アーベル曲面上の安定層のモジュライ

柳田伸太郎　(神戸大学)

日本数学会　２００９年度年会　代数学
２００９年３月２６日

概要と目次

Fourier-向井変換は, 代数曲面上の安定層を調べる上で重要な役割を果たす.

アーベル曲面の場合について,
この変換のコホモロジー上での作用を調べ,
安定層のモジュライと点の **Hilbert** スキームとの
間の双有理写像を具体的に構成する.

(吉岡康太教授との共同研究)

1. アーベル曲面上の **Fourier**-向井変換
2. 半等質層と層の表示
3. 主定理 (向井のある予想について)
4. モジュライと **Hilbert** スキームとの双有理写像

1-1 アーベル曲面上の安定層のモジュライ空間

- 射影曲面 S 上の torsion free 層 E が ample divisor H に対し (半) 安定
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の部分層 $F \subset E$ に対し

$$\chi(F(nH))/\mathrm{rank}(F) \underset{(-)}{<} \chi(E(nH))/\mathrm{rank}(E)$$

$$(n \gg 0).$$

- 安定層のモジュライ (準射影的スキーム)

$$\begin{aligned} & M_S^H(r, c_1, a) \\ & := \{E \mid H\text{-安定な } S \text{ 上の torsion free 層}, \\ & \qquad \mathrm{rank}(E) = r, c_1(E) = c_1, \chi(E) = a.\}. \end{aligned}$$

- (向井. 1984)
(X, H) : アーベル曲面とその上の ample divisor
$M_X^H(v)$ は非特異で次元は $\langle v^2 \rangle + 2$.

- (吉岡. 2003)
v が原始的かつ H が v に関し generic なら既約.

1-2 Fourier-向井変換 (FMT)

X, Y : $\mathbb{C}$ 上の非特異射影多様体,

$p_X : X \times Y \to X$, $p_Y : X \times Y \to Y$
: 自然な射影,

$\mathcal{E}$: $\mathrm{Coh}(X \times Y)$ の有界導来圏 $\mathcal{D}(X \times Y)$ の対象, FMT の (積分) 核と呼ばれる.

$$\begin{array}{cccc} \Phi_{\mathcal{E}}^{X \to Y} : & \mathcal{D}(X) & \xrightarrow{\text{equiv.}} & \mathcal{D}(Y) \\ & F^\bullet & \mapsto & \mathbb{R}p_{Y*}(p_X^*(F^\bullet) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{E}). \end{array}$$

1-3 アーベル曲面上の向井格子と FMT

X, Y : アーベル曲面，$\Phi : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(Y)$: FMT.

Φ は cohomology 上の同型を誘導する.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}(X) & \xrightarrow[\Phi]{\text{equiv.}} & \mathcal{D}(Y) \\
{\scriptstyle \mathrm{ch}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ch}} \\
H^{ev}(X, \mathbb{Q}) & \xrightarrow[\Phi^H]{\sim} & H^{ev}(Y, \mathbb{Q}) \\
\bigcup & & \bigcup \\
H^{ev}(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & H^{ev}(Y, \mathbb{Z})
\end{array}$$

更に，次の paring に関して isometry になっている.

$$v = (r_1, \xi_1, a_1), w = (r_2, \xi_2, a_2) \in H^{ev}(X, \mathbb{Z})$$

$$\langle v, w \rangle := \int_X (\xi_1 \cup \xi_2 - r_1 \cup a_2 - r_2 \cup a_1).$$

2-1 半等質層

- 半等質層 $\mathbf{E}$: $\langle \mathrm{ch}(E)^2 \rangle = 0$ を満たす連接層.
  - ベクトル束の場合, $\pi_1(X)$ の射影表現に付随して構成される.
  - 任意の偏極 H について半安定.
  - 安定 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{ch}(E)$ は原始的.
- FMT と半等質層
  - アーベル曲面上の FMT の核は 必ず安定半等質層の普遍族.
  - FMT で半等質層は (up to shift で) 層にうつる.

2-2 半等質層を用いた層の表示

層 F の **semi-homogeneous presentation**

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & F & \to & E_1 & \to & E_2 & \to & 0, \quad \text{or} \\
0 & \to & E_1 & \to & E_2 & \to & F & \to & 0.
\end{array}
$$

E_1, E_2 : 半等質層,
$ch(E_i) = \ell_i v_i,\ \ell_i \in \mathbb{Z},\ v_i$: 原始的 Chern 指標
と表した時に
$\langle v_1, v_2 \rangle = -1,\ (\ell_1 - 1)(\ell_2 - 1) = 0$
が成立.

3-1 主結果

- 仮定 ：数値的な条件のみで記述される.

○ $\mathbf{NS(X)} \cong \mathbb{Z}\mathbf{H}$.

○ Chern 指標 v に関する次の不定方程式に解が存在.

$$\mathbf{v} = \pm(\mathbf{v}_1 - \ell \mathbf{v}_2),$$

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$: 原始的 Chern 指標,

$$\langle \mathbf{v}_1^2 \rangle = \langle \mathbf{v}_2^2 \rangle = 0, \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = -1.$$

- 結論：安定層のモジュライ $\mathbf{M}_X^H(\mathbf{v})$ の generic な元は semi-homogeneous presentation を持つ.

(「アーベル曲面上のベクトル束の分類について」数理解析講究録 409 (1980), 予想 1')

- さらに $X \cong \mathrm{Pic}^0(X)$ と仮定すると,
  $M_X^H(v)$ と $\mathrm{Hilb}^\ell(X)$ との間の双有理写像を
  具体的に構成することができる.

- $\ell := \langle v^2 \rangle / 2,\ v = (r, dH, a)$ とおく.
  判別式が ℓ の 2 次形式の類数が 1 なら,

  FMT Φ_γ が双有理写像

$$M_X^H(v) \cdots \to X \times \mathrm{Hilb}^\ell(X)$$

  を引き起こす.

◦ 不定方程式 $2dpq - ap^2 - rq^2 = \pm 1$ の解 (p, q) のうち $|p|$ が最小のものをとる.

◦ 行列

$$\gamma := \begin{bmatrix} q & \pm(dq - ap) \\ -p & \pm(dp - rq) \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$$

から FMT Φ_γ を一意に決めることができる.

4-2 関連する話題

- 未解決問題 (向井先生の予想 2)

NS(X) $\cong \mathbb{Z}$H かつ X $\cong$ Pic^0(X) なら

$(2\ell + 2)$-次元の安定層のモジュライの
双有理同値類の数
= 判別式が ℓ の 2 次形式の類数.

○ $\ell \leq 10$ なら成立.