Abel 曲面上の安定層のモジュライ

柳田伸太郎　(神戸大学)

2009 年 2 月 18 日

概要と目次

向井茂先生によって導入された **Fourier-向井変換**は,
安定層を調べる上で重要な役割を果たす.

Abel 曲面の場合について,
この変換のコホモロジー上での作用を調べ,
安定層のモジュライと点の Hilbert スキームとの間の
双有理写像を具体的に構成する.

0. イントロ (安定層のモジュライと Fourier-向井変換)
1. Abel 曲面上の Fourier-向井変換
2. 半等質層
3. 半等質層を用いた層の表示
4. 主定理 (向井先生の予想 $1'$ について)
5. モジュライと Hilbert スキームとの双有理写像

0-1 問題意識

- 非特異射影曲面 (S, H) 上の torsion free 層 E が

H-安定 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の部分層 $F \subset E$ に対し

$$\chi(F(nH))/\mathrm{rank}(F) < \chi(E(nH))/\mathrm{rank}(E) \quad (n \gg 0).$$

- 安定層のモジュライ

$$M_S^H(r, c_1, a) := \{H\text{-安定な } S \text{ 上の torsion free 層 } E \mid \mathrm{rank}(E) = r, c_1(E) = c_1, \chi(E) = a\}$$

∘ GIT 商により (準) 射影スキームとして構成される.
高次元の代数多様体の例を提供する.

∘ しかし, 構造はすぐには分からない.
空か否か, 既約性, 特異点, H への依存性 $\cdots$

0-2 点の Hilbert スキーム

安定層のモジュライは**点の Hilbert スキーム**と関連する.

$\mathrm{Hilb}^{\ell}(S) := \{Z \mid S$ 上の長さ ℓ の finite subscheme$\}$

○ $\mathrm{Hilb}^{\ell}(S) = M_S^H(1, 0, \ell)$

○ Serre 対応： (階数 2 の) ベクトル束の構成法. イデアル層 $\mathcal{I}_Z$ の拡大としてベクトル束を得る.

○ **Fourier-向井変換**： 標準層が自明な場合, モジュライと Hilbert スキームとの間の双有理写像が構成できる.

0-3 Fourier-向井変換

- **Fourier-向井変換 (FMT)**

X, Y : 非特異射影多様体
$p_X : X \times Y \to X$, $p_Y : X \times Y \to Y$: 自然な射影
$\mathcal{E}$: Coh(X × Y) の有界導来圏 $\mathcal{D}(X \times Y)$ の対象
FMT の (積分) 核と呼ばれる

$$\Phi_{\mathcal{E}}^{X \to Y} : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(Y) \qquad \text{equivalence}$$

$$x \mapsto \mathbb{R}p_{Y*}(p_X^*(x) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{E})$$

- **今回は Abel 曲面上の層のモジュライに注目し, FMT によってモジュライ間の双有理写像を構成する.**

1-1 向井格子とFMT

- $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$: Abel 曲面

$\Phi : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(Y)$: FMT

- Φ は cohomology 上の同型を誘導する.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}(X) & \xrightarrow[\sim]{\Phi} & \mathcal{D}(Y) \\
{\scriptstyle ch}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle ch} \\
H^{ev}(X, \mathbb{Q}) & \xrightarrow[\sim]{\Phi^H} & H^{ev}(Y, \mathbb{Q}) \\
\bigcup & & \bigcup \\
H^{ev}(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow[\sim]{} & H^{ev}(Y, \mathbb{Z})
\end{array}$$

次の paring に関して $H^{ev}(*, \mathbb{Z})$ 上の isometry を誘導する.

1-1 向井格子と FMT

- 向井 pairing :

Chern 指標

$$\mathbf{v} = (r_1, \xi_1, a_1),\ \mathbf{w} = (r_2, \xi_2, a_2)$$
$$\in H^{ev}(X, \mathbb{Z}) = H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus H^2(X, \mathbb{Z}) \oplus H^4(X, \mathbb{Z})$$

に対し

$$\langle v, w\rangle := \int_X (\xi_1 \cup \xi_2 - r_1 \cup a_2 - r_2 \cup a_1).$$

○ $(H^{ev}(X, \mathbb{Z}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ は $U^{\perp 4}$ (hyperbolic lattice の直和) と同型.

○ Grothendieck-Riemann-Roch から

$$\langle ch(E), ch(F)\rangle = -\chi(E, F).$$

1-2 Abel曲面上の層のモジュライ空間

- (向井. 1984)

H: Abel 曲面 X 上の ample divisor

○ $M_X^H(v)$ は非特異で次元は $\langle v^2 \rangle + 2$

○ v が原始的 (他の Chern 指標 w の倍数になっていない) かつ H が v に関し generic なら, $M_X^H(v)$ は射影的

- (吉岡. 2003)

v が原始的かつ H が v に関し generic なら, $M_X^H(v)$ は既約

1-3 Abel曲面上のFMT

- (D.Orlov, 2002)

(1) $\mathbf{v}$: 原始的 かつ $\langle \mathbf{v}^2 \rangle = 0$ である Chern 指標.

○ $\mathbf{Y} := \mathbf{M}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{H}}(\mathbf{v})$ は Abel 曲面

○ もし普遍族 $\mathcal{E}$ が $\mathbf{Y} \times \mathbf{X}$ 上にあれば,

$$\Phi_{\mathcal{E}}^{\mathbf{X} \to \mathbf{Y}} : \mathcal{D}(\mathbf{X}) \to \mathcal{D}(\mathbf{Y})$$ は equivalence

(普遍族 $\mathcal{E} \in \mathrm{Coh}(\mathbf{Y} \times \mathbf{X})$:
$\mathcal{E}|_{\{y\} \times \mathbf{X}}$ は Chern 指標が $\mathbf{v}$ である半等質層.)

(2) $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$: Abel 曲面, $\Phi : \mathcal{D}(\mathbf{X}) \to \mathcal{D}(\mathbf{Y})$: equivalence

○ $\exists \mathbf{v}$: 原始的 かつ $\langle \mathbf{v}^2 \rangle = 0$ である Chern 指標 s.t.

$$\mathbf{Y} \cong \mathbf{M}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{H}}(\mathbf{v}),$$

○ $\exists \mathcal{E}$: $\mathbf{Y} \times \mathbf{X}$ 上の普遍族 s.t. $\Phi \cong \Phi_{\mathcal{E}}^{\mathbf{X} \to \mathbf{Y}}$.

2-1 半等質層

- 半等質層 $\mathbf{E}$: $\langle \mathbf{ch}(\mathbf{E})^2 \rangle = \mathbf{0}$ を満たす連接層のこと.
  - ○ 半等質ベクトル束は $\pi_1(\mathbf{X})$ の射影表現に付随して構成される.
  - ○ 半等質層は任意の偏極 $\mathbf{H}$ について半安定.
  - ○ 半等質層が安定 $\iff$ $\mathbf{ch}(\mathbf{E})$ は原始的.
- FMT と半等質層
  - ○ Abel 曲面上の FMT の核は必ず安定半等質層の普遍族.
  - ○ FMT で半等質層は (up to shift で) 層にうつる.

3-1 半等質層を用いた層の表示

層 F の semi-homogeneous presentation (s.h. presentation):

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & F & \to & E_1 & \to & E_2 & \to & 0, & \text{or} \\ 0 & \to & E_1 & \to & E_2 & \to & F & \to & 0. & \end{array}$$

E_1, E_2 : 半等質層.

$\mathrm{ch}(E_i) = \ell_i v_i$, $\ell_i \in \mathbb{Z}$, v_i: 原始的 Chern 指標

と表した時に

$\langle v_1, v_2 \rangle = -1$, $(\ell_1 - 1)(\ell_2 - 1) = 0$

が成立.

3-2 s.h. presentationの効用

- 安定層 $\mathbf{F}$ に semi-homogeneous presentation

$$0 \to \mathbf{F} \to \mathbf{E}_1 \to \mathbf{E}_2 \to 0$$

が存在したと仮定. $\mathbf{v}(\mathbf{E}_1) = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}(\mathbf{E}_2) = \ell \mathbf{v}_2$ だとする.

○ 仮定 $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = -1$ から $\mathbf{M}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{H}}(\mathbf{v}_2) \times \mathbf{X}$ 上に普遍族 $\mathcal{E}$ があって, $\mathcal{E}|_{\{\mathbf{y}\}\times \mathbf{X}}$ は Chern 指標が $\mathbf{v}_2$ である半等質層.

○ $\mathbf{Y} = \mathbf{M}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{H}}(\mathbf{v}_2)$ とおく. FMT $\Phi := \Phi_{\mathcal{E}^\vee}^{\mathbf{X}\to\mathbf{Y}}$ によって以下の完全列を得る.

$$
\begin{array}{cccccccc}
0 & \to & \Phi^0(F) & \to & 0 & \to & 0 & \\
 & \to & \Phi^1(F) & \to & 0 & \to & 0 & \\
 & \to & \Phi^2(F) & \to & \Phi^2(E_1) & \to & \Phi^2(E_2) & \to 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
0 & \to & \Phi^0(F) & \to & 0 & \to & 0 & \\
 & \to & \Phi^1(F) & \to & 0 & \to & 0 & \\
 & \to & \Phi^2(F) & \to & \mathcal{O}_Y & \to & \mathcal{O}_Z & \to 0
\end{array}
$$

ここで Z は Y の finite subscheme. よって $\Phi(F)$ は finite subscheme のイデアル層と up to shift で同型.

s.h.presentation があれば, モジュライと Hilbert スキームの間に写像がつくれる

4-1 主結果

- 仮定：数値的な条件のみで記述される.

○ $\mathbf{NS(X)} \cong \mathbb{Z}\mathbf{H}$.

○ Chern 指標 v に関する次の不定方程式に解が存在.

$$\mathbf{v} = \pm(\mathbf{v}_1 - \ell \mathbf{v}_2),$$
$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 : \text{primitive Chern character},$$
$$\langle \mathbf{v}_1^2 \rangle = \langle \mathbf{v}_2^2 \rangle = 0, \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = -1.$$

- 結論：安定層のモジュライ $M_X^H(v)$ の generic な元は semi-homogeneous presentation を持つ.

(向井茂先生の 1980 年代の予想)

(「アーベル曲面上のベクトル束の分類について」数理解析講究録 409 (1980), 予想 1')

5-1 応用

- さらに $\mathbf{X \cong Pic^0(X)}$ と仮定すると,
$\mathbf{M_X^H(v)}$ と $\mathbf{Hilb^\ell(X)}$ との間の双有理写像を具体的に構成することができる.
$\ell := \langle v^2 \rangle /2$, $v = (r, dH, a)$ とおく.

- 結果: 判別式が ℓ の 2 次形式の類数が 1 なら, FMT Φ_γ が双有理写像 $\mathbf{M_X^H(v)} \cdots \to \mathbf{X} \times \mathbf{Hilb^\ell(X)}$ を引き起こす.

5-2 FMTの構成

○ 不定方程式 $2dpq - ap^2 - rq^2 = \pm 1$ の解 (p, q) のうち $|p|$ が最小のものをとる.
○ 行列

$$\gamma := \begin{bmatrix} q & \pm(dq - ap) \\ -p & \pm(dp - rq) \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$$

から FMT Φ_γ を一意に決めることができる.

5-3 関連する結果，今後

- $\mathsf{NS(X)} \cong \mathbb{Z}\mathsf{H}$ でなくても，$\langle \mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle = -1$ かつ $\left\langle \mathsf{u}^2 \right\rangle = 0$ なる Chern 指標 u があれば $\mathsf{M}_{\mathsf{X}}^{\mathsf{H}}(\mathsf{v})$ は $\mathsf{Pic}^0(\mathsf{X}) \times \mathsf{Hilb}^{\ell}(\mathsf{X})$ と双有理同値であることが証明できる．

- 未解決問題:(向井先生の予想 2)

$\mathsf{NS(X)} \cong \mathbb{Z}\mathsf{H}$ かつ $\mathsf{X} \cong \mathsf{Pic}^0(\mathsf{X})$ なら

$(2\ell + 2)$-次元の安定層のモジュライの双有理同値類の数
$=$ 判別式が ℓ の 2 次形式の類数．

○ $\ell \leq 10$ なら成立．

最後に

- **3 月の数学会の年会で, 2 つの講演を予定しております.**

○ 今回のお話について, 代数学の一般講演にて.

○ **B. Feigin** と **A.Odesskii** の導入した楕円代数と **Macdonald** 対称多項式に関する研究について, 無限可積分系セッションにて.

ご清聴ありがとうございました