida@math.kobe-u.ac.jp, 日本学術振興会特別研究員 (DC1).

0 動機: 曲面上のベクトル束の分類問題

0.1 ベクトル束のモジュライ

代数曲面[*1]上の (代数的) ベクトル束のモジュライから話を始めます. 安直なモジュライ空間として考えつくのは "ベクトル束全体"なのですが, これは "大きすぎて"スキームではパラメトライズできません. 安定性と幾何学的不変式論 (GIT) を用いる[*2] とモジュライが構成できる, というのが安定層のモジュライのアイデアでした. 今回扱う安定性は Gieseker と丸山が定義したものです.

定義 0.1 (Gieseker-丸山). (X, H) を非特異射影多様体 X とその上の豊富な因子類 H の組とする. X 上の torsion free 層 E に対し $p_E(n) := \chi(E(nH))/\operatorname{rk}(E)$ と置く[*3]. E が H に関して**安定**(resp. **半安定**) とは, 任意の部分層 $0 \neq F \subsetneq E$ に対し $p_F(n) < p_E(n)$ (resp. $p_F(n) \leq p_E(n)$) が $n \gg 0$ で成立する事を言う. □

事実 0.2 (Gieseker). 非特異射影曲面 S と豊富な因子 H を固定する. **安定層のモジュライ**

$$M_S^H(r, \xi, a) := \{H \text{ に関して安定な } S \text{ 上の torsion free 層 } E \mid \operatorname{rk}(E) = r, c_1(E) = \xi, \chi(E) = a\} / \underset{\text{同型}}{\sim}$$

には (GIT 商により) 準射影的スキームの構造が入る. また半安定層の S 同値類[*4]を付け加える事で, $M_S^H(r, \xi, a)$ は射影的スキーム $\overline{M}_X^H(r, \xi, a)$ にコンパクト化される. □

安定層のモジュライの次元は高次元の代数多様体の例を提供します.

0.2 点の Hilbert スキーム

安定層のモジュライの重要な例が**点の Hilbert スキーム**です.

$$\operatorname{Hilb}^{\ell}(S) := \{\mathcal{O}_Z \mid Z : S \text{ 上の長さ } \ell \text{ の finite subscheme}\}$$

で非特異射影曲面 S 上の点の Hilbert スキームを記します. 自然な完全列[*5] $0 \to \mathcal{I}_Z \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_Z \to 0$ により $\operatorname{Hilb}^{\ell}(S) \cong M_S^H(1, 0, -\ell)$ が分かります. ここで H は S 上の任意の豊富な因子です.

[*1] 本稿に現れるスキーム, 代数多様体は全て複素数体上のものとします.
[*2] 層の安定性の定義やモジュライ空間の構成に関する教科書として [HL] があります.
[*3] χ は Euler 標数です.
[*4] ここでは定義しません.
[*5] $\mathcal{I}_Z$ は Z のイデアル層です.

0.3 Fourier-向井変換

Fourier-向井変換[*6] は [M81] で導入され, 現在では様々な応用が見出されています.

定義 0.3. X と Y を非特異射影多様体, $p_X : X \times Y \to X$ と $p_Y : X \times Y \to Y$ を自然な射影, $\mathcal{E}^\bullet$ を $\mathrm{Coh}(X \times Y)$ の有界導来圏 $\mathcal{D}(X \times Y)$ の対象とする.

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{\mathcal{E}^\bullet}^{X \to Y} : & \mathcal{D}(X) & \to & \mathcal{D}(Y) \\ & ? & \mapsto & \mathbb{R}p_{Y*}(p_X^*(?) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{E}^\bullet) \end{array}$$

で定義される関手 $\Phi_{\mathcal{E}^\bullet}^{X \to Y}$ は, 圏同値を与える時, **Fourier-向井変換**(FMT) と呼ばれる. $\mathcal{E}^\bullet$ は FMT の (積分) 核と呼ばれる. □

S の標準層が自明な場合, Fourier-向井変換でもって一般のモジュライと Hilbert スキームとの間の双有理写像が構成できる時があります. 今回は **Abel 曲面**上の層のモジュライに注目し, Fourier-向井変換によってモジュライ間の双有理写像を構成します.

1 準備: Abel 曲面上のモジュライの問題

1.1 Abel 曲面上の安定層

この節からは Abel 曲面 X 上の安定層の分類問題を考えることにします. まず次の概念の導入から始めます.

定義 1.1. $E \in \mathrm{Coh}(X)$ に対し**向井ベクトル**を次で定義する:

$$\begin{aligned} v(E) &:= \mathrm{ch}(E) = (\mathrm{rk}(E), c_1(E), \chi(E)) \\ &\in H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}} := H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{NS}(X) \oplus H^4(X, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$ □

向井ベクトルを用いると, 安定層の基本性質をいくつか述べることができます.

事実 1.2. E が単純 ($\overset{\mathrm{def}}{\iff}$ $\mathrm{End}(E) \cong \mathbb{C}$) なら $\ell := \langle v(E)^2 \rangle / 2$ は非負整数. 但し

$$\langle (r, \xi, a), (s, \eta, b) \rangle := (\xi, \eta) - as - rb, \quad \langle v(E)^2 \rangle := \langle v(E), v(E) \rangle.$$ □

そこで, ℓ の値によって安定層を分類, 記述するのが良さそうです. $\ell = 0$ のとき, 楕円曲線上のベクトル束の議論を真似することが出来て, 結果, **半等質層**と呼ばれるもので分類されます. これについては 2.1 節で詳しく述べます. 一般の ℓ についてのモジュライの性質を次節で述べますが, その前に向井ベクトルに関する用語をまとめて紹介します.

1. $v = (r, \xi, a) \in H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ が**正**であるとは $r > 0$, または $r = 0$ かつ ξ が effective, または $r = 0$ かつ $\xi = 0$ かつ $a > 0$ である事をさします.
2. v が**原始的**であるとは $H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Z})/(\mathbb{Z}v)$ が torsion free な事を言います.
3. v が**等方的**であるとは $\langle v^2 \rangle = 0$ である事を言います.

[*6] 代数幾何学のコンテキストでの解説書として [H] があります.

4. 最後に, X 上の豊富な因子類 H が固定されている時, $r > 0$ なら $\mu(v) := (\xi, H)/r$, $r = 0$ なら $\mu(v) = +\infty$ と定めます.

引き続き X は Abel 曲面, H はその上の豊富な因子とします. $v = (r, \xi, a) \in H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ を位相不変量とする安定層のモジュライ空間 $M_X^H(r, \xi, a)$ を, 以下では $M_X^H(v)$ と略記します.

事実 1.3 (向井-吉岡). $v = (r, \xi, a)$ を Abel 曲面 X の向井ベクトルとする.
(1) $M_X^H(v)$ は (空もしくは) 非特異でその次元は $\langle v^2 \rangle + 2$.
(2) $M_X^H(v)$ はシンプレクティック構造をもつ.
(3) v が原始的であるとする. H を v に関して一般にとれば $M_X^H(v)$ は射影的になる.
(4) v が正なら, 半安定層 E で $v(E) = v$ なるものが存在するための必要十分条件は $\langle v^2 \rangle \geq 0$.
(5) $\langle v^2 \rangle > 0$ とする. H が v に関して一般なら, $M_X^H(v)^{ss}$ は既約な正規射影多様体. □

この事実の最初の 3 つは [M84] で, 後半 2 つは [Y03] で証明されています. 今回は Abel 曲面についてのみ述べましたが, K3 曲面の場合でも向井ベクトルの定義をし直せば同様の主張が成立します.

1.2 向井の予想

$\ell > 0$ の時のモジュライについて, 次の様な予想が 30 年ほど前に提出されています ([M80, 予想 1, 予想 1′]).

予想 1.4. X を主偏極 Abel 曲面でかつ $\mathrm{NS}(X) \cong \mathbb{Z}H$ とする. $v = (r, dH, a) \in H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ は正かつ $\ell := \langle v^2 \rangle / 2 > 0$ とする. v **に付随する 2 次形式**を

$$Q_v(x, y) := -rx^2 + 2dxy - ay^2$$

で定義する. もし不定方程式 $Q_v = \pm 1$ に解があれば, 次の様なモジュライ空間の間の双有理写像が存在する:

$$Q_v = \pm 1 \text{ に整数解がある} \implies M_X^H(v) \dashrightarrow X \times \mathrm{Hilb}^\ell(X). \qquad \square$$

今回の話の主結果はこの予想を少し拡張して肯定的に解決できるというものです:

予想 1.4 は “主偏極” の仮定を外しても正しい.

2 半等質表示

2.1 半等質層

ここでは [M78] で導入された半等質層の紹介をします. Abel 曲面 X を固定します. $x \in X$ に対応する X 上の平行移動を T_x で表わします. X の dual variety を $\widehat{X}$ と書きます. また $\mathbf{P}$ で X の Poincaré 束を表わします. これは $X \times \widehat{X}$ 上の直線束でした.

定義 2.1. $E \in \mathrm{Coh}(X)$ に対し

$$S(E) := \{(x, \hat{x}) \in X \times \widehat{X} \mid T_x^*(E) \otimes \mathbf{P}|_{X \times \hat{x}} \cong E\}$$

は $X \times \widehat{X}$ の部分 Abel 多様体であり, $\dim S(E) \leq 2$ である (証明は [M78, Proposition 3.3] をご覧ください). $\dim S(E) = 2$ となる E を**半等質層**と呼ぶ. □

半等質ベクトル束 E は任意の $x \in X$ に対してある $L \in \mathrm{Pic}^0(X)$ があって $T_x \otimes E \cong L \otimes E$ となるものです. "半等質" と言う言葉はこれに由来します.

半等質層の分類および特徴付けは以下の様になります (証明は [M78] と [Y09, § 4] をご覧ください.):

事実 2.2. H を X の豊富な因子類, $v = (r, \xi, a)$ を正の等方的な向井ベクトルとする.

1. $E \in \mathrm{Coh}(X)$ とする.
   (a) $v(E) = v$ なら, E が単純 ($\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathrm{End}(E) \cong \mathbb{C}$) $\iff$ E が安定 $\iff$ v が原始的.
   (b) v が原始的で, E が H に関して半安定かつ $v(E) = nv$ だとする. この時 E は $\bigoplus_{i=1}^n E_i$, $E_i \in M_X^H(v)$ と S-同値.
   (c) $v(E) = v$ となる半安定層 E は半等質層.
2. 安定な半等質層は次の様に分類できる.
   (a) 半等質ベクトル束
   任意の $\delta \in \mathrm{NS}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ に対して単純半等質ベクトル束 E があって $c_1(E)/\mathrm{rk}(E) = \delta$ となる.
   もし E と E' が単純な半等質ベクトル束であって $c_1(E)/\mathrm{rk}(E) = c_1(E')/\mathrm{rk}(E')$ を満たすなら, ある $M \in \mathrm{Pic}^0(X)$ があって $E \cong E' \otimes M$.
   任意の半等質ベクトル束 E は, Abel 曲面の isogeny $\pi \colon X' \to X$ と X' 上のベクトル束 L によって $E = \pi_*(L)$ と書ける.
   (b) 半等質な torsion 層.
   $\mathrm{Supp}(E)$ は楕円曲線 C であり E は C 上の locally free な半安定層, もしくは $\mathrm{Supp}(E)$ が 1 点で E は摩天楼層. □

2.2 Abel 曲面上の Fourier-向井変換

Abel 曲面上の FMT に関しては D. Orlov の仕事 [O02] により次の分類が知られています. 証明に関しては [Y09, Theorem 1.4] もご覧ください.

事実 2.3. (1) X を Abel 曲面, Y を非特異射影多様体とする. もし FMT $\Phi_{X \to Y}^{\mathbf{E}^\bullet}$ が存在するなら Y は Abel 曲面であり, 逆関手は $\Phi_{Y \to X}^{\mathbf{E}^{\bullet\vee}[2]}$ で与えられる. ただし $\mathbf{E}^{\bullet\vee} := \mathbf{R}\,\underline{\mathit{Hom}}(\mathbf{E}^\bullet, \mathcal{O}_{X \times Y})$ は derived dual.
(2) X を Abel 曲面, $v = (r, \xi, a)$ を原始的かつ等方的な X 上の向井ベクトルとする. もし $M_X^H(v) \times X$ 上の普遍族 $\mathbf{E}$ があれば $\Phi_{X \to M_X^H(v)}^{\mathbf{E}}$ は FMT.
(3) X と Y を Abel 曲面とし, 圏同値 $\Phi \colon \mathbf{D}(X) \to \mathbf{D}(Y)$ があると仮定する (この様な Y を X の Fourier-向井対と言う). この時原始的かつ等方的な向井ベクトル v があって $Y = M_X^H(v)$ である. 更に $Y \times X$ 上の普遍族 $\mathbf{E}$ と整数 $k \in \mathbb{Z}$ があって $\Phi = \Phi_{X \to Y}^{\mathbf{E}[k]}$ である. □

実は半等質層のコホモロジーは計算されていて, (詳しくは [M78] もしくは [YY09, Fact 2.12] をご覧下さい.) それを用いると FMT の下での半等質層の振る舞いが決定できます. 詳細を命題 2.5 で述べますが, その前に次の定義を用意しておきます:

定義 2.4. X と Y を非特異射影多様体とする. E を X 上の連接層, $\Phi \colon \mathbf{D}(X) \to \mathbf{D}(Y)$ を圏同値とする. E が Φ に関して **weak index theorem** を**指数 i で満たす**とは, $H^j(\Phi(E)) = 0$ が任意の $j \neq i$ で成り立つ事を言う. WIT_i を満たす, とも言う事にする. WIT_i が成立する時, $\Phi^i(E) := H^i(\Phi(E))$ と定義する. □

命題 2.5. $\mathrm{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ とする．v を正で原始的かつ等方的な向井ベクトルとし, $Y := M_X^H(v)$ とする．向井ベクトル w があって $\langle v, w \rangle = -1$ だと仮定する．この時 $Y \times X$ 上に普遍族 $\mathbf{E}$ があるそこで $\Phi := \Phi_{X \to Y}^{\mathbf{E}^\vee}$ とおく．また $\mu := \mu(v)$ とする．
(1) X 上の任意の半等質層 E は weak index theorem を満たす．その指数 i は

$$i = \begin{cases} 0 & \mu(E) > \mu, \\ 2 & \mu(E) \le \mu, \end{cases}$$

で与えられる．但し $\mu(E) := (c_1(E).H)/\operatorname{rk}(E)$．更に $\Phi^i(E)$ も半等質層．
(2) E を $v(E) = v$ なる半等質層とすると, $\Phi(E) = \mathbb{C}_y[-2]$ である．ここで $y \in Y$ は E に対応する Y の閉点．
(3) 仮定の中の向井ベクトル w が等方的だとする．この時 $v(F) = w$ なる半等質層 F について $\Phi(F) = L[-i]$ となる．但し L は Y 上の直線束であり, i は $\mu(F) > \mu$ か $\mu(F) \le \mu$ により 0 もしくは 2 となる． □

証明は [YY09, Proposition 2.14] をご覧下さい．

2.3 半等質表示

ここで今回の研究の主要な鍵になる半等質表示という概念を導入します．引き続き X は Abel 曲面とします．

定義 2.6. $E \in \mathrm{Coh}(X)$ の**半等質表示**とは短完全列

$$0 \to E \to E_1 \to E_2 \to 0 \quad \text{又は} \quad 0 \to E_1 \to E_2 \to E \to 0$$

であって次の条件を満たすものの事である:
$v(E_1) = \ell_1 v_1$, $v(E_2) = \ell_2 v_2$ によって正整数 ℓ_1, ℓ_2 と原始的向井ベクトル v_1, v_2 を定めた時,

$$(\ell_1 - 1)(\ell_2 - 1) = 0, \quad \langle v_1, v_2 \rangle = -1, \quad \langle v_1^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle = 0.$$

上の完全列を kernel presentation 及び cokernel presentation と呼ぶ． □

条件から E_1, E_2 は半等質層ですが, それが半等質表示という言葉の由来です．

2.4 半等質表示の効用

半等質表示が有用である事は, 次の命題によって示唆されます ([YY09, Proposition 3.2])．

命題 2.7. $\mathrm{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ と仮定する．$\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ とし, E を X 上の安定層で $\langle v(E)^2 \rangle = 2\ell$ なるものとする．
E の半等質表示で可能なものを

$$\begin{array}{cccccccccc} (1) & 0 & \to & E_1 & \to & E_2 & \to & E & \to & 0 \\ (2) & 0 & \to & E_2 & \to & E_1 & \to & E & \to & 0 \\ (3) & 0 & \to & E & \to & E_2 & \to & E_1 & \to & 0 \\ (4) & 0 & \to & E & \to & E_1 & \to & E_2 & \to & 0 \end{array}$$

と書く．ここで E_i は半等質層であって, その向井ベクトルが $v(E_1) = v_1$ 及び $v(E_2) = \ell v_2$ と書けるものとする．ここで v_1 と v_2 は原始的向井ベクトル．
$\mathbf{E}$ を向井ベクトルが v_2 である半等質層の普遍族とする．そして $Y := M_X^H(v_2)$, $\Phi_1 := \Phi_{X \to Y}^{\mathbf{E}}$, $\Phi_2 := \Phi_{X \to Y}^{\mathbf{E}^\vee}$ とおく．最後に $\widehat{\Phi}_1 := \Phi_1 \circ \mathcal{D}_X$ を FMT と dualizing functor との合成関手とする．

条件

$$E \text{ は} \widehat{\Phi}_1 \text{に対して } \mathrm{WIT}_i \text{を満たし} \widehat{\Phi}_1^i(E) \cong L \otimes I_Z, \tag{\#1i}$$

$$E \text{ は} \Phi_2 \text{に対して } \mathrm{WIT}_i \text{を満たし} \Phi_2^i(E) \cong L \otimes I_Z, \tag{\#2i}$$

を考える．ここで $Z \subset Y$ は長さ ℓ の 0 次元部分スキーム, I_Z はそのイデアル層, L は Y 上の直線束．

以上の準備の下, E の各半等質表示 (1)-(4) が存在するための必要十分条件は

$$(1) \iff (\#21), \quad (2) \iff (\#12), \quad (3) \iff (\#11), \quad (4) \iff (\#22)$$

となる．

更に "X 上の安定層が半等質表示を持つ" と言う条件は開条件である． □

2.5 数値的判定法

安定層 E にどの様な条件を課せば半等質表示が存在するかが問題となります．$\mathrm{rk}\,\mathrm{NS}(X) = 1$ の場合, 実は向井ベクトル (つまり層の位相不変量) のみで存在条件が書き下せます．

定義 2.8. 向井ベクトル v に対し, 自然数 ℓ_1, ℓ_2 と正の原始的向井ベクトル v_1, v_2 であって

$$v = \pm(\ell_2 v_2 - \ell_1 v_1), \tag{\#}$$

かつ

$$\begin{aligned} &(\ell_1 - 1)(\ell_2 - 1) = 0, \\ &\langle v_1^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle = 0, \quad \langle v_1, v_2 \rangle = -1, \quad \mu(v_1) < \mu(v_2) \end{aligned}$$

を満たすものを考える．(#) を *numerical equation*, 解 $(v_1, v_2, \ell_1, \ell_2)$ を v の *numerical solution* と呼ぶ． □

今回の研究の主結果は次の定理です ([YY09, Theorem 3.6]):

定理 2.9 (数値判定法). $\mathrm{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ と仮定し, v を $\langle v^2 \rangle > 0$ なる向井ベクトルとする．
(1) もし v に 2 つ以上 numerical solution が存在すれば, $M_X^H(v)$ の一般の元は kernel presentation と cokernel presentation を持つ．どちらの半等質表示も一意に決まる．
(2) もし v の numerical solution が 1 つのみ存在すれば, $M_X^H(v)$ の一般の元は kernel presentation 又は cokernel presentation のどちらかを持つ．その半等質表示は一意に決まる． □

定理の証明には, numerical solution $(v_1, v_2, \ell_1, \ell_2)$ に対し半等質層 E_1, E_2 であって $v(E_i) = \ell_i v_i$ $(i = 1, 2)$ なるものからなる複体 $E_1 \to E_2$ (この 2 項以外はゼロ層) をパラメトライズするモジュライ空間 $\mathfrak{M}^+(v_1, v_2, \ell_1, \ell_2)$ を構成する必要があります．このモジュライについては [YY09, § 4] をご覧下さい．

3 コホモロジー的 Fourier-向井変換の行列表示

定理 2.9 は, 安定層の構造が向井ベクトル (整数係数コホモロジー類) から定まる不定方程式によって支配されている事を意味します．一方で命題 2.5 は安定層の半等質表示があると FMT の下での安定層の振る舞いが解析しやすい事を意味しています, そこで FMT のコホモロジー群への作用を具体的に書き下せると便利だと思われます．

3.1 コホモロジー的 Fourier-向井変換

$\Phi : \mathbf{D}(X) \to \mathbf{D}(Y)$ を Abel 曲面 X と Y の間の FMT とします. これは導来圏の間の同値ですが, これから Grothendieck 群の同型 $\Phi^K \colon K(X) \to K(Y)$ とコホモロジー群の同型 $\Phi^H \colon H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Q}) \to H^{\mathrm{ev}}(Y, \mathbb{Q})$ が誘導されて, 更に以下の可換図式が得られます. (証明は [H, § 5.2] をご覧ください.)

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{D}(X) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "{[\ ]}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{D}(Y) \arrow[d, "{[\ ]}"] \\
K(X) \arrow[r, "\Phi^K"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & K(Y) \arrow[d, "v"] \\
H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Q}) \arrow[r, "\Phi^H"'] & H^{\mathrm{ev}}(Y, \mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

ここで [ ] は導来圏から Grothendieck 群への自然な写像, v は向井ベクトルを取る事で得られる写像です.

また Φ^H は向井格子の同型 $(H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \to (H^{\mathrm{ev}}(Y, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を引き起こします (証明は [Y01, Lemma 2.2] をご覧ください.) Φ^H の事を今後**コホモロジー的 Fourier-向井変換**(コホモロジー的 FMT) と呼びます. 今後, 混乱の恐れがなければコホモロジー的 FMT の記号の中の H を省略して単に Φ と書きます.

3.2 行列表示

以下この節では X は $\mathrm{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ なる Abel 曲面だとし, $n := (H^2)/2$ と置きます.

向井格子 $H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ を次の様に書き直します. まず加群

$$\mathrm{Sym}_2(\mathbb{Z}, n) := \left\{ \begin{bmatrix} x & y\sqrt{n} \\ y\sqrt{n} & z \end{bmatrix} \,\middle|\, x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$$

を定義すると, 同型

$$\begin{array}{rccc} \iota_X \colon & H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Sym}_2(\mathbb{Z}, n) \\ & (r, dH, a) & \mapsto & \begin{bmatrix} r & d\sqrt{n} \\ d\sqrt{n} & a \end{bmatrix}. \end{array}$$

が存在します. $\mathrm{Sym}_2(\mathbb{Z}, n)$ 上の双線型形式 B を

$$B(M, M') := 2yy' - (xz' + zx'), \quad M = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix},\ M' = \begin{bmatrix} x' & y' \\ y' & z' \end{bmatrix} \in \mathrm{Sym}_2(\mathbb{Z}, n).$$

で定義します. すると $\langle v, v' \rangle = B(\iota_X(v), \iota_X(v'))$ であり, 次の格子の同型を得ます:

$$\iota_X \colon (H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Sym}_2(\mathbb{Z}, n), B).$$

$\mathrm{FM}(X)$ で X の Fourier-向井対の集合を表わします. 実は $\mathrm{FM}(X)$ の任意の元 Y も $\mathrm{rk}\,\mathrm{NS}(Y) = 1$ を満たし, $\mathrm{NS}(Y)$ の ample generator を $\widehat{H}$ と書くと $(\widehat{H}^2) = 2n$ です. そこで FMT $\Phi \colon \mathbf{D}(Y) \to \mathbf{D}(Z)$ に対し

$$\theta(\Phi) := \iota_Z \circ \Phi^H \circ \iota_Y^{-1},$$

と定義できます. ここで $\Phi^H \colon H^{\mathrm{ev}}(Y, \mathbb{Z}) \to H^{\mathrm{ev}}(Z, \mathbb{Z})$ は Φ から誘導されるコホモロジー的 FMT です.

$Y, Z \in \mathrm{FM}(X)$ に対し

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Eq}_0(\mathbf{D}(Y), \mathbf{D}(Z)) := \{\Phi_{Y\to Z}^{\mathbf{E}[2k]} \in \mathrm{Eq}(\mathbf{D}(Y), \mathbf{D}(Z)) \mid \mathbf{E} \in \mathrm{Coh}(Y \times Z), k \in \mathbb{Z}\},\\
&\mathcal{E}(Z) := \bigcup_{Y\in\mathrm{FM}(X)} \mathrm{Eq}_0(\mathbf{D}(Y), \mathbf{D}(Z)), \quad \mathcal{E} := \bigcup_{Z\in\mathrm{FM}(X)} \mathcal{E}(Z)
\end{aligned}$$

と置きます. ι_Y, ι_Z 及び Φ^H は格子の isometry なので $\theta(\Phi)$ は $(\mathrm{Sym}_2(\mathbb{Z}, n), B)$ 上の isometry になります. 従って写像 $\theta\colon \mathcal{E} \to \mathrm{O}(B)$ が定義されます.

3.3 算術群 G

θ の像が知りたいのですが, それを記述するのに次の算術群が必要になります.

定義 3.1 (算術群 G).

$$\widehat{G} := \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \,\middle|\, x^2, y^2, z^2, w^2, \frac{xy}{\sqrt{n}}, \frac{zw}{\sqrt{n}} \in \mathbb{Z} \right\}, \quad G := \widehat{G} \cap \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}). \qquad \square$$

定理 3.2 ($\mathrm{Im}\,\theta$ の構造定理). 各 $Z \in \mathrm{FM}(X)$ に対して次の全単射が存在する.

$$\theta(\mathcal{E}(Z)) \cong G/\{\pm 1\}. \qquad \square$$

関連する行列群をいくつか用意します:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{O}(2,1) := \{A \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) \mid A^{-1}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}\},\\
&\mathrm{SO}(2,1) := \mathrm{O}(2,1) \cap \mathrm{SL}(3, \mathbb{R}),\\
&\mathrm{SO}_0(2,1) := \text{ 単位行列を含む } \mathrm{SO}(2,1) \text{ の連結成分}.
\end{aligned}$$

G とこれらの行列群は以下の可換図式で関係づけられます:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "\theta_X"] & \mathrm{Im}\,\theta_X \arrow[r, "\mathrm{incl.}"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{O}(B) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{O}(2,1) \\
& G/\{\pm 1\} \arrow[r, "\mathrm{incl.}"] & \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, "\mathrm{inj.}"'] & \mathrm{SO}_0(2,1) \arrow[u, "\mathrm{incl.}"'] \\
& G \arrow[r, "\mathrm{incl.}"'] \arrow[u, "\mathrm{surj.}", "2:1"'] & \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \arrow[u, "\mathrm{surj.}", "2:1"'] &
\end{tikzcd}$$

注意 3.3. (1) $\mathrm{Im}\,\theta_X \hookrightarrow \mathrm{SO}(2,1)$ で行列式は正ですが, これは FMT の “orientation の問題” と関係します.
(2) 実は $\mathrm{NS}(X) \cong \mathbb{Z}H$ を仮定しなくても, 一般の Abel 曲面について orientation に関する類似の性質が成立します. また, K3 曲面についても orientation に関する主張が成立します. $\square$

3.4 G の構造定理

準同型 $\phi : G \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus N}$ を以下のように定義します.

命題 3.4 (準同型 ϕ). (1) $p_1, p_2, \ldots, p_N$ を $n := (H^2)/2$ の素因数 (重複なし) とする. 写像 $\widetilde{\phi}_i \colon \mathbb{Z} \to \{0,1\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ を

$$\widetilde{\phi}_i(m) = \mathrm{ord}_{p_i}(m) \mod 2$$

で定義し, そして次の式で写像 $\widetilde{\phi}$ を定義する.

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{\phi}\colon & \mathbb{Z} & \to & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus N} \\ & m & \mapsto & (\widetilde{\phi}_1(m), \widetilde{\phi}_2(m), \ldots, \widetilde{\phi}_N(m)). \end{array}$$

(2) G の元 g に対し, $adr - bcs = \pm 1$ かつ $rs = n$ なる整数 a, b, c, d 及び自然数 r, s が次で一意に決まる.

$$G \ni g = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\sqrt{r} & b\sqrt{s} \\ c\sqrt{s} & d\sqrt{r} \end{bmatrix}.$$

この自然数 r を用いて $\phi(g) := \widetilde{\phi}(r)$ と定義すると $\phi : G \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus N}$ は群準同型になる. $\square$

命題 3.5 (群 G の構造定理). (1) ϕ は全射.
(2) $g := \begin{bmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とすると $g^{-1}(\ker\phi)g \cong \Gamma_0(n)$, $g^{-1}Gg \subseteq \mathrm{Norm}(n)$. 但し $\Gamma_0(n) := \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{n}\}$. また $\mathrm{Norm}(n)$ は $\Gamma_0(n)$ の $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ における正規化群. $\square$

3.5 Atkin-Lehner 群との関連

$\mathrm{Norm}(n)$ は Atkin-Lehner 群と呼ばれ, modular 関数の Hecke 作用素の研究で重要な働きをします. G は $\mathrm{Norm}(n)$ に近いのですが, 一般には異なります.

群 $\mathrm{AL}(n)$ を $\mathrm{AL}(n) := \mathrm{Norm}(n)/\Gamma_0(n)$ と定義します.

この時点で図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \Gamma_0(n) & \longrightarrow & \mathrm{Norm}(n) & \longrightarrow & \mathrm{AL}(n) & \longrightarrow & 1 \\ & & \uparrow\wr & & \uparrow\scriptstyle{\text{inj.}} & & & & \\ 1 & \longrightarrow & \ker\phi & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\phi} & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus N} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

が成立しています.

実は $\mathrm{AL}(n)$ の構造は n の素因数と関連します:

$$\mathrm{AL}(n) \cong G_2(n) \times G_3(n) \times \prod_{p\colon 5 \text{ 以上の } n \text{ の素因数}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

ここで $G_2(n)$ と $G_3(n)$ は有限群で, 一般には $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ではありません.

従って一般の n については G は $\mathrm{Norm}(n)$ と一致しません. しかし, n の素因数に 2,3 が含まれなければ $G \cong \mathrm{Norm}(n)$ です.

4 双有理写像と類数

最後に安定層のモジュライと点の Hilbert スキームとの対応を見ます. [Y09] でより一般の Abel 曲面 X について双有理写像 $M_X^H(v) \dashrightarrow X \times \mathrm{Hilb}^{\langle v^2 \rangle/2}(X)$ が存在する事が証明されています. ここでは $\mathrm{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ の場合にこの双有理写像を "明示的に" 記述したいと思います. 引き続き $n := (H^2)/2$ と置きます.

4.1 双有理写像と不定方程式

ここでは予想 1.4 を拡張して解決できることを紹介します．まず予想に述べてある 2 次形式を拡張しましょう．

定義 4.1 ($\boldsymbol{v}$ に付随する 2 次形式). $v = (r, dH, a) \in H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ は $\ell := \langle v^2 \rangle / 2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ を満たすとする．v に付随する 2 次形式を次のように定義する．

$$Q_v(x, y) := -rx^2 + 2dxy\sqrt{n} - aq^2. \qquad \square$$

すると定理 2.9 と前節の算術群 G に関する議論を用いることで, 次の定理を証明することができます.

定理 4.2 (予想 1.4 の解決). 不定方程式

$$Q_v(q_1, -p_1) = \pm 1$$

に $p_1^2, p_1q_1, q_1^2 \in \mathbb{Z}$ なる解があるとし, そのうち $|p_1|$ が最小の解をとる．すると G の元 $g := \begin{bmatrix} q_1 & -q_2 \\ -p_1 & p_2 \end{bmatrix}$ について, $\theta_X(\Phi) = \pm g$ なる FMT Φ をとれば, Φ または $\Phi \circ \mathcal{D}_X$ が次の双有理写像を与える:

$$M_X^H(v) \dashrightarrow M_Y^{\widehat{H}}(1, 0, -\ell) \cong \mathrm{Pic}^0(Y) \times \mathrm{Hilb}^\ell(Y)$$

但し $\mathcal{D}_X(?) := \mathbb{R}\,\underline{Hom}(?, \mathcal{O}_X)$, $Y := M_X^H(p_1^2, \frac{p_1q_1}{\sqrt{n}}, q_1^2)$. $\square$

4.2 主偏極の場合

$n = 1$ の時, 即ち X が主偏極の時, 上の記述は更に簡明になります．まず, 次の事実に注意しておきます.

事実 4.3. X が $\mathrm{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ かつ $(H^2) = 2$ なる Abel 曲面なら $\mathrm{FM}(X) = \{X\}$. $\square$

また, $n = 1$ の時は先ほどの算術群 G は $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ になり, 2 次形式 Q_v は整数係数になるので, 古典的な 2 次不定方程式の理論が役に立つ事が示唆されます.

定義 4.4. (1) 2 つの $\mathbb{Z}$ 係数 2 次形式 $ax^2 + 2bxy + cy^2$ と $a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$ が同値 $\overset{\mathrm{def}}{\iff}$ $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ があって ${}^tA \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{bmatrix}$.
(2) $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ の判別式を $\det f := b^2 - ac$ で定義する.
(3) 判別式が D である 2 次形式の**類数**を, 2 次形式の (1) の意味における同値類の数で定義する. $\square$

命題 4.5. $\mathrm{NS}(X) \cong \mathbb{Z}H$, $X \cong \mathrm{Pic}^0(X)$ ($\iff n = 1$) と仮定する．判別式が ℓ の 2 次形式の類数が 1 なら, FMT Φ が存在して双有理写像 $M_X^H(v) \dashrightarrow X \times \mathrm{Hilb}^\ell(X)$ を引き起こす. $\square$

最後に次元が 4 以上 20 以下 (i.e. $1 \le \ell \le 9$) のモジュライの双有理同値類について述べてこのノートを終わりにしたいと思います ([YY09, Proposition 8.12]). ℓ を判別式とする整数係数 2 次形式の類数が重要です.

以下に 2 次形式の同値類を挙げます ([YY09, pp. 49]).

ℓ	Q_v	ℓ	Q_v
1	$2xy$, $x^2 - y^2$	6	$x^2 - 6y^2$
2	$x^2 - 2y^2$	7	$x^2 - 7y^2$
3	$x^2 - 3y^2$	8	$x^2 - 8y^2$
4	$x^2 - 4y^2$	9	$2x^2 + 2xy - 4y^2$, $x^2 - 9y^2$
5	$2x^2 + 2xy - 2y^2$, $x^2 - 5y^2$	10	$3x^2 + 2xy - 3y^2$, $x^2 - 10y^2$

命題 4.6. (1) $\ell = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8$ なら $M_X^H(v)$ は $X \times \mathrm{Hilb}^\ell(X)$ と双有理同値.
(2) $\ell = 5$ なら $M_X^H(v)$ は $M_X^H(2, H, -2)$ もしくは $X \times \mathrm{Hilb}^\ell(X)$ と双有理同値.
(3) $\ell = 9$ なら $M_X^H(v)$ は $M_X^H(2, H, -4)$ か $X \times \mathrm{Hilb}^\ell(X)$ と双有理同値. □

4.3 関連する結果, 今後

1. 次の予想 ([M80, 予想 2]) は未解決です:

   予想 4.7. $\mathrm{NS}(X) \cong \mathbb{Z}H$ かつ $X \cong \mathrm{Pic}^0(X)$ なら

   $$(2\ell+2)\text{-次元の安定層のモジュライの双有理同値類の数} \overset{?}{=} \text{判別式が } \ell \text{ の 2 次形式の類数}. \qquad \square$$

   尚, $2 \leq \ell \leq 10$ ならこの予想は成立することが分かっています.
2. また, $\mathrm{NS}(X) \cong \mathbb{Z}H$ かつ $X \cong \mathrm{Pic}^0(X)$ なら 8 次元以下のモジュライは $\mathrm{Pic}^0(X) \times \mathrm{Hilb}^\ell(X)$ と同型です.
3. 命題 4.6 について, $\ell = 10$ の時は $M_X^H(3, H, -3)$ と $X \times \mathrm{Hilb}^{10}(X)$ が双有理同値か否か分かっていません.

参考文献

[H] D. Huybrechts, *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*, Oxford University Press, 2006.

[HL] D. Huybrechts, M. Lehn, *The geometry of moduli spaces of sheaves*, second edition. Cambridge University Press, 2010.

[M78] S. Mukai, *Semi-homogeneous vector bundles on an abelian variety*, J. Math. Kyoto Univ. **18** (1978), no. 2, 239–272.

[M80] 向井茂, **アーベル曲面上のベクトル束の分類について**, 数理解析研究所講究録 **409** (1980), 103–127.

[M81] S. Mukai, *Duality between $D(X)$ and $D(\widehat{X})$ with its application to Picard sheaves*, Nagoya Math. J. **81** (1981), 153–175.

[M84] S. Mukai, *Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian and K3 surface*, Invent. Math. **77** (1984), 101–116.

[O02] D. Orlov, *Derived categories of coherent sheaves on abelian varieties and equivalences between them*, Izv. Math. **66** (2002), no. 3, 569–594.

[YY09] S. Yanagida, K. Yoshioka, *Semi-homogeneous sheaves, Fourier-Mukai transforms and moduli of stable sheaves on abelian surfaces*, preprint, arXiv:0906.4603.

[Y01] K. Yoshioka, *Moduli spaces of stable sheaves on abelian surfaces*, Math. Ann. **321** (2001), 817–884.

[Y03] K. Yoshioka, *Twisted stability and Fourier-Mukai transforms I*, Compositio Math. **138** (2003), 261–288.

[Y09] K. Yoshioka, *Fourier-Mukai transform on abelian surfaces*, Math. Ann. **345** (2009), no. 3, 493–524.