An arithmetic group appearing in the Fourier-Mukai transforms on the abelian surfaces

柳田伸太郎　(神戸大)

名古屋大学 鏡が池の整数論セミナー
2010 年 7 月 10 日

概要

Fourier-向井変換は, 代数曲面上の安定層を調べる上で重要な役割を果たす.

Abel 曲面の場合について, この変換のコホモロジー上での作用を調べると, 安定層のモジュライと点の Hilbert スキームとの間の双有理写像が具体的に構成できる.

コホモロジーへの作用や双有理写像を記述するのに, 2 元 2 次不定方程式や算術群が活躍する.

(吉岡康太先生との共同研究.
arXiv:0906.4603　Semi-homogeneous sheaves, Fourier-Mukai transforms and moduli of stable sheaves on abelian surfaces)

目次

0-1 ベクトル束のモジュライ

- 安直にはベクトル束全体のモジュライを考えるのだが, これは “大きすぎて”スキームではパラメトライズできない. 安定性を導入してこの問題を解決する.

- 非特異射影曲面 (S, H) 上の torsion free 層 E が
H-(半) 安定 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の部分層 $F \subset E$ に対し $n \gg 0$ で

$$\chi(F(nH))/\mathrm{rank}(F) \underset{(=)}{<} \chi(E(nH))/\mathrm{rank}(E)$$

- 安定層のモジュライ

$$M_S^H(r, \xi, a) := \{H\text{-安定な } S \text{ 上の torsion free 層 } E \mid \mathrm{rank}(E) = r, c_1(E) = \xi, \chi(E) = a\}/\sim$$

○ GIT 商により準射影スキームとして構成される.
高次元の代数多様体の例を提供する.

0-2 Hilbert スキーム

- 安定層のモジュライは点の Hilbert スキームと関連する.

$\mathrm{Hilb}^{\ell}(S) := \{\mathcal{O}_Z \mid Z : S$ 上の長さ ℓ の finite subscheme$\}$

○ 自然な完全列

$$0 \to \mathcal{I}_Z \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_Z \to 0$$

により

$$\mathrm{Hilb}^{\ell}(S) \cong M_S^H(1, 0, -\ell)$$

○ Fourier-向井変換: 標準層が自明な場合, 一般のモジュライと Hilbert スキームとの間の双有理写像が構成できる時がある.

0-3 Fourier-向井変換

- Fourier-向井変換 (FMT)

X, Y : 非特異射影多様体
$p_X : X \times Y \to X$, $p_Y : X \times Y \to Y$: 自然な射影
$\mathcal{E}^\bullet$: $\mathrm{Coh}(X \times Y)$ の有界導来圏 $\mathcal{D}(X \times Y)$ の対象
FMT の (積分) 核と呼ばれる.

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{\mathcal{E}^\bullet}^{X \to Y} : & \mathcal{D}(X) & \to & \mathcal{D}(Y) \\ & ? & \mapsto & \mathbb{R}p_{Y*}(p_X^*(?) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{E}^\bullet) \end{array}$$

で定義される関手 $\Phi_{\mathcal{E}^\bullet}^{X \to Y}$ は, 圏同値を与える時, FMT と呼ばれる.

- 今回は Abel 曲面上の層のモジュライに注目し, FMT によってモジュライ間の双有理写像を構成する.

1-1 Abel 曲面上の安定層

● Abel 曲面 X 上の安定層の分類問題

$E \in \mathrm{Coh}(X)$ に対し向井ベクトルを次で定義

$$v(E) := ch(E) = (\mathrm{rank}(E), c_1(E), \chi(E)) \in H^{ev}(X, \mathbb{Z})_{alg} := H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus NS(X) \oplus H^4(X, \mathbb{Z})$$

○ E が単純 ($\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{End}(E) \cong \mathbb{C}$) なら $\ell := \langle v(E)^2 \rangle /2$ は非負整数. 但し

$$\langle (r, \xi, a), (s, \eta, b) \rangle := (\xi, \eta) - as - rb$$

○ $\ell = 0$ のとき, 楕円曲線での議論の類似が可能. 半等質層と呼ばれるもので分類される.

○ $\ell > 0$ のときは...?

1-2 Abel 曲面上の安定層のモジュライ

- 向井. Invent. Math. (1984)

$\mathbf{H}$: Abel 曲面 $\mathbf{X}$ 上の ample divisor

(1) $\mathbf{M_X^H(v)}$ は非特異. 次元は $\langle \mathbf{v}^2 \rangle + 2 = 2\ell + 2$

(2) $\mathbf{M_X^H(v)}$ は symplectic 多様体

(3) $\mathbf{v}$ が原始的 ($\overset{\text{def}}{\iff}$ 他の Chern 指標 $\mathbf{w}$ の整数倍になっていない)

かつ $\mathbf{H}$ が $\mathbf{v}$ に関し generic なら, $\mathbf{M_X^H(v)}$ は射影的

○ しかし, 空で無いための条件は不明だった.

- 吉岡. Compositio Math. (2003)

(3) の仮定の下, 更に $\mathbf{v} = (\mathbf{r}, \xi, \mathbf{a})$ が正なら, $\mathbf{M_X^H(v)}$ は空ではなくかつ既約

($\mathbf{v}$ が正 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathbf{r} > 0$ or $\mathbf{r} = 0, \xi > 0$ or $\mathbf{r} = 0, \xi = 0, \mathbf{a} > 0$)

1-3 向井の予想

- 向井. RIMS 講究録 409 (1980)

$\mathbf{X}$: 主偏極 Abel 曲面でかつ $\mathbf{NS(X)} \cong \mathbb{Z}\mathbf{H}$

$\mathbf{v} = (\mathbf{r}, \mathbf{dH}, \mathbf{a}) \in \mathbf{H}^{\mathrm{ev}}(\mathbf{X}, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$: 正かつ $\ell := \langle \mathbf{v}^2 \rangle /2 > 0$.

$\mathbf{Q_v(x, y) := -rx^2 + 2dxy - ay^2}$: $\mathbf{v}$ に付随する 2 次形式

<u>予想</u>

$$\mathbf{Q_v} = \pm \mathbf{1} \text{ に整数解がある} \implies \mathbf{M^H_X(v)} \overset{\sim}{\dashrightarrow} \mathbf{X} \times \mathbf{Hilb}^{\ell}(\mathbf{X})$$

- 今回の話：この予想は “主偏極” の仮定を外しても正しい.

2-1 半等質層 (向井. J. Math. Kyoto U. (1978))

<u>定義</u>　$\mathbf{X}$: Abel 曲面, $\mathbf{H}$: ample divisor

$\mathbf{E} \in \mathbf{Coh}(\mathbf{X})$ が半等質 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathbf{H}$-半安定かつ $\langle \mathbf{v}(\mathbf{E})^2 \rangle = \mathbf{0}$.

<u>事実</u>　$\mathbf{E}$: 半等質層

(1) $\forall \mathbf{p} \in \mathbf{X}$, $\exists \mathbf{L} \in \mathbf{Pic}(\mathbf{X})$ s.t. $\mathbf{T_p}^*\mathbf{E} \cong \mathbf{E} \otimes \mathbf{L}$.

(2) $\mathbf{E}$ は任意の ample divisor $\mathbf{H}'$ について $\mathbf{H}'$-半安定.

(3) $\mathbf{E}$ が安定 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{E}$ が単純 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{v}(\mathbf{E})$ が原始的

(4) ベクトル束の場合の構成法

$\exists\, \pi : \widetilde{\mathbf{X}} \to \mathbf{X}$: isogeny, $\exists\, \mathbf{L} \in \mathbf{Pic}(\widetilde{\mathbf{X}})$ s.t. $\mathbf{E} \cong \pi_* \mathbf{L}$.

事実の続き.

(5) $\mathbf{NS(X)} \cong \mathbb{Z}\mathbf{H}$ の時

$$\mathbf{H^i(E,X)} = \mathbf{0} \text{ for } \begin{cases} \mathbf{i} \neq \mathbf{0} & \text{if } \mu(\mathbf{E}) > \mathbf{0} \\ \mathbf{i} \neq \mathbf{2} & \text{if } \mu(\mathbf{E}) \leq \mathbf{0} \end{cases}$$

但し $\mu(\mathbf{E}) := (\mathbf{c_1(E), H}) / \operatorname{rank}(\mathbf{E})$

μ はスロープと呼ばれる

2-2 Abel 曲面上の FMT

事実　(D.Orlov, Izv. Math. 66(2002))

$\mathbf{X}$: Abel 曲面

(1) $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^{\mathrm{ev}}(\mathbf{X}, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$:　原始的, 正 かつ $\langle \mathbf{v}^2 \rangle = \mathbf{0}$ である Chern 指標.

○ $\mathbf{Y} := \mathbf{M}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{H}}(\mathbf{v})$ は Abel 曲面

○ もし普遍族 $\mathcal{E}$ が $\mathbf{Y} \times \mathbf{X}$ 上にあれば, $\mathbf{\Phi}_{\mathcal{E}}^{\mathbf{X} \to \mathbf{Y}} : \mathcal{D}(\mathbf{X}) \to \mathcal{D}(\mathbf{Y})$ は FMT
(普遍族 $\mathcal{E} \in \mathbf{Coh}(\mathbf{Y} \times \mathbf{X})$: $\mathcal{E}|_{\{y\} \times \mathbf{X}}$ は Chern 指標が $\mathbf{v}$ である半等質層.)

(2)　$\mathbf{Y}$: 非特異射影多様体, $\mathbf{\Phi} : \mathcal{D}(\mathbf{X}) \to \mathcal{D}(\mathbf{Y})$: equivalence

○ $\exists \mathbf{v}$: 原始的かつ $\langle \mathbf{v}^2 \rangle = \mathbf{0}$ である Chern 指標 s.t. $\mathbf{Y} \cong \mathbf{M}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{H}}(\mathbf{v})$,

○ $\exists \mathcal{E}$: $\mathbf{Y} \times \mathbf{X}$ 上の普遍族, $\exists \mathbf{k} \in \mathbb{Z}$ s.t.　$\mathbf{\Phi} \cong \mathbf{\Phi}_{\mathcal{E}}^{\mathbf{X} \to \mathbf{Y}}[\mathbf{k}]$.

(Abel 曲面上の FMT の分類)

半等質層のコホモロジー (Page 11) と FMT の分類 (Page 12) から, 次のことが分かる.

命題　(向井 (1980))

$\mathbf{X}$: Abel 曲面, $\mathbf{NS(X)} \cong \mathbb{Z}\mathbf{H}$

$\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$: 半等質安定層,　$\langle \mathbf{v}(\mathbf{E}_1), \mathbf{v}(\mathbf{E}_2)\rangle = -1$

(1) $\mathbf{Y} := \mathbf{M}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{H}}(\mathbf{v}(\mathbf{E}_1))$ として, 普遍族 $\mathcal{E}$ が $\mathbf{Y} \times \mathbf{X}$ 上に存在する

(2) $\mathbf{\Phi} := \mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}\to\mathbf{Y}}_{\mathcal{E}^\vee}$ として　$(\mathcal{E}^\vee := \mathbb{R}\mathcal{H}\mathbf{om}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathbf{Y}\times\mathbf{X}}))$

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{E}_1) \cong \mathbb{C}_{\mathbf{y}}[-2], \quad \mathbf{\Phi}(\mathbf{E}_2) \cong \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}[-\mathbf{i}_0]$$

$$\text{但し } \mathbf{i}_0 := \begin{cases} 0 & \mu(\mathbf{E}_1) > \mu(\mathbf{E}_2) \\ 2 & \mu(\mathbf{E}_1) \leq \mu(\mathbf{E}_2) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ 半等質層は FMT で層にうつる

2-3 半等質表示

定義

層 F の半等質表示

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & 0 & \to & \mathsf{F} & \to & \mathsf{E}_1 & \to & \mathsf{E}_2 & \to & 0 & (\text{Kernel 表示}) \\
\text{or} & 0 & \to & \mathsf{E}_1 & \to & \mathsf{E}_2 & \to & \mathsf{F} & \to & 0 & (\text{Cokernel 表示})
\end{array}
$$

但し E_1 と E_2 は半等質層で次の条件を満たすもの

$\mathsf{ch}(\mathsf{E}_i) = \ell_i \mathsf{v}_i$, $\ell_i \in \mathbb{Z}$, v_i: 原始的 Chern 指標　と表した時に

$$\langle \mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2 \rangle = -1, \quad (\ell_1 - 1)(\ell_2 - 1) = 0$$

注意

最初の条件の意味：普遍族の存在

2 番目の条件の意味：E_1 か E_2 が安定

2-4 半等質表示の効用

● 安定層 $\mathbf{F}$ に半等質表示

$$\mathbf{0} \;\to\; \mathbf{F} \;\to\; \mathbf{E}_1 \;\to\; \mathbf{E}_2 \;\to\; \mathbf{0}$$

が存在したと仮定. さらに $\mathbf{v}(\mathbf{E}_1) = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}(\mathbf{E}_2) = \ell \mathbf{v}_2$ だとする.

○ 仮定 $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = -1$ から $\mathbf{M}^{\mathbf{H}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{v}_2) \times \mathbf{X}$ 上に普遍族 $\mathcal{E}$ があって, $\mathcal{E}|_{\{\mathbf{y}\}\times\mathbf{X}}$ は Chern 指標が $\mathbf{v}_2$ である半等質層.

○ $\mathbf{Y} := \mathbf{M}^{\mathbf{H}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{v}_2)$ とおく. FMT $\mathbf{\Phi} := \mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}\to\mathbf{Y}}_{\mathcal{E}^\vee}$ によって以下の完全列を得る.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
0 & \to & \Phi^0(F) & \to & 0 & \to & 0 & & \\
 & \to & \Phi^1(F) & \to & 0 & \to & 0 & & \\
 & \to & \Phi^2(F) & \to & \Phi^2(E_1) & \to & \Phi^2(E_2) & \to 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & 0 & \to & 0 & \to & 0 & & \\
 & \to & 0 & \to & 0 & \to & 0 & & \\
 & \to & \Phi^2(F) & \to & \mathcal{O}_Y & \to & \mathcal{O}_Z & \to 0
\end{array}
$$

ここで Z は Y の finite subscheme.
よって $\Phi(F)$ は finite subscheme のイデアル層と up to shift で同型.
○ 半等質表示があれば, モジュライと Hilbert スキームの間に写像がつくれる

3-1 数値的判定法

- 仮定：数値的な条件のみで記述される.

○ $\mathbf{NS(X)} \cong \mathbb{Z}\mathbf{H}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{H^{ev}(X,\mathbb{Z})_{alg}}$ は正.

○ $\mathbf{v}$ に関する次の不定方程式に解が存在.

$$\begin{aligned} &\mathbf{v} = \pm(\mathbf{v_1} - \ell \mathbf{v_2}), \quad \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in \mathbf{H^{ev}(X,\mathbb{Z})_{alg}}, \ \ell \in \mathbb{Z}_{>0} \\ &\langle \mathbf{v_1^2} \rangle = \langle \mathbf{v_2^2} \rangle = \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \rangle = -\mathbf{1} \end{aligned} \tag{\#}$$

- 結論：

(1) (#) が 2 つ以上の解をもつ $\Longrightarrow$ $\mathbf{M_X^H(v)}$ の一般の元は 2 つの半等質表示を持つ

(2) (#) が 1 つのみ解をもつ $\Longrightarrow$ $\mathbf{M_X^H(v)}$ の一般の元は 1 つのみ半等質表示を持つ

3-2 コホモロジー的 FMT

- $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$: Abel 曲面, $\boldsymbol{\Phi} : \mathcal{D}(\mathbf{X}) \to \mathcal{D}(\mathbf{Y})$: FMT

$\boldsymbol{\Phi}$ は cohomology の同型 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{H}}$ (コホモロジー的 FMT) を誘導する.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}(\mathbf{X}) & \xrightarrow[\sim]{\boldsymbol{\Phi}} & \mathcal{D}(\mathbf{Y}) \\
{\scriptstyle \mathbf{ch}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{ch}} \\
\mathbf{H}^{\mathbf{ev}}(\mathbf{X}, \mathbb{Q}) & \xrightarrow[\sim]{\boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{H}}} & \mathbf{H}^{\mathbf{ev}}(\mathbf{Y}, \mathbb{Q}) \\
\bigcup & & \bigcup \\
\mathbf{H}^{\mathbf{ev}}(\mathbf{X}, \mathbb{Z})_{\mathbf{alg}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{H}^{\mathbf{ev}}(\mathbf{Y}, \mathbb{Z})_{\mathbf{alg}}
\end{array}$$

○ $\boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{H}}$ は $\langle \cdot, \cdot \rangle$ について isometry になる: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \left\langle \boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{H}}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{H}}(\mathbf{w}) \right\rangle$

3-3 行列表示

- $\mathcal{D}(X) \cong \mathcal{D}(Y)$ なら $NS(X) \cong NS(Y)$.

$NS(X) = \mathbb{Z}H$ なら, コホモロジー的 FMT は 3 次行列で表示できる.

- 実際には, 2 次行列を用いたより経済的な表示がある.

-

$$\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B(X_1, X_2) = 2y_1y_2 - x_1z_2 - x_2z_1, \quad X_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ y_i & z_i \end{bmatrix} \in \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$$

として次の Lattice の同型がある. $(n := (H^2)/2)$

$$\begin{array}{rccc} \iota_X : & (H^{ev}(X, \mathbb{Z})_{alg}, \langle\cdot,\cdot\rangle) & \xrightarrow{\sim} & (\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R}), B) \\ & (r, dH, a) & \mapsto & \begin{bmatrix} r & d\sqrt{n} \\ d\sqrt{n} & a \end{bmatrix} \end{array}$$

- X への FMT 全体の集合を以下のように定める.

$$\mathcal{F}(X) := \bigcup_{Y \in FM(X)} \{\Phi^{Y \to X}_{\mathcal{E}[2k]} \in \mathrm{Eq}(Y, X) \mid k \in \mathbb{Z},\ \mathcal{E} \in \mathrm{Coh}(Y \times X)\}$$

$$FM(X) := \{Y : \text{ 非特異射影多様体 } \mid \mathcal{D}(Y) \cong \mathcal{D}(X)\}/\sim$$

$$\mathrm{Eq}(Y, X) := \{f : \mathcal{D}(Y) \to \mathcal{D}(X) \mid \text{ 圏同値 }\}/\sim$$

- コホモロジー的 FMT は $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関して isometry だったから, 次のような写像が定義できる.

$$\begin{array}{cccc} \theta_X : & \mathcal{F}(X) & \to & O(B) \\ & \Phi & \mapsto & \iota_X \circ \Phi^H \circ \iota_Y^{-1} \end{array}$$

ここで $O(B)$ は $(\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R}), B)$ の等長変換群.

3-4 算術群 G

<u>定理</u>　コホモロジー的 FMT のなす集合 $\mathrm{Im}\,\theta_X$ は, 次の群と同型.

$$\mathrm{Im}\,\theta_X \cong G/\{\pm 1\} \subset PSL(2,\mathbb{R})$$

但し

$$G := \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \;\middle|\; x^2, y^2, z^2, w^2, \frac{xy}{\sqrt{n}}, \frac{zw}{\sqrt{n}} \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(n := (H^2)/2)$$

- 関連する行列群をいくつか用意する.

$$O(2,1) := \left\{ A \in GL(3,\mathbb{R}) \mid A^{-1} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$SO(2,1) := O(2,1) \cap SL(3,\mathbb{R})$$

$SO_0(2,1) :=$ 単位行列を含む $SO(2,1)$ の連結成分

$\mathbf{G}$ とこれらの行列群は以下の可換図式で関係づけられる.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(\mathbf{X}) \arrow[r, "\theta_{\mathbf{X}}"] & \mathrm{Im}\,\theta_{\mathbf{X}} \arrow[r, "\text{incl.}"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathbf{O}(\mathbf{B}) \arrow[r, "\sim"] & \mathbf{O}(2,1) \\
 & \mathbf{G}/\{\pm 1\} \arrow[r, "\text{incl.}"] & \mathbf{PSL}(2,\mathbb{R}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, "\text{inj.}"'] & \mathbf{SO}_0(2,1) \arrow[u, "\text{incl.}"'] \\
 & \mathbf{G} \arrow[r, "\text{incl.}"'] \arrow[u, "\text{surj.}", "2:1"'] & \mathbf{SL}(2,\mathbb{R}) \arrow[u, "\text{surj.}", "2:1"'] &
\end{tikzcd}
$$

注意　特に $\mathrm{Im}\,\theta_{\mathbf{X}} \hookrightarrow \mathbf{SO}(2,1)$ で, 行列式は正.

これは FMT の orientation の問題と関係する.

実は $\mathbf{NS}(\mathbf{X}) \cong \mathbb{Z}\mathbf{H}$ を仮定しなくても, 一般の Abel 曲面について類似の性質が成立する.

更に K3 曲面についても orientation に関する主張が成立する.

● 準同型 ϕ

○ $p_1, p_2, \dots, p_N$ を $n := (H^2)/2$ の素因数 (重複なし) とする.

写像 $\widetilde{\phi}_i : \mathbb{Z} \to \{0,1\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $(i = 1, 2, \dots, N)$ を

$$\widetilde{\phi}_i(m) = \mathrm{ord}_{p_i}(m) \mod 2$$

で定義. そして次の式で写像 $\widetilde{\phi}$ を定義する.

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\phi}: & \mathbb{Z} & \to & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus N} \\ & m & \mapsto & (\widetilde{\phi}_1(m), \widetilde{\phi}_2(m), \dots, \widetilde{\phi}_N(m)). \end{array}$$

○ G の元 g に対し, $adr - bcs = \pm 1$ かつ $rs = n$ なる整数 a, b, c, d 及び自然数 r, s が次の様にして一意に決まる.

$$G \ni g = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\sqrt{r} & b\sqrt{s} \\ c\sqrt{s} & d\sqrt{r} \end{bmatrix}.$$

○ $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ に対し一意に決まる自然数 $\mathbf{r}$ を用いて $\phi(\mathbf{g}) := \widetilde{\phi}(\mathbf{r})$ と定義.
すると $\phi : \mathbf{G} \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus \mathbf{N}}$ は群準同型になる.

命題　群 G の構造定理

○ ϕ は全射.

○ $\mathbf{g} := \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{n}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ とすると

$$\mathbf{g}^{-1}(\ker\phi)\mathbf{g} \cong \Gamma_0(\mathbf{n}), \quad \mathbf{g}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{g} \subseteq \mathrm{Norm}(\mathbf{n}).$$

但し $\Gamma_0(\mathbf{n}) := \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \mid \mathbf{c} \equiv \mathbf{0} \pmod{\mathbf{n}} \right\}$,

$\mathrm{Norm}(\mathbf{n})$: $\Gamma_0(\mathbf{n})$ の $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ における正規化群.

- Atkin-Lehner 群との関連

Norm(n) は Atkin-Lehner 群と呼ばれ, modular 関数の Hecke 作用素の研究で重要な働きをする.

G は **Norm(n)** に近いが, 一般には異なる. 群 **AL(n)** を次で定義する.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{1} & \longrightarrow & \Gamma_0(\mathbf{n}) & \longrightarrow & \mathbf{Norm(n)} & \longrightarrow & \mathbf{AL(n)} & \longrightarrow & \mathbf{1} \\
 & & \uparrow \wr & & \uparrow \text{inj.} & & & & \\
\mathbf{1} & \longrightarrow & \ker\phi & \longrightarrow & \mathbf{G} & \xrightarrow{\phi} & (\mathbb{Z}/\mathbf{2}\mathbb{Z})^{\oplus \mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{1}
\end{array}
$$

$$
\mathbf{AL(n)} \cong \mathbf{G_2(n)} \times \mathbf{G_3(n)} \times \prod_{\text{p:5 以上の n の素因数}} (\mathbb{Z}/\mathbf{2}\mathbb{Z})
$$

ここで $\mathbf{G_2(n)}$ と $\mathbf{G_3(n)}$ は有限群で, 一般には $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ではない.

しかし, **n** の素因数に 2,3 が含まれなければ $\mathbf{G} \cong \mathbf{Norm(n)}$.

4-1 双有理写像と不定方程式

• 引き続き $\mathrm{NS}(X) \cong \mathbb{Z}H$, $n := (H^2)/2$ とする.

$v = (r, dH, a) \in H^{ev}(X, \mathbb{Z})_{alg}$ は $\ell := \langle v^2 \rangle /2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ を満たすとする.

v に付随する 2 次形式を次のように定義する.

$$Q_v(x, y) := -rx^2 + 2dxy\sqrt{n} - aq^2$$

<u>定理</u>　次の不定方程式に $p_1^2, p_1q_1, q_1^2 \in \mathbb{Z}$ なる解があるとする.

$$Q_v(q_1, -p_1) = \pm 1$$

○ $|p_1|$ が最小の解をとる. すると G の元 $g := \begin{bmatrix} q_1 & -q_2 \\ -p_1 & p_2 \end{bmatrix}$ について,

$\theta_X(\Phi) = \pm g$ なる FMT Φ をとれば, Φ または $\Phi \circ \mathcal{D}_X$ が次の双有理写像を与える. ($\mathcal{D}_X(?) := \mathbb{R}\mathcal{H}om(?, \mathcal{O}_X)$, $Y := M_X^H(p_1^2, \frac{p_1q_1}{\sqrt{n}}, q_1^2)$)

$$M_X^H(v) \overset{\sim}{\dashrightarrow} M_Y^{\widehat{H}}(1, 0, -\ell) \cong \mathrm{Pic}^0 Y \times \mathrm{Hilb}^{\ell}(Y)$$

4-2 主偏極の場合 (向井の予想)

定義

○ 2 つの $\mathbb{Z}$ 係数 2 次形式 $ax^2+2bxy+cy^2$ と $a'x^2+2b'xy+c'y^2$ が同値
$\overset{\text{def}}{\iff}$ $A\in GL(2,\mathbb{Z})$ があって ${}^tA\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}a' & b'\\ b' & c'\end{bmatrix}$

○ $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ の判別式 $\det f:=b^2-ac$

○ 判別式が D である 2 次形式の類数 := 2 次形式の同値類の数.

系　$NS(X)\cong\mathbb{Z}H$, $X\cong \mathrm{Pic}^0(X)$($\iff$ $n=1$) と仮定する.

この時 $G\cong SL(2,\mathbb{Z})$, $FM(X)=\{X\}$.

判別式が ℓ の 2 次形式の類数が 1 なら, FMT Φ が存在して双有理写像
$M_X^H(v)\overset{\sim}{\dashrightarrow} X\times \mathrm{Hilb}^{\ell}(X)$ を引き起こす.

注意　$n=1$ の時の Q_v の分類と $M_X^H(v)$ の双有理同値類 $(\ell \leq 10)$

ℓ	Q_v の同値類	双有理同値類
2,3,4,6,7,8	$x^2-\ell y^2$	$X \times \mathrm{Hilb}^{\ell}(X)$
1	$2xy$, x^2-y^2	$X \times \mathrm{Hilb}^1(X) \cong X \times X$
5	x^2-5y^2	$X \times \mathrm{Hilb}^5(X)$
	$2x^2+2xy-2y^2$	$M_X^H(2,H,-2)$
9	x^2-9y^2	$X \times \mathrm{Hilb}^9(X)$
	$2x^2+2xy-4y^2$	$M_X^H(2,H,-4)$
10	x^2-10y^2	$X \times \mathrm{Hilb}^{10}(X)$
	$3x^2+2xy-3y^2$	$M_X^H(3,H,-3)$

4-3 関連する結果, 今後

- 未解決問題：(向井の予想 2)　$\mathbf{NS(X)} \cong \mathbb{Z}\mathbf{H}$ かつ $\mathbf{X} \cong \mathbf{Pic^0(X)}$ なら

$(2\ell+2)$-次元の安定層のモジュライの双有理同値類の数
$\stackrel{?}{=}$ 判別式が ℓ の 2 次形式の類数.

○ $2 \le \ell \le 10$ なら成立.

- $\mathbf{NS(X)} \cong \mathbb{Z}\mathbf{H}$ かつ $\mathbf{X} \cong \mathbf{Pic^0(X)}$ なら 8 次元以下のモジュライは $\mathbf{Pic^0(X)} \times \mathbf{Hilb^{\ell}(X)}$ と同型.

- $\mathbf{NS(X)} \cong \mathbb{Z}\mathbf{H}$ でなくても,

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -1$ かつ $\langle \mathbf{u}^2 \rangle = 0$ なる Chern 指標 $\mathbf{u}$ があれば

$\mathbf{M_X^H(v)}$ は $\mathbf{X} \times \mathbf{Hilb^{\ell}(X)}$ と双有理同値.

○ 但し, 双有理写像の具体的構成は不明.