Feigin-Odesskii 代数と Macdonald 多項式

白石潤一　　(東大数理)
柳田伸太郎　(神戸大理)

2009 年 3 月 29 日
日本数学会 2009 年度年会
無限可積分系セッション

概要と目次

Macdonald 対称関数 $P_\lambda(x; q, t)$ は
ある差分作用素族の同時固有関数である.

この差分作用素族の自由場表示を考えると,
B. Feigin と A. Odesskii の導入した代数の類似物が現れる.

この代数構造と差分作用素族の性質を考える.

(B. Feigin, 白石, 橋爪, 柳田の共同研究)

1. 退化 $\mathbb{CP}^1$ 上の Feigin-Odesskii 代数 $\mathcal{A}$
2. Gordon フィルターと交叉空間
3. Macdonald 差分作用素の自由場表示
4. 最後に

2. 退化 $\mathbb{CP}^1$ 上の Feigin-Odesskii 代数 $\mathcal{A}$

q_1, q_2 : 不定元, $F := \mathbb{Q}(q_1, q_2)$, $q_3 := 1/q_1q_2$.

Dfn. 1. ベクトル空間 $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n(q_1, q_2)$ を, 次の様に帰納的に定める.

(a)

(b-1)

(b-2)

(b-3)

(b-4)

2. 退化 $\mathbb{CP}^1$ 上の Feigin-Odesskii 代数 $\mathcal{A}$

q_1, q_2 : 不定元, $\quad F := \mathbb{Q}(q_1, q_2), \quad q_3 := 1/q_1 q_2.$

Dfn. 1. ベクトル空間 $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n(q_1, q_2)$ を, 次の様に帰納的に定める.

(a) $\quad \mathcal{A}_0 := F.$

(b-1)

(b-2)

(b-3)

(b-4)

2. 退化 $\mathbb{CP}^1$ 上の Feigin-Odesskii 代数 $\mathcal{A}$

q_1, q_2 : 不定元, $\quad F := \mathbb{Q}(q_1, q_2), \quad q_3 := 1/q_1q_2.$

Dfn. 1. ベクトル空間 $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n(q_1, q_2)$ を, 次の様に帰納的に定める.

(a) $\quad \mathcal{A}_0 := F.$

(b-1) $\quad \mathcal{A}_n$ の元 f は n 変数対称有理式.

(b-2)

(b-3)

(b-4)

2. 退化 $\mathbb{CP}^1$ 上の Feigin-Odesskii 代数 $\mathcal{A}$

q_1, q_2 : 不定元, $F := \mathbb{Q}(q_1, q_2)$, $q_3 := 1/q_1 q_2$.

Dfn. 1. ベクトル空間 $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n(q_1, q_2)$ を, 次の様に帰納的に定める.

(a) $\mathcal{A}_0 := F$.

(b-1) $\mathcal{A}_n$ の元 f は n 変数対称有理式.

(b-2) 極は $z_i = z_j$ のみに高々2 位で存在.

(b-3)

(b-4)

2. 退化 $\mathbb{CP}^1$ 上の Feigin-Odesskii 代数 $\mathcal{A}$

q_1, q_2 : 不定元, $\quad F := \mathbb{Q}(q_1, q_2)$, $\quad q_3 := 1/q_1q_2$.

Dfn. 1. ベクトル空間 $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n(q_1, q_2)$ を, 次の様に帰納的に定める.

(a) $\quad \mathcal{A}_0 := F$.

(b-1) $\quad \mathcal{A}_n$ の元 f は n 変数対称有理式.

(b-2) $\quad$ 極は $z_i = z_j$ のみに高々2 位で存在.

(b-3) $\quad f(z_1, q_1z_1, q_1q_2z_1, z_4, \cdots) = f(z_1, q_2z_1, q_1q_2z_1, z_4, \cdots) = 0$.

(b-4)

2. 退化 $\mathbb{CP}^1$ 上の Feigin-Odesskii 代数 $\mathcal{A}$

q_1, q_2 : 不定元, $F := \mathbb{Q}(q_1, q_2)$, $q_3 := 1/q_1q_2$.

Dfn. 1. ベクトル空間 $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n(q_1, q_2)$ を, 次の様に帰納的に定める.

(a) $\mathcal{A}_0 := F$.

(b-1) $\mathcal{A}_n$ の元 f は n 変数対称有理式.

(b-2) 極は $z_i = z_j$ のみに高々2 位で存在.

(b-3) $f(z_1, q_1z_1, q_1q_2z_1, z_4, \cdots) = f(z_1, q_2z_1, q_1q_2z_1, z_4, \cdots) = 0$.

(b-4) $\lim\limits_{z_1\to 0} f = \lim\limits_{z_1\to\infty} f \in \mathcal{A}_{n-1}$.

2. 退化 $\mathbb{CP}^1$ 上の Feigin-Odesskii 代数 $\mathcal{A}$

q_1, q_2 : 不定元, $\quad F := \mathbb{Q}(q_1, q_2), \quad q_3 := 1/q_1 q_2.$

Dfn. 1. ベクトル空間 $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n(q_1, q_2)$ を, 次の様に帰納的に定める.

(a) $\quad \mathcal{A}_0 := F.$

(b-1) $\quad \mathcal{A}_n$ の元 f は n 変数対称有理式.

(b-2) $\quad$ 極は $z_i = z_j$ のみに高々2 位で存在.

(b-3) $\quad f(z_1, q_1 z_1, q_1 q_2 z_1, z_4, \cdots) = f(z_1, q_2 z_1, q_1 q_2 z_1, z_4, \cdots) = 0.$

(b-4) $\quad \displaystyle\lim_{z_1 \to 0} f = \lim_{z_1 \to \infty} f \in \mathcal{A}_{n-1}.$

次数付きベクトル空間を $\displaystyle\mathcal{A} := \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{A}_n$ と定める.

Dfn. 2. $f \in \mathcal{A}_n$ と $g \in \mathcal{A}_m$ に対し $*$ 積を導入する.

$$(f * g)(z_1, \cdots, z_{n+m}) :=$$
$$\mathrm{Sym}\left(f(z_1, \cdots, z_n)\, g(z_{n+1}, \cdots, z_{n+m}) \prod_{\substack{1 \le \alpha \le n \\ n+1 \le \beta \le n+m}} \omega(z_\alpha, z_\beta) \right).$$

但し Sym は対称化, ω は次の有理式

$$\omega(z_\alpha, z_\beta; q_1, q_2, q_3) := \frac{(z_\alpha - q_1 z_\beta)(z_\alpha - q_2 z_\beta)(z_\alpha - q_3 z_\beta)}{(z_\alpha - z_\beta)^3}.$$

Thm. 1. $*$ は $\mathcal{A}$ の中で閉じている.

$(\mathcal{A}, *)$ は $\mathbf{F}$ 上の単位的かつ結合的代数.

Thm. 1. $*$ は $\mathcal{A}$ の中で閉じている.

$(\mathcal{A}, *)$ は $\mathbf{F}$ 上の単位的かつ結合的代数.

さらに可換である.

Thm. 1. $*$ は $\mathcal{A}$ の中で閉じている.

$(\mathcal{A}, *)$ は $\mathbf{F}$ 上の単位的かつ結合的代数.

さらに可換である.

また $\dim_{\mathbf{F}} \mathcal{A}_n$ は n の分割数に等しい.

Thm. 1. $*$ は $\mathcal{A}$ の中で閉じている.

$(\mathcal{A}, *)$ は $\mathbf{F}$ 上の単位的かつ結合的代数.

さらに可換である.

また $\dim_{\mathbf{F}} \mathcal{A}_n$ は n の分割数に等しい.

Rmk.

- 元の Feigin-Odesskii 代数は,
  楕円曲線上の対称関数に極と零点の条件を課して定義される.
  楕円曲線の 1 つのサイクルをピンチすると,
  $\{0, \infty\} \subset \mathbb{CP}^1$ での条件が現れる. それが条件 (b-4).
- 証明には次の Gordon フィルトレーションが必要になる.

2. Gordon フィルターと交叉空間

Dfn. 3. n の分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ に対し,

線形写像 $\varphi_\lambda^{(q_i)} : \mathcal{A}_n \to F(y_1, \cdots, y_\ell)$ を

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_n) \quad \mapsto \quad f(&y_1, q_i y_1, \cdots, q_i^{\lambda_1 - 1} y_1, \\ &y_2, q_i y_2, \cdots, q_i^{\lambda_2 - 1} y_2, \\ &\cdots \\ &y_\ell, q_i y_\ell, \cdots, q_i^{\lambda_\ell - 1} y_\ell) \end{aligned}$$

で定め, 次の部分空間 (Gordon フィルター) を定義する.

$$\mathcal{A}_{n,\lambda}^{(q_i)} := \bigcap_{\mu \not\leq \lambda} \ker \varphi_\mu^{(q_i)}.$$

ここで $<$ はドミナンス半順序.

Thm. 2. $\mathbf{n}$ の任意の分割 $\boldsymbol{\lambda}$ に対して

$$\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathcal{A}_{n,\lambda}^{(q^{-1})} \cap \mathcal{A}_{n,\lambda'}^{(t)}\right) = 1.$$

Thm. 2. n の任意の分割 λ に対して

$$\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathcal{A}_{n,\lambda}^{(q^{-1})}\cap\mathcal{A}_{n,\lambda'}^{(t)}\right)=1.$$

ここで次の置き換えをした.

$$F=\mathbb{Q}(q_1,q_2)\mapsto\mathbb{C},\quad q_1\mapsto q^{-1},\quad q_2\mapsto t,$$

$$|q|<1,\quad |t|>1,\quad q^it^j\neq 1\ \forall\,(i,j)\in\mathbb{Z}^2\setminus(0,0).$$

Thm. 2. $\mathbf{n}$ の任意の分割 $\boldsymbol{\lambda}$ に対して

$$\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathcal{A}_{n,\lambda}^{(q^{-1})}\cap\mathcal{A}_{n,\lambda'}^{(t)}\right)=1.$$

ここで次の置き換えをした.

$$F=\mathbb{Q}(q_1,q_2)\mapsto\mathbb{C},\quad q_1\mapsto q^{-1},\quad q_2\mapsto t,$$

$$|q|<1,\quad |t|>1,\quad q^it^j\neq 1\ \forall\,(i,j)\in\mathbb{Z}^2\setminus(0,0).$$

Rmk. 証明には自由場 (頂点作用素) のテクニックと Macdonald 対称関数の性質が必要となる.

3. Macdonald 差分作用素の自由場表示

生成元 a_n $(n \in \mathbb{Z})$, 関係式

$$[a_n, a_m] = n \frac{1 - q^{|n|}}{1 - t^{|n|}} \delta_{n+m,0}\, a_0$$

で定義される Heisenberg 代数 $\mathfrak{h}$ と, Fock 表現 $\mathcal{F}$ を考える.

次の同型で, 対称関数を $\mathcal{F}$ の元と同一視する.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\sim} & \Lambda_{\mathbb{C}} \\ a_{-n} \cdot 1 & \mapsto & p_n := \sum_i x_i^n. \end{array}$$

$E \in \mathrm{End}(\Lambda_{\mathbb{C}})$ の $\mathrm{End}(\mathcal{F})$ における実現 $\widehat{E}$ を E の自由場表示という.

Dfn. 4. 頂点作用素

$$\eta(z) =: \exp\Big(-\sum_{n\neq 0} \frac{1-t^n}{n} a_n z^{-n} \Big) :$$

を用いて, $f \in \mathcal{A}_n(q^{-1}, t)$ に対し $\mathrm{End}(\mathcal{F})$ の元

$$\mathcal{O}(f) := \oint_{C_n} \Big(\prod_{j=1}^{n} \frac{dz_j}{2\pi i\, z_j} \Big) \frac{f(z_1, \cdots, z_n)}{\prod_{k<\ell} \omega(z_k, z_\ell; 1/q, t, q/t)} \eta(z_1) \cdots \eta(z_n)$$

を定める. 但し $C_n := \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_i| = 1\}$.

Prop. $\mathcal{O}(f * g) = \mathcal{O}(f)\mathcal{O}(g)$, $\mathcal{O}$ は単射.

$\forall f \in \mathcal{A}_n$ について, $\mathcal{O}(f)$ は $P_\lambda(x; q, t)$ 達を固有関数に持つ.

Prop. $\mathcal{O}(f * g) = \mathcal{O}(f)\mathcal{O}(g)$, $\mathcal{O}$ は単射.

$\forall f \in \mathcal{A}_n$ について, $\mathcal{O}(f)$ は $P_\lambda(x; q, t)$ 達を固有関数に持つ.

Thm. 2'. 次を満たす $f_\mu \in \mathcal{A}_n(q^{-1}, t)$ が一意に存在し,

交叉空間 $\mathcal{A}_{n,\mu}^{(q^{-1})} \cap \mathcal{A}_{n,\mu'}^{(t)}$ を張る.

$$\mathcal{O}(f_\mu)P_\lambda(x; q, t) = P_\mu(s^\lambda; q, t)P_\lambda(x; q, t).$$

但し $s^\lambda := (q^{\lambda_1}t^{-1}, q^{\lambda_2}t^{-2}, q^{\lambda_3}t^{-3}, \ldots)$.

Prop. $\mathcal{O}(f * g) = \mathcal{O}(f)\mathcal{O}(g)$, $\mathcal{O}$ は単射.

$\forall f \in \mathcal{A}_n$ について, $\mathcal{O}(f)$ は $P_\lambda(x; q, t)$ 達を固有関数に持つ.

Thm. 2'. 次を満たす $f_\mu \in \mathcal{A}_n(q^{-1}, t)$ が一意に存在し,

交叉空間 $\mathcal{A}_{n,\mu}^{(q^{-1})} \cap \mathcal{A}_{n,\mu'}^{(t)}$ を張る.

$$\mathcal{O}(f_\mu)P_\lambda(x; q, t) = P_\mu(s^\lambda; q, t)P_\lambda(x; q, t).$$

但し $s^\lambda := (q^{\lambda_1}t^{-1}, q^{\lambda_2}t^{-2}, q^{\lambda_3}t^{-3}, \ldots)$.

Rmk. 証明には Haiman による P_λ の三角性に関する結果を使う.

Macdonald 多項式 $P_\lambda^{(n)}$ は Macdonald 差分作用素 $\{D_n^r\}$ の同時固有関数.
$\mathcal{O}(f_{(1^r)})$ が D_n^r の無限変数版の自由場表示である.

4. 最後に：まだ分かっていない事

- **Thm. 2.** を自由場を使わずに証明すること.
- **Haiman** の理論 (**Hilbert** スキームとの関連) を理解すること.
- **Macdonald-Cherednik** 理論との関連,
  他のルート系の場合の取り扱い.
- 代数 $\mathcal{A} \longleftrightarrow$ **Macdonald** 差分作用素
  元の **Feigin-Odesskii** 代数 $\leftarrow$? $\rightarrow$ **Ruijsenaars** 差分作用素