アーベル曲面上の安定層のモジュライとフーリエ向井変換

柳田伸太郎
神戸大学理学研究科 D1

2010 年 2 月 16 日

Abel 曲面について, **Fourier-向井変換**のコホモロジー上での作用を調べ,
安定層のモジュライと点の Hilbert スキームとの間の双有理写像を具体的に構成する.

(吉岡康太先生との共同研究.
arXiv:0906.4603　Semi-homogeneous sheaves, Fourier-Mukai transforms and moduli of stable sheaves on abelian surfaces)

0. イントロ (安定層のモジュライと Fourier-向井変換)
1. Abel 曲面上の Fourier-向井変換
2. 半等質層と半等質表示
3. 主定理 (向井先生の予想について)
4. モジュライと Hilbert スキームとの双有理写像

0-1 問題意識

- 本当はベクトル束全体のモジュライを考えたいが, これは “大きすぎて”スキームではパラメトライズできない. 安定性を導入してこの問題を解決する.

- 非特異射影曲面 (S, H) 上の torsion free 層 E が

H-安定 $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の部分層 $F \subset E$ に対し $n \gg 0$ で
$$\chi(F(nH))/\mathrm{rank}(F) < \chi(E(nH))/\mathrm{rank}(E)$$

- **安定層のモジュライ**

$$M_S^H(r, \xi, a) := \{H\text{-安定な } S \text{ 上の torsion free 層 } E \mid \mathrm{rank}(E) = r, c_1(E) = \xi, \chi(E) = a\}$$

○ GIT 商により準射影スキームとして構成される.

○ しかし, 構造はすぐには分からない.
空か否か, 既約性, 特異点, H への依存性 $\cdots$

0-2 Hilbert スキーム

安定層のモジュライは**点の Hilbert スキーム**と関連する.

$\mathrm{Hilb}^{\ell}(S) := \{Z \mid S$ 上の長さ ℓ の finite subscheme$\}$

○ $\mathrm{Hilb}^{\ell}(S) = M_S^H(1, 0, \ell)$

○ Serre 対応 : (階数 2 の) ベクトル束の構成法. イデアル層 $\mathcal{I}_Z$ の拡大としてベクトル束を得る.

○ **Fourier-向井変換**: 標準層が自明な場合, モジュライと Hilbert スキームとの間の双有理写像が構成できる.

- Fourier-向井変換 (FMT)

X, Y : 非特異射影多様体.
$p_X : X \times Y \to X$, $p_Y : X \times Y \to Y$: 自然な射影.
$\mathcal{E}^\bullet$: $\mathrm{Coh}(X \times Y)$ の有界導来圏 $\mathcal{D}(X \times Y)$ の対象.
FMT の (積分) 核と呼ばれる.

$$\Phi_{\mathcal{E}^\bullet}^{X \to Y} : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(Y) \qquad \text{equivalence}$$
$$? \mapsto \mathbb{R}p_{Y*}(p_X^*(?) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{E}^\bullet)$$

- 今回は Abel 曲面上の層のモジュライに注目し, FMT によってモジュライ間の双有理写像を構成する.

0-4 向井格子と FMT

- X, Y : Abel 曲面 ($\mathbb{C}$ 上)
  $\Phi : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(Y)$: FMT

- Φ は cohomology 上の同型を誘導する.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(X) & \xrightarrow[\sim]{\Phi} & \mathcal{D}(Y) \\ \mathrm{ch}\downarrow & & \downarrow\mathrm{ch} \\ H^{ev}(X,\mathbb{Q}) & \xrightarrow[\sim]{\Phi^H} & H^{ev}(Y,\mathbb{Q}) \\ \bigcup & & \bigcup \\ H^{ev}(X,\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\sim]{} & H^{ev}(Y,\mathbb{Z}) \end{array}$$

次の pairing に関して $H^{ev}(*,\mathbb{Z})$ 上の isometry を誘導する.

- 向井 pairing :

$v = (r_1, \xi_1, a_1),\ w = (r_2, \xi_2, a_2)$
$\in H^{ev}(X, \mathbb{Z}) = H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus H^2(X, \mathbb{Z}) \oplus H^4(X, \mathbb{Z})$
に対し

$$\langle v, w \rangle := \int_X (\xi_1 \cup \xi_2 - r_1 \cup a_2 - r_2 \cup a_1).$$

○ $(H^{ev}(X, \mathbb{Z}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ は $U^{\perp 4}$ (hyperbolic lattice の直和) と同型.

○ Grothendieck-Riemann-Roch から

$$\langle ch(E), ch(F) \rangle = -\chi(E, F).$$

- (向井. 1984)
$\mathbf{H}$: Abel 曲面 $\mathbf{X}$ 上の ample divisor

○ $\mathbf{M}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{H}}(\mathbf{v})$ は非特異で次元は $\langle \mathbf{v}^2 \rangle + 2$

○ $\mathbf{v}$ が原始的 (他の Chern 指標 $\mathbf{w}$ の整数倍になっていない) かつ $\mathbf{H}$ が $\mathbf{v}$ に関し generic なら, $\mathbf{M}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{H}}(\mathbf{v})$ は射影的

○ しかし, 空で無いための条件は不明だった.

- (吉岡. 2003)
$\mathbf{v}$ が原始的かつ $\mathbf{H}$ が $\mathbf{v}$ に関し generic なら, $\mathbf{M}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{H}}(\mathbf{v})$ は空ではなくかつ既約

1-2 Abel 曲面上の FMT

- (D.Orlov, 2002)

(1) $\mathbf{v}$: 原始的 かつ $\langle \mathbf{v}^2 \rangle = 0$ である Chern 指標.

○ $\mathbf{Y} := \mathbf{M}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{H}}(\mathbf{v})$ は Abel 曲面

○ もし普遍族 $\mathcal{E}$ が $\mathbf{Y} \times \mathbf{X}$ 上にあれば,

$$\Phi_{\mathcal{E}}^{\mathbf{X} \to \mathbf{Y}} : \mathcal{D}(\mathbf{X}) \to \mathcal{D}(\mathbf{Y}) \text{ は equivalence}$$

(普遍族 $\mathcal{E} \in \mathbf{Coh}(\mathbf{Y} \times \mathbf{X})$:

$\mathcal{E}|_{\{y\} \times \mathbf{X}}$ は Chern 指標が $\mathbf{v}$ である半等質層.)

(2) $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$: Abel 曲面, $\Phi : \mathcal{D}(\mathbf{X}) \to \mathcal{D}(\mathbf{Y})$: equivalence

○ $\exists \mathbf{v}$: 原始的かつ $\langle \mathbf{v}^2 \rangle = 0$ である Chern 指標 s.t.

$$\mathbf{Y} \cong \mathbf{M}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{H}}(\mathbf{v}),$$

○ $\exists \mathcal{E}$: $\mathbf{Y} \times \mathbf{X}$ 上の普遍族 $\exists \mathbf{k} \in \mathbb{Z}$ s.t. $\Phi \cong \Phi_{\mathcal{E}}^{\mathbf{X} \to \mathbf{Y}}[\mathbf{k}]$.

- 半等質層 $\mathbf{E}$: $\langle \mathrm{ch}(\mathbf{E})^2 \rangle = 0$ を満たす連接層のこと.
  - 半等質ベクトル束 $\mathbf{E}$ は次をみたす:
    $\forall p \in X, \exists L \in \mathrm{Pic}(X)$ s.t. $T_p{}^*E \cong E \otimes L$.
  - 半等質層は任意の偏極 $\mathbf{H}$ について半安定.
  - 半等質層が安定 $\iff$ $\mathrm{ch}(\mathbf{E})$ は原始的.
- FMT と半等質層
  - Abel 曲面上の FMT の核は必ず安定半等質層の普遍族.
  - FMT で半等質層は (up to shift で) 層にうつる.

層 F の semi-homogeneous presentation (半等質表示):

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & F & \to & E_1 & \to & E_2 & \to & 0, \quad \text{or} \\
0 & \to & E_1 & \to & E_2 & \to & F & \to & 0.
\end{array}
$$

E_1, E_2 : 半等質層 s.t.
$\mathrm{ch}(E_i) = \ell_i v_i$, $\ell_i \in \mathbb{Z}$, v_i: 原始的 Chern 指標
と表した時に
$\langle v_1, v_2 \rangle = -1$, $(\ell_1 - 1)(\ell_2 - 1) = 0$.

- 安定層 $\mathbf{F}$ に半等質表示

$$0 \to \mathbf{F} \to \mathbf{E}_1 \to \mathbf{E}_2 \to 0$$

が存在したと仮定. さらに $\mathbf{v}(\mathbf{E}_1) = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}(\mathbf{E}_2) = \ell \mathbf{v}_2$ だとする.

○ 仮定 $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = -1$ から $\mathbf{M}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{H}}(\mathbf{v}_2) \times \mathbf{X}$ 上に普遍族 $\mathcal{E}$ があって, $\mathcal{E}|_{\{y\}\times \mathbf{X}}$ は Chern 指標が $\mathbf{v}_2$ である半等質層.

○ $\mathbf{Y} := \mathbf{M}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{H}}(\mathbf{v}_2)$ とおく. FMT $\Phi := \Phi_{\mathcal{E}^\vee}^{\mathbf{X}\to\mathbf{Y}}$ によって以下の完全列を得る.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \Phi^0(F) & \to & 0 & \to & 0 & & \\
& \to & \Phi^1(F) & \to & 0 & \to & 0 & & \\
& \to & \Phi^2(F) & \to & \Phi^2(E_1) & \to & \Phi^2(E_2) & \to & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \Phi^0(F) & \to & 0 & \to & 0 & & \\
& \to & \Phi^1(F) & \to & 0 & \to & 0 & & \\
& \to & \Phi^2(F) & \to & \mathcal{O}_Y & \to & \mathcal{O}_Z & \to & 0
\end{array}
$$

ここで Z は Y の finite subscheme.
よって $\Phi(F)$ は finite subscheme のイデアル層と up to shift で同型.

○ 半等質表示があれば, モジュライと Hilbert スキームの間に写像がつくれる

- 仮定：数値的な条件のみで記述される.
- ○ $\mathbf{NS(X) \cong \mathbb{Z}H}$.
- ○ Chern 指標 $\mathbf{v}$ に関する次の不定方程式に解が存在.

$$\mathbf{v} = \pm(\mathbf{v}_1 - \ell \mathbf{v}_2),$$

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$: primitive Chern character,

$$\langle \mathbf{v}_1^2 \rangle = \langle \mathbf{v}_2^2 \rangle = 0, \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = -1.$$

- 結論：安定層のモジュライ $\mathbf{M_X^H(v)}$ の generic な元は半等質表示を持つ.

向井茂先生の 1980 年の予想の解決

(「アーベル曲面上のベクトル束の分類について」数理解析講究録 409 (1980), 予想 1')

- FMT $\Phi : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(Y)$ が cohomology 上に誘導する同型 Φ^H を cohomological FMT と呼ぶ.

○ $\mathcal{D}(X) \cong \mathcal{D}(Y)$ なら $NS(X) \cong NS(Y)$.
○ よって $NS(X) \cong \mathbb{Z}$ なら, cohomological FMT は 3 次行列で表現できる.

○ 実際には, 次の定理が示せる:
$NS(X) \cong \mathbb{Z}$ の時, Φ^H 達のなす群は

$$G := \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \;\middle|\; x^2, y^2, z^2, w^2, \frac{xy}{\sqrt{n}}, \frac{zw}{\sqrt{n}} \in \mathbb{Z} \right\} / \{\pm 1\}$$

と同型. $(n := (H^2)/2)$

○ G は Atkin-Lehner 群というものと”殆ど一致する”.

- さらに $X \cong \mathrm{Pic}^0(X)(\iff n=1)$ と仮定すると, $M_X^H(v)$ と $\mathrm{Hilb}^\ell(X)$ との間の双有理写像を具体的に構成することができる.
$\ell := \langle v^2 \rangle /2$, $v = (r, dH, a)$ とおく.

○ $X \cong \mathrm{Pic}^0(X)$ なら $G \cong SL(2,\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$

- 結果: 判別式が ℓ の 2 次形式の類数が 1 なら, FMT Φ_γ が双有理写像 $M_X^H(v) \cdots \to X \times \mathrm{Hilb}^\ell(X)$ を引き起こす.

○ 不定方程式 $2dpq - ap^2 - rq^2 = \pm 1$ の解 (p, q) のうち $|p|$ が最小のものをとる.
○ 行列

$$\gamma := \begin{bmatrix} q & \pm(dq - ap) \\ -p & \pm(dp - rq) \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$$

から FMT Φ_γ を一意に決めることができる.

● $n \neq 1$ でも FMT の同様の記述が可能 (少し複雑になるが).

- $\mathbf{NS(X)} \cong \mathbb{Z}\mathbf{H}$ でなくても，
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\mathbf{1}$ かつ $\langle \mathbf{u}^2 \rangle = \mathbf{0}$ なる Chern 指標 $\mathbf{u}$ があれば
$\mathbf{M}_\mathbf{X}^\mathbf{H}(\mathbf{v})$ は $\mathbf{Pic}^0(\mathbf{X}) \times \mathbf{Hilb}^\ell(\mathbf{X})$ と双有理同値.
○ 但し，双有理写像の具体的構成は不明.

- 未解決問題:(向井先生の予想 2)
$\mathbf{NS(X)} \cong \mathbb{Z}\mathbf{H}$ かつ $\mathbf{X} \cong \mathbf{Pic}^0(\mathbf{X})$ なら
$(2\ell + 2)$-次元の安定層のモジュライの双有理同値類の数
$=$ 判別式が ℓ の 2 次形式の類数.

○ $\ell \leq \mathbf{9}$ なら成立.

- $\mathbf{NS(X)} \cong \mathbb{Z}\mathbf{H}$ かつ $\mathbf{X} \cong \mathbf{Pic}^0(\mathbf{X})$ なら 8 次元以下のモジュライは $\mathbf{Pic}^0(\mathbf{X}) \times \mathbf{Hilb}^\ell(\mathbf{X})$ と同型.

- K3 曲面については，半等質層にあたるものの分類 (FMT の分類) すら難しい.

ご清聴ありがとうございました