AGT conjectures and Zamolodchikov-type recursive formula

柳田伸太郎　(神戸大)

ABCGT 大会 @ 東大数理
2010 年 9 月 14 日

概要

AGT 予想にはいくつかの証明の方針が考えられていますが,
今回の私の話では, ”Zamolodchikov 型の漸化式” を使う方針を扱います.

AGT 予想には種々の類似が考えられていますが,
私の話では主に “SU(2) pure gauge 理論版”
(Gaiotto による AGT 予想の退化版のうち最も簡単なもの)
を扱います.

この場合は Nekrasov サイドの漸化式と Virasoro サイドの漸化式を,
どちらも簡明に扱うことが出来ます.

時間の都合上, Virasoro サイドの漸化式を詳しく扱いたいと思います.

目次

§1. Nekrasov 分配函数

c.f. Nekrasov; Braverman-Etingof, Nakajima-Yoshioka, Nekrasov-Okounkov

- "4 次元 SU(r) pure gauge 理論" の分配函数

$$\mathsf{Z}^{\mathrm{rank}=r}(x;\epsilon_1,\epsilon_2,\vec{a}) := \sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_{\mathcal{M}(r,n)} 1 \qquad (1 \in H_G^*(\mathcal{M}(r,n)))$$

ここで $\mathcal{M}(r,n)$: $\mathbb{CP}^2$ 上のインスタントン moduli,

$H_G^*(\mathcal{M}(r,n))$: G 同変コホモロジー ($G := (\mathbb{C}^\times)^{r+1}$).

- 同変コホモロジーの局所化定理により, 分配函数は G 作用の固定点での寄与の和で書ける. 固定点は r 個の分割の組でパラメトライズ出来る.

$$\int_{\mathcal{M}(r,n)} 1 = \sum_{\vec{Y}} \frac{1}{e(T_{\vec{Y}}\mathcal{M}(r,n))}$$

ここで $\vec{Y} = (Y_1,\dots,Y_r)$: r 個の分割, s.t. $|Y_1| + \cdots + |Y_r| = n$.

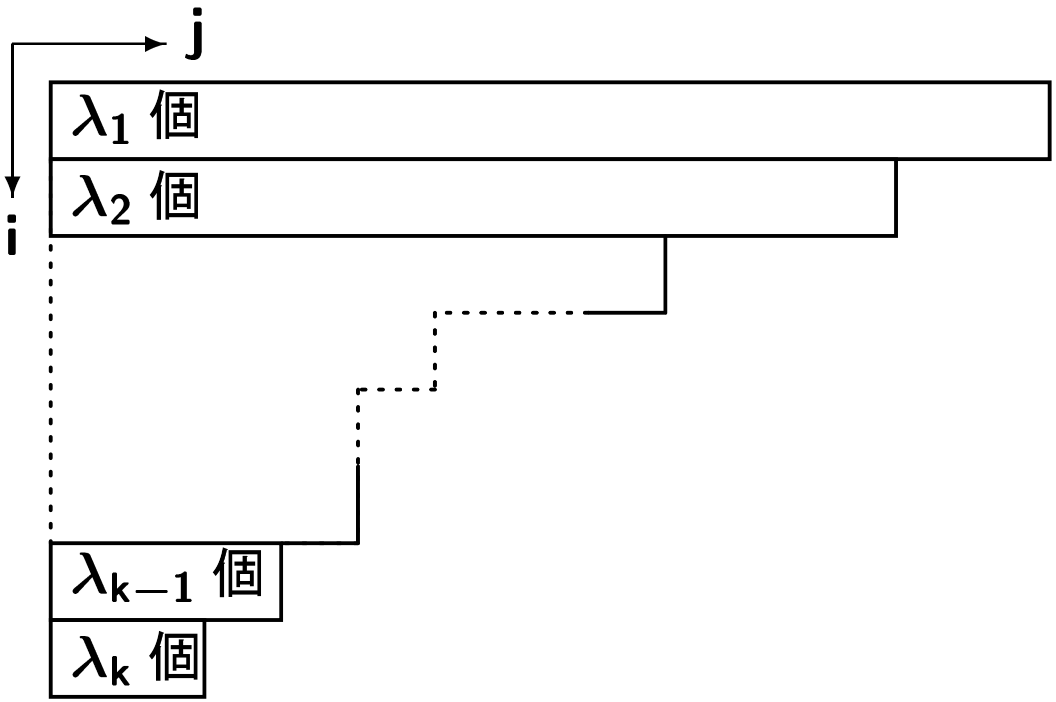
§1.2. 分割, Young 図形

- 分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$: 非増加自然数列 $(\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 1)$
  もしくは空数列 $\emptyset = () = (0)$ のこと.

$|\lambda| := \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$: 箱の総数,　　$\ell(\lambda) := k$: 長さ

$\lambda \vdash n \overset{\text{def}}{\iff} \lambda$ は分割で $|\lambda| = n$.

- 分割 λ の Young 図形 :



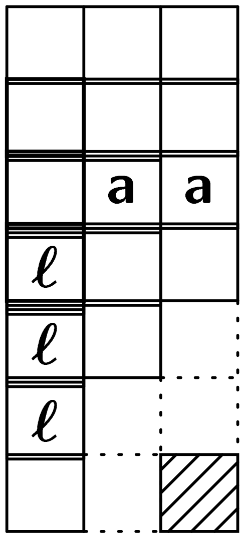
- **(relative) arm と leg**

λ : 分割, $\square = (i, j)$: 箱

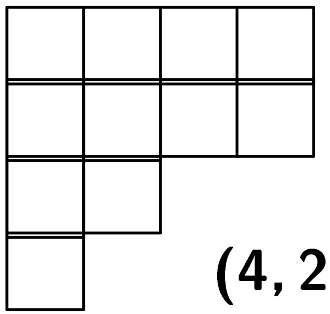
$$a_\lambda(\square) := \lambda_i - j : \text{arm}, \quad \ell_\lambda(\square) := {\lambda^\vee}_j - i : \text{leg}$$

但し $\lambda^\vee$ は λ の転置, $\quad \lambda_i := \begin{cases} \lambda_i & (i \leq \ell(\lambda)) \\ 0 & (i > \ell(\lambda)) \end{cases}$

<u>E.g.</u> $\lambda = (3, 2, 1, 1) \qquad \lambda^\vee = (4, 2, 1)$



$(3, 2, 1, 1)$
$(3, 2, 1, 1)$
$(3, 2, 1, 1)$
$(3, 2, 1, 1)$



$(4, 2, 1)$
$(4, 2, 1)$

$\square = (1, 1) \qquad a_\lambda(\square) = \lambda_1 - 1 = 2, \quad \ell_\lambda(\square) = {\lambda^\vee}_1 - 1 = 3$

§1.3 組み合わせ論的定義

- $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$: ランク, $x, \epsilon_1, \epsilon_2, \vec{a} = (a_1, \ldots, a_r)$: 不定元

$$Z^{\mathrm{rank}=r}(x; \epsilon_1, \epsilon_2, \vec{a}) = \sum_{\vec{Y}} \frac{x^{|\vec{Y}|}}{\prod_{1 \leq \alpha, \beta \leq r} n^{\vec{Y}}_{\alpha,\beta}(\epsilon_1, \epsilon_2, \vec{a})}$$

$\vec{Y} = (Y_1, \ldots, Y_r)$: r 組の分割, $|\vec{Y}| := |Y_1| + \cdots + |Y_r|$,

$$n^{\vec{Y}}_{\alpha,\beta}(\epsilon_1, \epsilon_2, \vec{a}) := \prod_{\square \in Y_\alpha} [-\ell_{Y_\beta}(\square)\epsilon_1 + (a_{Y_\alpha}(\square) + 1)\epsilon_2 + a_\beta - a_\alpha]$$
$$\times \prod_{\blacksquare \in Y_\beta} [(\ell_{Y_\alpha}(\blacksquare) + 1)\epsilon_1 - a_{Y_\beta}(\blacksquare)\epsilon_2 + a_\beta - a_\alpha].$$

- 以下次のように略記する.

$$Z_{\vec{Y}}(\epsilon_1,\epsilon_2,\vec{a}) := [\prod_{1\le\alpha,\beta\le r} n^{\vec{Y}}_{\alpha,\beta}(\epsilon_1,\epsilon_2,\vec{a})]^{-1},$$

$$Z_n(\epsilon_1,\epsilon_2,\vec{a}) := \sum_{|\vec{Y}|=n} Z_{\vec{Y}}(\epsilon_1,\epsilon_2,\vec{a})$$

<u>E.g.</u> rank = 1 : $\quad Z_Y = \dfrac{1}{n^Y_{11}(\epsilon_1,\epsilon_2)}$

$$n^Y_{11} = \prod_{\square\in Y}[-\ell_Y(\square)\epsilon_1 + (a_Y(\square)+1)\epsilon_2][(\ell_Y(\square)+1)\epsilon_1 - a_Y(\square)\epsilon_2]$$

$$Z_0 = Z_\emptyset = 1, \qquad Z_1 = Z_{(1)} = \frac{1}{\epsilon_1\epsilon_2}$$

$$Z_2 = Z_{(2)} + Z_{(1,1)} = \frac{1}{2\epsilon_2(\epsilon_1-\epsilon_2)\epsilon_2\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2\epsilon_1(\epsilon_2-\epsilon_1)2\epsilon_1} = \frac{1}{2\epsilon_1^2\epsilon_2^2}$$

$$Z_3 = Z_{(3)} + Z_{(2,1)} + Z_{(1,1,1)} = \cdots = \frac{1}{6\epsilon_1^3\epsilon_2^3}$$

- 実は rank $=1$ の時は

$$Z^{\mathrm{rank}=1}(x;\epsilon_1,\epsilon_2)=\sum_{n=0} x^n Z_n(\epsilon_1,\epsilon_2)=\exp(\frac{x}{\epsilon_1\epsilon_2})$$

E.g. 2. rank $=2$

$$Z_1 = Z_{(1),\emptyset} + Z_{\emptyset,(1)}$$

$$=\frac{1}{\epsilon_1\epsilon_2(a_1-a_2)(\epsilon_1+\epsilon_2+a_2-a_1)}+\frac{1}{(\epsilon_1+\epsilon_2+a_1-a_2)(a_2-a_1)\epsilon_2\epsilon_1}$$

$$Z_2 = Z_{(2),\emptyset} + Z_{(1,1),\emptyset} + Z_{(1),(1)} + Z_{\emptyset,(1,1)} + Z_{\emptyset,(2)} = \ldots$$

$$Z_3 = Z_{(3),\emptyset} + Z_{(2,1),\emptyset} + Z_{(1,1,1),\emptyset} + Z_{(2),(1)} + Z_{(1,1),(1)}$$
$$+Z_{(1),(1,1)} + Z_{(1),(2)} + Z_{\emptyset,(1,1,1)} + Z_{\emptyset,(2,1)} + Z_{\emptyset,(3)} = \ldots$$

rank $=1$ の時と違い, Z の “分かり易い表示”はなさそう...

§2. Virasoro 代数の準備

§2.1 定義

- **Vir**：中心拡大された Lie 代数

生成元：$\mathsf{L_n}$ $(\mathsf{n} \in \mathbb{Z})$,　C (central)

関係式：$[\mathsf{L_n}, \mathsf{L_m}] = (\mathsf{n}-\mathsf{m})\mathsf{L_{n+m}} + \frac{1}{12}\mathsf{C}\mathsf{n}(\mathsf{n}^2-1)\delta_{\mathsf{n+m},0}$

- 三角分解：$\mathrm{Vir} = \mathrm{Vir}_+ \oplus \mathrm{Vir}_0 \oplus \mathrm{Vir}_-$

$$\mathrm{Vir}_\pm := \oplus_{\pm n \in \mathbb{Z}_{>0}} \mathbb{C}L_n, \quad \mathrm{Vir}_0 := \mathbb{C}L_0 \oplus \mathbb{C}C$$

- U(Vir) の PBW 基底：$\{L_{-\lambda}L_0^n L_\mu \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \lambda, \mu : 分割\}$

但し分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ に対し

$$L_\lambda := L_{\lambda_\ell} \cdots L_{\lambda_1}, \quad L_{-\lambda} := L_{-\lambda_1} \cdots L_{-\lambda_\ell}$$

§2.2 Verma 加群 $M(c,h)$

$c, h \in \mathbb{C}$: highest weight

$\mathbb{C}_{c,h} := \mathbb{C}|c,h\rangle$: 1 次元 $(\mathrm{Vir}_+ \oplus \mathrm{Vir}_0)$-表現

$$L_n|c,h\rangle = 0 \ (n > 0), \quad L_0|c,h\rangle = h|c,h\rangle, \quad C|c,h\rangle = c|c,h\rangle$$

$M(c,h) := \mathrm{Ind}^{\mathrm{Vir}}_{\mathrm{Vir}_+ \oplus \mathrm{Vir}_0} \mathbb{C}_{c,h}$

weight 分解 : $M(c,h) = \oplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} M(c,h)_n$
$M(c,h)_n := \{v \in M(c,h) \mid L_0 v = (h+n)v\}$

$M(c,h)_n$ の基底 : $\{L_{-\lambda}|c,h\rangle \mid \lambda \vdash n\}$

双対 Verma 加群 $\quad M^*(c,h) := \mathrm{Ind}^{\mathrm{Vir}}_{\mathrm{Vir}_- \oplus \mathrm{Vir}_0} \mathbb{C}^*_{c,h}$

$\mathbb{C}^*_{c,h} := \mathbb{C}\langle c,h|$: 1 次元 $(\mathrm{Vir}_- \oplus \mathrm{Vir}_0)$-右表現

$$\langle c,h| L_n = 0 \ (n > 0), \quad \langle c,h| L_0 = h\langle c,h|, \quad \langle c,h| C = c\langle c,h|$$

weight 分解 : $M^*(c,h) = \oplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} M^*(c,h)_n$
$M^*(c,h)_n := \{v \in M^*_h \mid vL_0 = (h-n)v\}$

$M^*(c,h)_n$ の基底 : $\{\langle c,h| L_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$

§2.3 Shapovalov form (contravariant form)

- $\cdot : M^*(c,h) \times M(c,h) \to \mathbb{C}$: bilinear form

$$\langle c,h|\, L_\lambda \cdot L_{-\mu}\, |c,h\rangle := \sum_{\nu_1,\nu_2,n} \delta_{\nu_1,\emptyset}\delta_{\nu_2,\emptyset} c_{\nu_1,\nu_2,n} h^n$$

$$\Big(L_\lambda L_{-\mu} = \sum_{\substack{\nu_1,\nu_2:\text{分割} \\ n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}} c_{\nu_1,\nu_2,n} L_{-\nu_1} L_0^n L_{\nu_2}\Big)$$

- この時 $uL_n \cdot v = u \cdot L_n v \qquad (u \in M_h^*,\ v \in M_h)$

そこで $\langle c,h|\, L_\lambda L_{-\mu}\, |c,h\rangle := \langle c,h|\, L_\lambda \cdot L_{-\mu}\, |c,h\rangle$, $uv := u \cdot v$ 等と略記する.

- $\langle c,h|\, L_\lambda L_{-\mu}\, |c,h\rangle = 0$ unless $|\lambda| = |\mu|$
- $\langle c,h|\, L_\lambda L_{-\mu}\, |c,h\rangle = \langle c,h|\, L_{-\mu} L_\lambda\, |c,h\rangle$.

§2.4. Kac determinant

- $K_n := (\langle c, h| L_\lambda L_{-\mu} |c, h\rangle)_{\lambda,\mu \vdash n}$ とすると

$$\det K_n \propto \prod_{\substack{r,s\in\mathbb{Z}_{\geq 1}\\ 1\leq rs\leq n}} (h - h_{r,s})^{p(n-rs)} \qquad (p(m) := \#\{\lambda \mid \lambda \vdash m\})$$

$$h_{r,s} := \frac{1}{48}[(13-c)(r^2+s^2) - 24rs - 2(1-c) + \sqrt{(1-c)(25-c)}(r^2-s^2)]$$

- "Single pole phenomena" [K. Brown, 2003]

K_n^{-1} の各成分は h について高々1 位の極しかもたない.

c.f. Shapovalov form の逆行列に関する同様の現象は,

有限次元 Lie 環に関しても成立する. [Ostapenko, 1992]

§3. Gaiotto の予想

• AGT の元々の予想は共形場理論の共形ブロックが $(N_f = 4)$Nekrasov 分配函数に一致するというもの．ここでは退化版の 1 つを紹介する．
c.f. D. Gaiotto “Asymptotically free $N = 2$ theories and irregular conformal blocks”, arXiv:0908.0307

§3.1 Gaiotto state

• $\Lambda \in \mathbb{C}$ 固定． Gaiotto state $|G\rangle \in M(c,h)$ とは, 次を満たす元の事.

$$L_1 |G\rangle = \Lambda^2 |G\rangle, \quad L_n |G\rangle = 0 \ (n \geq 2),$$

$$|G\rangle = |c,h\rangle + \cdots \qquad (|G\rangle \text{ の } M(c,h)_0 \text{ における成分が } |c,h\rangle).$$

• 双対 Gaiotto state $\langle G| \in M^*(c,h)$ も同様に, 次の条件を満たす元の事.

$$\langle G| L_{-1} = \Lambda^2 \langle G|, \ \langle G| L_{-n} = 0 \ (n \geq 2), \ \langle G| = \langle c,h| + \cdots$$

- 実際に計算してみると,

$$|G\rangle = |c,h\rangle + \Lambda^2 v_1 + \Lambda^4 v_2 + \Lambda^6 v_3 + \cdots, \quad v_n \in M(c,h)_n$$

と展開できて,

$$v_1 = \frac{1}{2h} L_{-1} |c,h\rangle,$$

$$v_2 = \frac{(8h+8c)L_{-1}^2 - 12hL_{-2}}{4h(16h^2+2ch-10h+c)} |c,h\rangle,$$

$$v_3 = \frac{1}{24h(3h^2+ch-7h+2)(16h^2+2ch-10h+c)}\Big[12h(7h-c-3)L_{-3} - 12(9h^2+3ch-7h+c)L_{-2}L_{-1} + (24h^2-26h+11ch+8c+c^2)L_{-1}^3\Big] \cdot |c,h\rangle,$$

$v_4 = \cdots$ と決まっていく.

- 実は $v_n = L_1 v_{n+1}$, $L_2 v_n = 0$ が成り立つ.

§3.2 pure gauge 分配函数に対する Gaiotto の予想

予想　generic な c, h に対して ($\langle G|$, $|G\rangle$ は一意に存在して)

$$\langle G \mid G\rangle \overset{?}{=} Z^{\mathrm{rank}=2}(x; \epsilon_1, \epsilon_2, \vec{a})$$

但し

Virasoro	Nekrasov
c	$13 + 6(\epsilon_1/\epsilon_2 + \epsilon_2/\epsilon_1)$
h	$((\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - (a_2 - a_1)^2)/4\epsilon_1\epsilon_2$
Λ	$x^{1/4}/(\epsilon_1\epsilon_2)$

言い換え　[Marshakov-Mironov-Morozov, 2009]

実は $\langle G \mid G\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^{4n}(K_n^{-1})_{(1^n),(1^n)}$ なので

$$(K_n^{-1})_{(1^n),(1^n)} \overset{?}{=} (\epsilon_1\epsilon_2)^{4n} Z_n(\epsilon_1, \epsilon_2; \vec{a})$$

§4. Zamolodchikov 型の漸化式

§4.1. 証明の方針に関するコメント

AGT 予想を代数幾何と表現論の対応と思うと, "インスタントン moduli $\mathcal{M}(r, n)$ のコホモロジー (の無限直和) 上に, Virasoro の作用を作れ" という, 幾何学的表現論の問題になる.

- **今回話すのは, 別の方針 : Z_n と $(K_n)^{-1}_{(1^n),(1^n)}$ が同じ漸化式を満たすことを示す.**

Poghossian JHEP 0912 (2009), arXiv:0909.3412

Fateev-Litvinov JHEP 1002 (2010), arXiv:0912.0504

Hasadz-Jaskólski-Suchanek JHEP 1006 (2010), arXiv:1004.1841

§4.2 Zamolodchikov 型の漸化式

事実 [Fateev-Litvinov, Hasadz-Jaskólski-Suchanek]

$a := a_1 - a_2$ として, $Z_n(\epsilon_1, \epsilon_2, a)$ は次の漸化式を満たす.

$$Z_n(\epsilon_1, \epsilon_2, a) = \delta_{n,0} + \sum_{\substack{r,s \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \\ 1 \leq rs \leq n}} \frac{R_{r,s}(\epsilon_1, \epsilon_2) Z_{n-rs}(\epsilon_1, \epsilon_2, (r\epsilon_1 - s\epsilon_2)/2)}{4a^2 - (r\epsilon_1 + s\epsilon_2)^2}$$

但し

$$R_{r,s}(\epsilon_1, \epsilon_2) := 2^{-1} \prod_{\substack{1-r \leq j \leq r \\ 1-s \leq k \leq s \\ (j,k) \neq (0,0),(r,s)}} (j\epsilon_1 + k\epsilon_2)^{-1}$$

注意

(1) 証明には Z_n の積分表示を用いる.

(2) Fateev-Litvinov は adjoint matter 付きの場合,
Hasadz-Jaskólski-Suchanek は matter が 2 個以下の場合を証明している.

- 従って pure gauge の Gaiotto 予想は, 上の漸化式のパラメータの読み変えた

$$\mathbf{f_n(c,h) = \delta_{n,0} + \sum_{\substack{r,s\in\mathbb{Z}_{\geq 1}\\ 1\leq rs\leq n}} \frac{\widetilde{R}_{r,s}(c)f_{n-rs}(c,h_{r,s}+rs)}{h-h_{r,s}}} \qquad \mathbf{(1)}$$

が $(K_n(c,h))^{-1}_{(1^n),(1^n)}$ の漸化式になることに帰着されている.

注意

この型の漸化式は, **Al. Zamolodchikov** が共形ブロックに対して提唱した **"elliptic recursive formula"** に端を発する.

c.f. Al. Zamolodchikov, Comm. Math. Phys. 96 (1984); Theor. Math. Phys. 73 (1987)

§4.3 Virasoro サイドでの考察

Hasadz-Jaskólski-Suchanek は, $(K_n(c,h))^{-1}_{(1^n),(1^n)}$ の漸化式を導いた：

$$c = c(t) := 13 - 6(t + t^{-1}),$$

$$h_{r,s}(t) := h_{r,s}|_{c=c(t)} = \frac{(rt-s)^2 - (t-1)^2}{4t}$$

$$f_n(t,h) := (K_n(c(t),h))^{-1}_{(1^n),(1^n)} \text{ として}$$

$$f_n(t,h) = \delta_{0,n} + \sum_{\substack{(r,s)\in\mathbb{Z}^2_{>0},\\ 1\le rs\le n}} \left[\lim_{h\to h_{r,s}(t)} \frac{N_{r,s}(t,h)}{h-h_{r,s}(t)}\right]^{-1} \frac{f_n(t, h_{r,s}(t)+rs)}{h-h_{r,s}(t)}. \tag{2}$$

ここで $N_{r,s}(t,h)$ は特異ベクトルに関連するある函数 (次節参照).
証明には, $M(c,h)$ の Jantzen filtration に関する事実と, 特異ベクトルの表示に関する事実 (p. 21 参照), 及び簡単な行列計算を用いる.

§5. Norm of Logarithmic Primary Field

§5.1 特異ベクトル

- $v \in M(c,h)_n$ が特異ベクトル $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $L_k v = 0$ for any $k \in \mathbb{Z}_{>0}$.

- Verma 加群 $M(c(t), h_{r,s}(t))$ の特異ベクトル $|\chi_{r,s}\rangle$ は定数倍を除いて一意に決まる．特に次のように書ける：

$$|\chi_{r,s}\rangle = P_{r,s}(t)\,|c(t), h_{r,s}(t)\rangle,$$

$$P_{r,s}(t) = L_{-1}^{rs} + \sum_{\lambda \vdash rs,\, \lambda \neq (1^{rs})} c_\lambda(t) L_{-\lambda}(t)$$

$$\in U(\mathrm{Vir}_-)_{rs} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$$

証明は次を参照：D. B. Fuchs, “Singular vectors over the Virasoro algebra and extended Verma modules”, in “Unconventional Lie algebras”, Adv. Soviet Math., 17, AMS, 1993.

<u>例</u> (白石 「量子可積分系入門」 サイエンス社)

$$
\begin{aligned}
P_{1,1}(t) &= L_{-1},\\
P_{2,1}(t) &= L_{-1}^2 - tL_{-2},\\
P_{1,2}(t) &= L_{-1}^2 - t^{-1}L_{-2},\\
P_{3,1}(t) &= L_{-1}^3 - 4tL_{-2}L_{-1} + 2t(2t-1)L_{-3},\\
P_{1,3}(t) &= L_{-1}^3 - 4t^{-1}L_{-2}L_{-1} + 2t^{-1}(2t^{-1}-1)L_{-3},\\
P_{4,1}(t) &= L_{-1}^4 - 10tL_{-3}L_{-1} + 9t^2L_{-2}^2 + 2t(12t-5)L_{-3}L_{-1}\\
&\qquad - 6t(6t^2-4t+1)L_{-4},\\
P_{2,2}(t) &= L_{-1}^4 - 2(t+t^{-1})L_{-3}L_{-1} + (t^2-2+t^{-2})L_{-2}^2\\
&\qquad - 2(t-3+t^{-1})L_{-3}L_{-1} - 3(t-2+t^{-1})L_{-4}\\
P_{1,4}(t) &= L_{-1}^4 - 10t^{-1}L_{-3}L_{-1} + 9t^{-2}L_{-2}^2 + 2t^{-1}(12t^{-1}-5)L_{-3}L_{-1}\\
&\qquad - 6t^{-1}(6t^{-2}-4t^{-1}+1)L_{-4}.
\end{aligned}
$$

§5.2. Norm of Logarithmic Primary Field

- $U(Vir)$ 上の anti-autmorph. $\dagger$ を $L_n^\dagger = L_{-n}$, $C^\dagger = C$ で定義.
- $u\,|c,h\rangle \in M(c,h)$ のノルムとは $\langle c,h|\,u^\dagger u\,|c,h\rangle$ の事.
- $\langle\chi_{r,s}| := \langle c(t), h_{r,s}(t)|\,[P_{r,s}(t)]^\dagger$.
- 特異ベクトル $|\chi_{r,s}\rangle$ の定義から

$$\langle\chi_{r,s} \mid \chi_{r,s}\rangle = \langle c(t), h_{r,s}(t)|\,[P_{r,s}(t)]^\dagger P_{r,s}(t)\,|c(t), h_{r,s}(t)\rangle = 0.$$

- 次のものを考える：

$$N_{r,s}(t,h) := \langle c(t), h|\,[P_{r,s}(t)]^\dagger P_{r,s}(t)\,|c(t), h\rangle.$$

例

$$N_{1,1}(t,h) = 2h \quad N_{1,1}(t,h) = 2(h - h_{1,1}(t))$$

$$N_{2,1}(t,h) = -(-t(4h + 13/2 - 3t - 3/t) + 6h)t - 6th + 4h(1 + 2h)$$
$$N_{2,1}(t,h) = 4(t-1)(t+1)(h - ((2t-1)^2 - (t-1)^2)/(4t)) + 8(h - ((2t-1)^2 - (t-1)^2)/(4t))^2$$
$$N_{2,1}(t,h) = 4(t^2 - 1)(h - h_{2,1}(t)) + 8(h - h_{2,1}(t))^2$$
$$N_{1,2}(t,h) = 4(t^{-2} - 1)(h - h_{1,2}(t)) + 8(h - h_{1,2}(t))^2$$

$$\begin{aligned} N_{3,1}(t,h) = {} & 24(t^2 - 1)(4t^2 + 1)(h - h_{3,1}(t)) + 8(16t^2 - 9)(h - h_{3,1}(t))^2 \\ & + 48(h - h_{3,1}(t))^3 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} N_{1,3}(t,h) = {} & 24(t^{-2} - 1)(4t^{-2} + 1)(h - h_{1,3}(t)) + 8(16t^{-2} - 9)(h - h_{1,3}(t))^2 \\ & + 48(h - h_{1,3}(t))^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{4,1}(t,h) = {} & 288(t^2 - 1)(4t^2 - 1)(9t^2 - 1)(h - h_{4,1}(t)) \\ & + (1056 - 7696t^2 + 9504t^4)(h - h_{4,1}(t))^2 \\ & + 128(25t^2 - 9)(h - h_{4,1}(t))^3 + 384(h - h_{4,1}(t))^4 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} N_{2,2}(t,h) = {} & -8(t^2 - 1)(t^2 - 4)(t^{-2} - 1)(t^{-2} - 4)(h - h_{2,2}(t)) \\ & + 16(2t^{-4} - 33t^{-2} + 91 - 33t^2 + 2t^4)(h - h_{2,2}(t))^2 \\ & + 128(t^2 + 3t + 1))(t^{-2} - 3t^{-1} + 1)(h - h_{2,2}(t))^3 \\ & + 384(h - h_{2,2}(t))^4 \end{aligned}$$

“予想” (Al. Zamolodchikov) $A_{r,s}(t,h) := \lim_{h\to h_{r,s}(t)} \dfrac{N_{r,s}(t,h)}{h-h_{r,s}(t)}$ は次のように書ける：

$$A_{r,s}(t,h) \overset{?}{=} 2 \prod_{\substack{1-r\le j\le r,\ 1-s\le k\le s,\\ (j,k)\ne(0,0),(r,s)}} (jt^{1/2}+kt^{-1/2})$$

- Virasoro サイドの漸化式 (2) にこの結果を代入すれば, Nekraosv 分配函数の満たす漸化式 (1) に一致する.

つまり, Gaiotto 予想は上の “予想”に帰着された.

注意　(予想の右辺) $\in \mathbb{Q}[t,t^{-1}]$

c.f. Al. Zamolodchikov : “Higher equations of motion in Liouville field theory”, Int. J. Mod. Phys. A 19 (2004); hep-th/0312279.

§6 “予想”の証明の方針

- 実は $r = 1$ (または $s = 1$) の時は,

Imbimbo-Mahapatra-Mukhi, “Construction of physical states of nontrivial ghost number in $c < 1$ string theory”, Nucl. Phys. B 375 (1992)

が ($A_{r,s}(t)$ とほぼ同じ量を) 計算している.

ここで述べる証明の方針は, 彼らの方法を $r \neq 1$ でも適用できるように変更したもの.

c.f. Imbimbo-Mahapatra-Mukhi は “Liouville $\otimes$ Matter $\otimes$ Ghosts”の研究の過程で $A_{r,s}(t)$ の計算に至った.

Step 1. $A_{r,s}(t)$ の次数評価

Step 2. $A_{r,s}(t) \in \mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ の零点集合 S を決定する.　(予想によれば $\{t = -k/j \mid 1 - r \le j \le r,\ 1 - s \le k \le s,\ j \ne 0,\ k \ne 0,\ (j, k) \ne (r, s)\}$.)

2-1. 零点集合を "上から評価" : 次数評価から可能.

2-2. 零点集合を "下から評価"

2-2-1. $P_{r,s}(t)\,|c(t), h\rangle$ を (ある程度) 自由場表示する.

2-2-2. 自由場表示を用いた考察から, S は次の集合を含む :

$$S' := \{t = k/j \mid 1 \le j \le r,\ 1 \le k \le s\}$$
$$\cup\{t = k/j \mid 1 \le j \le r - 1,\ 1 \le k \le s - 1\}.$$

2-2-3. $-S'$ も S に含まれることを示す.

2-3. 上下の評価から $S = S' \cup -S'$.

Step 3. t の leading term の係数の決定

§6.1 $\mathsf{A}_{r,s}(t)$ の次数評価

<u>事実</u>　[Astashkevich-Fuchs, 1997] $P_{r,s}(t)$ を t べきで展開すると

$$P_{r,s}(t) = [(r-1)!]^{2s} L_{-r}^{s} t^{(r-1)s} + \cdots + [(s-1)!]^{2r} L_{-s}^{r} t^{-(s-1)r}.$$

これと $\langle c(t), h|\, L_{\mu} L_{-\lambda} \,|c(t), h\rangle$ の t, h に関する次数評価から

<u>補題</u>　$A_{r,s}(t) = \sum_k a_k t^k$ と t のべきで展開した時の最高/最低次数を

$$\max\deg A_{r,s}(t) = \max\{k \mid a_k \neq 0\},$$
$$\min\deg A_{r,s}(t) = \min\{k \mid a_k \neq 0\}$$

と定めると

$$\max\deg A_{r,s}(t) \leq (2r-1)s,$$
$$\min\deg A_{r,s}(t) \geq -(2s-1)r.$$

§6.2 零点集合の下からの評価 (1) 自由場表示を利用

§6.2.1 Heisenberg 代数

- **Heisenberg 代数 $\mathcal{H}$**

生成元：a_n $(n \in \mathbb{Z})$　　関係式 $[a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0}a_0$.

三角分解：$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_-$　　$\mathcal{H}_\pm := \bigoplus_{\pm n \in \mathbb{Z}_{>0}} \mathbb{C}a_n$, $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}a_0$

- $\mathcal{F}_\alpha$: **Fock 加群**　　$\mathcal{F}_\alpha := \mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_+}^{\mathcal{H}} \mathbb{C}_\alpha$

ここで $\mathbb{C}_\alpha = \mathbb{C}|\alpha\rangle_{\mathcal{F}}$ は 1 次元 $(\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_+)$ 表現,

$$a_0 \, |\alpha\rangle_{\mathcal{F}} = \alpha \, |\alpha\rangle_{\mathcal{F}}, \quad a_n \, |\alpha\rangle_{\mathcal{F}} = 0 \ (n \in \mathbb{Z}_{>0})$$

$\mathcal{F}_\alpha$ の基底：$\{a_{-\lambda} \, |\alpha\rangle_{\mathcal{F}} \mid \lambda : \text{分割}\}$

§6.2.2 自由場表示

- φ : $\mathrm{U(Vir)} \to \widehat{\mathrm{U}}(\mathcal{H})$ を以下で定義：

$$\mathsf{L_n} \mapsto \mathcal{L}_\mathsf{n} := \frac{1}{2}\sum_{\mathsf{m}\in\mathbb{Z}} {}^\circ_\circ \mathsf{a_m a_{n-m}} {}^\circ_\circ - (\mathsf{n}+1)\rho\mathsf{a_n}, \quad \mathsf{C} \mapsto 1 - 12\rho^2$$

但し ${}^\circ_\circ\ {}^\circ_\circ$ は normal ordering.

- 更にベクトル空間の同型

$$\psi : \mathsf{M(c,h)} \to \mathcal{F}_\alpha \quad \mathsf{L}_{-\lambda}\,|\mathsf{c,h}\rangle \mapsto \mathcal{L}_{-\lambda}\,|\alpha\rangle_\mathcal{F}$$

は φ と整合的　$(\varphi(\mathsf{u})\psi(\mathsf{v}) = \varphi(\mathsf{uv})$ for $\mathsf{u} \in \mathsf{M(c,h)}$, $\mathsf{v} \in \mathcal{F}_\alpha)$.
但し $\mathsf{c} \mapsto 1 - 12\rho^2$, $\mathsf{h} \mapsto \alpha(\alpha - 2\rho)/2$.

- $\rho(\mathsf{t}) := (\mathsf{t}^{1/2} - \mathsf{t}^{-1/2})/\sqrt{2}$, $\alpha_{\mathsf{r,s}}(\mathsf{t}) := \left[(\mathsf{r}+1)\mathsf{t}^{1/2} - (\mathsf{s}+1)\mathsf{t}^{-1/2}\right]/\sqrt{2}$.

とすれば $\mathsf{c(t)} = 1 - 12\rho(\mathsf{t})^2$, $\mathsf{h_{r,s}(t)} = \alpha_{\mathsf{r,s}}(\mathsf{t})(\alpha_{\mathsf{r,s}}(\mathsf{t}) - 2\rho(\mathsf{t}))/2$

§6.2.3. a_{-rs} の係数

補題　$\varphi(P_{r,s}(t))\,|\alpha\rangle$ における a_{-rs} の係数を $e_{r,s}(t) \in \mathbb{C}[t^{\pm 1/2}]$ と置く.

すると $e_{r,s}(t) \in t$ の零点は重複度を込めて $N_{r,s}(t)$ の零点.

- $d_{r,s}(t,\alpha) := \alpha - \alpha_{r,s}(t)$,　　$d^{\dagger}_{r,s}(t,\alpha) := \alpha - \alpha_{-r,-s}(t)$ と定義する.

この時 $h - h_{r,s}(t) = d_{r,s}(t,\alpha) d^{\dagger}_{r,s}(t,\alpha)$.

- $P_{r,s}(t)\,|c(t),h\rangle$ の自由場表示は次のように書ける：

$$
\begin{aligned}
&\varphi(P_{r,s}(c(t),h))\,|\alpha\rangle \\
&= d^{\dagger}_{r,s}(t,\alpha)\Big[g_0(t) + \sum_{k=1}^{rs-1} (d_{r,s}(t,\alpha))^k g_k(t)\Big]\,|\alpha\rangle\,,
\end{aligned}
$$

但し $g_0(t) \in \mathbb{C}[t^{\pm 1/2}] \otimes \mathbb{C}[a_{-1},\cdots,a_{-rs}]_{rs}$,

$g_k(t) \in \mathbb{C}[t^{\pm 1/2}] \otimes \mathbb{C}[a_1,\cdots,a_{rs-1}]_{rs}\ (k \neq 0)$.

- 上の自由場表示から, $\varphi(\mathbf{P_{r,s}(t)})\,|\alpha\rangle$ の $\mathbf{a_{-rs}}$ の係数は

$$\varphi(\mathbf{P_{r,s}(t)})\,|\alpha\rangle\,|_{\mathbf{d_{r,s}(t,\alpha)=0}} = \varphi(\mathbf{P_{r,s}(t)})\,|\alpha_{\mathbf{r,s}}(\mathbf{t})\rangle$$

これは Jack 対称函数で表わせるもの!!

§6.3 対称函数環

- Λ : (Macdonald の意味での)$\mathbb{Z}$ 係数 (無限変数) 対称函数環, $\quad \Lambda_K := \Lambda \otimes K$.

- m_λ : モノミアル対称函数,
- $p_r := \sum_i x_i^r$, $\quad p_\lambda := p_{\lambda_1} \cdots p_{\lambda_\ell}$: 冪和対称函数.

- $\{m_\lambda\}$ は Λ の $\mathbb{Z}$ 基底, $\{p_\lambda\}$ は $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ の $\mathbb{Q}$ 基底.

- β : 不定元. $\quad \Lambda_{\mathbb{Q}(\beta)}$ 上の β 内積 :

$$\langle\, p_\lambda, p_\mu \,\rangle_\beta := \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda \beta^{\ell(\lambda)}.$$

但し

$$z_\lambda := \prod_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} i^{m_i(\lambda)} m_i(\lambda)! \quad \text{with} \quad m_i(\lambda) := \#\{1 \leq i \leq \ell(\lambda) \mid \lambda_j = i\},$$

§6.3.1 Jack 対称函数

- (monic)Jack 対称函数 $P_\lambda^{(\beta)} \in \Lambda_{\mathbb{Q}(\beta)}$ は次で特徴づけられる.

$$\text{(i)} \quad P_\lambda^{(\beta)} = \sum_{\mu \le \lambda} c_{\lambda,\mu}(\beta) m_\mu, \quad c_{\lambda,\mu}(\beta) \in \mathbb{Q}(\beta),\ c_{\lambda,\lambda}(\beta) = 1$$

$$\text{(ii)} \quad \langle\, P_\lambda^{(\beta)}, P_\mu^{(\beta)} \,\rangle_\beta = 0 \quad \text{if } \lambda \neq \mu.$$

但し (i) での分割の順序はドミナンス半順序.

$$\lambda \ge \mu \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} |\lambda| = |\mu|,\ \textstyle\sum_{k=1}^{i} \lambda_k \ge \sum_{k=1}^{i} \mu_k \ (i = 1, 2, \ldots).$$

- (integral) Jack 対称函数 $J_\lambda^{(\beta)}$:

$$J_\lambda^{(\beta)} := P_\lambda^{(\beta)} \cdot \prod_{\Box \in \lambda} (\beta a_\lambda(\Box) + \ell_\lambda(\Box) + 1)$$

§6.3.2 Fock 加群と対称函数

- 次の対応を考える：

$$\iota : \mathcal{F}_\alpha \to \Lambda_{\mathbb{C}(t^{1/2})}, \quad a_{-\lambda} |\alpha\rangle \mapsto (t/2)^{\ell(\lambda)/2} p_\lambda$$

<u>事実</u>

(1) [Mimachi-Yamada, 1995] 特異ベクトルを対称函数で表わしたもの $\iota \circ \psi(|\chi_{r,s}\rangle)$ は Jack 対称函数に比例する：

$$\iota \circ \psi(|\chi_{r,s}\rangle) \propto J^{(1/t)}_{(s^r)}.$$

(2) [Sakamoto-Shiraishi-Arnaudon-Frappat-Ragoucy, 2005] その比例係数は

$$B(r,s,t) := \prod_{j=1}^{r} \prod_{k=1}^{s} (jt - k).$$

事実　[Hanlon-Stanley-Stembridge, 1992]

$\lambda \vdash n$ とする.

$$J_\lambda^{(\beta)} = \sum_{\mu \vdash n} \theta_\lambda^\mu(\beta) p_\mu$$

と Jack 対称函数を冪和対称函数で展開すると

$$\theta_\lambda^{(n)}(\beta) = n \prod_{(i,j)\in\lambda,\ (i,j)\neq(1,1)} [\beta(i-1)-(j-1)].$$

以上の議論と, $\theta_{(s^r)}^{(n)}(1/t)$, $B(r,s,t)$ の公式から

補題　$N_{r,s}(t)$ は次の零点を含む (重複度こみ)

$$\begin{aligned} S' :=& \{t = k/j \mid 1 \le j \le r,\ 1 \le k \le s\} \\ & \cup \{t = k/j \mid 1 \le j \le r-1,\ 1 \le k \le s-1\}. \end{aligned}$$

(Step 2-2-2.)

§6.4 双対性

- $\mathbf{N_{r,s}(t)}$ の零点集合は $\mathbf{t \mapsto -t}$ の変換で不変. **(Step 2-2-3.)**

この性質は次の事実の帰結である：

<u>事実</u>　**[Feigin-Fuchs, 1990 ; Kent, 1992]**

$\mathbf{U(Vir_-)}$ の **anti auto-morph.** を $\sigma : \mathbf{L_{-n} \mapsto (-1)^{n-1} L_{-n}}$ で定めると

$$\sigma(\mathbf{P_{r,s}})(-\mathbf{t}) = \mathbf{P_{r,s}(t)}.$$

§6.5 証明の最後の部分

- $\mathbf{A_{r,s}(t)}$ の **leading term** は, $\mathbf{P_{r,s}(t)}$ の **leading term** $\mathbf{L^{s}_{-r} t^{(r-1)s}}$ のみから計算できる.

§7. まとめと問題集

- 今回紹介した Gaiotto の予想は, (殆ど) 厳密に証明されている.

但し「別々に定義された関数が一致する」というレベルの理解.

Zamolodchikov 型の漸化式は, 表現論的に解釈できる所もあるが, $A_{r,s}(t)$ の計算など, 対称函数や組み合わせ論的議論が必要な部分もある.

- Zamolodchikov 型の漸化式に幾何学的な意味はあるだろうか?

- q 類似 (K 理論版/5 次元版 AGT 予想) でも漸化式を使う証明はできるだろうか? ランク 3 以上 (AGT 予想の W 代数版) ではどうだろうか?

- Nakajima-Yoshioka の爆発公式を Virasoro 代数から証明せよ.