On AGT conjectures

柳田伸太郎　(神戸大)

名古屋大学 代数幾何セミナー
2010 年 6 月 21 日

概要

AGT 予想とは?

**L. F. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa,
"Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories",
Lett. Math. Phys. 91 (2010), arXiv:0906.3219.**

物理的には次の事を主張している:

$$4\text{次元 } \mathcal{N} = 2 \ \mathrm{U}(2) \ \text{SYM 理論} \stackrel{?}{=} (2\text{次元})\ \text{Liouville 場の理論}$$

今日の話では, そのうち数学的に formulate するのが簡単な

ランク 2 の Nekrasov 分配函数 (代数幾何学的/組み合わせ論的対象)
||?
共形場理論のある相関関数 (Virasoro 代数の表現論の対象)

という場合を中心にお話しします.

目次

§1. Nekrasov 分配函数

§2. Virasoro 代数

§3. Gaiotto の予想 (AGT 予想の pure gauge 版)

§4. Virasoro の表現論から考えると...

§5. 対称函数の組み合わせ論の立場から見ると...

§6. K 理論版

§1. Nekrasov 分配函数

Nakajima-Yoshioka, Invent. math. 162 (2005),
Nekrasov, Adv. Theor. Math. Phys. 7 (2003)

§§1.1. 幾何学的定義

- M(r,n) : $\mathbb{P}^2$ 上のランク r, $c_2 = n$ の枠付き torsion free 層のモジュライ
- ADHM description :

$$\mathbf{M}(r,n) = \left\{ (B_1, B_2, j, k) \;\middle|\; \begin{array}{c} B_1, B_2 \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n), \\ j \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^n), \quad \text{s.t. } (1)\&(2) \\ k \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^r) \end{array} \right\} \Big/ GL_n(\mathbb{C})$$

(1)$[B_1, B_2] + jk = 0$

(2)$B_i(S) \subset S$ かつ $\mathrm{Im} j \subset S$ なる真部分空間 $S \subset \mathbb{C}^n$ は存在しない.

- $G := \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^{r-1}$ の作用 ($\mathbb{T} := \mathbb{C}^\times$):

$$(B_1, B_2, j, k) \mapsto (t_1 B_1, t_2 B_2, js^{-1}, t_1 t_2 sk)$$

$$t_i \in \mathbb{T}, \quad s = (s_\alpha)_{\alpha=1}^r \in \mathbb{T}^r, \quad \prod_\alpha s_\alpha = 1$$

- ”4-dim U(r) pure gauge theory”の分配函数

$$
\begin{aligned}
Z^{\mathcal{N}_f=0,\mathrm{inst}}_{\mathrm{rank}=r}(x;\epsilon_1,\epsilon_2,\vec{a}) &= Z(x;\epsilon_1,\epsilon_2,\vec{a}) \\
&:= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_{M(r,n)} 1 \qquad (1 \in H^*_G(M(r,n))) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \lim_{\hbar\to 0} \hbar^{2nr} \sum_{i=0}^{2nr} (-1)^i \mathrm{ch}[H^i(M(r,n),\mathcal{O})]\Big|_{\substack{t_1=e^{-\hbar\epsilon_1}\\ t_2=e^{-\hbar\epsilon_2}\\ s_\alpha=e^{-\hbar a_\alpha}}}
\end{aligned}
$$

- G 同変コホモロジーの局所化定理により, これは組み合わせ論的な表示を持つ. 実は G の作用に関する固定点が r 個の分割の組でパラメトライズ出来ることが分かるので, 分配函数は次の形をもつ.

$$
Z(x;\epsilon_1,\epsilon_2,\vec{a}) = \sum_{\vec{Y}} \frac{x^{|\vec{Y}|}}{e(T_{\vec{Y}})}
$$

ここで $\vec{Y} = (Y_1,\ldots,Y_r)$: r 個の分割, $|\vec{Y}| := |Y_1| + \cdots + |Y_r|$.

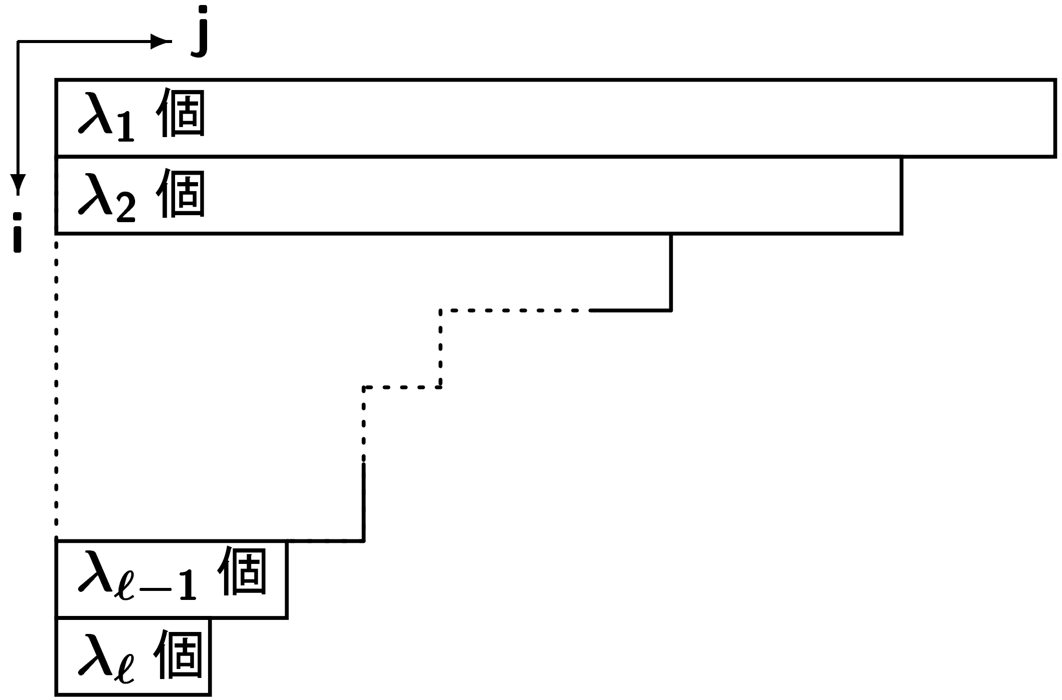
§§1.2. 分割, Young 図形

- 分割 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$: 非増加自然数列 $(\lambda_1 \geq \cdots \lambda_\ell \geq 1)$ もしくは空数列 $\emptyset = () = (0)$ のこと.

$|\lambda| := \lambda_1 + \cdots + \lambda_\ell$: 箱の総数,　$\ell(\lambda) := \ell$: 長さ

$\lambda \vdash n \overset{\text{def}}{\iff} \lambda$ は分割で $|\lambda| = n$.

- 分割 λ の Young 図形:



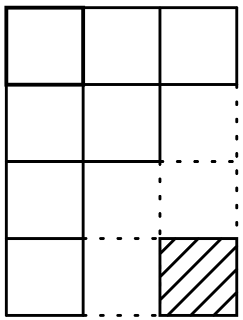
- (relative) arm と leg

λ : 分割, $\square = (i,j)$: 箱

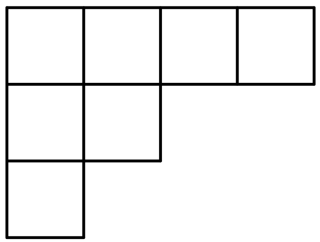
$$a_\lambda(\square) := \lambda_i - j : \mathrm{arm}, \quad \ell_\lambda(\square) := \lambda^\vee_j - i : \mathrm{leg}$$

但し $\lambda^\vee$ は λ の転置, $\quad \lambda_i := \begin{cases} \lambda_i & (i \leq \ell(\lambda)) \\ 0 & (i > \ell(\lambda)) \end{cases}$

<u>E.g.</u> $\lambda = (3,2,1,1) \quad \lambda^\vee = (4,2,1)$



$(3,2,1,1)$



$(4,2,1)$

$\square = (1,1) \quad a_\lambda(\square) = \lambda_1 - 1 = 3 - 1 = 2$ $a_\lambda(\square) = \lambda_1 - 1 = 2, \quad \ell_\lambda(\square)$ $= \lambda^\vee_1 - 1 = 4 - 1 = 3$ $\ell_\lambda(\square) = \lambda^\vee_1 - 1 = 3$

$\blacksquare = (4,3) \quad a_\lambda(\blacksquare) = \lambda_4 - 3 = -2, \quad \ell_\lambda(\blacksquare) = \lambda^\vee_3 - 4 = -3$

§§1.3 組み合わせ論的定義

- $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$: ランク， $x, \epsilon_1, \epsilon_2, \vec{a} = (a_1, \ldots, a_r)$: 不定元

$$Z(x; \epsilon_1, \epsilon_2, \vec{a}) = \sum_{\vec{Y}} \frac{x^{|\vec{Y}|}}{\prod_{1 \leq \alpha, \beta \leq r} n^{\vec{Y}}_{\alpha,\beta}(\epsilon_1, \epsilon_2, \vec{a})}$$

$\vec{Y} = (Y_1, \ldots, Y_r)$: r 組の分割, $\quad |\vec{Y}| := |Y_1| + \cdots + |Y_r|$,

$$n^{\vec{Y}}_{\alpha,\beta}(\epsilon_1, \epsilon_2, \vec{a}) := \prod_{\square \in Y_\alpha} [-\ell_{Y_\beta}(\square)\epsilon_1 + (a_{Y_\alpha}(\square) + 1)\epsilon_2 + a_\beta - a_\alpha]$$
$$\times \prod_{\blacksquare \in Y_\beta} [(\ell_{Y_\alpha}(\blacksquare) + 1)\epsilon_1 - a_{Y_\beta}(\blacksquare)\epsilon_2 + a_\beta - a_\alpha].$$

- 以下次のように略記する.

$$Z_{\vec{Y}}(\epsilon_1, \epsilon_2, \vec{a}) := \Big[\prod_{1 \le \alpha,\beta \le r} n^{\vec{Y}}_{\alpha,\beta}(\epsilon_1, \epsilon_2, \vec{a})\Big]^{-1},$$

$$Z_n(\epsilon_1, \epsilon_2, \vec{a}) := \sum_{|\vec{Y}|=n} Z_{\vec{Y}}(\epsilon_1, \epsilon_2, \vec{a})$$

<u>E.g.</u> $r = 1:$ $\qquad Z_Y = \dfrac{1}{n^Y_{11}(\epsilon_1, \epsilon_2)}$

$$n^Y_{11} = \prod_{\square \in Y}[-\ell_Y(\square)\epsilon_1 + (a_Y(\square) + 1)\epsilon_2][(\ell_Y(\square) + 1)\epsilon_1 - a_Y(\square)\epsilon_2]$$

$$Z_0 = Z_{(\emptyset)} = 1, \qquad Z_1 = Z_{(1)} = \frac{1}{\epsilon_1\epsilon_2}$$

$$Z_2 = Z_{(2)} + Z_{(1,1)} = \frac{1}{2\epsilon_2(\epsilon_1 - \epsilon_2)\epsilon_2\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2\epsilon_1(\epsilon_2 - \epsilon_1)2\epsilon_1} = \frac{1}{2\epsilon_1^2\epsilon_2^2}$$

$$Z_3 = Z_{(3)} + Z_{(2,1)} + Z_{(1,1,1)} = \cdots = \frac{1}{6\epsilon_1^3\epsilon_2^3}$$

- 実は $r = 1$ の時は

$$Z_{r=1}(x;\epsilon_1,\epsilon_2) = \sum_{n=0} x^n Z_n(\epsilon_1,\epsilon_2) = \exp(\frac{x}{\epsilon_1\epsilon_2})$$

E.g. 2. $r = 2$

$Z_1 = Z_{(1),\emptyset} + Z_{\emptyset,(1)}$

$$= \frac{1}{\epsilon_1\epsilon_2(a_1 - a_2)(\epsilon_1 + \epsilon_2 + a_2 - a_1)} + \frac{1}{(\epsilon_1 + \epsilon_2 + a_1 - a_2)(a_2 - a_1)\epsilon_2\epsilon_1}$$

$Z_2 = Z_{(2),\emptyset} + Z_{(1,1),\emptyset} + Z_{(1),(1)} + Z_{\emptyset,(1,1)} + Z_{\emptyset,(2)}$

$r = 1$ の時と違い, Z の”分かり易い表示”はなさそう...

§§1.2. Nakajima-Yoshioka の爆発公式

- Z は ϵ_1, ϵ_2 についての双線形方程式を満たす.
- $\gamma_{\epsilon_1,\epsilon_2}(\xi, x) := \frac{d}{du}\Big|_{u=0} \frac{x^u}{\Gamma(u)} \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^u \frac{e^{-t\xi}}{(e^{\epsilon_1 t} - 1)(e^{\epsilon_2 t} - 1)}$

$$\widetilde{Z}(x; \epsilon_1, \epsilon_2, \vec{a}) := \exp[-\sum_{1\leq\alpha\neq\beta\leq r} \gamma_{\epsilon_1,\epsilon_2}(a_\alpha - a_\beta; x)] Z(x; \epsilon_1, \epsilon_2, \vec{a})$$

$(D_x^{(\epsilon_1,\epsilon_2)})^m(f, g) := \left(\frac{d}{dy}\right)^m f(x + \epsilon_1 y) g(x + \epsilon_2 y)\Big|_{y=0}$ として

$$\sum_{\vec{k}} [D_{\log x}^{(\epsilon_1,\epsilon_2)} - \frac{1}{12}(\epsilon_1 + \epsilon_2)(r - 1)]^d$$
$$(\widetilde{Z}(x; \epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1, \vec{a} + \epsilon_1 \vec{k}), \widetilde{Z}(x; \epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2, \vec{a} + \epsilon_2 \vec{k}))$$
$$= \begin{cases} 0 & 1 \leq d \leq 2r - 1 \\ \widetilde{Z}(x; \epsilon_1, \epsilon_2, \vec{a}) & d = 0 \end{cases}$$

但し $\overrightarrow{k}$ は $\{\overrightarrow{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}^r \mid \sum_{\alpha=1}^{r} k_\alpha = 0\}$ を走る.

- 上の方程式系を爆発公式 (blow-up formula) という.
- 証明は blowup した $\widehat{\mathbb{P}}^2$ 上でのモジュライの記述を用いる.
- 爆発公式は Z を一意に決定する方程式系である ($d = 1, 2$ の 2 本の式から Z_n に関する漸化式が導かれる).
- 爆発公式は Nekrasov 予想の解決に用いられた.

§2. Virasoro 代数

§§2.1 定義

• $\mathbf{Vir_c}$: 中心拡大された Lie 代数

$\mathbf{c} \in \mathbb{C}$: central charge,

生成元 : $\mathbf{L_n}$ $(\mathbf{n} \in \mathbb{Z})$

関係式 : $[\mathbf{L_n}, \mathbf{L_m}] = (\mathbf{n}-\mathbf{m})\mathbf{L_{n+m}} + \dfrac{1}{12}\mathbf{cn}(\mathbf{n}^2 - 1)\delta_{\mathbf{n+m},0}$

• 三角分解 : $\mathbf{Vir_c} = \mathbf{Vir_{c,+}} \oplus \mathbf{Vir_{c,0}} \oplus \mathbf{Vir_{c,-}}$

$$\mathbf{Vir_{c,\pm}} := \oplus_{\pm \mathbf{n} \in \mathbb{Z}_{>0}} \mathbb{C}\mathbf{L_n}, \quad \mathbf{Vir_{c,0}} := \mathbb{C}\mathbf{L_0} \oplus \mathbb{C}$$

• $\mathcal{U}(\mathbf{Vir_c})$ の PBW 基底 : $\{\mathbf{L}_{-\lambda}\mathbf{L}_0^{\mathbf{n}}\mathbf{L}_{\mu} \mid \mathbf{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \lambda, \mu : \text{分割}\}$

但し分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ に対し $\mathbf{L}_\lambda := \mathbf{L}_{\lambda_\ell} \cdots \mathbf{L}_{\lambda_1}$, $\mathbf{L}_{-\lambda} := \mathbf{L}_{-\lambda_1} \cdots \mathbf{L}_{-\lambda_\ell}$

§§2.2 Verma 加群 M_h

$h \in \mathbb{C}$: highest weight

$\mathbb{C}_h := \mathbb{C}|h\rangle$: 1 次元 $(\mathrm{Vir}_{c,+} \oplus \mathrm{Vir}_{c,0})$ 表現

$L_n |h\rangle = 0 \ (n > 0), \quad L_0 |h\rangle = h |h\rangle$

$M_h := \mathrm{Ind}_{\mathrm{Vir}_{c,+} \oplus \mathrm{Vir}_{c,0}}^{\mathrm{Vir}_c} \mathbb{C}_h$

weight 分解 : $M_h = \oplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} M_{h,n}, \quad M_{h,n} := \{v \in M_h \mid L_0 v = (h+n)v\}$

$M_{h,n}$ の基底 : $\{L_{-\lambda} |h\rangle \mid \lambda \vdash n\}$

<u>双対 Verma 加群</u> M_h^*

$M_h^* := \mathrm{Ind}_{\mathrm{Vir}_{c,-} \oplus \mathrm{Vir}_{c,0}}^{\mathrm{Vir}_c} \mathbb{C}_h^*$

$\mathbb{C}_h^* := \mathbb{C}\langle h|$: 1 次元 $(\mathrm{Vir}_{c,-} \oplus \mathrm{Vir}_{c,0})$ 表現

$\langle h| L_n = 0 \ (n < 0), \quad \langle h| L_0 = h \langle h|$

weight 分解 : $M_h^* = \oplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} M_{h,n}^*, \quad M_{h,n}^* := \{v \in M_h^* \mid v L_0 = (h-n)v\}$

$M_{h,n}^*$ の基底 : $\{\langle h| L_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$

§§2.3 Shapovalov form

- $\cdot : M_h^* \times M_h \to \mathbb{C}$: bilinear form

$$\langle h|\cdot|h\rangle = 1,\ \langle h|\,L_\lambda \cdot L_{-\mu}\,|h\rangle = \sum_{\nu_1,\nu_2,n} \delta_{\nu_1,\emptyset}\delta_{\nu_2,\emptyset} c_{\nu_1,\nu_2,n} h^n$$

$$\Big(L_\lambda L_{-\mu} \overset{\text{PBW}}{=} \sum_{\substack{\nu_1,\nu_2:\text{分割}\\ n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}} c_{\nu_1,\nu_2,n} L_{-\nu_1} L_0^n L_{\nu_2}\Big)$$

- この時 $uL_n \cdot v = u \cdot L_n v \quad (u \in M_h^*,\ v \in M_h)$

そこで $\langle h|\,L_\lambda L_{-\mu}\,|h\rangle := \langle h|\,L_\lambda \cdot L_{-\mu}\,|h\rangle$, $uv := u \cdot v$ 等と略記する.

- $\langle h|\,L_\lambda L_{-\mu}\,|h\rangle = 0$ unless $|\lambda| = |\mu|$
- $\langle h|\,L_\lambda L_{-\mu}\,|h\rangle = \langle h|\,L_{-\mu} L_\lambda\,|h\rangle$.

§§2.4. Kac determinant

- $K_n := (\langle h| L_\lambda L_{-\mu} |h\rangle)_{\lambda,\mu\vdash n}$ とすると

$$\det K_n = \prod_{\substack{r,s\in\mathbb{Z}_{\geq 1}\\ 1\leq rs\leq n}} (h - h_{r,s})^{p(n-rs)}$$

但し $p(m) := \#\{\lambda \mid \lambda\vdash m\}$,

$$h_{r,s} := \frac{1}{48}[(13-c)(r^2+s^2) - 24rs - 2(1-c) + \sqrt{(1-c)(25-c)}(r^2-s^2)]$$

証明には自由場表示を用いる. (Feigin-Fuchs, 1980's.)

- **Single pole phenomena** [K. Brown, J. Algebra (2003)]

K_n^{-1} の各成分は h について高々1 位の極しかもたない.

注意　Shapovalov form の逆行列に関する同様の現象は, 有限次元 Lie 環に関しても成立する. (Ostapenko, J. Algebra 147 (1992))

§3. Gaiotto の予想

• AGT の元々の予想は共形場理論の conformal block ($\mathbb{P}^1$ 上の 4 点相関関数, 及びトーラス上の 1 点関数) が Nekrasov 分配函数 ($\mathcal{N}_f = 4$ 及び adjoint matter) に一致することを予想した. ここでは 4 点相関関数に関する主張の退化版の 1 つを紹介する.

Gaiotto arXiv:0908.0307

§§3.1 Gaiotto state

• $\Lambda \in \mathbb{C}$ fix.

Gaiotto state $|G\rangle \in M_h$ とは, 次の条件を満たす元の事をいう.

$$L_1 |G\rangle = \Lambda^2 |G\rangle,\ L_n |G\rangle = 0\ (n \geq 2),\ |G\rangle = |h\rangle + \cdots$$

• 双対 Gaiotto state $\langle G| \in M_h^*$ も同様に, 次の条件を満たすものの事をいう.

$$\langle G| L_{-1} = \Lambda^2 \langle G|,\ \langle G| L_{-n} = 0\ (n \geq 2),\ \langle G| = \langle h| + \cdots$$

- $|G\rangle$ は Virasoro 代数の Whittaker ベクトルとみなせる.

- Whittaker ベクトルとは?　　(Kostant, Invent. Math. 48 (1978))

$\mathfrak{g}$: 有限次元 Lie 環,　$\mathfrak{n}$: $\mathfrak{g}$ の極大冪零部分 Lie 環

$\eta : \mathfrak{n} \to \mathbb{C}$: Lie 環の準同型 (central character)

V : $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 加群

$w \in V$ が η に関する Whittaker ベクトル

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \text{ 任意の } x \in \mathfrak{n} \text{ に対し } xw = \eta(x)w$$

- Virasoro の場合は, $\mathfrak{g}$ を Vir_c に, $\mathfrak{n}$ を $Vir_{c,+}$ に置き換えればよい.

η は L_1 と L_2 の行き先できまる.

Gaiotto state は $\eta(L_1) = \Lambda^2$, $\eta(L_2) = 0$ で定まる η に対する Whittaker ベクトル

§§3.2 pure Gauge 分配函数に対する Gaiotto の予想

予想

$$\langle G \mid G \rangle \overset{?}{=} Z_{r=2}(x; \epsilon_1, \epsilon_2, \vec{a})$$

但し

Virasoro	Nekrasov
c	$13 + 6(\epsilon_1/\epsilon_2 + \epsilon_2/\epsilon_1)$
h	$(\epsilon_1/\epsilon_2 + \epsilon_2/\epsilon_1 + 2)/4 - (a_2 - a_1)^2/\epsilon_1\epsilon_2$
Λ	$x^{1/4}/(\epsilon_1\epsilon_2)$

言い換え　(Marshakov-Mironov-Morozov, Phys. Lett. B 682 (2009))

実は $\langle G \mid G \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^{4n} (K_n^{-1})_{(1^n,1^n)}$ なので

$$(K_n^{-1})_{(1^n,1^n)} \overset{?}{=} (\epsilon_1\epsilon_2)^{4n} Z_n(\epsilon_1, \epsilon_2; \vec{a})$$

§§4. Virasoro 代数の表現論から見ると

§§4.1. 証明の方針

- 幾何学に帰着
- 組み合わせ論に帰着
- 表現論に帰着

- 今回は主に 2 番目と 3 番目の立場で話をすすめる.

- まずは 3 番目に関する方針： $\mathbf{Z_n}$ と $(\mathbf{K_n})^{-1}_{(1^n,1^n)}$ が同じ漸化式を満たすことを示す.

Poghossian JHEP 0912 (2009), arXiv:0909.3412

Fateev-Litvinov JHEP 1002 (2010), arXiv:0912.0504

Hasadz-Jaskólski-Suchanek arXiv:1004.1841

§§4.2 Zamolodchikov-type recursion formula

事実 [Fateev-Litvinov, Hasadz-Jaskólski-Suchanek]

$a := a_1 - a_2$ として, $Z_n(\epsilon_1, \epsilon_2, a)$ は次の漸化式を満たす.

$$Z_n(\epsilon_1, \epsilon_2, a) = \delta_{n,0} + \sum_{\substack{r,s \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \\ 1 \leq rs \leq n}} \frac{R_{r,s}(\epsilon_1, \epsilon_2) Z_{n-rs}(\epsilon_1, \epsilon_2, (r\epsilon_1 - s\epsilon_2)/2)}{4a^2 - (r\epsilon_1 + s\epsilon_2)^2}$$

但し

$$R_{r,s}(\epsilon_1, \epsilon_2) := 2 \prod_{\substack{1-r \leq j \leq r \\ 1-s \leq k \leq s \\ (r,s) \neq (0,0)}} (j\epsilon_1 + k\epsilon_2)^{-1}$$

注意

(1) 証明には Z_n の積分表示を用いる.

(2) Fateev-Litvinov は adjoint matter 付きの場合,
Hasadz-Jaskólski-Suchanek は matter が 2 個以下の場合を証明している.

- 従って pure gauge の AGT 予想は, 上の漸化式のパラメータの読み変えた

$$f_n(h,c)=\delta_{n,0}+\sum_{\substack{r,s\in\mathbb{Z}_{\geq 1}\\ 1\leq rs\leq n}}\frac{\widetilde{R}_{r,s}(c)f_{n-rs}(h_{r,-s},c)}{h-h_{r,s}}$$

が $(K_n)^{-1}_{(1^n,1^n)}$ の漸化式になることに帰着されている.

<u>注意</u>

この型の漸化式は, Zamolodchikov が conformal block に対して提唱した

$$\mathcal{F}(x;c,h;h_1,h_2,h_3,h_4)=A(x,h_i)H(x;c,h;h_i),$$
$$H(x;c,h,h_i)=1+\sum_{r,s}\frac{R_{r,s}(x;r,s,c;h_i)}{h-h_{r,s}}H(x;h_{r,-s}+rs,h_i)$$

に端を発する. c.f. Al. Zamolodchikov, Comm. Math. Phys. 96 (1984); Theor. Math. Phys. 73 (1987)

§5. 組み合わせ論の立場から

- 対称函数の理論を用いて $\langle G \mid G\rangle$ を表示し, Z の組み合わせ論的定義に一致することをみたい...

- $|G\rangle$ が Virasoro 代数 Vir の Verma 加群 M_h の Whittaker ベクトルであることを思い出す.

M_h の元で重要なものに特異ベクトルというものがある. それは Jack 対称函数で表わすことができる. (Mimachi-Yamada, Comm. Math. Phys. 174 (1995))

$|G\rangle$ も Jack 対称函数で表わすことができないだろうか?

(Awata-Yamada の考察. 本当は K 理論版の AGT 予想に関連して, Macdonald 対称函数を用いて deformed Gaiotto state が明示出来ることを観察したのが発端.)

§§5.1 Heisenberg 代数

- Heisenberg 代数 $\mathcal{H}$

生成元：a_n $(n \in \mathbb{Z})$　関係式 $[a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0}a_0$.

三角分解：$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_-$　$\mathcal{H}_\pm := \oplus_{\pm n \in \mathbb{Z}_+} \mathbb{C}a_n$, $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}a_0$

- $\mathcal{F}_\alpha$：Fock 加群　$\mathcal{F}_\alpha := \mathrm{Ind}^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_+} \mathbb{C}_\alpha$

ここで $\mathbb{C}_\alpha = \mathbb{C}|\alpha\rangle_{\mathcal{F}}$ は 1 次元 $(\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_+)$ 表現,

$$a_0\,|\alpha\rangle_{\mathcal{F}} = \alpha\,|\alpha\rangle_{\mathcal{F}},\ a_n\,|\alpha\rangle_{\mathcal{F}} = 0\ (n \in \mathbb{Z}_{>0})$$

$\mathcal{F}_\alpha$ の基底：$\{a_{-\lambda}\,|\alpha\rangle_{\mathcal{F}} \mid \lambda : \text{分割}\}$

ウェイト分解：$\mathcal{F}_\alpha = \oplus_{n \geq 0} \mathcal{F}_{\alpha,n}$, $\mathcal{F}_{\alpha,n} := \{v \in \mathcal{F}_\alpha \mid a_0 v = (n+\alpha)v\}$

§§5.2 Feigin-Fuchs の自由場表示

- 次の準同型を (Feigin-Fuchs による)Virasoro 代数の自由場表示という.

$$\begin{array}{rccc} \iota_{\alpha_0} : & \mathcal{U}(\mathrm{Vir}_{c(\alpha_0)}) & \to & \widehat{\mathcal{U}}(\mathcal{H}) \\ & L_n & \mapsto & \mathcal{L}_n := \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}} {}^{\circ}_{\circ} a_m a_{n-m} {}^{\circ}_{\circ} - (n+1)\alpha_0 a_n \end{array}$$

但し $c(\alpha_0) := 1 - 12\alpha_0^2$, ${}^{\circ}_{\circ}\ {}^{\circ}_{\circ}$ は normal ordering.

- 更にベクトル空間の同型

$$\begin{array}{rccc} f_{\alpha_0,\alpha} : & M_{h(\alpha,\alpha_0)} & \to & \mathcal{F}_\alpha \\ & L_{-\lambda}\left|h(\alpha,\alpha_0)\right\rangle & \mapsto & \mathcal{L}_{-\lambda}\left|\alpha\right\rangle_{\mathcal{F}} \end{array}$$

は ι_{α_0} と整合的. 但し $h(\alpha,\alpha_0) := \frac{1}{12}[(\alpha-\alpha_0)^2 - \alpha_0^2]$.

§§5.3 対称函数

- $\Lambda^{(N)}$: N 変数 $\mathbb{Z}$ 係数の対称多項式環
- $\Lambda_n^{(N)}$: n 次の対称多項式の空間, $\Lambda^{(N)} = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda_n^{(N)}$
- モノミアル対称多項式 : $m_\lambda^{(N)}(x) := \sum_{\alpha:\lambda\text{の異なる置換}} x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \cdots x_{\alpha_\ell}$

$n \geq N$ の時, $\{m_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ は $\Lambda_n^{(N)}$ の基底.

- 冪和対称多項式 : $p_k^{(N)} := \sum_{i=1}^{N} x_i^k \in \Lambda_k^{(N)}$
- $\Lambda_{n,\mathbb{Q}}^{(N)} := \Lambda_n^{(N)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, $\Lambda_{n,\mathbb{C}}^{(N)} := \Lambda_n^{(N)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$.
- $n \leq N$ の時, $\Lambda_{n,\mathbb{Q}}^{(N)}$ の基底として $\{p_\lambda^{(N)} \mid \lambda \vdash n\}$ が取れる.

但し分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ に対して $p_\lambda^{(N)} := p_{\lambda_1}^{(N)} p_{\lambda_2}^{(N)} \cdots p_{\lambda_\ell}^{(N)}$

- Jack 対称多項式 $P_\lambda^{(N)}(x;\beta) \in \Lambda_{\mathbb{C}}^{(N)}$ は次で特徴づけられる.

$$\text{(i)}\quad P_\lambda^{(N)}(x;\beta) = \sum_{\mu\le\lambda} c_{\lambda,\mu}(\beta) m_\mu^{(N)}(x), \quad c_{\lambda,\mu}(\beta)\in\mathbb{C},\ c_{\lambda,\lambda}(\beta)=1$$

$$\text{(ii)}\quad H_\beta^{(N)} P_\lambda^{(N)}(x;\beta) = \epsilon_\lambda^{(N)}(\beta) P_\lambda^{(N)}(x;\beta),$$

$$H_\beta^{(N)} := \sum_{i=1}^N \left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 + \beta \sum_{1\le i<j\le N} \frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i} - x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

$$\epsilon_\lambda^{(N)}(\beta) := \sum_i (\lambda_i^2 + \beta(N+1-2i)\lambda_i).$$

但し (i) での分割の順序はドミナンス半順序.

$$\lambda \ge \mu \overset{\text{def}}{\iff} |\lambda| = |\mu|,\ \textstyle\sum_{k=1}^i \lambda_k \ge \sum_{k=1}^i \mu_k\ (i=1,2,\ldots).$$

また, (ii) の微分作用素 $H_\beta^{(N)}$ は Calogero-Sutherland ハミルトニアンと同等.

- $N \ge n$ なら $\{P_\lambda^{(N)}(x;\beta)\}_{\lambda\vdash n}$ は $\Lambda_{n,\mathbb{C}}^{(N)}$ の基底

§§5.5 Fock 加群と対称多項式

- $\mathbf{n \le N}$, $\beta' \neq 0$ の時, 次の対応でベクトル空間の同型ができる.

$$\begin{array}{rccl} g^{(N)}_{\beta',n}: & \bigoplus_{k=1}^{n} \mathcal{F}_{\alpha,k} & \to & \bigoplus_{k=1}^{n} \Lambda^{(N)}_{k,\mathbb{C}} \\ & u\,|\alpha\rangle_{\mathcal{F}} & \mapsto & {}_{\mathcal{F}}\langle\alpha|\exp(\beta'\sum_{n>0}\frac{1}{n}a_n p^{(N)}_n)u\,|\alpha\rangle_{\mathcal{F}} \end{array}$$

更に次の $\mathbb{C}$ 代数の準同型を考える

$$\begin{array}{rccl} j_{\beta,n}: & \bigoplus_{k=1}^{n} \widehat{\mathcal{U}}(\mathcal{H})_k & \to & \mathrm{End}(\Lambda_{\mathbb{C}}) \\ & a_{-n} & \mapsto & \beta' p^{(N)}_n \\ & a_n & \mapsto & \dfrac{n}{\beta'}\dfrac{\partial}{\partial p^{(N)}_n} \quad (n > 0) \end{array}$$

但し $\widehat{\mathcal{U}}(\mathcal{H})_k$ は $\deg a_n := -n$ として $\widehat{\mathcal{U}}(\mathcal{H})$ を次数付けた時の k 次斉次成分.
するとこれは $g^{(N)}_{\beta',n}$ と整合的.

§§5.6. Calogero-Sutherland ハミルトニアンの split form

Awata-Matsuo-Odake-Shiraishi, Nucl. Phys. B 449 (1995)

- $g^{(N)}_{\beta',n}(|\lambda;\beta,\beta'\rangle_{\mathcal{F}}) = P^{(N)}_{\lambda}(x;\beta)$ なる元 $|\lambda;\beta,\beta'\rangle_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}_{\alpha}$ を考える.
- $\widehat{\mathcal{U}}(\mathcal{H})$ の元 $\widehat{E}_{\beta,\beta'}$ を

$$\widehat{E}_{\beta,\beta'} := \sum_{n,m>0}\left(\beta' a_{-m-n}a_m a_n + \frac{\beta}{\beta'} a_{-m}a_{-n}a_{m+n}\right) + \sum_{n>0} n(1-\beta)a_{-n}a_n$$

で定めると

$$\widehat{E}_{\beta,\beta'}\left|\lambda;\beta,\beta'\right\rangle_{\mathcal{F}} = \epsilon_{\lambda}(\beta)\left|\lambda;\beta,\beta'\right\rangle_{\mathcal{F}}, \ \ \epsilon_{\lambda}(\beta) := \sum_i(\lambda_i^2 + \beta(1-2i)\lambda_i).$$

また $\widehat{E}_{\beta} := \widehat{E}_{\beta,\sqrt{\beta/2}}$ で, $\alpha_0 = (\beta-1)/\sqrt{2\beta}$ とすれば

$$\widehat{E}_{\beta} = \sqrt{2\beta}\sum_{n>0} a_{-n}\mathcal{L}_n + \sum_{n>0} a_{-n}a_n\left(\beta - 1 - \sqrt{2\beta}a_0\right)$$

§§5.7. Gaiotto state の自由場表示

- Gaiotto state を $|G\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Lambda^{2n} |G, n\rangle$ $(|G, n\rangle \in M_{h,n})$ と分解する.
- $|\mathcal{G}, n\rangle_{\mathcal{F}} = f_{\alpha_0,\alpha}(|G, n\rangle) \in \mathcal{F}_{\alpha,n}$, $|\lambda; \beta\rangle_{\mathcal{F}} := |\lambda; \beta, \sqrt{\beta/2}\,\rangle_{\mathcal{F}}$ とする.

命題 [Y. arXiv:1003.1049]

Gaiotto state は一意に存在する. それを $|\mathcal{G}, n\rangle_{\mathcal{F}} = \sum_{\lambda\vdash n} c_\lambda(\alpha, \beta)\, |\lambda; \beta\rangle_{\mathcal{F}}$ と展開すると

$$c_\lambda(\alpha, \beta) = \prod_{\square\in\lambda} \frac{1}{a_\lambda(\square) + 1 + \beta\ell_\lambda(\square)} \times \prod_{(i,j)\in\lambda\setminus\{(1,1)\}} \frac{\beta}{(j+1) + \sqrt{2\beta}\alpha - (i+1)\beta}$$

- 証明は, split form $\widehat{E}_\beta$ と Jack 対称多項式の Pieri 公式 (箱 1 つを増やす公式のみ) を用いて c_λ の漸化式を導出し, 上記の関数がそれを満たすことをチェックする.

§§5.8. 分配函数と Jack 対称多項式

- Verma 加群上の Shapovalov form $\cdot : M_h^* \times M_h \to \mathbb{C}$ を思い出す.
- これを対称多項式環上の内積で解釈できれば, Nekrasov 分配函数を Jack 対称多項式の言葉のみで書きかえられるはず.
- $\omega : \mathrm{Vir} \to \mathrm{Vir}$ を $\omega(L_n) = L_{-n}$ で定まる反準同型とすると, $(L_{-\lambda}|h\rangle, L_{-\mu}|h\rangle) := \langle h| \omega(L_{-\lambda}) \cdot L_{-\mu}|h\rangle$ で M_h 上に内積が決まる.
- 一方, 無限変数の対称函数環 $\Lambda_{\mathbb{C}}$ は, 冪和対称函数 $p_n := \sum_i x_i^n$ を用いた基底 $\{p_\lambda \mid \lambda : \text{分割}\}$ を持つ.
- そして, Jack 対称函数 $P_\lambda(x;\beta)$ は, 次の $\Lambda_{\mathbb{C}}$ 上の内積に関する直交基底である.

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_\beta := \delta_{\lambda,\mu} \beta^{-\ell(\lambda)} z_\lambda, \quad z_\lambda := \prod_{i \geq 1} i^{m_i} m_i!$$

但し $m_i := \#\{k \mid \lambda_k = i\}$.

- 実は, 内積空間としては

$$(M_h, (\cdot,\cdot)) \cong (\Lambda_{\mathbb{C}}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{2\beta})$$

特に, $|G\rangle = \sum_\lambda \Lambda^{2|\lambda|} c_\lambda(\alpha,\beta) P_\lambda(x;\beta)$ から

$$(\epsilon_1\epsilon_2)^{4n} \sum_{|Y_1|+|Y_2|=n} Z_{(Y_1,Y_2)}(\epsilon_1,\epsilon_2,a)$$
$$\stackrel{?}{=} \sum_{|\lambda|+|\mu|=n} c_\lambda(\alpha,\beta) c_\mu(\alpha,\beta) \langle P_\lambda(x;\beta), P_\mu(x;\beta)\rangle_{2\beta}$$

注意 内積のパラメータが 2β になるのは, ω を **Fock** 加群上の **involution** ι で書き直した時に次のようになることに起因する.

$$\iota(a_n) = a_{-n}\ (n \neq 0), \quad \iota(a_0) = a_0 - 2\alpha_0, \quad \iota(\alpha_0) = -\alpha_0,$$

物理の文献では **Coulomb gas representation** と呼ばれていたもの.

§6. K 理論版

Nekrasov 分配函数と Virasoro 代数には q 類似がある．そこで，pure gauge 版の AGT 予想にも q 類似があるはず．

Awata-Yamada, JHEP 1001 (2010), arXiv:0910.4431

§§6.1 K 理論的 Nekrasov 分配函数

Nakajima-Yoshioka, Transform. Groups 10 (2005)

$$Z^K(x;\epsilon_1,\epsilon_2,\vec{a}) := \sum_{n=0}^{\infty}(xe^{-r(\epsilon_1+\epsilon_2)/2})^n \sum_i (-1)^i \mathrm{ch}[H^i(M(r,n),\mathcal{O})]$$

$$= \sum_{\vec{Y}} \frac{x^{|\vec{Y}|}}{\prod_{1\le\alpha,\beta\le r} N^{\vec{Y}}_{\alpha,\beta}}$$

但し $N^{\vec{Y}}_{\alpha,\beta} := \prod_{\square\in Y_\alpha}(1-\exp[\ell_{Y_\beta}(\square)\epsilon_1-(a_{Y_\alpha}(\square)+1)\epsilon_2-a_\beta+a_\alpha)]$

$$\prod_{\blacksquare\in Y_\beta}(1-\exp[-(\ell_{Y_\beta}(\blacksquare+1)\epsilon_1+a_{Y_\alpha}(\blacksquare)\epsilon_2-a_\beta+a_\alpha])$$

§§6.2 変形 Virasoro 代数 $\mathsf{Vir}_{q,t}$

- $q, t \in \mathbb{C}$, $p := qt^{-1}$

生成元：$T_n (n \in \mathbb{Z})$

関係式：
$$[T_n, T_m] = -\sum_{\ell=1}^{\infty} f_\ell (T_{n-\ell} T_{m+\ell} - T_{m-\ell} T_{n+\ell}) - \frac{(1-q)(1-t^{-1})}{1-p}(p^n - p^{-n})\delta_{n+m,0}$$

但し
$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k = \exp[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)(1-t^{-n})}{1+p^n} \frac{z^n}{n}]$$

- $t = q^\beta$, $q = e^\hbar$, $\hbar \to 0$ の limit で $T(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_n z^{-n}$ を

$$T(z) = 2 + \beta\hbar^2 (z^2 L(z) + \frac{(1-\beta)^2}{4\beta}) + O(\hbar^4) \quad (L(z) = \sum L_n z^{-n-2})$$

と展開すると $\{L_n\}$ が Vir_c の関係式を満たす．但し $c = 1 - 6(1-\beta)^2/\beta$.

§§6.3 deformed Gaiotto state

- $h \in \mathbb{C}$, M_h : $Vir_{q,t}$ の Verma 加群

$T_n |h\rangle = 0\ (n > 0)$, $T_0 |h\rangle = h |h\rangle$ となる $|h\rangle$ で生成される加群.

$\deg T_n = -n$ で M_h を次数付けできて，その時 $M_h = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} M_{h,n}$.

- 双対 Verma 加群 M_h^*, その生成元 $\langle h|$ も同様に定義.

- deformed Gaiotto state とは $|G_{q,t}\rangle \in M_h$ で次の条件を満たすもの.

$T_1 |G_{q,t}\rangle = \Lambda^2 |G_{q,t}\rangle$, $T_n |G_{q,t}\rangle = 0\ (n \geq 2)$, $|G_{q,t}\rangle = |h\rangle + \cdots$

- 双対ベクトル $\langle G_{q,t}|$ も同様に定義

§§6.4. K 理論的 AGT 予想

予想 (Awata-Yamada)

$$\langle G_{q,t} \mid G_{q,t} \rangle \overset{?}{=} Z^{K}_{r=2}(x; \epsilon_1, \epsilon_2, \vec{a})$$

但し

$Vir_{q,t}$	Nekrasov
q	$e^{-\epsilon_1}$
t	e^{ϵ_2}
h	$e^{(a_1-a_2)/2} + e^{(a_2-a_1)/2}$
Λ	$x^{1/4}$

注意 (1) 変形 Virasoro 代数の表現論は非常に難しく, 現状, matter を入れた K 理論的分配函数の変形 Virasoro 代数での対応物は分かっていない.

(2) また, ランクが 3 以上の時は, 変形 $\mathcal{W}(sl_r)$ 代数に対応するはずだが, それもよく分かっていない.

§§6.5 Recursion formula

命題　[Y. arXiv:1005.0216]

K 理論的 Nekrasov 分配函数を $Z^K(\Lambda; q, t, Q) = \sum_n (\Lambda q/t)^n Z_n^K(q, t, Q)$ と展開すると次の漸化式が成立する. ($Q := e^{a_1 - a_2}$)

$$Z_n^K(q, t, Q) = \delta_{n,0} + \sum_{\substack{r,s \in \mathbb{Z} \\ 1 \le rs \le n}} \frac{R_{r,s}^K(q, t) Z_{n-rs}^K(q, t, q^r t^s)}{Q - q^r t^{-s}}$$

但し

$$R_{r,s}^K(q, t) := \mp q^r t^{-s} \prod_{\substack{1-|r| \le j \le |r| \\ 1-|s| \le k \le |s| \\ (j,k) \ne (0,0)}} (1 - q^j t^{-k})^{-1}$$

$\mp$ は r の符号の逆の意味.

- 証明には次の積分表示を用いる.

$q_1 := q, q_2 := t^{-1}, q_3 := p^{-1} = q^{-1}t$ として

$$Z_n(q,t,Q) = \frac{1}{n!}\left(\frac{1-q_3^{-1}}{(1-q_1)(1-q_2)}\right)^n$$
$$\times \oint\cdots\oint \prod_{i=1}^{n} \frac{dx_i}{2\pi\sqrt{-1}} \prod_{k=1}^{n} P(x_k; Q^{1/2}, q_3) \prod_{i<j} \omega(x_j/x_i; q_1, q_2, q_3)$$

但し

$$P(x;a,q) := \frac{x}{(x-a)(x-a^{-1})(x-qa)(x-qa^{-1})}$$
$$\omega(y;q_1,q_2,q_3) := \frac{(y-1)^2(y-q_3)(y-q_3^{-1})}{(y-q_1)(y-q_1^{-1})(y-q_2)(y-q_2^{-1})}$$

§§6.6 deformed Gaiotto state と Macdonald 対称函数

- Awata-Yamada は $|G_{q,t}\rangle$ の明示化も予想している.

- まず変形 Virasoro 代数の自由場表示を考える.

$$
\begin{aligned}
T(z) &= \Lambda_1(z) + \Lambda_2(z), \\
\Lambda_1(z) &= p^{1/2} \exp[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^n}{1+p^n} \frac{b_{-n}}{n} t^{-n} p^{-n/2} z^n] \\
&\qquad \times \exp[-\sum_{n=1}^{\infty} (1-t^n) \frac{b_n}{n} p^{n/2} z^{-n}] q^{\beta b_0} \\
\Lambda_2(z) &= p^{-1/2} \exp[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^n}{1+p^n} \frac{b_{-n}}{n} t^{-n} p^{n/2} z^n] \\
&\qquad \times \exp[\sum_{n=1}^{\infty} (1-t^n) \frac{b_n}{n} p^{-n/2} z^{-n}] q^{-\beta b_0}
\end{aligned}
$$

ここで b_n は $[b_n, b_m] = n \dfrac{1-q^{|n|}}{1-t^{|n|}} \delta_{n+m,0} b_0$ なる boson.

- $b_n|0\rangle = 0\ (n>0)$ なる $|0\rangle$ で生成される Fock 加群を $\mathcal{F}_0$ と書く.

すると T_n の作用が $T_0|0\rangle = h|0\rangle$, $T_n|0\rangle = 0\ (n>0)$ と書ける.

- $b_{-\lambda}|0\rangle \mapsto p_\lambda$ で $\mathcal{F}_0$ と $\Lambda_{\mathbb{C}}$ との同型ができる. この同一視の下で

<u>予想</u>　(Awata-Yamada)

$$|G_{q,t}\rangle = \sum_\lambda \Lambda^{2|\lambda|} P_\lambda(x;q,t) \prod_{(i,j)\in\lambda} \frac{Q^{1/2}}{1-Qq^jt^{-i}} \frac{q^{\lambda_i-j}}{1-q^{\lambda_i-j+1}t^{\lambda_j^\vee-i}}$$

但し $P_\lambda(x;q,t)$ は Macdonald 対称函数.

<u>注意</u>

$|G\rangle$ を Jack 対称函数で書く場合の証明で, split form $\widehat{E}_\beta$ を Macdonald 差分作用素 D_1 の自由場表示で置き換えれば, 議論は殆どパラレルに進むが, T_0 の作用の扱いが難しいために, 上記の予想の証明はできていない.