Feigin-Odesskii algebra and Macdonald symmetric functions

柳田伸太郎 *

神戸大学 理学研究科 博士後期課程 2 年

概要

Macdonald 対称函数はある差分作用素族の同時固有函数である．この差分作用素族の自由場表示を考えると, Feigin-Odesskii 楕円代数の類似物が現れる．この代数構造の性質と, 付随して現れる Ding-Iohara 代数について紹介する．これらの内容は B. Feigin, 橋爪清史, 星野歩, 柴原淳, 白石潤一との共同研究 [FHHSY], [FHSSY] に基づく．

目次

* yanagida@math.kobe-u.ac.jp, 日本学術振興会特別研究員 (DC1)

1 Macdonald 対称函数

この節では Macdonald 対称函数の導入をする．分割や組み合わせ論的な記号の導入も行う．各種の記号は，基本的には Macdonald の対称関数の教科書 [Mac] に従う．また，引用してある事実は [Mac, Chap. VI] に全て書かれている．

1.1 対称多項式に関する記号

この論説の主題は無限変数を持つ Macdonald 対称函数であるが，それを導入する前にひとまず有限変数の Macdonald 対称多項式に関する記号を整理することにする．

N を正整数とし，$x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ を変数とする $\mathbb{Z}$ 係数対称多項式の空間を $\Lambda^{(N)}$ と書くことにする: $\Lambda^{(N)} := \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_N]^{\mathfrak{S}_N}$．$\mathbb{Z}$ を含む環 K への係数拡大は $\Lambda_K^{(N)} := \Lambda^{(N)} \otimes K$ と表すことにする．

$\Lambda^{(N)}$ の基底を表示するには分割の記号が便利である．この論説では，正整数の非増加数列，ないしそれに 0 を適宜付け加えた $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 0, 0, \ldots)$ のことを分割と呼ぶ．分割の長さを $\ell(\lambda) := k$ で，また分割の総数を $|\lambda| := \sum_i \lambda_i$ で定義する．通常通り，自然数 n に対して $|\lambda| = n$ なる分割 λ を n の分割と呼ぶ．分割のドミナンス半順序 $\geq$ を

$$\lambda \geq \mu \overset{\text{def}}{\iff} |\lambda| = |\mu| \text{ かつ } \sum_{k=1}^{i} \lambda_k \geq \sum_{k=1}^{i} \mu_k \ (i = 1, 2, \ldots) \tag{1.1}$$

で定める[*1]．

ここでは Λ_N の ($\mathbb{Z}$ 上の) 基底として次の 2 つを挙げる[*2]．

- $m_\lambda^{(N)}(x) := \displaystyle\sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_N): \\ \lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_N) \text{ の異なる分割}}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_N^{\alpha_N}$: N 変数モノミアル対称多項式
- $e_\lambda^{(N)}(x) := e_{\lambda_1}^{(N)}(x) e_{\lambda_2}^{(N)}(x) \cdots e_{\lambda_N}^{(N)}(x)$,

$$e_r^{(N)}(x) := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq N} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} \text{ : } N \text{ 変数基本対称多項式} \tag{1.2}$$

この時 $\{m_\lambda^{(N)}(x) \mid \ell(\lambda) \leq N\}$ 及び $\{e_\lambda^{(N)}(x) \mid \ell(\lambda) \leq N\}$ は $\Lambda^{(N)}$ の $\mathbb{Z}$ 基底である．

[*1] この論説に現れる分割の半順序は，このドミナンス半順序のみである．

[*2] $\ell(\lambda) = k \leq N$ なる分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ に対して，$\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_N = 0$ として $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ と同一視する表記を用いている．

1.2 Macdonald 対称多項式

Macdonald 対称多項式は 2 つのパラメータを持つ対称多項式である．以下 q, t を不定元とし，$\mathbb{F} := \mathbb{Q}(q,t)$ 上の対称多項式を考える．

定義 1.1 (1) q 差分作用素 T_{q,x_i} を次のように定義する:

$$T_{q,x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_N) = f(x_1, x_2, \dots, qx_i, \dots, x_N).$$

(2) Macdonald 差分作用素[*3] $D_r^{(N)}$ $(1 \le r \le N)$ を次で定義する:

$$D_r^{(N)} := \sum_{\substack{J \subset \{1,2,\dots,N\} \\ \# J = r}} \Big[t^{r(r-1)/2} \prod_{\substack{j \in J \\ k \notin J}} \frac{tx_j - x_k}{x_j - x_k} \prod_{j \in J} T_{q,x_j} \Big]. \tag{1.3}$$

■

$D_r^{(N)}$ は $\Lambda_{\mathbb{F}}^{(N)}$ に作用する．$D_r^{(N)}$ の 'r' は r 階の差分作用素という意味である．

事実 1.2 長さ $k \le N$ である分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ について，Macdonald 対称多項式 $P_\lambda^{(N)}(x;q,t) \in \Lambda_{\mathbb{F}}^{(N)}$ は次の 2 条件によって一意に決まる．

- $P_\lambda^{(N)} = m_\lambda^{(N)} + \sum_{\lambda > \mu} c_{\lambda,\mu}^{(N)} m_\mu^{(N)} \quad (c_{\lambda,\mu}^{(N)} \in \mathbb{F}),$
- $D_1^{(N)} P_\lambda^{(N)}(x;q,t) = P_\lambda^{(N)}(x;q,t) \cdot e_1^{(N)}(t^N s_\lambda^{(N)}).$ (1.4)

■

ここで $D_1^{(N)}$ に関する固有値を書くのに

$$s_\lambda^{(N)} := (q^{\lambda_1} t^{-1}, q^{\lambda_2} t^{-2}, \dots, q^{\lambda_k} t^{-k}, t^{-k-1}, t^{-k-2}, \dots, t^{-N}) \tag{1.5}$$

を用いた．これはスペクトルパラメータと呼ばれる．また，

$$t^N s_\lambda^{(N)} = (q^{\lambda_1} t^{N-1}, \dots, q^{\lambda_k} t^{N-k}, t^{N-k-1}, \dots, 1)$$

という記号も用いた．すると基本対称多項式の定義 (1.2) から次が成り立つ[*4]:

$$e_1^{(N)}(t^N s^\lambda) = e_1^{(N)}(q^{\lambda_1} t^{N-1}, \dots, q^{\lambda_k} t^{N-k}, t^{N-k-1}, \dots, 1) = \sum_{i=1}^{N} q^{\lambda_i} t^{N-i}.$$

[*3] Macdonald の教科書 [Mac] は D_N^r という記号を用いているが，この論説では上添え字の (N) で 'N 変数のもの' を表すことにしたので，ここで導入した $D_r^{(N)}$ という記号を用いることにした．結果，多くの文献と違う記号になってしまっているが，この有限変数版の差分作用素は本稿の主役ではないので，あまり混乱はないと思う．

[*4] やはりここでも $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = 0$ として，λ の長さを N にそろえている．

上で述べた Macdonald 対称多項式 $P_\lambda^{(N)}(x;q,t)$ の定義には 1 階の差分作用素 $D_r^{(1)}$ しか現れていない. しかし実際には, $P_\lambda^{(N)}(x;q,t)$ は Macdonald 差分作用素族 $\{D_r^{(N)} \mid 1 \le r \le N\}$ の同時固有関数である. 詳しく述べると:

事実 1.3 (1) $\{D_r^{(N)} \mid 1 \le r \le N\}$ は互いに可換である:

$$[D_r^{(N)}, D_s^{(N)}] = 0 \quad (1 \le r, s \le N).$$

(2) $P_\lambda^{(N)}(x;q,t)$ は Macdonald 差分作用素族 $\{D_r^{(N)} \mid 1 \le r \le N\}$ の同時固有関数である:

$$D_r^{(N)} P_\lambda^{(N)}(x;q,t) = P_\lambda^{(N)}(x;q,t) \cdot e_r^{(N)}(t^N s_\lambda^{(N)}). \tag{1.6}$$

■

ここではスペクトルパラメータ (1.5) を用いた. (1.6) の $r=1$ の場合が (1.4) である.

可換な作用素族とその同時固有関数の研究は, 言うまでもなく可積分系ないし表現論の重要な研究対象である. 有限変数の Macdonald 対称多項式と差分作用素族は, Cherednik による double affine Hecke 代数を用いた理論によって, 一般のルート系に対して拡張されている. そのため, Macdonald 多項式に関して何か新しいことをしようとしても, Hecke 環の枠組みから離れにくいのが現状であろう. この論説では, 無限変数の対称関数の世界に移ることで, 組み合わせ論と代数の新しい結びつきが見えることを紹介していく.

1.3 対称函数環と Macdonald 対称函数 $P_\lambda(x;q,t)$

対称多項式の空間 $\Lambda^{(N)}$ の制限写像を定義しよう. $M \ge N$ なる自然数 M, N に対し, 制限写像 $\rho_{M,N} : \Lambda^{(M)} \to \Lambda^{(N)}$ を

$$\rho_{M,N} f(x_1, \dots, x_M) = f(x_1, \dots, x_N, 0, \dots, 0) \tag{1.7}$$

で定義する. すると $\{(\Lambda^{(N)})_N, (\rho_{M,N})_{M,N}\}$ は $\mathbb{Z}$ 加群の射影系になる. この射影系の射影極限で無限変数の対称関数の空間を定義する:

$$\Lambda = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]^{\mathfrak{S}_\infty} := \varprojlim_N \Lambda^{(N)}.$$

今までと同様に, 係数拡大は下添字で表すことにする: $\Lambda_K := \Lambda \otimes K$.

Λ の $\mathbb{Z}$ 基底を 2 つ挙げよう. どちらも Λ_N の基底の極限である.

- $m_\lambda(x) := \sum_{\alpha:\text{異なる } \lambda \text{ の置換}} x^\alpha$: モノミアル対称函数
- $e_r(x) := \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}, \quad e_\lambda(x) := e_{\lambda_1}(x) e_{\lambda_2}(x) \cdots e_{\lambda_k}(x)$: 基本対称函数

(1.8)

この時 $\{m_\lambda(x) \mid \lambda : \text{分割}\}$ 及び $\{e_\lambda(x) \mid \lambda : \text{分割}\}$ は Λ の $\mathbb{Z}$ 基底である.

この 2 つの他にも, 次の冪和対称関数は大切な対象である:

$$p_r(x) := \sum_i x_i^r, \quad p_\lambda(x) := p_{\lambda_1}(x)p_{\lambda_2}(x)\cdots p_{\lambda_k}(x).$$

$\{p_\lambda(x) \mid \lambda : \text{分割}\}$ は $\Lambda_\mathbb{Q}$ の $\mathbb{Q}$ 基底である.

対称函数の空間 Λ は (函数の自然な) 掛け算に関して閉じているので, 以後 Λ のことを対称函数環と呼ぶことにする.

事実 1.4 任意の分割 λ に対し Macdonald 対称函数 $P_\lambda(x;q,t) \in \Lambda_\mathbb{F}$ が次の 2 条件

- $P_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} c_{\lambda,\mu} m_\mu \quad (c_{\lambda,\mu} \in \mathbb{F})$
- $\langle P_\lambda, P_\mu \rangle_{q,t} = 0$ for $\mu \neq \lambda$

で一意に決定される. ここで $\langle \cdot,\cdot \rangle_{q,t}$ は次の式で定まる $\Lambda_\mathbb{F}$ 上の内積.

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} := \delta_{\lambda,\mu} \prod_{j\geq1} j^{m_j(\lambda)} m_j(\lambda)! \prod_{k\geq1} \frac{1-q^{\lambda_k}}{1-t^{\lambda_k}}, \quad m_j(\lambda) := \#\{i \in \mathbb{Z}_{\geq1} \mid \lambda_i = j\}. \tag{1.9}$$

■

m_λ での展開に関する三角性と m_λ 達が Λ の基底をなすことから, $\{P_\lambda(x;q,t) \mid \lambda : \text{分割}\}$ は $\Lambda_\mathbb{F}$ の $\mathbb{F}$ 基底になることが分かる. また定義から対称関数の退化図式が得られる (図 1):

$$\begin{tikzcd}
& J_\lambda(x;\beta) \arrow[dr, "\alpha\to1"] & \\
P_\lambda(x;q,t) \arrow[ur, "{t=q^\alpha,\, q\to1}"] \arrow[dr, "t\to0"'] & & s_\lambda(x) \\
& P_\lambda(x;q) \arrow[ur, "q\to0"'] &
\end{tikzcd}$$

図 1　対称函数の退化図式

ここで $J_\lambda(x;\beta)$ は Jack 対称函数, $P_\lambda(x;q)$ は Hall-Littlewood 対称函数, $s_\lambda(x)$ は Schur 対称函数である.

1.4　対称函数環上の差分作用素族

前副節では Macdonald 対称函数を内積 (1.9) に関する直交基底として定義した. しかし対称多項式の時と同様に, 差分作用素を使っても Macdonald 対称函数の定義をすることが可能である*5. ここでは [S1, 第 3 章] 及び [FHHSY, §III] に従って対称函数環 $\Lambda_\mathbb{F}$ に作用する差分作用素を定義する.

*5 教科書 [Mac] では, 内積を用いて $P_\lambda(x : q,t)$ を定義し, 存在証明に差分作用素を用いている.

まず有限変数版の差分作用素 $D_r^{(N)}$ (1.3) が制限写像 $\rho_{M,N}$ (1.7) と整合的でないことに注意する．しかし $\Lambda_{N,F}$ 上の差分作用素 $E_r^{(N)}$ を

$$E_r^{(N)} := \sum_{j=0}^{r} \frac{t^{-Nr-\binom{r-j+1}{2}}}{(t^{-1};t^{-1})_{r-j}} D_j^{(N)}, \quad (x;q)_k := \prod_{i=0}^{k-1}(1-xq^i) \tag{1.10}$$

で定義すると $\rho_{N,N-1} \circ E_r^{(N)} = E_r^{(N-1)} \circ \rho_{N,N-1}$ となり整合的になる．従って $E_r := \varprojlim_N E_r^{(N)} : \Lambda_F \to \Lambda_{\mathbb{F}}$ が well defined. そしてこの時次の固有方程式が成立する: 任意の分割 λ と任意の自然数 r に対して

$$E_r P_\lambda(x;q,t) = P_\lambda(x;q,t) \cdot e_r(s_\lambda). \tag{1.11}$$

但しここで分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ に対し無限変数版のスペクトルパラメータ

$$s_\lambda := (q^{\lambda_1}t^{-1}, q^{\lambda_2}t^{-2}, \ldots, q^{\lambda_k}t^{-k}, t^{-k-1}, t^{-k-2}, \ldots) \tag{1.12}$$

を用いた. (1.11) は有限変数版の固有方程式 (1.6) の自然な無限変数類似になっている.

2 Macdonald 差分作用素の自由場表示

前節の後半で無限変数の対称函数を導入したが, その理由は, 対称函数環 Λ が Heisenberg 代数の Fock 空間と自然に同一視でき, 更に Λ 上の差分作用素が Heisenberg 代数の頂点作用素を用いて実現できるからである. この様な対称函数と '量子代数' との関連は可積分系とそれにまつわる表現論において幾度も発見されている: (KP 階層の τ 函数としての)Schur 対称函数と $\mathfrak{gl}_\infty$ 代数, (Calgero-Sutherland 模型の固有関数としての)Jack 対称函数と Virasoro 代数, Hall-Littlewood 対称函数と量子群, shifted Schur 対称函数と Yangian 等々.

この節ではパラメータを含む Heisenberg 代数を利用した $\Lambda_{\mathbb{F}}$ 上の Macdonald 差分作用素の自由場表示を紹介する. これは主に [S1, 第 3 章], [S2] で扱われている内容である.

2.1 自由場表示

次の関係式を満たす 生成元 a_n $(n \in \mathbb{Z})$ で定義される Heisenberg 代数*6 $\mathfrak{h}_{q,t}$ を考える:

$$[a_n, a_m] = n\frac{1-q^{|n|}}{1-t^{|n|}}\delta_{n+m,0}\, a_0.$$

自然な三角分解 $\mathfrak{h}_{q,t} = \mathfrak{h}_{q,t}^+ \oplus \mathfrak{h}_{q,t}^0 \oplus \mathfrak{h}_{q,t}^-$ (但し $\mathfrak{h}_{q,t}^\pm = \bigoplus_{\pm n>0} \mathbb{F}a_n$, $\mathfrak{h}_{q,t}^0 = \mathbb{F}a_0$) から Fock 表現が定義できる:

$$\mathcal{F}_{q,t} := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}_{q,t}^+ \oplus \mathfrak{h}_{q,t}^0}^{\mathfrak{h}_{q,t}} (\mathbb{F} \cdot 1). \tag{2.1}$$

*6 これは Naihuan Jing が [Jin] で導入したもの. その後 [SKAO] などで用いられていた.

但し $\mathbb{F}\cdot 1$ は $a_n\cdot 1=0$ ($n>0$), $a_0\cdot 1=1$ で定義される 1 次元 $\mathfrak{h}^+_{q,t}\oplus\mathfrak{h}^0_{q,t}$ 加群.

自由場表示で重要なのは, 次の (線形空間の) 同型による $\Lambda_{\mathbb{F}}$ と $\mathcal{F}_{q,t}$ の同一視である:

$$\mathcal{F}_{q,t}\xrightarrow{\sim}\Lambda_{\mathbb{F}},\quad a_{-\lambda_1}a_{-\lambda_2}\cdots a_{-\lambda_\ell}\cdot 1\mapsto p_\lambda(x).$$

この同一視のもとで, $E\in\mathrm{End}(\Lambda_{\mathbb{F}})$ が $\widehat{E}\in\widetilde{U}(\mathfrak{h}_{q,t})$ と対応する時に, $\widehat{E}$ を E の自由場表示ということにするここで $\widetilde{U}(\mathfrak{h}_{q,t})$ は普遍包絡環 $U(\mathfrak{h}_{q,t})$ のある完備化*7 である.

例 2.1 (命題 3.37, [S1]) $E_1\in\mathrm{End}\,\Lambda_{\mathbb{F}}$ (1.10) の自由場表示を与えよう. まず次の頂点作用素*8を定義する.

$$\eta(z):=\exp(\sum_{n>0}\frac{1-t^{-n}}{n}a_{-n}z^n)\exp(-\sum_{n>0}\frac{1-t^n}{n}a_nz^{-n}).\tag{2.2}$$

これを $\eta(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\eta_nz^{-n}$ と形式的に展開した時の零モード η_0 で E_1 は自由場表示できる:

$$\widehat{E}_1=\frac{\eta_0-1}{t-1}.$$

■

2.2 E_r の自由場表示

前節の例 (2.1) は 1 階の差分作用素 E_1 の自由場表示であった. 当然, 高階の差分作用素 E_r ($r=2,3,\ldots$) の場合が気になるが, これは次のような自由場表示を持つ:

事実 2.2 (白石, [S2]) 作用素 E_r は次の自由場表示を持つ:

$$\widehat{E}_r=\frac{[r]_{t^{-1}}!}{r!}\Big[\prod_{1\le i<j\le r}\varpi(z_j/z_i)\,{}^{\circ}_{\circ}\eta(z_1)\eta(z_2)\cdots\eta(z_r){}^{\circ}_{\circ}\Big]_1.$$

ここで

$$[r]_x:=\frac{1-x^r}{1-x},\quad [r]_x!:=[r]_x\cdot[r-1]_x\cdots[1]_x,\quad \varpi(y):=\frac{(1-y)(1-y^{-1})}{(1-t^{-1}y)(1-t^{-1}y^{-1})}$$

であり, ${}^{\circ}_{\circ}\ {}^{\circ}_{\circ}$ は $\mathfrak{h}_{q,t}$ での正規順序, $[f(z_1,\ldots,z_n)]_1$ は Laurent 級数 f の定数項である. ■

---

*7 頂点作用素を含めるために完備化が必要になる. ここでは以下のように定義する. $n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対して $U(\mathfrak{h}_{q,t})$ の左イデアル I_n を次の元 p 達で生成されるものとする: a_m ($m=1,2,\ldots$) の多項式 p であって, $\deg a_m:=m$ で次数付けした時に $\deg p\ge n$ なるもの. そして $\widehat{U}(\mathfrak{h}_{q,t}):=\varprojlim_n U(\mathfrak{h})/I_n$ とする. この時 $\widehat{U}(\mathfrak{h}_{q,t})$ の $\mathcal{F}$ への作用が well-defined である.

*8 これは $\mathfrak{gl}_\infty$ 代数等で用いられた頂点作用素 $\exp(\sum_{n>0}\frac{1}{n}a_{-n}z^n)\exp(-\sum_{n>0}\frac{1}{n}a_nz^{-n})$ の 'q,t 変形' と思える. 但し変形前の a_n の関係式は $[a_m,a_n]=m\delta_{m+n,0}$ である.

2.3 今回の研究の動機

前副節までで, 既知の結果の紹介が一段落した. $\Lambda_{\mathbb{F}}$ に作用する差分作用素の自由場表示が出来た訳だが, 次のような自然な疑問が浮かぶ:

- 作用素の合成, 例えば $E_r \circ E_s$ は自由場表示でどのように理解できるだろうか? (2.3)

また幾分 ad hoc だが, 次の疑問も書いておこう:

- 固有方程式 $E_r P_\lambda(x;q,t) = P_\lambda(x;q,t) \cdot e_r(s_\lambda)$ の一般化として,
$$\mathcal{O}_\mu P_\lambda(x;q,t) = P_\lambda(x;q,t) \cdot P_\mu(s_\lambda;q,t) \tag{2.4}$$
なる作用素 $\mathcal{O}_\mu$ の自由場表示を構成, ないし特徴づけることはできるだろうか?

後者の問題には以下で解説を加える.

まず, Macdonald 対称函数 $P_\mu(y;q,t)$ は $\mu = (1^r)$ (Young 図形をイギリス流に書くと縦 1 列) の場合 $e_r(y) = P_{(1^r)}(y;q,t)$ となる. 従って (2.4) は固有方程式 (1.11) の一般化である. 次に有限変数の Macdonald 多項式 $P_r^{(n)}$ に対する '横 1 行の差分作用素' の存在に注意する.

事実 2.3 (野海, [N]) 差分作用素

$$H_r^{(N)} := \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{N}^N \\ |\nu| = r}} \Big[\prod_{1 \le i < j \le N} \frac{q^{\nu_i} x_i - q^{\nu_j} x_j}{x_i - x_j} \Big] \Big[\prod_{i,j=1}^{N} \frac{(t x_i / x_j; q)_{\nu_i}}{(q x_i / x_j; q)_{\nu_i}} \Big] T_{q,x}^{\nu}$$

は $\mathbb{F}[D_1^{(N)}, \dots, D_N^{(N)}]$ に含まれ, 長さ $k \le N$ の分割 λ に対し

$$H_r^{(N)} P_\lambda^{(N)}(x;q,t) = P_\lambda^{(N)}(x;q,t) \cdot g_r^{(N)}(s_\lambda^{(N)};q,t). \tag{2.5}$$

を満たす. 但し $g_r^{(n)}(y;q,t)$ $(1 \le r \le n)$ は

$$\sum_{r \ge 0} g_r^{(n)}(y;q,t) u^r = \exp \Big[\sum_{m \ge 1} \frac{1}{m} \frac{1 - t^m}{1 - q^m} \sum_{i=1}^{n} y_i^m u^m \Big]$$

で定義される対称多項式. ■

導出には梶原-野海の (q 超幾何関数に関する) 双対変換公式 [KaN] を用いる. 実は $\varprojlim_{N \to \infty} g_r^{(N)}(y;q,t) \propto P_{(r)}^{(N)}(y;q,t)$ なので, もし (2.5) の無限変数極限が取れて差分作用素の自由場表示ができれば, それは (2.4) で $\mu = (r)$ の場合となる.

上にあげた 2 つの問い (2.3), (2.4) に答えるのが本稿の §§3-4 の目的である.

3 退化 $\mathbb{CP}^1$ 上の Feigin-Odesskii 代数 $\mathcal{A}$

Macdonald 差分作用素の自由場表示のうち, 主に作用素の合成を記述するのに必要なのが, この節の表題にあげた代数 $\mathcal{A}$ である. これは対称有理式の空間のある部分空間上に定義される.

この代数の定義とその幾つかの性質を理解するには Macdonald 対称函数の知識は不要である. その為, この節はこれまでに用意してきた記号は使わずに述べる事にする. その内容がどのように Macdonald 対称函数に結びつくかは次節 §4 で述べることにする.

この節の内容は [FHHSY, §II] に基づく. 殆どの命題の証明は本稿では省くので, 組み合わせ論的な議論が気になる方はそちらをご覧ください.

3.1 $\mathcal{A}$ の定義

この節では q_1, q_2 を不定元とし, $F := \mathbb{Q}(q_1, q_2)$ 上で考える. また, $q_3 := q_1^{-1} q_2^{-1}$ と置く*9

定義 3.1 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, F-ベクトル空間 $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n(q_1, q_2, q_3)$ を次の 4 条件で定める.
(i) $\mathcal{A}_0 := F$. $n \geq 1$ なら $\mathcal{A}_n$ の元 $f = f(z_1, \ldots, z_n)$ は n 変数の F 係数対称有理式.
(ii) f の極は対角線 $\{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i = z_j,\ \exists i \neq j\}$ 上のみに高々 2 位で存在.
(iii) 任意の $0 \leq k \leq n$ について $\partial^{(0,k)} f$ と $\partial^{(\infty,k)} f$ が存在して一致する. 但し

$$\partial^{(\alpha,k)} f := \lim_{\xi \to \alpha} f(x_1, \ldots, x_{n-k}, \xi x_{n-k+1}, \ldots, \xi x_n) \quad (\alpha = 0, \infty).$$

(iv) $n \geq 3$ なら次の wheel condition を満たす:

$$f(z_1, q_1 z_1, q_1 q_2 z_1, z_4, \cdots) = f(z_1, q_2 z_1, q_1 q_2 z_1, z_4, \cdots) = 0.$$

最後に, 次数付きベクトル空間を $\mathcal{A} := \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{A}_n$ と定める. ■

上の条件 (iii) を degenerate $\mathbb{CP}^1$ condition と呼ぶ. 条件 (i) と (ii) から $\mathcal{A}_n$ の元 f は (n 変数対称多項式)/(差積の 2 乗) という形に書ける. 更に条件 (iii) から f の分子の対称多項式の次数が抑えられるので, $\mathcal{A}_n$ は有限次元 F 線形空間であることが分かる. そのうち上記の条件を全て満たすものを計算機で調べてみると次のようになる:

$$\dim \mathcal{A}_1 = 1,\ \dim \mathcal{A}_2 = 2,\ \dim \mathcal{A}_3 = 3,\ \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}_4 = 5,\ \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}_5 = 7,\ \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}_6 = 11,\ \cdots.$$

これらは分割数に他ならない.

*9 $\mathcal{A}$ の定義や性質は q_1, q_2, q_3 に関して対称になっている.

3.2 Shuffle 積と $\mathcal{A}$ の構造定理

実は $\mathcal{A}_n$ の基底を実験的に求めることが出来るのだが, n が増えるにつれてその式は複雑になる. それを統制するために, 次の演算を $\mathcal{A}_n$ 達の上に導入する

定義 3.2 $f \in \mathcal{A}_n$ と $g \in \mathcal{A}_m$ に対し Shuffle 積 $*$ を次のように定義する:

$$(f * g)(z_1, \cdots, z_{n+m}) := \mathrm{Sym}\Bigg(f(z_1, \cdots, z_n)\, g(z_{n+1}, \cdots, z_{n+m}) \prod_{\substack{1 \le \alpha \le n \\ n+1 \le \beta \le n+m}} \omega(z_\alpha, z_\beta) \Bigg).$$

但し Sym は対称化, ω は次の有理式:

$$\omega(z_\alpha, z_\beta; q_1, q_2, q_3) := \frac{(z_\alpha - q_1 z_\beta)(z_\alpha - q_2 z_\beta)(z_\alpha - q_3 z_\beta)}{(z_\alpha - z_\beta)^3}. \qquad \blacksquare$$

すると次の定理が成り立つ[*10]:

定理 3.3 (1) Shuffle 積 $*$ は $\mathcal{A}$ の中で閉じている.
(2) $(\mathcal{A}, *)$ は F 上の単位的かつ結合的代数. (3) $(\mathcal{A}, *)$ は可換である.
(4) $\dim_F \mathcal{A}_n$ は n の分割数に等しい. 更に基底として $\{\epsilon_\lambda(z; q_i) \mid \lambda : \text{分割}\}$ $(i = 1, 2, 3)$ が取れる. 但し

$$\begin{aligned} \epsilon_n(z; q_i) &:= \prod_{1 \le j < k \le n} \frac{(z_k - q_i z_j)(z_k - q_i^{-1} z_j)}{(z_k - z_j)^2}, \\ \epsilon_\lambda(z; q_i) &:= (\epsilon_{\lambda_1}(\cdot; q_i) * \epsilon_{\lambda_2}(\cdot; q_i) * \cdots * \epsilon_{\lambda_\ell}(\cdot; q_i))(z). \end{aligned} \qquad (3.1) \quad \blacksquare$$

(1) と (2) は比較的容易. (3) と (4) を示すには Gordon フィルトレーションが必要になる.

3.3 Gordon フィルトレーション

定義 3.4 n の分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ に対し, 特殊化写像 $\varphi_\lambda^{(q_i)} : \mathcal{A}_n \to F(y_1, \cdots, y_\ell)$ を

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_n) \quad \mapsto \quad f(&y_1, q_i y_1, \cdots, q_i^{\lambda_1 - 1} y_1, \\ &y_2, q_i y_2, \cdots, q_i^{\lambda_2 - 1} y_2, \\ &\cdots \\ &y_\ell, q_i y_\ell, \cdots, q_i^{\lambda_\ell - 1} y_\ell) \end{aligned} \qquad (3.2)$$

---

*10 'Feigin-Odesskii 代数' と呼ばれているものは複数ある. 通常は [FO] で導入された楕円函数体に属する対称函数のなす空間に Shuffle 積を入れたものを言う. 一連の 'Feigin-Odesskii 代数' については [O] を参照. 今回の Macdonald 差分作用素の研究に必要になったのは楕円的ではなく有理的なものであり, また定理 3.3(3) で述べたような可換な代数である. それは '有理的な Feigin-Odesskii 代数' であると示唆したのが B. Fegin である. しかし, 彼の主張していた代数 $\mathcal{A}$ には定義 3.1 の条件 (iii), つまり degenerate $\mathbb{CP}^1$ condition が抜けていたため, 代数 $\mathcal{A}$ の可換性や次元が期待されるものにはならなかった. Feigin の示唆を踏まえ, この定理 3.3 が成り立つように, 計算機実験を交えつつ代数 $\mathcal{A}$ の定義を発見したというのが実情である.

と定める．また次の部分空間を定義する．

$$\mathcal{A}_{n,\lambda}^{(q_i)} := \bigcap_{\mu:n\ \text{の分割},\ \mu \not\leq \lambda} \ker \varphi_{\mu}^{(q_i)}.$$

但し $<$ はドミナンス半順序 (1.1)．これで定義される $\mathcal{A}$ のフィルトレーションを Gordon フィルトレーションと呼ぶ*11． ■

例 3.5 特殊化写像 $\varphi_{\lambda}^{(q_i)}$ で現れる変数列は，λ の Young 図形に変数を q シフトさせながら書きいれていったものに対応している．$\lambda = (4,4,2,1,1,1)$ の場合の変数の様子を図 2 に表した．

y_1	q_1y_1	$q_1^2y_1$	$q_1^3y_1$
y_2	q_1y_2	$q_1^2y_2$	$q_1^3y_2$
y_3	q_1y_3		
y_4			
y_5			
y_6			

図 2　$\lambda = (4,4,2,1,1,1)$ に対する特殊化写像 $\varphi_{\lambda}^{(q_1)}$．

Gordon フィルトレーションの定義は組み合わせ論的で，初見では難しいのだが，実はこれは $\epsilon_{\lambda}(z;q_i)$ の定義をにらむと思いつく．以下の例でフィルトレーションの様子が分かると思う．

例 3.6 この例では $q := q_1$ と略記する．$n \leq 5$ の範囲で $\mathcal{A}_n$ とその中の Gordon フィルトレーションの様子を書き出してみる．以下の $\langle ... \rangle$ は F 上の基底の意味である．

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_2 &= \mathcal{A}_{2,(2)}^{(q)} = \left\langle \epsilon_{(2)}(z;q), \epsilon_{(1,1)}(z;q) \right\rangle \supsetneq \mathcal{A}_{2,(1,1)}^{(q)} = \ker \varphi_{(2)}^{(q)} = \left\langle \epsilon_{(2)}(z;q) \right\rangle. \\
\mathcal{A}_3 &= \mathcal{A}_{3,(3)}^{(q)} = \left\langle \epsilon_{(3)}(z;q), \epsilon_{(2,1)}(z;q), \epsilon_{(1,1,1)}(z;q) \right\rangle \\
&\quad \supsetneq \mathcal{A}_{3,(2,1)}^{(q)} = \ker \varphi_{(3)}^{(q)} = \left\langle \epsilon_{(3)}(z;q), \epsilon_{(2,1)}(z;q) \right\rangle \\
&\quad \supsetneq \mathcal{A}_{3,(1,1,1)}^{(q)} = \ker \varphi_{(2,1)}^{(q)} = \left\langle \epsilon_{(3)}(z;q) \right\rangle. \\
\mathcal{A}_4 &= \mathcal{A}_{4,(4)}^{(q)} = \left\langle \epsilon_{(4)}, \epsilon_{(3,1)}, \epsilon_{(2,2)}, \epsilon_{(2,1,1)}, \epsilon_{(1,1,1,1)} \right\rangle \\
&\quad \supsetneq \mathcal{A}_{4,(3,1)}^{(q)} = \ker \varphi_{(4)}^{(q)} = \left\langle \epsilon_{(4)}, \epsilon_{(3,1)}, \epsilon_{(2,2)}, \epsilon_{(2,1,1)} \right\rangle \\
&\quad \supsetneq \mathcal{A}_{4,(2,2)}^{(q)} = \ker \varphi_{(3,1)}^{(q)} = \left\langle \epsilon_{(4)}, \epsilon_{(3,1)}, \epsilon_{(2,2)} \right\rangle
\end{aligned}$$

*11 命名は B. Feigin によるものだが，この Gordon が誰なのか，筆者は知りません．定義に現れる特殊化写像 $\varphi_{\lambda}^{(q_i)}$ は，対称函数や量子群の様々な文脈で現れる q シフトを利用した特殊化にならって導入してある．Macdonald 対称多項式に関する研究では，例えば [KoNS] において同種の特殊化が用いられている．

$$
\begin{aligned}
&\supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{4,(2,1,1)} = \ker \varphi^{(q)}_{(2,2)} = \left\langle \epsilon_{(4)}, \epsilon_{(3,1)} \right\rangle \\
&\supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{4,(1,1,1,1)} = \ker \varphi^{(q)}_{(2,1,1)} = \left\langle \epsilon_{(4)} \right\rangle .
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{A}_5 = \mathcal{A}^{(q)}_{5,(5)} \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{5,(4,1)} \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{5,(3,2)} \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{5,(3,1^2)} \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{5,(2^2,1)} \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{5,(2,1^3)} \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{5,(1^5)}.
$$

以上の例ではフィルトレーションは全順序で並んでいて, 隣同士のフィルトレーションの次元の差は 1 である. しかし $n=6$ になると事情が変わる:

$$
\mathcal{A}_6 = \mathcal{A}^{(q)}_{6,(6)} \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{6,(5,1)} \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{6,(4,2)} \begin{matrix} \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{6,(4,1^2)} \supsetneq \\ \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{6,(3^2)} \supsetneq \end{matrix} \mathcal{A}^{(q)}_{6,(3,2,1)} \begin{matrix} \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{6,(3,1^3)} \supsetneq \\ \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{6,(2^3)} \supsetneq \end{matrix} \mathcal{A}^{(q)}_{6,(2^2,1^2)}
$$

$$
\supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{6,(2,1^4)} \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{6,(1^6)}.
$$

これは 6 の分割をドミナンス半順序 (1.1) で並べたものと同じ様子になっている:

$$
(6) > (5,1) > (4,2) \begin{matrix} > (4,1^2) > \\ > (3^2) > \end{matrix} (3,2,1) \begin{matrix} > (3,1^3) > \\ > (2^3) > \end{matrix} (2^2,1^2) > (2,1^4) > (1^6).
$$

また, 各次元 $\dim_F \mathcal{A}^{(q)}_{6,\lambda}$ の様子は以下のようになっている:

$$
11 \quad 10 \quad 9 \quad \begin{matrix} 7 \\ 7 \end{matrix} \quad 6 \quad \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \quad 3 \quad 2 \quad 1. \tag{3.3}
$$

■

定理 3.3 の証明で重要なのがフィルトレーションの次元の振舞いで, それから $\dim_F \mathcal{A}_n$ が上から抑えられる. 一方で ϵ_λ と $\varphi^{(q_i)}_\mu$ の定義 (3.1), (3.2) から $\dim_F \mathcal{A}_n$ が下から抑えられる. これで (4) が証明できる. (3) は ϵ_λ 達が $*$ について可換である事を直接確認して証明される.

4　交叉空間と自由場表示

前節の代数 $\mathcal{A}$ を Macdonald 対称函数と結び付けたい. しかし直ぐに差分作用素の自由場表示の話題に移らずに, 次の定理 4.1 の紹介から始める. この節は [FHHSY, §III] に従う.

4.1　交叉空間

Gordon フィルトレーション $\mathcal{A}^{(q_i)}_{n,\lambda}$ の定義 3.4 を思い出そう. これは $\mathcal{A} = \mathcal{A}(q_1, q_2, q_3)$ のパラメータ q_1, q_2, q_3 のうち 1 つを取って定義されるものであった. そこで違うパラメータに対応するフィルトレーションの関係が気になる. 次の定理はそれらの交叉に関するものである.

定理 4.1 $\mathcal{A}$ の定義において $q_1 = q^{-1} \in \mathbb{C}$, $q_2 = t \in \mathbb{C}$, $F = \mathbb{C}$ と置き換える*12. また仮定

$$
|q| < 1, \quad |t| > 1, \quad q^i t^j \neq 1 \ \forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}
$$

*12 この主張は $\mathcal{A}$ の言葉だけで記述されているが, その証明は今のところ自由場表示を経て Macdonald 対称函数の性質に帰着するしかない. その為, 係数体を $\mathbb{C}$ にしている.

を置く. この時, n の任意の分割 λ に対して

$$\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathcal{A}_{n,\lambda}^{(q^{-1})}\cap\mathcal{A}_{n,\lambda'}^{(t)}\right)=1 \qquad (\lambda' \text{ は } \lambda \text{ の転置}). \qquad \blacksquare$$

4.2 自由場表示と代数 $\mathcal{A}$

定理 4.1 を証明するには Macdonald 差分作用素と $\mathcal{A}$ を結び付けなければならない. そこで次の写像を考える. 頂点作用素 (2.2) を思い出そう.

定義 4.2 頂点作用素 $\eta(z)=\,\substack{\circ\\\circ}\exp\left(-\frac{1}{n}\sum_{n\neq 0}(1-t^n)a_n z^{-n}\right)\substack{\circ\\\circ}$ と $C_n:=\{(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n\mid |z_i|=1\}$ を用いて, $f\in\mathcal{A}_n=\mathcal{A}_n(q^{-1},t)$ に対し $\mathcal{O}(f)\in\widehat{U}(\mathfrak{h}_{q,t})$ を次の様に定める:

$$\mathcal{O}(f):=\oint_{C_n}\Big(\prod_{j=1}^{n}\frac{dz_j}{2\pi i\,z_j}\Big)\frac{f(z_1,\ldots,z_n)}{\prod_{k<\ell}\omega(z_k,z_\ell;q^{-1},t,qt^{-1})}\eta(z_1)\cdots\eta(z_n).$$

これを更に線型に拡張して $\mathcal{O}:\mathcal{A}\to\widehat{U}(\mathfrak{h}_{q,t})$ を定義する*13. $\blacksquare$

実は $\mathcal{A}$ 上の Shuffle 積の定義 3.2 は, 次の命題 4.3 (1) の $\mathcal{O}$ の準同型性を保証している.

命題 4.3 (1) $\mathcal{O}(f*g)=\mathcal{O}(f)\mathcal{O}(g)$. (2) $\mathcal{O}$ は単射. (3) $\mathcal{O}(\epsilon_n(z;q^{-1}))=\widehat{E}_n$.
(4) $\mathcal{M}:=\operatorname{Im}\mathcal{O}(\cong\mathcal{A})$ として, $\mathcal{M}\cong\mathbb{C}[\widehat{E}_1,\widehat{E}_2,\cdots]$.
特に任意の $f\in\mathcal{A}$ について $\mathcal{O}(f)$ は $P_\lambda(x;q,t)$ 達を固有函数に持つ. $\blacksquare$

この命題で $\mathcal{A}$ と差分作用素の自由場表示の関係が明瞭になったのだが, 定理 4.1 を示すにはもう一つ道具が必要である. それが事実 2.3 の差分作用素 $H_r^{(N)}$ の無限変数版 $\widehat{G}_r$ である.

定義 4.4 $\widehat{G}_r\in\widehat{U}(\mathfrak{h}_{q,t})$ を次の式で定義する:

$$\widehat{G}_r:=\frac{(-1)^r q^{\binom{r}{2}}}{(q;q)_r}\frac{[r]_q!}{r!}\mathcal{O}(\epsilon_r(z;t)). \qquad \blacksquare$$

命題 4.5 $\widehat{G}_r$ は次の差分作用素 G_r の自由場表示である.

$$G_r P_\lambda(x;q,t)=P_\lambda(x;q,t)\cdot g_r(s^\lambda;q,t).$$

但し $g_r(y;q,t):=P_{(r)}(x;q,t)/\left\langle P_{(r)}(x;q,t),P_{(r)}(x;q,t)\right\rangle_{q,t}$. *14. $\blacksquare$

---

*13 本当はこの時点では well-defined であることは証明する必要がある.

*14 差分作用素 G_r は有限変数の差分作用素 $G_r^{(N)}$ を用いて $G_r:=\varprojlim_n G_r^{(N)}$ と実現できる. 但し

$$G_r^{(N)}:=\frac{t^{-rN}q^{\binom{r}{2}}}{(-1)^r(q;q)_r}\sum_{k=0}^{r}(-1)^k q^{-\binom{k}{2}}q^{-k(r-k)}(q^{r-k+1};q)_k H_k^{(N)}.$$

であり, $H_k^{(N)}$ は事実 2.3 の差分作用素.

この命題の証明には, $\widehat{E}_r$ と $\widehat{G}_s$ が満たす次の Wronski 関係式*15 が重要な役割を果たす:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(1-q^k t^{n-k})\widehat{E}_{n-k}\widehat{G}_k = 0.$$

以上の準備のもとで, 定理 4.1 は次のように精密化して示すことができる.

定理 4.6 次を満たす $f_\mu \in \mathcal{A}_n(q^{-1},t)$ が一意に存在し交叉空間 $\mathcal{A}_{n,\mu}^{(q^{-1})} \cap \mathcal{A}_{n,\mu'}^{(t)}$ を張る.

$$\mathcal{O}(f_\mu)P_\lambda(x;q,t) = P_\lambda(x;q,t)\cdot P_\mu(s_\lambda;q,t).$$

但し $s_\lambda := (q^{\lambda_1}t^{-1}, q^{\lambda_2}t^{-2}, q^{\lambda_3}t^{-3},\ldots)$ はスペクトルパラメータ (1.12). ■

証明には命題 4.3, 命題 4.5 と Haiman による $P_\lambda(x;q,t)$ の三角性 [Ha] に関する結果を使う.

5 Ding-Iohara 代数とその変形 $\mathcal{W}$ 代数との関係

前節で Feigin-Odesskii 代数 $\mathcal{A}$ と Macdonald 差分作用素の自由場表示の関係を一通り記述することができた. しかし, 1 つ疑問に残る部分があって, それは写像 $\mathcal{O}$ の定義 4.2 に現れた頂点作用素 $\eta(z)$ である. 例 2.1 の脚注で述べたように, これは古典的な*16頂点作用素の q,t 変形と思える. すると, $\eta(z)$ の背後には Yangian や量子アファイン環のような Hopf 代数があると期待してよいだろう. それに対する答えが Ding-Iohara の導入した Hopf 代数 [DI] にある. 以下ではこの話題を紹介する. 内容は [FHHSY, §III.F, Appendix] 及び [FHSSY] に従う.

今回扱った 2(ないし 3) パラメータの Ding-Iohara 代数は, 我々の研究とほぼ同時期に, 別の研究 [FT], [ScV], [FFJMM1], [FFJMM2], [Sc] にも現れている.

5.1 Ding-Iohara 代数の定義

この節では $q^{1/4}, t^{1/4}$ を不定元とし, $\mathbb{Q}(q^{1/4},t^{1/4})$ 上の線形空間ないし代数を考える.

定義 5.1 $\mathcal{U}=\mathcal{U}(q,t)$ を次の様に定義される結合代数とする.

生成元: $x^\pm(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n^\pm z^{-n}, \quad \psi^\pm(z) = \sum_{\pm n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \psi_n^\pm z^{-n}, \quad \gamma^{\pm 1/2}$ (中心元)

関係式: $\psi^\pm(z)\psi^\pm(w) = \psi^\pm(w)\psi^\pm(z), \quad \psi^+(z)\psi^-(w) = \dfrac{g(\gamma^{+1}w/z)}{g(\gamma^{-1}w/z)}\psi^-(w)\psi^+(z),$

$$\psi^+(z)x^\pm(w) = g(\gamma^{\mp 1/2}w/z)^{\mp 1}x^\pm(w)\psi^+(z),$$

---

*15 古典的な Wronski 関係式とは, 基本対称函数 $e_r(x)$ と完全対称函数 $h_s(x)$ の間の関係式 $\sum_{i=0}^n(-1)^i e_{n-i}(x)h_i(x) = 0$ の事をいう. ここで書いたのはその q,t 変形 $\sum_{k=0}^n(-1)^k(1-q^kt^{n-k})e_{n-k}(x)g_k(x;q,t)=0$ の作用素版である.

*16 q,t を含まない Heisenberg 代数に関する, という意味

$$
\begin{aligned}
&\psi^-(z)x^\pm(w) = g(\gamma^{\mp 1/2}z/w)^{\pm 1}x^\pm(w)\psi^-(z),\\
&[x^+(z), x^-(w)] = \frac{(1-q)(1-1/t)}{1-q/t}\\
&\qquad\qquad \times\Big(\delta(\gamma^{-1}z/w)\psi^+(\gamma^{1/2}w) - \delta(\gamma z/w)\psi^-(\gamma^{-1/2}w)\Big),\\
&G^\mp(z/w)x^\pm(z)x^\pm(w) = G^\pm(z/w)x^\pm(w)x^\pm(z).
\end{aligned}
$$

但し $g(z) := \dfrac{G^+(z)}{G^-(z)}$, $G^\pm(z) := (1-q^{\pm 1}z)(1-t^{\mp 1}z)(1-q^{\mp 1}t^{\pm 1}z)$. ■

事実 5.2 (Ding-Iohara, [DI]) $\mathcal{U}$ には (formal な)Hopf 代数の構造が入る*17. ■

ここでは余積 Δ だけを明記しよう:

$$
\begin{aligned}
&\Delta(\gamma^{\pm 1/2}) = \gamma^{\pm 1/2}\otimes\gamma^{\pm 1/2},\\
&\Delta(x^+(z)) = x^+(z)\otimes 1 + \psi^-(\gamma_{(1)}^{1/2}z)\otimes x^+(\gamma_{(1)}z),\\
&\Delta(x^-(z)) = x^-(\gamma_{(2)}z)\otimes\psi^+(\gamma_{(2)}^{1/2}z) + 1\otimes x^-(z),\\
&\Delta(\psi^\pm(z)) = \psi^\pm(\gamma_{(2)}^{\pm 1/2}z)\otimes\psi^\pm(\gamma_{(1)}^{\mp 1/2}z).
\end{aligned}
$$

但し $\gamma_{(1)}^{\pm 1/2} := \gamma^{\pm 1/2}\otimes 1$, $\gamma_{(2)}^{\pm 1/2} := 1\otimes\gamma^{\pm 1/2}$.

5.2 レベル 1 表現

$\mathcal{U}$ の表現は $\gamma^{\pm 1/2}$ が $(t/q)^{\pm k/4}$ で実現される時, レベル k と呼ばれる. 以下の命題は, 前節までに用いてきた $\eta(z)$ が $\mathcal{U}$ のレベル 1 表現と思えることを主張する.

命題 5.3 $\mathcal{F}_{q,t}$ を Heisinberg 代数 $\mathfrak{h}_{q,t}$ の Fock 表現 (2.1) とする. $c\in\mathbb{Q}(q^{1/2}, t^{1/2})\setminus\{0\}$ に対して, $\mathcal{U}$ の $\mathcal{F}_{q,t}$ 上のレベル 1 表現 ρ_c が次で定まる:

$$
\rho_c(\gamma^{\pm 1/2}) = (t/q)^{\pm 1/4},\quad \rho_c(\psi^\pm(z)) = \varphi^\pm(z),\quad \rho_c(x^+(z)) = c\,\eta(z),\quad \rho_c(x^-(z)) = c^{-1}\xi(z).
$$

但し以下の頂点作用素を用いた:

$$
\begin{aligned}
&\eta(z) := {}^\circ_\circ\exp\Big(-\sum_{n\neq 0}\frac{1-t^n}{n}a_n z^{-n}\Big){}^\circ_\circ,\\
&\xi(z) := \exp\Big(\sum_{n>0}\frac{t^{-n}-1}{n}(t/q)^{n/2}a_{-n}z^n\Big)\exp\Big(\sum_{n>0}\frac{1-t^n}{n}(t/q)^{n/2}a_n z^{-n}\Big),
\end{aligned}
$$

*17 Ding-Iohara は元々 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ の Drinfeld 実現を変形して, Hopf 代数 $U_q(g, \mathfrak{sl}_n)$ を作った. ここで $g = \{g_{i,j}(z)\mid 1\le i,j\le n-1\}$ は $g_{i,j}(z) = g_{i,j}(z^{-1})^{-1}$ を満たす解析函数. 本稿で扱うのは $\mathfrak{sl}_2$ の場合で g が上記のもの.

$$\varphi^+(z) := \exp\big(-\sum_{n>0}\frac{1-t^n}{n}(1-(t/q)^n)(t/q)^{-n/4}a_n z^{-n}\big),$$
$$\varphi^-(z) := \exp\big(\sum_{n>0}\frac{1-t^{-n}}{n}(1-(t/q)^n)(t/q)^{-n/4}a_{-n} z^{n}\big). \qquad \blacksquare$$

5.3 テンソル表現と $\mathcal{W}_{q,p}(\mathfrak{sl}_n)$ 代数

この副節では $\mathcal{U}$ のレベル 1 表現 ρ_c のテンソル表現と変形 $\mathcal{W}$ 代数との関連を紹介する. $p := q/t$ と置く*18.

定義 5.4 (1) n 階余積 $\Delta^{(n)}$ を次のように帰納的に定義する:

$$\Delta^{(2)} := \Delta, \quad \Delta^{(n)} := (\mathrm{id}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}\otimes\Delta)\circ\Delta^{(n-1)}.$$

更ににそれとレベル 1 表現の n 重テンソル表現 $\rho_{y_1}\otimes\cdots\otimes\rho_{y_n}$ の合成を $\rho_y^{(n)}$ と書く:

$$\rho_y^{(n)} := (\rho_{y_1}\otimes\cdots\otimes\rho_{y_n})\circ\Delta^{(n)}.$$

(2) $\{b_n \mid n\in\mathbb{Z}\}$ を, $\psi^\pm$ の展開

$$\psi^+(z) = \psi_0^+\exp\big(+\sum_{n>0}b_n\gamma^{n/2}z^{-n}\big), \quad \psi^-(z) = \psi_0^-\exp\big(-\sum_{n>0}b_{-n}\gamma^{n/2}z^{n}\big)$$

で定義する*19 これは次の交換関係を満たす.

$$[b_m, b_n] = \frac{1}{m}(1-q^{-m})(1-t^m)(1-p^m)(\gamma^m-\gamma^{-m})\gamma^{-|m|}\delta_{m+n,0}.$$

(3) 次の $\mathcal{U}$ の元を導入する:

$$t(z) := \alpha(z)x^+(z)\beta(z).$$

但し

$$\alpha(z) := \exp\Big(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{-n}z^n}{\gamma^n-\gamma^{-n}}\Big), \quad \beta(z) := \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{n}z^{-n}}{\gamma^n-\gamma^{-n}}\Big).$$

(4) 最後に $\mathbb{Q}(q,t)$ 内の次の級数を導入する.

$$f_k(z) := \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^n)(1-t^{-n})(1-p^{(k-1)n})}{1-p^{kn}}z^n\Big). \qquad \blacksquare$$

---

*18 この p が $\mathcal{W}_{q,p}(\mathfrak{sl}_n)$ の p と一致することになる

*19 本当は $\mathcal{U}$ の定義で $\psi^\pm$ を使わずに $\{b_n\}$ を使えば論理的には明快になる.

命題 5.5 $\rho_y^{(n)}(t(z)) = \sum_{i=1}^n y_i \Lambda_i(z)$ で $\{\Lambda_i(z) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ を定義すると，これらは $\mathcal{W}_{q,p}(\mathfrak{sl}_n)$ の生成元の関係式のうち知られているもの全て*20を満たす．特に次の関係式が満たされる．

$$f_n(w/z)\Lambda_i(z)\Lambda_j(w) = {}^{\circ}_{\circ}\Lambda_i(z)\Lambda_j(w){}^{\circ}_{\circ} \times \begin{cases} 1 & i=j, \\ \gamma_+(z,w;q,t) & i<j, \\ \gamma_-(z,w;q,t) & i>j. \end{cases}$$

但し $\gamma_\pm(z,w;q,t) := \dfrac{(z-q^{\mp 1}w)(z-qt^{\mp 1}w)}{(z-w)(z-t^{\mp 1}w)}$. ■

6 楕円類似

この最終節では $\mathcal{A} = \mathcal{A}(q_1,q_2,q_3)$ の楕円類似である楕円 Feigin-Odesskii 代数 $\mathcal{A}(p)$ を紹介する．この代数と量子可積分系の関係は未解明の部分が多いのだが，Ruijsenaars 模型や Okounkov-Pandharipande による Hilbert スキームの量子コホモロジーの計算と関連することが分かっているので，それらの話題を紹介する．詳細は [FHHSY, §IV] をご覧ください.

6.1 楕円 Feigin-Odesskii 代数 $\mathcal{A}(p)$

この節では

$$q_1 = q^{-1} \in \mathbb{C}, \quad q_2 = t \in \mathbb{C}, \quad q_3 = q_1^{-1}q_2^{-1} \in \mathbb{C}, \quad p \in \mathbb{C}$$

とし，さらに以下の条件を置く:

$$|q|<1,\ |t^{-1}|<1,\ |p|<1,\ |pq^{-1}t|<1, \quad q^i t^j p^k \neq 1\ \forall (i,j,k) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0,0,0)\}.$$

定義 6.1 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $\mathcal{A}_n(p) = \mathcal{A}_n(q_1,q_2,q_3,p)$ を以下の条件で定める．
(i) $\mathcal{A}_0(p) := \mathbb{C}$. $n \geq 1$ なら，$f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathcal{A}_n(p)$ は 2 重周期性

$$f(x_1,\ldots,e^{2\pi\sqrt{-1}}x_i,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,px_i,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_n)$$

を満たす対称函数.
(ii) f の極は高々 2 位で，対角線とそれらの p シフト上のみに位置する．
(iii) $n \geq 3$ なら $f \in \mathcal{A}_n(p)$ は wheel condition を満たす.

$$f(x_1,q_1x_1,q_1q_2x_1,x_4,\ldots)=0, \quad f(x_1,q_2x_1,q_1q_2x_1,x_4,\ldots)=0.$$ ■

*20 このような歯切れの悪い書き方をしているのは，変形 $\mathcal{W}$ 代数が頂点作用素のなす代数として定義されている ([AKOS], [FFr] を参照) ため，関係式の full set が定義されていないことに起因する．

$\mathcal{A}(p)=\oplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}\mathcal{A}_n(p)$ 上の Shuffle 積は, $\mathcal{A}$ での定義 3.2 の ω を

$$\omega(x,y;q_1,q_2,q_3,p):=\frac{\Theta_p(q_1y/x)\Theta_p(q_2y/x)\Theta_p(q_3y/x)}{\Theta_p(y/x)^3},$$
$$\Theta_p(x):=(p;p)_\infty(x;p)_\infty(p/x;p)_\infty$$

で置き換えればよい.

命題 6.2 $(\mathcal{A}(p),*)$ は可換代数で, $\{\epsilon_\lambda(x;q_i,p)\mid\lambda:\text{分割}\}$ を基底にもつ. 但し

$$\epsilon_\lambda:=\epsilon_{\lambda_1}*\cdots*\epsilon_{\lambda_\ell}\quad(\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell)),$$
$$\epsilon_n(x_1,\ldots,x_n;q_i,p):=\prod_{1\leq j<k\leq n}\frac{\Theta_p(q_ix_j/x_k)\Theta_p(x_j/q_ix_k)}{\Theta_p(x_j/x_k)^2}.$$ ■

6.2 Ruijsenaars 作用素と楕円類似

頂点作用素 $\eta(z)$ の楕円類似 $\eta(z;p)$ を次の様に導入する:

$$\eta(z;p):=\exp\Big(\sum_{n>0}\frac{1-t^{-n}}{n}\frac{1-p^nq^{-n}t^n}{1-p^n}a_{-n}z^n\Big)\exp\Big(-\sum_{n>0}\frac{1-t^n}{n}a_nz^{-n}\Big).$$

例 2.1 で見たように $[\eta(z)]_1$ は E_1 の自由場表示であったが, $[\eta(z;pq^{-1}t)]_1$ は次の Ruijsenaars 楕円差分作用素 (の 1 階版) と関係する:

$$D_1^{(N)}(p):=\sum_{i=1}^N\prod_{j\neq i}\frac{\Theta_p(tx_i/x_j)}{\Theta_p(x_i/x_j)}T_{q,x_i}.$$

詳しくは [FHHSY, §IV.C] を参照. しかし, Feigin-Odesskii 代数の枠組みで高階の Ruijsenaars 作用素を理解することは, 今の所できていない.

6.3 Okounkov-Pandharipande 作用素との関連

最後に楕円類似で用いた頂点作用素 (正確には付随する Heisenberg 代数の生成元) の '古典極限' に関する簡単な観察を紹介する. この副節は今までの議論とは完全に独立である.

$q=e^\hbar$, $t=e^{\beta\hbar}$ として, $\hbar\to 0$ での極限を考えたい*21. Heisenberg 代数の生成元 a_n の代わりに次の λ_n を考える.

$$[\lambda_m,\lambda_n]=-\frac{1}{m}\frac{(1-q^m)(1-t^{-m})(1-p^mq^{-m}t^m)}{1-p^m}\delta_{m+n,0}.$$

*21 対称函数の退化図式 (図 1) を思い出すと, この極限は Macdonald 対称函数から Jack 対称函数を導く時の極限である.

λ_n を用いると $\eta(z;p)$ は簡単にかける:

$$\eta(z;p) = {}^{\circ}_{\circ} \exp\big(\sum_{n\neq 0} \lambda_n z^{-n}\big) {}^{\circ}_{\circ}.$$

一方で Virasoro 代数の Feigin-Fuchs 自由場表示に用いられる Heisenberg 代数は

$$[\overline{a}_m, \overline{a}_n] = m\delta_{m+n,0}$$

を満たす $\overline{a}_n$ で生成される. $\overline{a}_n$ と λ_n は次のように関連している:

$$\lambda_n = \frac{1}{|n|}\sqrt{-\frac{(1-q^{|n|})(1-t^{-|n|})(1-p^{|n|}q^{-|n|}t^{|n|})}{1-p^{|n|}}} \cdot \overline{a}_n.$$

この式を $\hbar$ で展開すると

$$\begin{aligned}\lambda_n = \Bigg[&\beta^{1/2}\hbar + \frac{n}{4}\frac{1+p^n}{1-p^n}(1-\beta)\beta^{1/2}\hbar^2 \\ &+ \frac{n^2}{96}\left(4(2-3\beta+2\beta^2)\beta^{1/2} - 3\frac{(1+p^n)^2}{(1-p^n)^2}(1-\beta)^2\beta^{1/2}\right)\hbar^3 + O(\hbar^4)\Bigg] \cdot \overline{a}_n.\end{aligned}$$

これを $\big[\eta(z;p)\big]_1$ ($\eta(z;p)$ の零モード) に代入すると, 以下の展開を得る.

$$\begin{aligned}\big[\eta(z;p)\big]_1 = 1 + \beta\sum_{n\geq 1}\overline{a}_{-n}\overline{a}_n\hbar^2 + \Bigg[&\beta(1-\beta)\sum_{n\geq 1}\frac{n}{2}\frac{1+p^n}{1-p^n}\overline{a}_{-n}\overline{a}_n \\ &+ \frac{\beta^{3/2}}{2}\sum_{n,m\geq 1}\big(\overline{a}_{-n}\overline{a}_n\overline{a}_{n+m} + \overline{a}_{-n-m}\overline{a}_n\overline{a}_m\big)\Bigg]\hbar^3 + O(\hbar^4).\end{aligned}$$

最後に現れた式の $\hbar^3$ の項は Okounkov-Phandharipande [OkPa] が Hilb($\mathbb{A}^2$) の量子コホモロジーの計算に用いた演算子 M(q, t_1, t_2) と一致する. この演算子は Calogero-Sutherland 模型の Hamiltonian の変形として導入されたものだが, 我々の $[\eta(z;p)]_1$ はそれを更に変形したものと思うことができる.

参考文献

[AKOS] H. Awata, H. Kubo, S. Odake, J. Shiraishi, *Quantum $\mathcal{W}_N$ algebras and Macdonald polynomials*, Comm. Math. Phys. **179** (1996), no. 2, 401–416.

[DI] J. Ding, K. Iohara, *Generalization of Drinfeld quantum affine algebras*, Lett. Math. Phys. **41** (1997), no. 2, 181–193.

[FFJMM1] B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin, *Quantum continuous $\mathfrak{gl}_\infty$: Semi-infinite construction of representations*, arXiv:1002.3100.

[FFJMM2] B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin, *Quantum continuous $\mathfrak{gl}_\infty$: Tensor products of Fock modules and W_n characters*,arXiv:1002.3113.

[FFr] B. Feigin and E. Frenkel, *Quantum $\mathcal{W}$-Algebras and Elliptic Algebras*, Comm. Math. Phys. **178** (1996) 653–678.

[FHHSY] B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi, S. Yanagida, *A commutative algebra on degenerate $\mathbb{CP}^1$ and Macdonald polynomials*, J. Math. Phys. **50** (2009), no. 9, 095215.

[FHSSY] B. Feigin, A. Hoshino, J. Shibahara, J. Shiraishi, S. Yanagida, *Kernel function and quantum algebras*, 数理解析研究所講究録 **1689** (2010) 133–152.

[FO] B. Feigin, A. Odesskii, *A family of elliptic algebras*, Internat. Math. Res. Notices **11** (1997), 531–539.

[FT] B. Feigin, A. Tsymbaliuk, *Heisenberg action in the equivariant K-theory of Hilbert schemes via Shuffle Algebra*, arXiv:0904.1679.

[Ha] M. Haiman, *Macdonald polynomials and geometry*, in *New Perspectives in Geometric Combinatorics*, MSRI Publications **37** (1999), 207–254.

[Jin] N. Jing, *q-Hypergeometric Series and Macdonald Functions*, J. Algebraic Combin. **3**, (1994), 291–305.

[KaN] Y. Kajihara, M. Noumi, *Multiple elliptic hypergeometric series. An approach from the Cauchy determinant*, Indag. Math. (N.S.) **14** (2003), no. 3-4, 395–421.

[KoNS] Y. Komori, M. Noumi, J. Shiraishi, *Kernel functions for difference operators of Ruijsenaars type and their applications* SIGMA **5** (2009), 054.

[Mac] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd ed. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press (1995).

[N] 野海正敏, 2010 年度数学会 無限可積分系セッション特別講演 **「可換差分作用素と核函数」**, 無限可積分系のページ http://www.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/~okado/infinite.html より入手可能.

[O] A. Odesskii, *Elliptic algebras* (Russian) Uspekhi Mat. Nauk **57** (2002), no. 6, 87–122; translation in Russian Math. Surveys **57** (2002), no. 6, 1127–1162.

[OkPa] A. Okounkov, R. Pandharipande, *Quantum cohomology of the Hilbert scheme of points in the plane*, Invent. Math. **179** (2010), no. 3, 523–557.

[R] S. N. M. Ruijsenaars, *Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities.*, Comm. Math. Phys. **110** (1987), no. 2, 191–213.

[Sc] O. Schiffmann, *Drinfeld realization of the elliptic Hall algebra*, arXiv:1004.2575.

[ScV] O. Schiffmann, E. Vasserot, *The elliptic Hall algebra and the equivariant K-theory of the Hilbert scheme of $\mathbb{A}^2$*, arXiv:0905.2555.

[S1] 白石潤一, **量子可積分系入門** *Lectures on Quantum Integrable Systems*, SGC ライブラリ 28 サイエンス社 (2003).

[S2] J. Shiraishi, *A Family of Integral Transformations and Basic Hypergeometric Series*, Comm. Math. Phys. **263** (2006), 439–460.

[SKAO] J. Shiraishi, H. Kubo, H. Awata, S. Odake, *A quantum deformation of the Virasoro algebra and the Macdonald symmetric functions*, Lett. Math. Phys. **38** (1996), no. 1, 33–51.