Feigin-Odesskii algebra and Macdonald symmetric functions

柳田伸太郎　(神戸大)

代数群と量子群の表現論研究集会
2010 年 6 月 4 日

§0 概要と目次

Macdonald 対称函数はある差分作用素族の同時固有函数である.

この差分作用素族の自由場表示を考えると,
B. Feigin と A. Odesskii の導入した代数の類似物が現れる.

この代数構造と差分作用素族の性質を考察する.
また, 付随して現れる量子代数についても考える.

[FHHSY] Feigin, 橋爪, 星野, 白石, Y.,
"A commutative algebra on degenerate $\mathbb{CP}^1$ and Macdonald polynomials",
J. Math. Phys., 50, 095215 (2009); arXiv:0904.2291.

[FHSSY] B. Feigin, 星野, 柴原, 白石, Y.,
"Kernel function and quantum algebras",
arXiv:1002.2485.

§**1. Macdonald** 対称函数

§**2. Macdonald** 差分作用素の自由場表示

§**3.** 退化 $\mathbb{CP}^1$ 上の **Feigin-Odesskii** 代数 $\mathcal{A}$

§**4.** 交叉空間と自由場表示

§**5. Ding-Iohara** 代数との関連

§**6.** 楕円類似

§**7.** 今後の課題

§1. Macdonald 対称函数

参考：I.G.Macdonald, ”Symmetric function and Hall polynomials” (2nd ed.).

§§1.1. 対称多項式に関する記号

- $\mathbf{n}$：正整数，　$\mathbf{q}, \mathbf{t}$：不定元
- $\mathbb{F} := \mathbb{Q}(q, t)$
- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$：変数
- $\Lambda_n := \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ ：$\mathbb{Z}$ 係数,n 変数の対称多項式の空間

  $\Lambda_{n,\mathbb{F}} := \Lambda_n \otimes \mathbb{F}$
- $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell, 0, 0, \ldots)$：分割

  (正整数の非増加数列, $|\lambda| := \sum_i \lambda_i$)
- $\geq$：(分割に対する) ドミナンス半順序

  $$\lambda \geq \mu \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} |\lambda| = |\mu|, \sum_{k=1}^{i} \lambda_k \geq \sum_{k=1}^{i} \mu_k \ (i = 1, 2, \ldots).$$

§§1.2. Macdonald 差分作用素

- T_{q,x_i} : q 差分作用素

$$T_{q,x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, qx_i, \ldots, x_n).$$

- $D_r^{(n)}$: $\Lambda_{n,\mathbb{F}}$ 上の Macdonald 差分作用素 $(1 \le r \le n)$

$$D_r^{(n)} := \sum_{\substack{J \subset \{1,2,\ldots,n\} \\ \#J = r}} \left[t^{r(r-1)/2} \prod_{\substack{j \in J \\ k \notin J}} \frac{tx_j - x_k}{x_j - x_k} \prod_{j \in J} T_{q,x_j} \right].$$

- $m_\lambda^{(n)}(x) := \displaystyle\sum_{\alpha:\lambda\text{の異なる分割}} x^\alpha$: n 変数モノミアル対称多項式.

$$e_r^{(n)}(x) := \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$$: n 変数基本対称多項式.

§§1.3. Macdonald 対称多項式

- 長さ $\ell \leq n$ である分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ について, Macdonald 対称多項式 $P^{(n)}_\lambda(x; q, t) \in \Lambda_{n,\mathbb{F}}$ は次の 2 条件によって一意に決まる.

$$P^{(n)}_\lambda = m^{(n)}_\lambda + \sum_{\lambda > \mu} c^{(n)}_{\lambda,\mu} m^{(n)}_\mu \qquad (c^{(n)}_{\lambda,\mu} \in \mathbb{F}),$$

$$D^{(n)}_1 P^{(n)}_\lambda(x; q, t) = P^{(n)}_\lambda(x; q, t) \cdot e^{(n)}_1(t^n s^\lambda).$$

ここで

$$s^\lambda := (q^{\lambda_1} t^{-1}, q^{\lambda_2} t^{-2}, \dots, q^{\lambda_\ell} t^{-\ell}, t^{-\ell-1}, t^{-\ell-2}, \dots)$$

: スペクトルパラメータ.

$$e^{(n)}_1(t^n s^\lambda) = e^{(n)}_1(q^{\lambda_1} t^{n-1}, \dots, q^{\lambda_\ell} t^{n-\ell}, t^{n-\ell-1}, \dots, 1)$$

$$= \sum_{i=1}^n q^{\lambda_i} t^{n-i}.$$

§§1.4. 可換差分作用素族と同時固有函数

- $P_\lambda^{(n)}(x;q,t)$ は Macdonald 差分作用素族 $\{D_r^{(n)} \mid 1 \le r \le n\}$ の同時固有関数.

$$D_r^{(n)} P_\lambda^{(n)}(x;q,t) = P_\lambda^{(n)}(x;q,t) \cdot e_r^{(n)}(t^n s^\lambda).$$

- $\{D_r^{(n)}\}$ 達は可換.

$$[D_r^{(n)}, D_s^{(n)}] = 0 \quad (1 \le r, s \le n).$$

注意. (有限変数の)Macdonald 多項式については, Cherednik による DAHA を用いた理論が整備されている.

§§1.5. 対称函数環

- 制限写像 $\rho_{m,n} : \Lambda_m \to \Lambda_n \ (m \geq n)$
$$\rho_{m,n} f(x_1, \dots, x_m) = f(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$
すると $\{(\Lambda_m)_m, (\rho_{m,n})_{m,n}\}$ は (環の) 射影系になる.

- $\Lambda = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]^{\mathfrak{S}_\infty} := \varprojlim_n \Lambda_n$: $\mathbb{Z}$ 係数対称函数環, $\Lambda_{\mathbb{F}} := \Lambda \otimes \mathbb{F}$.

- $m_\lambda(x) := \displaystyle\sum_{\alpha:\text{異なる } \lambda \text{ の置換}} x^\alpha$: モノミアル対称函数,

$e_r(x) := \displaystyle\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$, $e_\lambda(x) := e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_\ell}$: 基本対称函数,

$p_r(x) := \displaystyle\sum_i x_i^r$, $p_\lambda(x) := p_{\lambda_1} \cdots p_{\lambda_\ell}$: 冪和対称函数.

- $\{m_\lambda\}$ と $\{e_\lambda\}$ は Λ の $\mathbb{Z}$ 基底, $\{p_\lambda\}$ は $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ の $\mathbb{Q}$ 基底.

§§1.6. Macdonald 対称函数 $P_\lambda(x;q,t)$

- 各分割 λ に対し $P_\lambda(x;q,t) \in \Lambda_{\mathbb{F}}$ が次の 2 条件で一意に決定される.

$$P_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} c_{\lambda,\mu} m_\mu \qquad (c_{\lambda,\mu} \in \mathbb{F}),$$

$$\langle P_\lambda, P_\mu \rangle_{q,t} = 0 \text{ for } \mu \neq \lambda.$$

ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle_{q,t}$ は

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} := \delta_{\lambda,\mu} \prod_{j\geq 1} j^{m_j} m_j! \prod_{k\geq 1} \frac{1-q^{\lambda_k}}{1-t^{\lambda_k}}$$

で定まる $\Lambda_{\mathbb{F}}$ 上の内積.

- $\{P_\lambda(x;q,t)\}$ は $\Lambda_{\mathbb{F}}$ の基底になる.

§§1.7. 対称函数環上の差分作用素族

参考文献：[FHHSY, §3]

- $D_r^{(n)}$ は制限写像 $\rho_{m,n}$ と整合的でない.

そこで $E_r^{(n)}$: $\Lambda_{n,F} = \mathbb{F}[x_1, \cdots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ 上の差分作用素を

$$E_r^{(n)} := \sum_{j=0}^{r} \frac{t^{-nr-\binom{r-j+1}{2}}}{(t^{-1};t^{-1})_{r-j}} D_j^{(n)}$$

で定義すると

$$\rho_{n,n-1} \circ E_r^{(n)} = E_r^{(n-1)} \circ \rho_{n,n-1}.$$

従って $E_r := \varprojlim_n E_r^{(n)} : \Lambda_F \to \Lambda_{\mathbb{F}}$ が well defined.

- $E_r P_\lambda(x;q,t) = P_\lambda(x;q,t) \cdot e_r(s^\lambda)$.

注意. Macdonald の教科書では E_1 のみ定義されている.

§2. Macdonald 差分作用素の自由場表示

参考文献：白石，「量子可積分系入門」(サイエンス社)

§§2.1. 自由場表示

- Heisenberg 代数 $\mathfrak{h}_{q,t}$：生成元 a_n $(n \in \mathbb{Z})$，関係式

$$[a_n, a_m] = n\frac{1-q^{|n|}}{1-t^{|n|}}\delta_{n+m,0}\, a_0$$

- 三角分解：$\mathfrak{h}_{q,t} = \mathfrak{h}^{+}_{q,t} \oplus \mathfrak{h}^{0}_{q,t} \oplus \mathfrak{h}^{-}_{q,t}$ $(\mathfrak{h}^{\pm}_{q,t} = \bigoplus_{\pm n>0} \mathbb{F}a_n,\ \mathfrak{h}^{0}_{q,t} = \mathbb{F}a_0)$.

- Fock 表現 $\mathcal{F}_{q,t} := \mathrm{Ind}^{\mathfrak{h}_{q,t}}_{\mathfrak{h}^{+}_{q,t}\oplus\mathfrak{h}^{0}_{q,t}}(\mathbb{F}\cdot 1)$.

$\mathbb{F}\cdot 1$ は $a_n\cdot 1 = 0$ $(n>0)$，$a_0\cdot 1 = 1$ で定義される 1 次元 $\mathfrak{h}^{+}_{q,t} \oplus \mathfrak{h}^{0}_{q,t}$ 加群.

- 次の同型で $\Lambda_{\mathbb{F}}$ と $\mathcal{F}_{q,t}$ を同一視する.

$$\mathcal{F}_{q,t} \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathbb{F}} \qquad a_{-\lambda_1} a_{-\lambda_2} \cdots a_{-\lambda_\ell} \cdot 1 \mapsto p_\lambda(x).$$

- $E \in \mathrm{End}(\Lambda_{\mathbb{F}})$ の $\widetilde{U}(\mathfrak{h}_{q,t})$ における実現 $\widehat{E}$ を E の自由場表示という.

<u>例 1.</u> $E_1 \in \mathrm{End}\,\Lambda_{\mathbb{F}}$ の自由場表示.

$$\eta(z) := \exp\Big(\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} a_{-n} z^n\Big) \exp\Big(-\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} a_n z^{-n}\Big).$$

これを $\eta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \eta_n z^{-n}$ と (形式的に) 級数展開した時の零モード η_0 で E_1 は自由場表示できる.

$$\eta_0 = (t-1)\widehat{E}_1 + 1.$$

§§2.2. E_r の自由場表示

参考文献：白石, CMP 263 (2006) 439–460.

- E_r (無限変数版の Macdonald 作用素) は次の様な自由場表示を持つ.

$$\widehat{E}_r = \frac{[r]_{t^{-1}}!}{r!}\Big[\prod_{1\le i<j\le r} \varpi(z_j/z_i) :\eta(z_1)\eta(z_2)\cdots\eta(z_r):\Big]_1 .$$

ここで

$$[r]_x := \frac{1-x^r}{1-x}, \quad [r]_x! := [r]_x \cdot [r-1]_x \cdots [1]_x,$$

$$\varpi(y) := \frac{(1-y)(1-y^{-1})}{(1-t^{-1}y)(1-t^{-1}y^{-1})},$$

$: \ :$: $\mathfrak{h}_{q,t}$ での normal ordering.

$[f(z_1,\ldots,z_n)]_1$: Laurent 級数 f の定数項.

§§2.3. 今回の研究の動機 (の一部)

- 作用素の合成 (e.g. $\mathsf{E}_\mathsf{r} \circ \mathsf{E}_\mathsf{s}$) を自由場表示で実現する.

- 固有方程式 $\mathsf{E}_\mathsf{r} \mathsf{P}_\lambda(\mathsf{x};\mathsf{q},\mathsf{t}) = \mathsf{P}_\lambda(\mathsf{x};\mathsf{q},\mathsf{t}) \cdot \mathsf{e}_\mathsf{r}(\mathsf{s}^\lambda)$ の一般化として,

$$\mathcal{O}_\mu \mathsf{P}_\lambda(\mathsf{x};\mathsf{q},\mathsf{t}) = \mathsf{P}_\lambda(\mathsf{x};\mathsf{q},\mathsf{t}) \cdot \mathsf{P}_\mu(\mathsf{s}^\lambda;\mathsf{q},\mathsf{t})$$

なる作用素 $\mathcal{O}_\mu$ の自由場表示を構成, ないし特徴づける.

c.f.1. $\mathsf{e}_\mathsf{r}(\mathsf{y}) = \mathsf{P}_{(1^\mathsf{r})}(\mathsf{y};\mathsf{q},\mathsf{t})$.

c.f.2.　有限変数の Macdonald 多項式 $\mathsf{P}_\mathsf{r}^{(\mathsf{n})}$ に対する"横 1 列の差分作用素"の存在.

参考文献： 野海, 2010 年度数学会 無限可積分系セッション特別講演

「可換差分作用素と核函数」p. 18

c.f.2. つづき.

$$H_r^{(n)} := \sum_{\substack{\nu\in\mathbb{N}^n \\ |\nu|=r}} \Big[\prod_{1\le i<j\le n} \frac{q^{\nu_i}x_i - q^{\nu_j}x_j}{x_i - x_j} \Big] \Big[\prod_{i,j=1}^{n} \frac{(tx_i/x_j;q)_{\nu_i}}{(qx_i/x_j;q)_{\nu_i}} \Big] T_{q,x}^{\nu}$$

は $\mathbb{F}[D_1^{(n)},\dots,D_n^{(n)}]$ に含まれ，長さ $\ell \le n$ の分割 λ に対し

$$H_r^{(n)} P_\lambda^{(n)}(x;q,t) = P_\lambda^{(n)}(x;q,t) \cdot g_r^{(n)}(s^\lambda;q,t).$$

を満たす.

但し $g_r^{(n)}(y;q,t)$ $(1 \le r \le n)$ は

$$\sum_{r\ge 0} g_r^{(n)}(y;q,t)u^r = \exp\Big[\sum_{m\ge 1} \frac{1}{m} \frac{1-t^m}{1-q^m} \sum_{i=1}^{n} y_i^m u^m \Big]$$

で定義される対称多項式.

導出には梶原-野海の (q 超幾何関数に関する) 双対変換公式を用いる.

§3. 退化 $\mathbb{CP}^1$ 上の Feigin-Odesskii 代数 $\mathcal{A}$

参考文献：[FHHSY, §2]

§§3.1. $\mathcal{A}$ の定義

- q_1, q_2：不定元，　$F := \mathbb{Q}(q_1, q_2)$，　$q_3 := q_1^{-1} q_2^{-1}$.
- $\mathbb{F}$-ベクトル空間 $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n(q_1, q_2, q_3)$ を次の様に定める.

(i) $\mathcal{A}_0 := F$. $n \geq 1$ なら $\mathcal{A}_n$ の元 $f = f(z_1, \ldots, z_n)$ は F 係数 n 変数対称有理式.

(ii) f の極は対角線上のみに高々2 位で存在.

(iii) 任意の $0 \leq k \leq n$ について $\partial^{(0,k)} f$ と $\partial^{(\infty,k)} f$ が存在して一致する.

但し $\partial^{(\alpha,k)} f := \lim_{\xi \to \alpha} f(x_1, \ldots, x_{n-k}, \xi x_{n-k+1}, \ldots, \xi x_n)$.

(degenerate $\mathbb{CP}^1$ condition)

(iv) $n \geq 3$ なら次の wheel condition を満たす.

$$f(z_1, q_1 z_1, q_1 q_2 z_1, z_4, \cdots) = f(z_1, q_2 z_1, q_1 q_2 z_1, z_4, \cdots) = 0.$$

例 2.

- $\mathcal{A}_0 = \mathsf{F}$.
- $\mathcal{A}_1 = \mathsf{F}$ (条件 (iii) より定数函数のみ許される).
- $\mathcal{A}_2 = \mathsf{F}\dfrac{z_1^2 + z_2^2}{(z_1 - z_2)^2} \oplus \mathsf{F}\dfrac{z_1 z_2}{(z_1 - z_2)^2}$.
- $\mathcal{A}_3 = \left\langle \epsilon_{(3)}(z), \epsilon_{(2,1)}(z), \epsilon_{(1,1,1)}(z) \right\rangle$.
- $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}_4 = 5$, $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}_5 = 7$, $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}_6 = 11, \cdots$.

§§3.2. Shuffle 積

- $\mathbf{f} \in \mathcal{A}_{\mathbf{n}}$ と $\mathbf{g} \in \mathcal{A}_{\mathbf{m}}$ に対し **Shuffle 積** $*$ を導入する.

$$(f * g)(z_1, \cdots, z_{n+m}) :=$$

$$\mathrm{Sym}\left(f(z_1, \cdots, z_n)\, g(z_{n+1}, \cdots, z_{n+m}) \prod_{\substack{1 \le \alpha \le n \\ n+1 \le \beta \le n+m}} \omega(z_\alpha, z_\beta) \right).$$

但し Sym は対称化, ω は次の有理式.

$$\omega(z_\alpha, z_\beta; q_1, q_2, q_3) := \frac{(z_\alpha - q_1 z_\beta)(z_\alpha - q_2 z_\beta)(z_\alpha - q_3 z_\beta)}{(z_\alpha - z_\beta)^3}.$$

§§3.3. 構造定理

- 次数付きベクトル空間を $\mathcal{A} := \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{A}_n$ と定める.

定理 1.

(1) $*$ は $\mathcal{A}$ の中で閉じている.

(2) $(\mathcal{A}, *)$ は F 上の単位的かつ結合的代数.

(3) さらに可換である.

(4) また $\dim_{\mathsf{F}} \mathcal{A}_n$ は n の分割数に等しい.

基底として $\{\epsilon_\lambda(z; q_i) \mid \lambda : \text{分割}\}$ $(i = 1, 2, 3)$ が取れる．但し

$$\epsilon_n(z; q_i) := \prod_{1\leq j<k\leq n} \frac{(z_k - q_i z_j)(z_k - q_i^{-1} z_j)}{(z_k - z_j)^2},$$

$$\epsilon_\lambda(z; q_i) := \epsilon_{\lambda_1}(z; q_i) * \epsilon_{\lambda_2}(z; q_i) * \cdots * \epsilon_{\lambda_\ell}(z; q_i).$$

証明には次の Gordon フィルトレーションが必要になる.

§§3.4. Gordon フィルトレーション

- $\mathbf{n}$ の分割 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ に対し, 線形写像 (特殊化写像)

$\varphi_{\lambda}^{(q_i)} : \mathcal{A}_n \to F(y_1, \cdots, y_\ell)$ を次のように定める.

$$
\begin{aligned}
f(x_1, \cdots, x_n) \quad \mapsto \quad f(&y_1, q_i y_1, \cdots, q_i^{\lambda_1 - 1} y_1, \\
&y_2, q_i y_2, \cdots, q_i^{\lambda_2 - 1} y_2, \\
&\cdots \\
&y_\ell, q_i y_\ell, \cdots, q_i^{\lambda_\ell - 1} y_\ell)
\end{aligned}
$$

また次の部分空間を定義する.

$$\mathcal{A}_{n,\lambda}^{(q_i)} := \bigcap_{\substack{\mu:n\ \text{の分割} \\ \mu \not< \lambda}} \ker \varphi_\mu^{(q_i)}.$$

ここで $<$ はドミナンス半順序.

例 3. $\mathbf{q} := \mathbf{q}_1$

- $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}^{(q)}_{2,(2)} = \left\langle \epsilon_{(2)}(z;q), \epsilon_{(1,1)}(z;q) \right\rangle \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{2,(1,1)} = \ker \varphi^{(q)}_{(2)} = \left\langle \epsilon_{(2)} \right\rangle.$

- $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}^{(q)}_{3,(3)} = \left\langle \epsilon_{(3)}(z;q), \epsilon_{(2,1)}(z;q), \epsilon_{(1,1,1)}(z;q) \right\rangle$

  $\supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{3,(2,1)} = \ker \varphi^{(q)}_{(3)} = \left\langle \epsilon_{(3)}(z;q), \epsilon_{(2,1)}(z;q) \right\rangle$

  $\supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{3,(1,1,1)} = \ker \varphi^{(q)}_{(2,1)} = \left\langle \epsilon_{(3)}(z;q) \right\rangle.$

- $\mathcal{A}_4 = \mathcal{A}^{(q)}_{4,(4)} = \left\langle \epsilon_{(4)}, \epsilon_{(3,1)}, \epsilon_{(2,2)}, \epsilon_{(2,1,1)}, \epsilon_{(1,1,1,1)} \right\rangle$

  $\supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{4,(3,1)} = \ker \varphi^{(q)}_{(4)} = \left\langle \epsilon_{(4)}, \epsilon_{(3,1)}, \epsilon_{(2,2)}, \epsilon_{(2,1,1)} \right\rangle$

  $\supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{4,(2,2)} = \ker \varphi^{(q)}_{(3,1)} = \left\langle \epsilon_{(4)}, \epsilon_{(3,1)}, \epsilon_{(2,2)} \right\rangle$

  $\supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{4,(2,1,1)} = \ker \varphi^{(q)}_{(2,2)} = \left\langle \epsilon_{(4)}, \epsilon_{(3,1)} \right\rangle$

  $\supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{4,(1,1,1,1)} = \ker \varphi^{(q)}_{(2,1,1)} = \left\langle \epsilon_{(4)} \right\rangle.$

例 3. (つづき)

○

$$\mathcal{A}_5 = \mathcal{A}^{(q)}_{5,(5)} \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{5,(4,1)} \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{5,(3,2)} \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{5,(3,1^2)} \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{5,(2^2,1)} \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{5,(2,1^3)} \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{5,(1^5)}.$$

○ $$\mathcal{A}_6 = \mathcal{A}^{(q)}_{6,(6)} \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{6,(5,1)} \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{6,(4,2)} \begin{smallmatrix} \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{6,(4,1^2)} \supsetneq \\ \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{6,(3^2)} \supsetneq \end{smallmatrix} \mathcal{A}^{(q)}_{6,(3,2,1)} \begin{smallmatrix} \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{6,(3,1^3)} \supsetneq \\ \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{6,(2^3)} \supsetneq \end{smallmatrix} \mathcal{A}^{(q)}_{6,(2^2,1^2)}$$

$$\supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{6,(2,1^4)} \supsetneq \mathcal{A}^{(q)}_{6,(1^6)}.$$

● Thm. 1 の証明は, Gordon フィルトレーションと組み合わせ論を用いた純代数的なものである.

§4. 交叉空間と自由場表示

参考文献：[FHHSY, §3]

§§4.1. 交叉空間

定理. 2. $\mathbf{n}$ の任意の分割 $\boldsymbol{\lambda}$ に対して

$$\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathcal{A}^{(q^{-1})}_{n,\lambda} \cap \mathcal{A}^{(t)}_{n,\lambda'}\right) = 1.$$

但し λ' は λ の転置. また, 次の置き換えをした.

$$q_1 = q^{-1} \in \mathbb{C}, \quad q_2 = t \in \mathbb{C}, \quad F = \mathbb{Q}(q_1, q_2) \mapsto \mathbb{C}.$$

$$|q| < 1, \quad |t| > 1, \quad q^i t^j \neq 1 \ \forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

- この主張は $\mathcal{A}$ の言葉だけで記述されているが, その証明は今のところ自由場表示を経て Macdonald 対称函数の性質に帰着するしかない. その為, 係数体を $\mathbb{C}$ にしている.

§§4.2. 自由場表示と代数 $\mathcal{A}$

- 頂点作用素

$$\eta(z) = \mathop{\circ}\limits_{\circ} \exp\Big(-\sum_{n\neq 0} \frac{1-t^n}{n} a_n z^{-n}\Big) \mathop{\circ}\limits_{\circ}$$

を用いて, $f \in \mathcal{A}_n(q^{-1}, t)$ に対し $\mathcal{O}(f) \in \widetilde{U}(\mathfrak{h}_{q,t})$ を次の様に定める.

$$\mathcal{O}(f) := \oint_{C_n} \Big(\prod_{j=1}^{n} \frac{dz_j}{2\pi i\, z_j}\Big) \frac{f(z_1, \cdots, z_n)}{\prod_{k<\ell} \omega(z_k, z_\ell; q^{-1}, t, qt^{-1})} \eta(z_1)\cdots\eta(z_n)$$

但し $C_n := \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_i| = 1\}$.

命題 1. (1) $\mathcal{O}(f * g) = \mathcal{O}(f)\mathcal{O}(g)$.

(2) $\mathcal{O}$ は単射.

(3) $\mathcal{O}(\epsilon_n(z; q^{-1})) = \widehat{E}_n$.

(4) $\mathcal{M} := \mathrm{Im}\,\mathcal{O} (\cong \mathcal{A})$ として, $\mathcal{M} \cong \mathbb{C}[\widehat{E}_1, \widehat{E}_2, \cdots]$.

特に任意の $f \in \mathcal{A}$ について $\mathcal{O}(f)$ は $P_\lambda(x; q, t)$ 達を固有函数に持つ.

§§4.3. 作用素 $\widehat{G}_n$

- $\widehat{G}_n := \dfrac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}}{(q;q)_n} \dfrac{[n]_q!}{n!} \mathcal{O}(\epsilon_n(z;t)).$

- $\widehat{E}_r$ と $\widehat{G}_s$ は次の Wronski relation を満たす.

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(1-q^k t^{n-k})\widehat{E}_{n-k}\widehat{G}_k = 0.$$

<u>命題 2.</u> $\widehat{G}_r$ は次の差分作用素 G_r の自由場表示である.

$$G_r P_\lambda(x;q,t) = P_\lambda(x;q,t)\cdot g_r(s^\lambda;q,t).$$

但し $g_r(y;q,t)$ は $g_r^{(n)}$ (p.15) の無限変数版.

<u>注意.</u> 差分作用素 $G_r := \varprojlim_n G_r^{(n)}$ は次の様に実現できる.

$$G_r^{(n)} := \frac{t^{-rn} q^{\binom{r}{2}}}{(-1)^r (q;q)_r} \sum_{k=0}^{r} (-1)^k q^{-\binom{k}{2}} q^{-k(r-k)} (q^{r-k+1};q)_k H_k^{(n)}.$$

ここで $H_k^{(n)}$ は p.15 の差分作用素.

§§4.4 定理 2 の精密化

- 定理 2 は次のように精密化して示すことができる.

<u>定理 2'.</u> 次を満たす $f_\mu \in \mathcal{A}_n(q^{-1}, t)$ が一意に存在し,

交叉空間 $\mathcal{A}_{n,\mu}^{(q^{-1})} \cap \mathcal{A}_{n,\mu'}^{(t)}$ を張る.

$$\mathcal{O}(f_\mu)P_\lambda(x; q, t) = P_\lambda(x; q, t) \cdot P_\mu(s^\lambda; q, t).$$

但し $s^\lambda := (q^{\lambda_1}t^{-1}, q^{\lambda_2}t^{-2}, q^{\lambda_3}t^{-3}, \ldots)$.

- 証明には命題 1, 命題 2 と Haiman による P_λ の三角性に関する結果を使う.

§5. Ding-Iohara 代数, 変形 $\mathcal{W}$ 代数との関連

[FHHSY, §§3-F, Appendix], [FHSSY]

• 今までの考察に現れた頂点作用素 $\eta(z)$ は, 実は **Ding-Iohara 代数の 'レベル 1 表現'** だと思える.

§§5.1. Ding-Iohara 代数

• $\mathcal{U} = \mathcal{U}(q, t)$ を次の様に定義される結合代数とする.

生成元 : $x^{\pm}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x^{\pm}_n z^{-n}$, $\psi^{\pm}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi^{\pm}_n z^{-n}$, $\gamma^{\pm 1/2}$ (中心元)

関係式 : $\psi^{\pm}(z)\psi^{\pm}(w) = \psi^{\pm}(w)\psi^{\pm}(z), \quad \psi^{+}(z)\psi^{-}(w) = \dfrac{g(\gamma^{+1}w/z)}{g(\gamma^{-1}w/z)}\psi^{-}(w)\psi^{+}(z),$

$$\psi^{+}(z)x^{\pm}(w) = g(\gamma^{\mp 1/2}w/z)^{\mp 1}x^{\pm}(w)\psi^{+}(z), \quad \psi^{-}(z)x^{\pm}(w) = g(\gamma^{\mp 1/2}z/w)^{\pm 1}x^{\pm}(w)\psi^{-}(z),$$

$$[x^{+}(z), x^{-}(w)] = \frac{(1-q)(1-1/t)}{1-q/t}\Big(\delta(\gamma^{-1}z/w)\psi^{+}(\gamma^{1/2}w) - \delta(\gamma z/w)\psi^{-}(\gamma^{-1/2}w)\Big),$$

$$G^{\mp}(z/w)x^{\pm}(z)x^{\pm}(w) = G^{\pm}(z/w)x^{\pm}(w)x^{\pm}(z).$$

但し $g(z) := \dfrac{G^{+}(z)}{G^{-}(z)}$, $G^{\pm}(z) := (1-q^{\pm 1}z)(1-t^{\mp 1}z)(1-q^{\mp 1}t^{\pm 1}z)$.

事実. (Ding-Iohara) $\mathcal{U}$ には (formal な)colorHopf 代数の構造が入る.

余積は次のように定義される.

$$\Delta(\gamma^{\pm 1/2}) = \gamma^{\pm 1/2} \otimes \gamma^{\pm 1/2},$$

$$\Delta(x^+(z)) = x^+(z) \otimes 1 + \psi^-(\gamma_{(1)}^{1/2} z) \otimes x^+(\gamma_{(1)} z),$$

$$\Delta(x^-(z)) = x^-(\gamma_{(2)} z) \otimes \psi^+(\gamma_{(2)}^{1/2} z) + 1 \otimes x^-(z),$$

$$\Delta(\psi^\pm(z)) = \psi^\pm(\gamma_{(2)}^{\pm 1/2} z) \otimes \psi^\pm(\gamma_{(1)}^{\mp 1/2} z).$$

但し $\gamma_{(1)}^{\pm 1/2} = \gamma^{\pm 1/2} \otimes 1$, $\gamma_{(2)}^{\pm 1/2} = 1 \otimes \gamma^{\pm 1/2}$.

注意. Ding-Iohara は元々 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ の Drinfeld 実現を変形して, Hopf 代数 $U_q(g, \mathfrak{sl}_n)$ を作った. ここで $g = \{g_{i,j} \mid 1 \le i, j \le n-1\}$ は $g_{i,j}(z) = g_{i,j}(z^{-1})^{-1}$ を満たす解析函数.

§§5.2. レベル 1 表現

- $\mathcal{U}$ の表現は, $\gamma^{\pm 1/2}$ が $(t/q)^{\pm k/4}$ で実現される時, レベル k と呼ばれる.

- 以下の頂点作用素を定義する.

$$\eta(z) := {}^{\circ}_{\circ} \exp\Big(-\sum_{n\neq 0} \frac{1-t^n}{n} a_n z^{-n}\Big) {}^{\circ}_{\circ},$$

$$\xi(z) := \exp\Big(\sum_{n>0} \frac{t^{-n}-1}{n} (t/q)^{n/2} a_{-n} z^n\Big) \exp\Big(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} (t/q)^{n/2} a_n z^{-n}\Big),$$

$$\varphi^+(z) := \exp\Big(-\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} (1-(t/q)^n)(t/q)^{-n/4} a_n z^{-n}\Big),$$

$$\varphi^-(z) := \exp\Big(\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} (1-(t/q)^n)(t/q)^{-n/4} a_{-n} z^n\Big).$$

命題 3.

$\mathcal{F}_{q,t}$: a_n で生成される Heisinberg 代数 $\mathfrak{h}_{q,t}$ の Fock 表現 (p. 11).

すると $\mathcal{U}$ の $\mathcal{F}_{q,t}$ 上のレベル 1 表現 ρ_c が次で定まる.

$$\rho_c(\gamma^{\pm 1/2}) = (t/q)^{\pm 1/4}, \quad \rho_c(\psi^{\pm}(z)) = \varphi^{\pm}(z),$$

$$\rho_c(x^+(z)) = c\,\eta(z), \quad \rho_c(x^-(z)) = c^{-1}\xi(z).$$

但し $c \in \mathbb{Q}(q^{1/2}, t^{1/2}) \setminus \{0\}$.

注意. 今回扱った 2(ないし 3) パラメータの Ding-Iohara 代数は, 我々の研究とほぼ同時期に, 別の研究にも現れている.

B. Feigin, A. Tsymbaliuk, "Heisenberg action in the equivariant K-theory of Hilbert schemes via Shuffle Algebra", arXiv:0904.1679.

O. Schiffmann, E. Vasserot, "The elliptic Hall algebra and the equivariant K-theory of the Hilbert scheme of $\mathbb{A}^2$", arXiv:0905.2555.

B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin, "Quantum continuous $\mathfrak{gl}_\infty$", arXiv:1002.3100, 1002.3113.

§§5.3. $\mathcal{W}_{q,p}(\mathfrak{sl}_n)$ 代数との関係

- $\rho_{y_1} \otimes \cdots \otimes \rho_{y_n}$: n 重テンソル表現.

  $$\Delta^{(2)} := \Delta, \quad \Delta^{(n)} := (\mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta^{(n-1)}.$$

  $\rho_y^{(n)}$: 以下で定義されるレベル n の表現.

  $$\rho_y^{(n)} := \rho_{y_1} \otimes \cdots \otimes \rho_{y_n} \circ \Delta^{(n)}.$$

- $t(z) := \alpha(z) x^+(z) \beta(z)$.

但し $\alpha(z) := \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n} z^n}{\gamma^n - \gamma^{-n}}\right), \quad \beta(z) := \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n z^{-n}}{\gamma^n - \gamma^{-n}}\right).$

$b(z)$ は $\psi^{\pm}$ を

$$\psi^+(z) = \psi_0^+ \exp\left(+\sum_{n>0} b_n \gamma^{n/2} z^{-n}\right), \quad \psi^-(z) = \psi_0^- \exp\left(-\sum_{n>0} b_{-n} \gamma^{n/2} z^{n}\right)$$

と展開して得られる boson. これは次の交換関係を満たす. $(p := q/t)$

$$[b_m, b_n] = \frac{1}{m}(1 - q^{-m})(1 - t^m)(1 - p^m)(\gamma^m - \gamma^{-m})\gamma^{-|m|}\delta_{m+n,0}.$$

- $f_k(z) := \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)(1-t^{-n})(1-p^{(k-1)n})}{1-p^{kn}} z^n\Big).$

<u>命題 4.</u> $\rho_y^{(n)}(t(z)) = \sum_{i=1}^{n} y_i \Lambda_i(z)$, で $\{\Lambda_i(z)\}$ を定義すると，これらは $\mathcal{W}_{q,p}(\mathfrak{sl}_n)$ の生成元の関係式を満たす．

$$f_n(w/z)\Lambda_i(z)\Lambda_j(w) = {}^{\circ}_{\circ}\Lambda_i(z)\Lambda_j(w){}^{\circ}_{\circ} \times \begin{cases} 1 & i=j, \\ \gamma_+(z,w;q,t) & i<j, \\ \gamma_-(z,w;q,t) & i>j. \end{cases}$$

但し $\gamma_\pm(z,w;q,t) := \dfrac{(z-q^{\mp 1}w)(z-qt^{\mp 1}w)}{(z-w)(z-t^{\mp 1}w)}.$

§6. 楕円類似

[FHHSY §4]

§§6.1. 楕円 Feigin-Odesskii 代数 $\mathcal{A}(p)$

- $q_1 = q^{-1}$, $q_2 = t$, $q_3 = q_1^{-1}q_2^{-1}$, $p \in \mathbb{C}$,

$|q| < 1, |t^{-1}| < 1, |p| < 1, |pq^{-1}t| < 1, q^i t^j p^k \neq 1\ \forall (i,j,k) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

- $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $\mathcal{A}_n(p) = \mathcal{A}_n(q_1, q_2, q_3, p)$ を以下の条件で定める.

(i) $\mathcal{A}_0(p) := \mathbb{C}$. $n \geq 1$ なら, $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A}_n(p)$ は 2 重周期性

$$f(x_1, \dots, e^{2\pi\sqrt{-1}}x_i, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, px_i, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$$

を満たす対称函数.

(ii) f の極は高々2 位で, 対角線とそれらの p シフト上のみに位置する.

(iii) $n \geq 3$ なら $f \in \mathcal{A}_n(p)$ は wheel condition を満たす.

$f(x_1, q_1x_1, q_1q_2x_1, x_4, \dots) = 0, \quad f(x_1, q_2x_1, q_1q_2x_1, x_4, \dots) = 0.$

- $\mathcal{A}(p)$ 上の Shuffle 積は, $\mathcal{A}$ での定義の ω を

$$\omega(x, y; q_1, q_2, q_3, p) := \frac{\Theta_p(q_1 y/x)\Theta_p(q_2 y/x)\Theta_p(q_3 y/x)}{\Theta_p(y/x)^3},$$

$$\Theta_p(x) := (p; p)_\infty (x; p)_\infty (p/x; p)_\infty$$

で置き換えればよい.

<u>命題 5.</u> $(\mathcal{A}(p), *)$ は可換代数で, $\{\epsilon_\lambda(x; q_i, p)\}$ を基底にもつ. 但し

$$\epsilon_\lambda := \epsilon_{\lambda_1} * \cdots * \epsilon_{\lambda_\ell} \qquad (\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)),$$

$$\epsilon_n(x_1, \ldots, x_n; q_i, p) := \prod_{1 \le j < k \le n} \frac{\Theta_p(q_i x_j/x_k)\Theta_p(x_j/q_i x_k)}{\Theta_p(x_j/x_k)^2}.$$

§§6.2. Ruijsenaars 作用素と楕円類似

- 頂点作用素 $\eta(z)$ の楕円類似 $\eta(z;p)$ を次の様に導入する.

$$\eta(z;p) = \exp\Big(\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} \frac{1-p^n q^{-n} t^n}{1-p^n} a_{-n} z^n\Big) \exp\Big(-\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} a_n z^{-n}\Big).$$

- $[\eta(z)]_1$ は E_1 の自由場表示であったが, $[\eta(z;pq^{-1}t)]_1$ は次の Ruijsenaars 楕円差分作用素 (の 1 階版) と関係する.

$$D_n^1(p) := \sum_{i=1}^{n} \prod_{j\neq i} \frac{\Theta_p(tx_i/x_j)}{\Theta_p(x_i/x_j)} T_{q,x_i}.$$

- しかし, Feigin-Odesskii 代数の枠組みで高階の Ruijsenaars 作用素を理解することは, 今の所できていない.

§§6.3. Okounkov-Pandharipande 作用素との関連

- $q = e^{\hbar}$, $t = e^{\beta\hbar}$ として, $\hbar \to 0$ での極限を考えたい.

boson として a_n の代わりに次の λ_n を考える.

$$[\lambda_m, \lambda_n] = -\frac{1}{m}\frac{(1-q^m)(1-t^{-m})(1-p^m q^{-m} t^m)}{1-p^m}\delta_{m+n,0}.$$

λ_n を用いると $\eta(z;p)$ は簡単にかけて

$$\eta(z;p) = {}^{\circ}_{\circ} \exp\left(\sum_{n\neq 0}\lambda_n z^{-n}\right){}^{\circ}_{\circ}.$$

- $\bar{a}_n$: Virasoro 代数の Feigin-Fuchs 自由場表示に用いられる boson.

$$[\bar{a}_m, \bar{a}_n] = m\delta_{m+n,0}$$

$\bar{a}_n$ と λ_n の関係式は

$$\lambda_n = \frac{1}{|n|}\sqrt{-\frac{(1-q^{|n|})(1-t^{-|n|})(1-p^{|n|}q^{-|n|}t^{|n|})}{1-p^{|n|}}}\cdot \bar{a}_n.$$

- 直前の式を $\hbar$ で展開すると

$$\lambda_n = \Big[\beta^{1/2}\hbar + \frac{n}{4}\frac{1+p^n}{1-p^n}(1-\beta)\beta^{1/2}\hbar^2$$

$$+\frac{n^2}{96}\left(4(2-3\beta+2\beta^2)\beta^{1/2} - 3\frac{(1+p^n)^2}{(1-p^n)^2}(1-\beta)^2\beta^{1/2}\right)\hbar^3 + O(\hbar^4)\Big]\cdot \bar{a}_n.$$

- $[\eta(z;p)]_1$ は次の $\hbar$ 展開を持つ.

$$[\eta(z;p)]_1 = 1 + \beta\sum_{n\geq 1}\bar{a}_{-n}\bar{a}_n\hbar^2 + \Big[\beta(1-\beta)\sum_{n\geq 1}\frac{n}{2}\frac{1+p^n}{1-p^n}\bar{a}_{-n}\bar{a}_n$$

$$+\frac{\beta^{3/2}}{2}\sum_{n,m\geq 1}\left(\bar{a}_{-n}\bar{a}_n\bar{a}_{n+m} + \bar{a}_{-n-m}\bar{a}_n\bar{a}_m\right)\Big]\hbar^3 + O(\hbar^4).$$

注意. 最後に現れた式の $\hbar^3$ の項は Okounkov-Phandharipande が Hilb$(\mathbb{A}^2)$ の量子コホモロジーの計算に用いた演算子 $M(q,t_1,t_2)$ と一致する.

§7. 今後の課題

- Ruijsenaars 作用素との関連.
- 幾何学的表現論との関連.
- 古典極限.
- 他の root 系での類似.
- Ding-Iohara 代数の研究.
- Hecke 環との関連.