アーベル曲面上の層のモジュライとフーリエ向井変換

柳田　伸太郎[*1]
神戸大学　理学研究科　数学専攻

1　はじめに

今回の講演は吉岡康太先生との共同研究 [YY] に基づきます．研究の発端は，向井茂先生が 1980 年前後に考察した，アーベル曲面上の安定層のモジュライに関するある予想 [M80] にあります．それは，半等質層とフーリエ向井変換を用いて，安定層のモジュライ空間の構造が算術的な条件の下で決定できるというものです．

半等質層というのはアーベル曲面上の半安定層であり，その分類，構成方法やコホモロジーが [M78] で調べられました．これを基に一般の安定層を構成する事を考えます．その際，semi-homogeneous presentation という概念が重要になります．我々の主定理は，曲面のピカール数が 1 の時，この種の分解の存在が安定層のチャーン指標のみを用いて判定できるというものです．更に，上で触れた向井先生の予想も肯定的に解決できます．

また安定層のフーリエ変換の記述において，算術群や整数係数 2 次形式が重要な役割を果たします．これから，安定層のモジュライと点のヒルベルトスキームとの間の双有理変換を明示的に構成する事もできます．

2　準備

2.1　向井格子

本稿に現れるスキーム，代数多様体は全て複素数体上のものとします．

X はアーベル曲面，$\mathrm{NS}(X)$ をその Néron-Severi 群とします．X の**向井格子**とは偶数次コホモロジー群の部分群 $H^{\mathrm{ev}}(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{alg}} := H^0(X,\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{NS}(X) \oplus H^4(X,\mathbb{Z})$ と**向井ペアリング**

$$\langle (x_0,x_1,x_2),(y_0,y_1,y_2)\rangle := \int_X (x_1 \cup y_1 - x_0 \cup y_2 - x_2 \cup y_0), \qquad x_i, y_i \in H^{2i}(X,\mathbb{Z})$$

の組 $(H^{\mathrm{ev}}(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ の事です．

X 上の連接層のなすアーベル圏を $\mathrm{Coh}(X)$ で，その有界導来圏を $\mathbf{D}(X)$ で表す事にします．$E^{\bullet} \in \mathbf{D}(X)$ の**向井ベクトル**をその Chern 指標で $v(E^{\bullet}) := \mathrm{ch}(E^{\bullet}) = (\mathrm{rk}(E^{\bullet}), c_1(E^{\bullet}), \chi(E^{\bullet})) \in H^{\mathrm{ev}}(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ と定義します．

2.2　安定層のモジュライ

定義 2.1 (Gieseker-丸山)**.** (X,H) を非特異射影多様体 X とその上の豊富な因子類 H の組とする．X 上の torsion free 層 E に対し $p_E(n) := \chi(E(nH))/\,\mathrm{rk}(E)$ と置く．E が H に関して安定 (resp. 半安定) とは，任意の部分層 $0 \neq F \subsetneq E$ に対し $p_F(n) < p_E(n)$ (resp. $p_F(n) \le p_E(n)$) が $n \gg 0$ で成立する事をいう．

$M_X^H(r,\xi,a) := \{E \mid H$ に関して安定で $(\mathrm{rk}(E), c_1(E), c_2(E)) = (r,\xi,a)\}$ は準射影的スキームの構造をもち，半安定層の S-同値類を付け加える事で射影的スキーム $M_X^H(r,\xi,a)^{ss}$ にコンパクト化されます．

X がアーベル曲面の時，上の (r,ξ,a) の替わりに向井ベクトル v を用いる方がよい場合があります．そこで以下では位相不変量が v で特徴づけられる安定層のモジュライ空間を $M_X^H(v)$ と書く事にします．

2.3　フーリエ向井変換

定義 2.2. X と Y を非特異射影多様体とする．それらの積多様体の導来圏の対象 $\mathbf{E}^{\bullet} \in \mathbf{D}(X \times Y)$ について，

[*1] yanagida@math.kobe-u.ac.jp, 日本学術振興会特別研究員 (DC1)

$$\Phi^{\mathbf{E}^\bullet}_{X\to Y}\colon \mathbf{D}(X)\to\mathbf{D}(Y)\quad x\mapsto \mathbf{R}p_{Y*}(\mathbf{E}^\bullet\overset{\mathbf{L}}{\otimes}p_X^*(x)),$$

で積分関手 $\Phi^{\mathbf{E}^\bullet}_{X\to Y}$ を定義する．ここで $p_X\colon X\times Y\to X$ と $p_Y\colon X\times Y\to Y$ は射影．もし $\Phi^{\mathbf{E}^\bullet}_{X\to Y}$ が圏同値を与えるなら, それを**フーリエ向井変換**と呼ぶ．本稿では FMT と略記する．$E^\bullet$ を積分核と呼ぶ.

アーベル曲面上の FMT は Orlov の仕事により分類されていて, その積分核は半等質層の普遍族になります.

2.4 半等質層

X をアーベル曲面とします．$x\in X$ に対応する X 上の平行移動を T_x で表わします．X の dual variety を $\widehat{X}$ と書きます．また $\mathbf{P}$ で X の Poincaré 束を表わします．これは $X\times\widehat{X}$ 上の直線束でした.

定義 2.3. $E\in\mathrm{Coh}(X)$ に対し $S(E):=\{(x,\hat{x})\in X\times\widehat{X}\mid T_x^*(E)\otimes\mathbf{P}|_{X\times\hat{x}}\cong E\}$ は $X\times\widehat{X}$ の部分アーベル多様体であり, $\dim S(E)\le 2$ である (証明は [M78, Proposition 3.3])．$\dim S(E)=2$ となる E を**半等質層**と呼ぶ.

半等質ベクトル束 E は $T_x\otimes E\cong M\otimes X$, $M\in\mathrm{Pic}^0(X)$ となるものです．“半等質” という言葉はこれに由来します．半等質層の分類については [M78] と [Y09, §4] をご覧ください．更に半等質層のコホモロジーや FMT の下での半等質層の振る舞いも決定できます．詳しくは [M78], [YY, Fact 2.12,Proposition 2.14] をご覧下さい.

3 Semi-homogeneous presentation

定義 3.1. アーベル曲面 X 上の連接層 $E\in\mathrm{Coh}(X)$ の *semi-homogeneous presentation* とは短完全列

$$0\to E\to E_1\to E_2\to 0\quad \text{又は}\quad 0\to E_1\to E_2\to E\to 0$$

であって次の条件を満たすものの事である: $v(E_1)=\ell_1v_1$, $v(E_2)=\ell_2v_2$ によって正整数 ℓ_1, ℓ_2 と原始的向井ベクトル v_1, v_2 を定めた時, $(\ell_1-1)(\ell_2-1)=0$, $\langle v_1,v_2\rangle=-1$ かつ $\langle v_1^2\rangle=\langle v_2^2\rangle=0$.
上の各表示を kernel presentation 及び cokernel presentation と呼ぶ.

条件から E_1, E_2 は半等質層で, これが名前の由来です．この様な層の分解があると, フーリエ向井変換の下での振る舞いが統制できます [YY, Proposition 3.2]．すると, 安定層 E がいつ semi-homogeneous presentation を持つかが問題になります．$\mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X)=1$ の場合は, 向井ベクトルのみで存在条件が書き下せます.

定義 3.2. 向井ベクトル v に対し, 自然数 ℓ_1,ℓ_2 と正の原始的向井ベクトル v_1,v_2 であって

$$\begin{aligned}&v=\pm(\ell_2v_2-\ell_1v_1),\\&(\ell_1-1)(\ell_2-1)=0,\quad\langle v_1^2\rangle=\langle v_2^2\rangle=0,\quad\langle v_1,v_2\rangle=-1,\quad\mu(v_1)<\mu(v_2)\end{aligned}\tag{3.1}$$

を満たすものを考える．(3.1) を *numerical equation*, 解 (v_1,v_2,ℓ_1,ℓ_2) を v の *numerical solution* と呼ぶ.

次の結果が今回の研究の主結果です.

定理 3.3 ([YY, Theorem 3.6])**.** $\mathrm{NS}(X)=\mathbb{Z}H$ と仮定し, v を $\langle v^2\rangle>0$ なる向井ベクトルとする.

1. もし v に 2 つ以上 numerical solution が存在すれば, $M_X^H(v)$ の一般の元は kernel presentation と cokernel presentation を持つ．どちらの presentation も一意に決まる.
2. もし v の numerical solution が 1 つのみ存在すれば, $M_X^H(v)$ の一般の元は kernel presentation 又は cokernel presentation のどちらかを持つ．その presentation は一意に決まる.

定理の証明には, numerical solution (v_1,v_2,ℓ_1,ℓ_2) に対し半等質層 E_1, E_2 であって $v(E_i)=\ell_iv_i$ $(i=1,2)$ なるものからなる複体 $E_1\to E_2$ (この 2 項以外はゼロ層) のモジュライ空間 $\mathfrak{M}^+(v_1,v_2,\ell_1,\ell_2)$ を構成する必要があります．このモジュライについては [YY, §4] をご覧下さい.

4 semi-homogeneous presentation の応用：向井のある予想について

定理 3.3 を応用して次の定理が示せます．これは [M80, 予想 1, 予想 1′] を精密に述べたものです．

定理 4.1. X を $\mathrm{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ なるアーベル曲面とし，v を向井ベクトルで $\ell := \langle v^2 \rangle/2$ が正のものとする．v の numerical solution が少なくとも 1 つ存在すると仮定する．

1. v の numerical solution$(v_1, v_2, \ell_1, \ell_2)$ のうち $\mathrm{rk}(v_i)$ が最小のものを考える．ここで $i \in \{1, 2\}$ は $\ell_i = \ell$ となるものの方とする．この時，一般の $[E_1 \xrightarrow{f} E_2] \in \mathfrak{M}^+(v_1, v_2, \ell_1, \ell_2)$ は単射もしくは全射．
2. 1 の状況の下で，f の余核もしくは核は安定層である．
3. $M_X^H(v)$ の一般の元は 1 で考えた $(v_1, v_2, \ell_1, \ell_2)$ に対応する semi-homogeneous presentation を持つ．

5 コホモロジー的フーリエ向井変換の行列表示

アーベル曲面間の FMT $\Phi : \mathbf{D}(X) \to \mathbf{D}(Y)$ から向井格子の同型 $\Phi^H : H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}} \to H^{\mathrm{ev}}(Y, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ が引き起こされます Φ^H を今後**コホモロジー的** *FMT* と呼びます．これを明示的に書き下してみましょう．

以下 $\mathrm{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ と仮定し，$n := (H^2)/2$ とします．$H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ は次の加群 $\mathrm{Sym}_2(\mathbb{Z}, n)$ と同型です:

$$\iota_X : H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}_2(\mathbb{Z}, n) := \left\{ \begin{bmatrix} x & y\sqrt{n} \\ y\sqrt{n} & z \end{bmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}, \quad (r, dH, a) \mapsto \begin{bmatrix} r & d\sqrt{n} \\ d\sqrt{n} & a \end{bmatrix}.$$

$\mathrm{Sym}_2(\mathbb{Z}, n)$ 上の双線型形式 B を

$$B(X, X') := 2yy' - (xz' + zx'), \quad X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}, \; X' = \begin{bmatrix} x' & y' \\ y' & z' \end{bmatrix} \in \mathrm{Sym}_2(\mathbb{Z}, n).$$

で定義します．すると $\langle v, v' \rangle = B(\iota_X(v), \iota_X(v'))$ であり，ι_X は格子の同型を与えます．

$\mathrm{FM}(X) := \{Y : 代数多様体 \mid \mathbf{D}(X) \simeq \mathbf{D}(Y)\}/\sim$ とします．$\mathrm{FM}(X)$ の任意の元 Y も $\mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(Y) = 1$ を満たし，$\mathrm{NS}(Y)$ の ample generator を $\widehat{H}$ と書くと $(\widehat{H}^2) = 2n$ となります．そこで FMT Φ: $\mathbf{D}(Y) \to \mathbf{D}(Z)$ に対し $\theta(\Phi) := \iota_Z \circ \Phi^H \circ \iota_Y^{-1}$ と定義できます．$Z \in \mathrm{FM}(X)$ に対し

$$\mathcal{E}(Z) := \bigcup_{Y \in \mathrm{FM}(X)} \{\Phi_{Y \to Z}^{E[2k]} \in \mathrm{Eq}(\mathbf{D}(Y), \mathbf{D}(Z)) \mid E \in \mathrm{Coh}(Y \times Z), k \in \mathbb{Z}\}$$

と置きます．ι_Y, ι_Z 及び Φ^H は格子の isometry なので $\theta(\Phi) \in \mathrm{O}(B)$ です．

定理 5.1.

$$G := \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \middle| \, x^2, y^2, z^2, w^2, \frac{xy}{\sqrt{n}}, \frac{zw}{\sqrt{n}} \in \mathbb{Z} \right\}$$

で群 G を定める．各 $Z \in \mathrm{FM}(X)$ に対して次の全単射が存在する: $\theta(\mathcal{E}(Z)) \cong G/\{\pm 1\}$.

6 モジュライの双有理写像

最後に安定層のモジュライと点のヒルベルトスキームとの対応を見ます．[Y09] で一般のアーベル曲面 X について双有理写像 $M_X^H(v) \cdots \to X \times \mathrm{Hilb}^{\langle v^2 \rangle/2}(X)$ が存在する事が証明されていますが，ここでは主偏極アーベル曲面の場合にこの写像を明示化したいと思います．

向井ベクトル $v = (r, dH, a)$ に付随した 2 次形式を

$$Q_v(x,y) := -(rx^2+2xy+ay^2) = -\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & d \\ d & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

と定義します．等方的向井ベクトル w は整数 p,q でもって $w=(p^2,pqH,q^2)$ と書けます．この時 v と w の向井ペアリングは用意した 2 次形式を用いて $\langle w,v\rangle = Q_v(q,-p)$ と書き直せます．

X が主偏極なら $\mathrm{FM}(X)=\{X\}$ であることが知られています．そして先の算術群 G は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ になります．すると古典的な 2 次不定方程式の理論が役立ちます．

定理 6.1. X を主偏極アーベル曲面だとする．$v=(r,dH,a)$ を向井ベクトルであって次を満たすものとする．

$$\ell := \langle v^2\rangle/2 \text{ は正であって平方数ではない．また判別式が } \ell \text{ である 2 次形式の類数は 1 である．} \tag{6.1}$$

この時双有理写像 $M_X^H(v) \cdots \to X \times \mathrm{Hilb}^\ell(X)$ は以下の様に記述できる．

1. 不定方程式 $2p_1q_1d - p_1^2a - q_1^2r = \epsilon$ $(\epsilon=\pm1)$ の解のうち $|p_1|$ が最小のものを取り，それから向井ベクトル $v_1=(p_1^2,p_1q_1H,q_1^2)$ を作る． この時，行列 $\gamma := \pm\begin{bmatrix} q_1 & \epsilon(dq_1-ap_1) \\ -p_1 & \epsilon(dp_1-rq_1) \end{bmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ は ${}^t\gamma Q_v \gamma = -\epsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\ell \end{bmatrix}$. をみたす．
2. $v_2 := (p_2^2, p_2q_2H, q_2^2)$ と置く．但し $q_2=-\epsilon(dq_1-ap_1)$ 及び $p_2=\epsilon(dp_1-rq_1)$．この時 $M_X^H(v)$ の一般の元は numerical solution $(v_1,v_2,\ell,1)$ もしくは $(v_2,v_1,1,\ell)$ に対応する semi-homogeneous presentation を持つ．更に $\theta(\Phi)=\gamma$ なる FMT$\Phi := \Phi_{X\to X}^{\mathbf{E}}$ もしくはそれと dualizing functor との合成 $\mathcal{D}_X \circ \Phi$ が双有理写像 $M_X^H(v)\cdots\to X\times\mathrm{Hilb}^\ell(X)$ を与える．

最後に次元が 4 以上 20 以下 (i.e. $1\le\ell\le9$) のモジュライの双有理同値類について述べます．定理 6.1 から ℓ を判別式とする 2 次形式が重要だと分かります．以下に 2 次形式の同値類を挙げます ([YY, pp. 49])．

ℓ	Q_v	ℓ	Q_v
1	$2xy$, x^2-y^2	6	x^2-6y^2
2	x^2-2y^2	7	x^2-7y^2
3	x^2-3y^2	8	x^2-8y^2
4	x^2-4y^2	9	$2x^2+2xy-4y^2$, x^2-9y^2
5	$2x^2+2xy-2y^2$, x^2-5y^2	10	$3x^2+2xy-3y^2$, x^2-10y^2

命題 6.2 ([YY, Proposition 8.12])**.**
1. $\ell=1,2,3,4,6,7,8$ なら $M_X^H(v)$ は $X\times\mathrm{Hilb}^\ell(X)$ と双有理同値.
2. $\ell=5$ なら $M_X^H(v)$ は $M_X^H(2,H,-2)$ もしくは $X\times\mathrm{Hilb}^\ell(X)$ と双有理同値.
3. $\ell=9$ なら $M_X^H(v)$ は $M_X^H(2,H,-4)$ か $X\times\mathrm{Hilb}^\ell(X)$ と双有理同値.

注意 6.3. $\ell=10$ の時は $M_X^H(3,H,-3)$ と $X\times\mathrm{Hilb}^{10}(X)$ が双有理同値か否か分かっていません．

参考文献

[M78] S. Mukai, *Semi-homogeneous vector bundles on an abelian variety*, J. Math. Kyoto Univ. **18** (1978), no. 2, 239–272.

[M80] **向井茂**, **アーベル曲面上のベクトル束の分類について**, **数理解析研究所講究録 409** (1980), 103–127.

[YY] S. Yanagida, K. Yoshioka, *Semi-homogeneous sheaves, Fourier-Mukai transforms and moduli of stable sheaves on abelian surfaces*, preprint, arXiv:0906.4603.

[Y09] K. Yoshioka, *Fourier-Mukai transform on abelian surfaces*, Math. Ann. 345 (2009), no. 3, 493–524.