Date　　No.

名古屋大学集中講義

「楕円パンルベ方程式と楕円超幾何方程式」

H15 5.19 − 5.23

Date　　　No.

目次

(次ページへ)

Date No.

§0 序文

・次の3つの関係を述べるのが今回の講義の目標

(1) 点配置空間とクレモナ変換
(2) 楕円(差分)パンルベ方程式
(3) 楕円(差分)超幾何方程式

もう少し詳しくかくと……

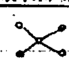
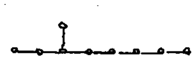
パンルベVI型方程式 …… パラメータ $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty, \rho$ (関係式 $\kappa_0+\kappa_1+\kappa_t+\kappa_\infty+2\rho=1$) をもつ非線形方程式

↓

ガウスの超幾何方程式

パラメータ $\kappa_0, \cdots, \rho$ は $D_4^{(1)}$ 型のルート系と関係している ($D_4^{(1)}$ の5つの単純ルートに対応するのが $\kappa_0, \cdots, \rho$)。$\kappa_0, \cdots, \rho$ の内の1つを0にすると、$D_4^{(1)}$ 型のアファインワイル群の鏡映面上に線形化できる解がある。それがガウスの超幾何微分方程式である!

これと同様のコトが楕円パンルベ方程式でも成立することを述べる。

方程式系	ワイル群対称性
パンルベVI型方程式 ⊃ HGDE	$D_4^{(1)}$ 
↓ ↓	↓
楕円パンルベ方程式 ⊃ 楕円HGDE	$E_8^{(1)}$ 

$\mathbb{P}^2$ の一般の位置にある9点配置から決まる $W(E_8^{(1)})$ のクレモナ変換群としての実現 — あるいは、その格子部分を離散力学系とみたもの

Date　　・　・　No.

我々のゴールまでにはいくつかの問題がある。

その1. 楕円(差分)方程式をどうやって記述するか。

その2. τ-函数(≒方程式の双線形な構造が見えるようにするもの)の枠組をどうやって作るか

その3. 鏡映面上の線形化できる解として何がでるか。

答えは楕円HGSのはず

話としては、

1). 楕円超幾何方程式
2). 点配置空間とクレモナ変換
3) τ函数の枠組
4) 楕円パンルベ方程式
5) 鏡映面上の線形化できる解、

の順番で話す

文献: J. Phys. A. Math General 36 (2003) L 263-272

10 Eq solution to the elliptic Painlevé equation

(梶原, 増田, 野海, 太田, 山田)

§1 楕円超幾何級数

・(q-)超幾何級数と和公式

ガウスの超幾何級数

$$F\left({\alpha\ \beta \atop \gamma}; x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k!\,(\gamma)_k} x^k \qquad (\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$$

の拡張として次のものがある

(1) 一般超幾何級数 ${}_{r+1}F_r$ ← $|x|<1$ で絶対収束

$$ {}_{r+1}F_r\left({\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_r \atop \beta_1, \cdots, \beta_r}; x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_0)_k (\alpha_1)_k \cdots (\alpha_r)_k}{k!\,(\beta_1)_k \cdots (\beta_r)_k} x^k$$

(2) q-超幾何級数

$$ {}_{r+1}\varphi_r\left({a_0\ a_1 \cdots a_r \atop b_1 \cdots b_r}; q; x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_0;q)_k (a_1;q)_k \cdots (a_r;q)_k}{(q;q)_k (b_1;q)_k \cdots (b_r;q)_k} x^k$$

$q \in \mathbb{C}^*$, $|q|<1$. また $(a;q)_k = (1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{k-1}a)$

Rem $a = q^\alpha$ とおくと $\frac{1-a}{1-q} = \frac{1-q^\alpha}{1-q} \to \alpha \ (q\to 1)$ よって

$$\frac{(a;q)_k}{(1-q)^k} = \frac{1-q^\alpha}{1-q}\cdot\frac{1-q^{\alpha+1}}{1-q}\cdots\frac{1-q^{\alpha+k-1}}{1-q} \to \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1) \quad (q\to 1)$$

つまり ${}_{r+1}\varphi_r(\ )$ で $q\to 1$ とすると ${}_{r+1}F_r(\ )$ になる

Date　　No.

超幾何級数のパラメータの一つが負の整数の時、無限和は有限和になる。さらに"very well poised"という条件がつけば、「和公式」や「変換公式」と言ったものを得られることがある。このことを少し例をあげて紹介しておく。

$$ {}_{r+1}\varphi_r \left(\begin{matrix} a_0, q\sqrt{a_0}, -q\sqrt{a_0}, a_1, \cdots, a_{r-2} \\ \sqrt{a_0}, -\sqrt{a_0}, qa_0/a_1, \cdots, qa_0/a_{r-2} \end{matrix} ; q : x \right) \quad -(\text{♪}) $$

$$ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_0:q)_k (q\sqrt{a_0}:q)_k (-q\sqrt{a_0}:q)}{(q:q)_k (\sqrt{a_0}:q)_k (-\sqrt{a_0}:q)_k} \prod_{l=1}^{r-2} \frac{(a_l:q)_k}{(qa_0/a_l:q)_k} \cdot x^k $$

メモ参

$$ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-q^{2k}a_0}{1-a_0} \frac{(a_0:q)_k}{(q:q)_k} \prod_{l=1}^{r-2} \frac{(a_l:q)_k}{(qa_0/a_l:q)_k} \cdot x^k \quad -(*) $$

メモ.

$$ \left(\begin{aligned} (\sqrt{a}:q)_k(-\sqrt{a}:q)_k &= \Pi_{i=0}^{k-1}(1-q^i\sqrt{a_0})(1+q^i\sqrt{a_0}) \\ &= \Pi_{i=0}^{k-1}(1-q^{2i}a_0) \\ (q\sqrt{a_0}:q)_k(-q\sqrt{a_0}:q) &= \Pi_{i=0}^{k-1}(1-q^{2i+2}a_0) \end{aligned} \right) $$

$(*)$を ${}_{r+1}W_r(a_0; a_1, \cdots, a_{r-2}; q; x)$ と表す。このとき次が成り立つ。

Jacksonの和公式

$$ {}_8W_7(a_0; a_1, \cdots, a_5; q; q) = \frac{(qa_0, qa_0/a_1a_2, qa_0/a_1a_3, qa_0/a_2a_3; q)_N}{(qa_0/a_1, qa_0/a_2, qa_0/a_3, qa_0/a_1a_2a_3; q)_N} $$

ただし　$qa_0^2 = a_1a_2a_3a_4a_5$　← この条件を"balanced"という。

$a_5 = q^{-N}$　←　"terminating"という

$(N \in \mathbb{N})$　（無限和を有限和でうちきる条件）

$$ (a_1a_2, \cdots, a_r : q)_N = (a_1:q)_N (a_2:q)_N \cdots (a_r:q)_N $$

Baileyの変換公式

$${}_{10}W_9(\tilde{a}_0 ; \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, a_4, a_5, a_6, a_7 ; q)$$

$$= {}_{10}W_9(a_0 : a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 ; q)\frac{(qa_0/a_4, qa_0/a_5, qa_0/a_6, qa_0/a_4a_5a_6 ; q)_N}{(qa_0, qa_0/a_4a_5, qa_0/a_4a_6, qa_0/a_5a_6 ; q)_N}$$

ただし、$\tilde{a}_0 = qa_0^2/a_1a_2a_3$, $\tilde{a}_1 = qa_0/a_2a_3$, $\tilde{a}_2 = qa_0/a_1a_3$, $\tilde{a}_3 = qa_0/a_1a_2$

$q^2a_0^3 = a_1a_2\cdots a_7$ …… balanced

$a_7 = q^{-N}$ $(N \in \mathbb{N})$ …… terminating

$a_{r-1} = q\sqrt{a_0}$, $a_r = -q\sqrt{a_0}$, $b_{r-1} = \sqrt{a_0}$, $b_r = -\sqrt{a_0}$, $b_i = qa_0/a_i$ $(i = 1, \cdots, r-2)$とおくと、(♪)では、

$$\begin{cases} \cdot\ a_ib_i = qa_0 & (i = 1, 2, \cdots, r) \\ \cdot\ a_{r-1} = q\sqrt{a_0},\ a_r = -q\sqrt{a_0} \end{cases}$$

が成り立つ。最初の式が成り立つ時 very-poised、両方の式が成り立つ時 very well poised という。

・楕円超幾何級数

まず楕円超幾何関数を定義する。これを定義するには、${}_{r+1}E_r(\ )$の$(\alpha)_k$や${}_{r+1}\varphi_r(\ )$の$(a;q)_k$に相当するもので"楕円関数的"なものを用意すればよい。

$[x]$は次をみたす関数とする。

(a) $[x] \in \mathcal{O}(\mathbb{C}_x)$（$x$を座標とする複素直線上の正則関数）で$[-x] = -[x]$

(b) $[\ ]$はリーマンの関係式を満たす。

$$[x+y][x-y][u+v][u-v] = [x+u][x-u][y+v][y-v]$$
$$\qquad - [x+v][x-v][y+u][y-u]$$

Def. ${}_{r+1}E_r(u_0; u_1, \cdots, u_{r-2}; x)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[u_0+2k\delta]}{[u_0]} \frac{[u_0]_k}{[\delta]_k} \left(\prod_{i=1}^{r-2} \frac{[u_i]_k}{\underbrace{[\delta+u_0-u_i]_k}_{(*)}} \right) x^k$$

ここで $[u]_k = [u][u+\delta][u+2\delta]\cdots[u+(k-1)\delta]$ である.

$\uparrow$

(※ δは固定された複素数で $\delta \neq 0$ かつ $[k\delta] \neq 0$ ($k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$) となるものとする)

Rem $(*)$の部分 (つまり $\delta+u_0-u_i$) を v_iとおくと $v_i+u_i = \delta+u_0$. よって ${}_{r+1}E_r(\ \ )$ は very poised である. なお ${}_{10}E_9(\ \ )$ は ${}_{10}W_9(\ \ )$ の elliptic な対応物である

Rem $[x]$ が前ページの (a), (b) を満たせば $[x]' = e^{\alpha x^2+\beta}[x]$ も (a), (b) を満たす. この変換 $[x] \to [x]'$ を使えば (a), (b) を満たす $[x]$ は次のいずれかに帰着する

(1) $[x] = x$

(2) $[x] = \sin \pi x$

(3) $[x] = \sigma(x; \omega_1, \omega_2)$

証明は Whittaker, Watson を見よ

$[x]$ がリーマンの関係式を満たすことより ${}_{10}E_9(\ \ )$ にも変換公式, 和公式が存在する. このことを次で説明する……

・ ${}_{10}E_9$ の変換公式

この節では $2\delta+3u_0=u_1+u_2+\cdots+u_7$, $u_7=-N\delta$ $(N\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ とする.

また $x=1$ での ${}_{10}E_9(u_0;u_1,u_2,\cdots,u_7;x)$ を ${}_{10}E_9(u_0;u_1,u_2,\cdots,u_7)$ と表す.

↑

$x=1$ だと無限級数が収束するか微妙だが $u_7=-N\delta$ としているので大丈夫.

変換公式(その1): Bailey 変換

$$
{}_{10}E_9(v_0:v_1,\cdots,v_7)
$$

$$
={}_{10}E_9(u_0;u_1,\cdots,u_7)\frac{[\delta+u_0-u_4-u_5-u_6]_N}{[\delta+u_0]_N}\prod_{i=4}^{6}\frac{[\delta+u_0-u_i]_N}{[\delta+u_0-u_4-u_5-u_6+u_i]_N}
$$

$v_0=\delta+2u_0-u_1-u_2-u_3$

$v_1=\delta+u_0-u_2-u_3$, $v_2=\delta+u_0-u_1-u_3$, $v_3=\delta+u_0-u_1-u_2$

$v_i=u_i$ $(i=4,5,6)$, $v_7=u_7=-N\delta$

変換公式(その2)

$$
{}_{10}E_9(v_0;v_1,\cdots,v_7)
$$

$$
={}_{10}E_9(u_0;u_1,\cdots,u_7)\frac{[u_5-u_6]_N[\delta+u_0-u_6]_N}{[\delta+u_0]_N[u_5]_N}\prod_{i=1}^{4}\frac{[\delta+u_0-u_i]_N}{[\delta+u_0-u_i-u_6]_N}
$$

$v_0=-u_5+u_6+u_7$　　$v_4=\delta+u_0-u_3-u_5$

$v_1=\delta+u_0-u_2-u_5$　　$v_5=-u_0+u_6+u_7$

$v_2=\delta+u_0-u_1-u_5$　　$v_6=u_6$

$v_3=\delta+u_0-u_4-u_5$　　$v_7=u_7=-N\delta$

Date　　No.

$\Phi(u) = {}_{10}E_9(u_0 ; u_1, \cdots, u_7)$ とおく．また

$$T_{u_i}^{\pm 1}\Phi(u) = \Phi(u_0 ; u_1, \cdots, u_i \pm \delta, \cdots, u_7) \quad (i = 1, \cdots, 7)$$
$$T_u \Phi(u) = \Phi(u_0 + 2\delta ; u_1 + \delta, \cdots, u_7 + \delta)$$

と定める．

隣接関係式（その1）

$$(T_{u_6}^{-1} T_{u_7} - 1)\Phi(u)$$
$$= T_{u_6}^{-1} T_u \Phi(u) \frac{[\delta + u_0][2\delta + u_0][u_7 - u_6 + \delta][u_6 + u_7 - u_0 - \delta]}{[\delta + u_0 - u_6][2\delta + u_0 - u_6][u_0 - u_7][\delta + u_0 - u_7]} \prod_{i=1}^{5} \frac{[u_i]}{[\delta + u_0 - u_i]}$$

隣接関係式（その2）

$$\frac{\prod_{i=1}^{5}[\delta + u_0 - u_i - u_6]}{[u_6][\delta + u_0 - u_6][2\delta + u_0 - u_6]} T_{u_6}^{-1} T_u \Phi(u)$$
$$- \frac{\prod_{i=1}^{5}[\delta + u_0 - u_i - u_7]}{[u_7][\delta + u_0 - u_7][2\delta + u_0 - u_7]} T_{u_7}^{-1} T_u \Phi(u) = \frac{[u_7 - u_6]\prod_{i=1}^{5}[\delta + u_0 - u_i]}{[\delta + u_0][2\delta + u_0][u_6][u_7]} \Phi(u)$$

楕円超幾何方程式

$$\frac{[u_7][u_0 - u_7][\delta + u_0 - u_7]\prod_{i=1}^{5}[\delta + u_0 - u_i - u_6]}{[u_7 - u_6][u_7 - u_6 + \delta]}(T_{u_6}^{-1} T_{u_7} - 1)\Phi(u)$$
$$+ \frac{[u_6][u_0 - u_6][\delta + u_0 - u_6]\prod_{i=1}^{5}[\delta + u_0 - u_i - u_7]}{[u_6 - u_7][u_6 - u_7 + \delta]}(T_{u_6} T_{u_7}^{-1} - 1)\Phi(u)$$
$$= [u_6 + u_7 - u_0 - \delta]\prod_{i=1}^{5}[u_i]\Phi(u)$$

隣接関係(その1)は簡単なので証明をつけておく

$$(T_{u_7} - T_{u_6})\Phi(u) = {}_{10}E_9(u_0; u_1, \dots, u_6, u_7+\delta) - {}_{10}E_9(u_0; u_1, \dots, u_6+\delta, u_7).$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[u_0+2k\delta]}{[u_0]} \frac{[u_0]_k}{[\delta]_k} \left(\prod_{i=1}^{5} \frac{[u_i]_k}{[\delta+u_0-u_i]_k} \right)$$

$$\times \left\{ \frac{[u_6]_k [u_7+\delta]_k}{[\delta+u_0-u_6]_k [u_0-u_7]_k} - \frac{[u_7]_k [u_6+\delta]_k}{[\delta+u_0-u_7]_k [u_0-u_6]_k} \right\}$$

$\downarrow$ $[u_i]_k = [u_i][u_i+\delta]_{k-1}$

$[u_i+\delta]_k = [u_i+k\delta][u_i+\delta]_{k-1}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[u_0+2k\delta]}{[u_0]} \frac{[u_0]_k}{[\delta]_k} \left(\prod_{i=1}^{5} \frac{[u_i]_k}{[\delta+u_0-u_i]_k} \right)$$

$$\times \Big([u_6][u_7+k\delta][u_0-u_6][u_0-u_7+k\delta]$$

$$- [u_7][u_6+k\delta][u_0-u_7][u_0-u_6+k\delta] \Big)$$

$$\times \frac{[u_6+\delta]_{k-1} [u_7+\delta]_{k-1} [\delta+u_0-u_6]_{k-1} [\delta+u_0-u_7]_{k-1}}{[u_0-u_6]_k \, [u_0-u_7]_k \, [\delta+u_0-u_6]_k \, [\delta+u_0-u_7]_k}$$

$i=0$のとき、$[u]_{-1}=1$ とする。

$\downarrow$ リーマンの関係式

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[u_0+2k\delta]}{[u_0]} \frac{[u_0]_k}{[\delta]_k} \left(\prod_{i=1}^{5} \frac{[u_i]_k}{[\delta+u_0-u_i]_k} \right)$$

$$\times \frac{[u_0+k\delta][-k\delta][-u_0+u_6+u_7][u_6-u_7][u_6+\delta]_{k-1}[u_7+\delta]_{k-1}}{[u_0-u_6]_k [u_0-u_7]_k [u_0-u_6+k\delta][u_0-u_7+k\delta]}$$

$\downarrow$ $[u_0]_k [u_0+k\delta] = [u_0][u_0+\delta][u_0+2\delta]_{k-1}$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[u_0+2\delta+2(k-1)\delta]}{[u_0]} \frac{[u_0][u_0+\delta][u_0+2\delta]_{k-1}}{[\delta]_{k-1}[k\delta]} \left(\prod_{i=1}^{5} \frac{[u_i][u_i+\delta]_{k-1}}{[\delta+u_0-u_i][2\delta+u_0-u_i]_k} \right)$$

$[k\delta]$という項があるので、和は$k=1$から始めてよい。

$$\times \frac{[k\delta][u_0-u_6-u_7][u_6-u_7]}{[u_0-u_6][u_0-u_6+\delta][u_0-u_7][u_0-u_7+\delta]} \frac{[u_6+\delta]_{k-1}[u_7+\delta]_{k-1}}{[2\delta+u_0-u_6]_{k-1}[2\delta+u_0-u_7]_{k-1}}$$

$$= \frac{[u_0+\delta][u_0+2\delta][u_0-u_6-u_7][u_6-u_7]\prod_{i=1}^{5}[u_i]}{[u_0-u_6][u_0-u_7]\prod_{i=1}^{7}[\delta+u_0-u_i]} T_u \Phi(u)$$

これより、隣接関係(その1)が従う。 □

隣接関係(その2)は、隣接関係(その1)にBailey変換を使って示す。また、楕円超幾何方程式は、隣接関係(その2):

$$\bigcirc\, T_{u_6}^{-1} T_u \Phi = \bigcirc\, T_{u_7}^{-1} T_u \Phi = \bigcirc\, \Phi$$

に隣接関係(その1)

$$T_{u_6}^{-1} T_u \Phi = \bigcirc\,(T_{u_6}^{-1} T_{u_7} - 1)\Phi$$
$$T_{u_7}^{-1} T_u \Phi = \bigcirc\,(T_{u_7}^{-1} T_{u_6} - 1)\Phi$$

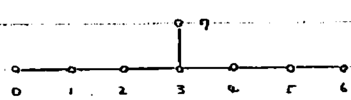
と代入すればよい。

Rem. 隣接関係(その1)は一般の ${}_{r+1}E_r$ (___) でも同様に成り立つ。しかし隣接関係(その2)は $r=9$ の時だけ成立する。

・${}_{10}E_9$ の対称性

$r_0, r_1, \ldots, r_7$ で生成される群で、次の関係式を満たすものを $W(E_7^{(1)})$ と表す。

関係式
$$\begin{cases} r_i^2 = 1 & \\ r_i r_j = r_j r_i & (\text{下図で } i \text{ と } j \text{ がむすばれていない}) \\ r_i r_j r_i = r_j r_i r_j & (\qquad 〃 \qquad \text{いる}) \end{cases}$$



この $W(E_7^{(1)})$ が $\mathcal{f} = \{(u_0, u_1, \cdots, u_7) \in \mathbb{C}^8\}$ へ、次の様に作用しているとする。

$$r_k(u_j) = \begin{cases} u_{k+1} & (j=k) \\ u_k & (j=k+1) \\ u_j & (j \neq k, k+1) \end{cases} \qquad (k=1,2,\cdots,6\ ;\ j=0,1,\cdots,7)$$

$$r_7(u_0) = \delta + 2u_0 - u_1 - u_2 - u_3$$
$$r_7(u_1) = \delta + u_0 - u_2 - u_3$$
$$r_7(u_2) = \delta + u_0 - u_1 - u_3$$
$$r_7(u_3) = \delta + u_0 - u_1 - u_2$$
$$r_7(u_j) = u_j \quad (j=4,5,6,7)$$

$$r_0(u_0) = -u_0 + 2u_1 - 2\delta$$
$$r_0(u_1) = u_1$$
$$r_0(u_j) = -u_j - u_0 + u_1 - \delta \quad (j=2,3,\cdots,7)$$

この時、$\Phi(u) = {}_{10}E_9(u_0; u_1, \cdots, u_7)$ $(u = (u_0, u_1, \cdots, u_7))$ とすると、

$\Phi(r_i(u)) = \Phi(u)$ $(i=1,2,\cdots,6)$

$\Phi(r_7(u))$ と $\Phi(u)$ の関係 $\longrightarrow$ Bailey 変換

がわかる。(r_0 の作用に関することは一言で言いにくいので略す)

§2. 点配置空間と、クレモナ変換

・点配置空間

$V, \mathbb{P}^{m-1}$ を、

$$V = \mathbb{C}^m, \quad \mathbb{P}^{m-1} = \mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$$

とする。また、以下にでてくる n は、m より大きいものとする。— まず点配置空間の定義から始める。

<u>Def.</u> $(p_1, p_2, \cdots, p_n), (q_1, q_2, \cdots, q_n) \in (\mathbb{P}^{m-1})^n$

$$(p_1, p_2, \cdots, p_n) \sim (q_1, q_2, \cdots, q_n) \Leftrightarrow {}^{\exists} g \in PGL(V) = GL(V)/\mathbb{C}^*$$
$$\text{s.t. } g \cdot p_j = q_j \ (j = 1, \cdots, n)$$

<u>Def.</u> $(p_1, p_2, \cdots, p_n) \in (\mathbb{P}^{m-1})^n$ が一般の位置にある。

$\Leftrightarrow$ どの m 個の点も $\mathbb{P}^{m-1}$ の同一超平面上にのっていない。

<u>Def.</u> $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ の同値類を $[p_1, p_2, \cdots, p_n]$ と表す。このとき、

$$X_{m,n} = \{ [p_1, \cdots, p_n] \mid p_1, \cdots, p_n \in \mathbb{P}^{m-1} \text{ は一般の位置にある} \}$$

を、点配置空間と呼ぶ。

$X_{m,n}$ の元は、行列の"同値類"と同一視できる。— このことを少し説明する。

$\mathbb{P}^{m-1}$ の n 個の点 $p_j = (x_{1j} : x_{2j} : \cdots : x_{mj})$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ に対し、

(次ページへ！)

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \in Mat(m,n)$$

とおく。このとき $(P_1, \dots, P_n)$ が一般の位置にあることと、X に含まれるすべての $m \times m$ 小行列式が 0 でないことは同値だから、

$$X_{m,n} = GL(m) \backslash Mat^*(m,n) / T$$

$$\left(\begin{array}{l} Mat^*(m,n) = \{ X \in Mat(m,n) \mid \det(X)_{j_1 \cdots j_m} \neq 0,\ 1 \leq {}^\forall j_1 < \cdots < j_m \leq n \} \\ T = (\mathbb{C}^*)^n \subset GL(n) \end{array} \right)$$

となる。よって、

Xの $(GL(m) \cdot T)$ の軌道

$$[X] := GL(m) \cdot X \cdot T \quad (X \in Mat^*(m,n))$$

と $X_{m,n}$ の元とは一対一に対応する。

・$[X]$ の代表元の"標準形"

$Mat(m,n)$ の元 X は、次の操作により、 という形にできる。

<u>操作</u>

$$X = \begin{array}{cc} \overset{m}{\longleftrightarrow} & \overset{n-m}{\longleftrightarrow} \end{array}$$
$$X = \left[\begin{array}{c:c} X_1 & X_2 \end{array} \right]$$

(1) 左から X_1^{-1} をかける。

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & & & \\ & \ddots & & \lambda_{ij} \\ & & 1 & \end{array} \right]$$

(2) 右から $\mathrm{diag}(\underbrace{1, \cdots, 1}_{m個}, \lambda_{1\,m+1}^{-1}, \cdots, \lambda_{1n}^{-1})$ をかける。

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & & & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & & & \mu_{ij} & \\ & & 1 & & & \end{array} \right]$$

(3) 左から $\mathrm{diag}(1, \mu_{2\,m+1}^{-1}, \cdots, \mu_{m\,m+1}^{-1})$ をかける。

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & & & 1 & \cdots & 1 \\ & * & & \vdots & u_{ij} & \\ & & * & 1 & & \end{array} \right]$$

(4) 右から $\mathrm{diag}(1, \mu_{2\,m+1}, \cdots, \mu_{m\,m+1}, 1, \cdots, 1)$ をかける。

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & & & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & & \vdots & u_{ij} & \\ & & 1 & 1 & & \end{array} \right]$$

Date . . No.

よって $[x] \in X_{m.n} = GL(m) \backslash \mathrm{Mat}^*(\ \ )/T$ の代表元として $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \ast \\ & & 1 & \end{array}\right]$ と言う形のものが選べる。このことから、

$$\mathcal{U}_{m.n} = \left\{ U = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \ast \\ & & 1 & \end{array}\right] \,\middle|\, \det(U)_{j_1 \cdots j_m} \neq 0,\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq n \right\}$$

とすると、

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_{m.n} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{X}_{m.n} \\ \cap & & \\ \mathbb{C}^{(m-1)(n-m-1)} & & \end{array}$$

（⇐ これより、$\mathcal{X}_{m.n}$ は $(m-1)(n-m-1)$ 次元である ことがわかる。）

がわかる。また、もう少し細かい議論を行うと、次の命題が得られる。

<u>Prop.</u> $X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$ を前ページの操作で $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \boxed{u_{ij}} \\ & & 1 & \end{array}\right]$ に

直した時、u_{ij} は、x_{ij} の有理関数として次のようにかける。

$$u_{ij} = \frac{\xi_{\hat{i}j}\,\xi_{\hat{1}\,m+1}}{\xi_{\hat{1}j}\,\xi_{\hat{i}\,m+1}} \quad (1 \leq i \leq m,\ m+1 \leq j \leq n)$$

ここで

$$\xi_{j_1 \cdots j_m} = \det(X)_{j_1 \cdots j_m}, \quad \xi_{\hat{i}j} = \xi_{1 \cdots \hat{i} \cdots m j}$$

である

（"$1, 2, \cdots, m$" から i をのぞき最後に j を加える）

・標準クレモナ変換

$p_1, p_2, \cdots, p_m \in \mathbb{P}^{m-1}$ は同一平面上にのっていない m 個の点とする。

（次ページへ）

座標をうまく入れることにより、

$$p_1 = (1:0:0:\cdots:0)$$
$$p_2 = (0:1:0:\cdots:0)$$
$$\vdots$$
$$p_m = (0:0:0:\cdots:1)$$

としてよい。このとき変換

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{m-1} & \longrightarrow & \mathbb{P}^{m-1} \\ \cup\!\!\!\!\!\; & & \cup\!\!\!\!\!\; \\ (x_1 : x_2 : \cdots : x_m) & \longrightarrow & \left(\frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \cdots : \frac{1}{x_m}\right) \end{array}$$

を"$p_1, p_2, \cdots, p_m$ を中心とする標準クレモナ変換"と言う

$X_{m,n}$ から $X_{m,n}$ への変換 s_0, s_k $(k=1,2,\cdots,n-1)$ を

$$s_0 : [p_1, \cdots, p_m, p_{m+1}, \cdots, p_n] \longrightarrow [p_1, \cdots, p_m, \tilde{p}_{m+1}, \cdots, \tilde{p}_n]$$
$$s_k : [p_1, \cdots, p_k, p_{k+1}, \cdots, p_n] \longrightarrow [p_1, \cdots, p_{k+1}, p_k, \cdots, p_n]$$

p_k と p_{k+1} の入れかえ.

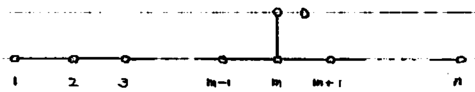
と定める。ここで

$$\tilde{p}_j = Cr_{12\cdots m}(p_j) \quad (j = m+1, \cdots, n)$$

$p_1, \cdots, p_m$ を中心とする標準クレモナ変換

である。このとき次が成り立つ。

Thm 上記の双有理変換 $s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}$ は、次ページのディンキン図形で指定された交換関係を満たす。



つまり、

$$
(*)\quad
\begin{cases}
s_i^{\,2} = 1 & i = 0, 1, \cdots, n-1 \\
s_i s_j = s_j s_i & \overset{\circ}{i} \quad \overset{\circ}{j} \\
s_i s_j s_i = s_j s_i s_j & \overset{\circ}{i} \!-\!\!-\! \overset{\circ}{j}
\end{cases}
$$

以下 $W_{m,n} = \langle s_0, s_1, \cdots, s_{n-1} \mid (*) \rangle$ と記す。また $[p_1, \cdots, p_n]$ に変換 s_k $(k = 0, 1, 2, \cdots, m)$ を施したものを $[p_1, \cdots, p_n]s_k$ と表す。i.e.

$$
[p_1, \cdots, p_n]s_0 = [p_1, \cdots, p_m, \tilde{p}_{m+1}, \cdots, \tilde{p}_n]
$$

$$
[\quad {}'' \quad]s_k = [p_1, \cdots, p_{k+1}, p_k, \cdots, p_n] \qquad (k = 1, 2, \cdots, n-1)
$$

Rem $p_j = (x_{1j} : x_{2j} : \cdots : x_{mj})$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ として

$$
\begin{bmatrix} \lambda_{1j} \\ \vdots \\ \lambda_{mj} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mm} \end{bmatrix}^{-1}
\begin{bmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{bmatrix}
\qquad (j = m+1, \cdots, n)
$$

$$
\begin{bmatrix} \tilde{x}_{1j} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{mj} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mm} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \lambda_{1j}^{-1} \\ \vdots \\ \lambda_{mj}^{-1} \end{bmatrix}
\qquad (\quad {}'' \quad)
$$

とおく。このとき、$\tilde{p}_j$ の座標は $(\tilde{x}_{1j} : \tilde{x}_{2j} : \cdots : \tilde{x}_{mj})$ で与えられる。

Rem $p_1 = (1:0:0:\cdots:0)$, $p_2 = (0:1:0:\cdots:0)$, $\cdots$, $p_m = (0:0:0:\cdots:1)$ のとき、$[p_1, \cdots, p_n]s_0$ は次の行列の定める $X_{m,n}$ の元である。

(次ページへ)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & x_{1m+1}^{-1} & \cdots & x_{1n}^{-1} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & x_{mm+1}^{-1} & \cdots & x_{mn}^{-1} \end{array}\right]$$

ここで $P_j = (x_{1j} : x_{2j} : \cdots : x_{mj})$ とした

: $W_{m.n}$ の u_{ij} への作用.

$K(\mathcal{X}_{m.n})$ を $\mathcal{X}_{m.n}$ の有理関数体 $(= \mathbb{C}(u_{ij} ; 2 \le i \le m, m+2 \le j \le n))$ とする.
$K(\mathcal{X}_{m.n})$ の元 φ に対し,

$$w(\varphi)(X) = \varphi(X \cdot w^{-}) \qquad (w \in W_{m.n}, X \in \mathcal{X}_{m.n})$$

とすると, $W_{m.n}$ の $\mathcal{X}_{m.n}$ への作用は, $K(\mathcal{X}_{m.n})$ に持ち上がる — これを
ふまえて, P14 の u_{ij} :

$$u_{ij} = \frac{\xi_{\hat{i}j}\,\xi_{\hat{1}m+1}}{\xi_{\hat{1}j}\,\xi_{\hat{i}m+1}}$$

への Δ_k $(k=0,1,\cdots,n-1)$ の作用を考察する.

<u>Prop.</u> $\Delta_0(u_{ij}) = 1/u_{ij}$

$$\Delta_1(u_{ij}) = \begin{cases} 1/u_{2j} & (i=2) \\ u_{ij}/u_{2j} & (i=3,\cdots,m) \end{cases}$$

$$\Delta_k(u_{ij}) = u_{(k\cdot k+1)ij} \qquad (k = 2, 3, \cdots, m)$$

$$\Delta_m(u_{ij}) = \begin{cases} \dfrac{u_{ij} - u_{mj}}{1 - u_{mj}} & (i = 2, \cdots, m-1) \\[2ex] \dfrac{-u_{mj}}{1-u_{mj}} & (i = m) \end{cases}$$

$$\Delta_{m+1}(u_{ij}) = \begin{cases} 1/u_{im+2} & (j = m+2) \\ u_{ij}/u_{im+2} & (j = m+3, \cdots, n) \end{cases}$$

Date . . No.

$$\Delta_k(u_{ij}) = u_{i(k\,k+1)j} \quad (k = m+2, \cdots, n)$$

ここで $(k\ k+1)$ は k と $k+1$ の互換である

☺ 記述を簡単にするため、$A, B \in Mat(m,n)$ に対し、

$$A \sim B \Leftrightarrow {}^{\exists}G \in GL(m),\ {}^{\exists}D \in T \ \text{s.t.}\ A = GBT$$

とする。また、

$$U = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & 1 & & \boxed{u_{ij}} & \end{array}\right]$$

とおく。

$$U \cdot \Delta_1 = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & & & \cdots & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & \boxed{u_{ij}} & \\ & & & 1 & & & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & & & \overbrace{\boxed{\quad\quad}}^{u_{2\,m+1} \cdots u_{2n}} \\ 0 & 1 & & & 1 \cdots 1 \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \boxed{u_{ij}} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & & & 1 \cdots 1 \\ 0 & 1 & & & \boxed{\quad\quad}\ u_{2\,m+1}^{-1}, \cdots, u_{2n}^{-1} \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \boxed{u_{ij}u_{2j}^{-1}} \end{array}\right]$$

より $\Delta_1(u_{ij}) = \cdots$ が従う。また、

$$U \cdot \Delta_m = \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & & & 1 & 0 & 1 \cdots 1 \\ & 1 & & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \boxed{u_{ij}} \\ & & & 1 & 1 & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & & & 0 & -1 & \overbrace{\boxed{\quad\quad}}^{1-u_{m\,m+1} \cdots 1-u_{mn}} \\ & 1 & & 0 & -1 & \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \boxed{u_{ij} - u_{mj}} \\ & & & 0 & -1 & \\ & & & 1 & 1 & \underbrace{\boxed{\quad\quad}}_{u_{m\,m+1} \cdots u_{mn}} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \boxed{\quad "\quad} \\ & & & 1 \quad -1 & \end{array}\right] \quad \text{— } (*)$$

$$
-(\ast) \sim \left[\begin{array}{ccc|c}
1 & & & 1-u_{m\,m+1} \cdots 1-u_{mn} \\
 & \ddots & & u_{ij}-u_{mj} \\
 & & 1 & -u_{m\,m+1}, \cdots, -u_{mn}
\end{array}\right]
\sim
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & & & 1 \cdots\cdots 1 \\
 & \ddots & & \frac{u_{ij}-u_{mj}}{1-u_{mj}} \\
 & & 1 & -\frac{u_{mj}}{1-u_{mj}}
\end{array}\right]
$$

より. $s_m(u_{ij}) = \cdots$ がわかる.

他の場合も同様 □.

この命題より次の定理が得られる.

<u>Thm</u> $\mathbb{C}(u)$の自己同型 $s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}$ は、$W_{m,n}$ の基本関係式を満たす.

$[p_1, \cdots, p_n] \in X_{m,n}$, $[p_1, \cdots, p_n, q] \in X_{m,n}$ および $[p_1, \cdots, p_n]w$, $[p_1, \cdots, p_n, q]w$ ($W_{m,n}$の元)
の標準形を

$$
[p_1, \cdots, p_n] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}
1 & & & 1 \cdots 1 \\
 & \ddots & & \boxed{u_{ij}} \\
 & & 1 &
\end{array}\right]
$$

$$
[p_1, \cdots, p_n, q] \sim \left[\begin{array}{ccc|c|c}
1 & & & 1 \cdots 1 & 1 \\
 & \ddots & & \boxed{u_{ij}} & z_2 \\
 & & 1 & & \vdots \\
 & & & & z_m
\end{array}\right]
$$

$$
[p_1, \cdots, p_n]w \sim \left[\begin{array}{ccc|c}
1 & & & 1 \cdots 1 \\
 & \ddots & & \boxed{\bar{u}_{ij}} \\
 & & 1 &
\end{array}\right]
$$

$$
[p_1, \cdots, p_n, q]w \sim \left[\begin{array}{ccc|c|c}
1 & & & 1 \cdots 1 & 1 \\
 & \ddots & & \boxed{\bar{u}_{ij}} & \bar{z}_2 \\
 & & 1 & & \vdots \\
 & & & & \bar{z}_m
\end{array}\right]
$$

とする. このときの $\bar{u}_{ij}$ と u_{ij}, $\bar{z}_i$ と u_{ij}, z_i の関係を、(次ページへ)

$$\bar{u}_{ij} = S_{ij}^{w}(u), \quad \bar{z}_i = R_i^{w}(u, z)$$

と表すことにする. —— 次の章で、これらの記号を用いて、クレモナ系と、楕円パンルベ方程式の定義を与える.

§3. $W_{m.n}$の作用の線形化と、クレモナ系

: $\mathfrak{h}_{m.n}$ と $W_{m.n}$ の作用

$\mathfrak{h}_{m.n}$ と $\mathfrak{h}_{m.n}$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を次で定める.

$$\mathfrak{h}_{m.n} = \mathbb{C}e_0 \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_n$$

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathfrak{h}_{m.n} \times \mathfrak{h}_{m.n} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\langle e_0, e_0 \rangle = -(m-2)$$
$$\langle e_i, e_i \rangle = 1 \quad (i=1, \cdots, n)$$
$$\langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad (i, j = 0, 1, \cdots, n \ \ i \neq j)$$

さらに

$$\alpha_0^\vee = h_0 = e_0 - e_1 - \cdots - e_m$$
$$\alpha_1^\vee = h_1 = e_1 - e_2$$
$$\vdots$$
$$\alpha_{n-1}^\vee = h_{n-1} = e_{n-1} - e_n$$

$$\varepsilon_i = \langle e_i, \cdot \rangle \in \mathfrak{h}_{m.n}^* \quad (i=0, 1, \cdots, n)$$

$$\alpha_0 = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \cdots - \varepsilon_m$$
$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

$$\alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$$

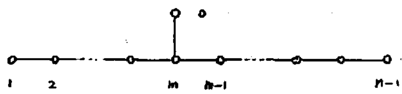
とおく.(このときのカルタン行列,ディンキン図形は次ページのようになる.)

(次ページへ)

カルタン行列 $(\langle\alpha_i^\vee,\alpha_j\rangle)_{i,j=0,1,\dots,n-1}$ $=$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & m & & \cdots & n \end{array}\\
\left[\begin{array}{c|cccccccc}
2 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & \\ \hline
0 & 2 & -1 & & & & & & \\
\vdots & -1 & 2 & \ddots & & & 0 & & \\
0 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
-1 & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
0 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
\vdots & & 0 & & & & 2 & -1 & \\
0 & & & & & & -1 & 2 &
\end{array}\right]
\end{array}$$

ディンキン図形.



$\mathfrak{h}_{m,n}$, $\mathfrak{h}_{m,n}^*$ への $W_{m,n}$ の作用を、　　$\underbrace{\langle\ ,\ \rangle}$ は ペアリングの意味としても使う　(内積だけど)

$$s_i(h) = h - \langle h,\alpha_i\rangle h_i \qquad (h\in\mathfrak{h}_{m,n})$$

$$s_i(\lambda) = \lambda - \alpha_i\langle h_i,\lambda\rangle \qquad (\lambda\in\mathfrak{h}_{m,n}^*)$$

で定める。(具体的には

$$s_k(\varepsilon_0) = \varepsilon_0 \qquad (k=1,2,\dots,n-1)$$

$$s_k(\varepsilon_i) = \begin{cases} \varepsilon_{k+1} & (i=k) \\ \varepsilon_k & (i=k+1) \\ \varepsilon_i & (i\neq k,k+1) \end{cases} \qquad (\quad〃\quad)$$

$1\leq i\leq n-1$

$$s_0(\varepsilon_0) = \varepsilon_0 + (m-2)\alpha_0,$$

$$s_0(\varepsilon_i) = \begin{cases} \alpha_0+\varepsilon_i & (i=1,\dots,m) \\ \varepsilon_i & (i=m+1,\dots,n) \end{cases}$$

である。) この時、次が成り立つ。

Thm $\varepsilon=(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ に対し $u_{ij}(\varepsilon)$ を

$$u_{ij}(\varepsilon)=\frac{[\varepsilon_{ij}][\varepsilon_{i\,m+1}][\alpha_0+\varepsilon_{ij}][\alpha_0+\varepsilon_{i\,m+1}]}{[\varepsilon_{ij}][\varepsilon_{i\,m+1}][\alpha_0+\varepsilon_{ij}][\alpha_0+\varepsilon_{i\,m+1}]}\qquad(\varepsilon_{ij}=\varepsilon_i-\varepsilon_j)$$

と定めると次が成り立つ.

$$u_{ij}(w(\varepsilon))=S_{ij}^{w}(u(\varepsilon))\qquad(w\in W_{m,n})$$

㊟ $i\neq m$, $w=\Delta_m$ の場合で証明する.(他の時も同様)

$$\Delta_m(\varepsilon_{ij})=\varepsilon_{ij}$$
$$\Delta_m(\varepsilon_{i\,m+1})=\varepsilon_{im}$$
$$\Delta_m(\alpha_0)=\alpha_0+\varepsilon_{m\,m+1}$$
$$\Delta_m(\varepsilon_{ij})=\varepsilon_{ij}$$
$$\Delta_m(\varepsilon_{i\,m+1})=\varepsilon_{im}$$

より

$$u_{ij}(w(\varepsilon))=\frac{[\varepsilon_{ij}][\varepsilon_{im}][\alpha_0+\varepsilon_{m\,m+1}+\varepsilon_{ij}][\alpha_0+\overbrace{\varepsilon_{m\,m+1}+\varepsilon_{im}}^{\varepsilon_{i\,m+1}}]}{[\varepsilon_{ij}][\varepsilon_{im}][\alpha_0+\varepsilon_{m\,m+1}+\varepsilon_{ij}][\alpha_0+\underbrace{\varepsilon_{m\,m+1}+\varepsilon_{im}}_{\varepsilon_{i\,m+1}}]}$$

一方 $S_{ij}^{w}(u)=(u_{ij}-u_{mj})/(1-u_{mj})$ より

$$S_{ij}^{w}(u(\varepsilon))=\frac{\dfrac{[\varepsilon_{ij}][\varepsilon_{i\,m+1}][\alpha_0+\varepsilon_{ij}][\alpha_0+\varepsilon_{i\,m+1}]}{[\varepsilon_{ij}][\varepsilon_{i\,m+1}][\alpha_0+\varepsilon_{ij}][\alpha_0+\varepsilon_{i\,m+1}]}-\dfrac{[\varepsilon_{ij}][\varepsilon_{m\,m+1}][\alpha_0+\varepsilon_{mj}][\alpha_0+\varepsilon_{i\,m+1}]}{[\varepsilon_{mj}][\varepsilon_{i\,m+1}][\alpha_0+\varepsilon_{ij}][\alpha_0+\varepsilon_{m\,m+1}]}}{\dfrac{[\varepsilon_{ij}][\varepsilon_{m\,m+1}][\alpha_0+\varepsilon_{mj}][\alpha_0+\varepsilon_{i\,m+1}]}{[\varepsilon_{mj}][\varepsilon_{i\,m+1}][\alpha_0+\varepsilon_{ij}][\alpha_0+\varepsilon_{m\,m+1}]}}$$

$$=\frac{[\varepsilon_{ij}][\alpha_0+\varepsilon_{i\,m+1}]}{[\varepsilon_{ij}][\alpha_0+\varepsilon_{i\,m+1}]}\boxed{\frac{[\varepsilon_{i\,m+1}][\varepsilon_{mj}][\alpha_0+\varepsilon_{ij}][\alpha_0+\varepsilon_{m\,m+1}]-[\varepsilon_{ij}][\varepsilon_{m\,m+1}][\alpha_0+\varepsilon_{i\,m+1}][\alpha_0+\varepsilon_{mj}]}{[\varepsilon_{i\,m+1}][\varepsilon_{mj}][\alpha_0+\varepsilon_{ij}][\alpha_0+\varepsilon_{m\,m+1}]-[\varepsilon_{ij}][\varepsilon_{m\,m+1}][\alpha_0+\varepsilon_{i\,m+1}][\alpha_0+\varepsilon_{mj}]}}$$

$$\| \quad (\dagger)$$

ここで、リニマニの関係式

(次ページへ)

Date . . No.

$$[\varepsilon_{i\,m+1}][\varepsilon_{mj}][\alpha_0+\varepsilon_{ij}][\alpha_0+\varepsilon_{m\,m+1}] = [\varepsilon_i-\varepsilon_m][\varepsilon_j-\varepsilon_{m+1}][-\alpha_0][\alpha_0+\varepsilon_i-\varepsilon_j+\varepsilon_m-\varepsilon_{m+1}]$$
$$+[\varepsilon_i-\varepsilon_j][\varepsilon_m-\varepsilon_{m+1}][\alpha_0+\varepsilon_i-\varepsilon_{m+1}][\alpha_0-\varepsilon_j+\varepsilon_m]$$

$[\varepsilon_{1\,m+1}][\varepsilon_{mj}][\alpha_0+\varepsilon_{1j}][\alpha_0+\varepsilon_{m\,m+1}]$ = (上の式で i を 1 にかえたもの).

から.

$$(\dagger) = \frac{[\varepsilon_i-\varepsilon_m][\alpha_0+\varepsilon_i-\varepsilon_j+\varepsilon_m-\varepsilon_{m+1}]}{[\varepsilon_i-\varepsilon_m][\alpha_0+\varepsilon_i-\varepsilon_j+\varepsilon_m-\varepsilon_{m+1}]}.$$

故に $u(w(\varepsilon)) = s_{ij}^{w}(u(\varepsilon))$ となる □

・クレモナ系

$E_\omega = \mathbb{C}/L_\omega$ $(L_\omega = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2)$

$\kappa = (\kappa_1, \cdots, \kappa_m) \in \mathbb{C}^m$ $(\kappa_i \not\equiv \kappa_j \mod L_\omega)$

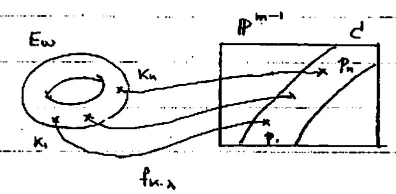
$\lambda \in \mathbb{C}$ $(\lambda \not\equiv 0 \mod L_\omega)$

に対し、

$$f_{\kappa,\lambda}(z) := \left(\frac{[\lambda+\kappa_1-z]}{[\lambda][\kappa_1-z]}, \cdots, \frac{[\lambda+\kappa_m-z]}{[\lambda][\kappa_m-z]}\right)$$

$C := f_{\kappa\lambda}(E_\omega)$

$p_j = f_{\kappa\lambda}(\varepsilon_j) \in C$ $(j=1,\cdots,n)$



とおく

<u>Rem.</u> $(m,n) = (3,9)$ のとき C は

$$\frac{[\kappa_2-\kappa_1+\lambda]}{[\kappa_2-\kappa_1]}\left(\frac{x_1}{x_2}-\frac{[\kappa_1][\kappa_2-\lambda]}{[\kappa_2][\kappa_1-\lambda]}\right) - \frac{[\kappa_1-\kappa_2+\lambda]}{[\kappa_1-\kappa_2]}\left(\frac{x_2}{x_1}-\frac{[\kappa_2][\kappa_1-\lambda]}{[\kappa_1][\kappa_2-\lambda]}\right)$$

$$+\frac{[\kappa_3-\kappa_2+\lambda]}{[\kappa_3-\kappa_2]}\left(\frac{X_2}{X_3}-\frac{[\kappa_2][\kappa_3-\lambda]}{[\kappa_3][\kappa_2-\lambda]}\right)-\frac{[\kappa_2-\kappa_3+\lambda]}{[\kappa_2-\kappa_3]}\left(\frac{X_3}{X_2}-\frac{[\kappa_3][\kappa_2-\lambda]}{[\kappa_2][\kappa_3-\lambda]}\right)$$

$$+\frac{[\kappa_1-\kappa_3+\lambda]}{[\kappa_1-\kappa_3]}\left(\frac{X_3}{X_1}-\frac{[\kappa_3][\kappa_1-\lambda]}{[\kappa_1][\kappa_3-\lambda]}\right)-\frac{[\kappa_3-\kappa_1+\lambda]}{[\kappa_3-\kappa_1]}\left(\frac{X_1}{X_3}-\frac{[\kappa_1][\kappa_3-\lambda]}{[\kappa_3][\kappa_1-\lambda]}\right)=0$$

で定まる $\mathbb{P}^2$ 内の3次曲線である。

<u>Prop.</u> $p_j=(x_{1j}:\cdots:x_{mj})$, $\lambda=\varepsilon_0-\sum_{i=1}^{m}\kappa_i$ として $[p_1,\cdots,p_n]$ の標準形

$$X=\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn}\end{bmatrix}\sim\left[\begin{array}{c|c} 1 & \cdots \\ \ddots & u_{ij} \\ 1 & \end{array}\right]$$

を計算すると u_{ij} は P23 の $u_{ij}(\varepsilon)$ と一致する。

㊟ P14 の命題より u_{ij} は

$$u_{ij}=\frac{\xi_{\hat{i}j}\,\xi_{\hat{i}\,m+1}}{\xi_{\hat{i}\,m+1}\,\xi_{\hat{i}j}}$$

と表される。ここで $\xi_{j_1\cdots j_m}$ を計算すると、

$$\xi_{j_1\cdots j_m}=\det(X)_{j_1\cdots j_m}$$

$$=\det(x_{aj_b})_{a,b=1,\cdots,m}\qquad\left(x_{ij}=\frac{[\lambda+\kappa_i-z]}{[\lambda][\kappa_i-z]}\right)$$

$$=\det\left(\frac{[\lambda+\kappa_a-\varepsilon_{b_j}]}{[\lambda][\kappa_a-\varepsilon_{b_j}]}\right)_{a,b=1,\cdots,m}$$

$\downarrow$ Fay の公式 (Appendix 参)

$$=\frac{[\lambda+\sum_{a=1}^{m}\kappa_a-\sum_{a=1}^{m}\varepsilon_{j_a}]}{[\lambda]}\;\frac{\prod_{1\le a<b\le m}[\kappa_a-\kappa_b][\varepsilon_{j_b}-\varepsilon_{j_a}]}{\prod_{a,b=1}^{m}[\kappa_a-\varepsilon_{j_b}]}$$

$$=\frac{[\varepsilon_0-\sum_{a=1}^{m}\varepsilon_{j_a}]}{[\lambda]}\;\frac{\prod_{1\le a<b\le m}[\kappa_a-\kappa_b][\varepsilon_{j_b}-\varepsilon_{j_a}]}{\prod_{a,b=1}^{m}[\kappa_a-\varepsilon_{j_b}]}$$

故に、

Date　・　・　No.

$$\hat{\xi}_{ij} = \frac{[\overbrace{\varepsilon_0 - \textstyle\sum_{a=1}^m \varepsilon_a}^{\alpha_0} + \varepsilon_i - \varepsilon_j]}{[\lambda]} \frac{\prod_{1\le a<b\le m}[\kappa_a-\kappa_b][\varepsilon_b-\varepsilon_a]}{\prod_{a,b=1}^m[\kappa_a-\varepsilon_b]}$$

$$\times \frac{\prod_{a=1}^m[\kappa_a-\varepsilon_i]}{\prod_{a=1}^m[\kappa_a-\varepsilon_j]} \frac{\prod_{k=1}^{i-1}[\varepsilon_j-\varepsilon_k]\prod_{k=i+1}^m[\varepsilon_j-\varepsilon_k]}{\prod_{k=1}^{i-1}[\varepsilon_i-\varepsilon_k]\prod_{k=i+1}^m[\varepsilon_k-\varepsilon_i]}$$

$\left(分子 = \dfrac{\prod_{k=1}^m[\varepsilon_j-\varepsilon_k]}{\varepsilon_j-\varepsilon_i} \right)$

$$= (i,j\ に関係しない項) \times \frac{\prod_{a=1}^m[\kappa_a-\varepsilon_i]}{\prod_{k=1}^{i-1}[\varepsilon_i-\varepsilon_k]\prod_{k=i+1}^m[\varepsilon_k-\varepsilon_i]} \quad \leftarrow i\ にだけ依存.$$

$$\times \underbrace{\frac{\prod_{k=1}^m[\varepsilon_j-\varepsilon_k]}{\prod_{a=1}^m[\kappa_a-\varepsilon_j]}}_{j\ にだけ依存.} \frac{[\alpha_0+\varepsilon_{ij}]}{[-\varepsilon_{ij}]}$$

よって. u_{ij} は P23 の $u_{ij}(\varepsilon)$ に一致する □

<u>Def.</u> g は $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ に依存して決まる $\mathbb{P}^{m-1}$ の点で $[p_1, \cdots, p_n, g] \in X_{m,n+1}$

とする. また $[p_1, \cdots, p_n, g]$ の標準形を.

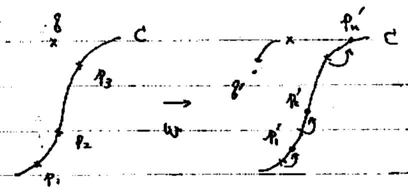
$$[p_1, \cdots, p_n, g] \sim \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & & & 1 \cdots 1 & 1 \\ & \ddots & & \boxed{u_{ij}} & z_2(\varepsilon) \\ & & 1 & & z_m(\varepsilon) \end{array}\right]$$

とする. このとき.

$$z(w(\varepsilon)) = R_i^{w}(u, z(\varepsilon)) \quad \leftarrow u_{ij}\ をパラメータにもつ方程式$$

をクレモナ系と呼ぶ.

<u>Rem.</u> p_j の求め方から $p_1, \cdots, p_n$ は C 上の点である. またこれらの点は $W_{m,n}$ の作用で C 上を動く.



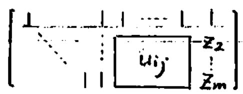
$p_j' = f_{\kappa \times}(w \cdot \varepsilon_j)$

<u>Prop.</u> 次で与えられた $z_i(\varepsilon)$ $(i=2,3,\cdots,m)$ はクレモナ系をみたす.

$$z_i(\varepsilon) = \frac{[\varepsilon_{i\,m+1}][\alpha_0+\varepsilon_{1\,m+1}][\varepsilon_1-c][\alpha_0+\varepsilon_i-c]}{[\alpha_0+\varepsilon_{i\,m+1}][\varepsilon_{1\,m+1}][\alpha_0+\varepsilon_1-c][\varepsilon_i-c]}$$

(この $z_i(\varepsilon)$ を "標準的な楕円関数解" とよぶ)

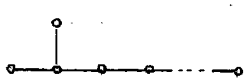
∵ $\varepsilon' = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1})$, $p_j = f_{\kappa,\lambda}(\varepsilon_j)$, $q = f_{\kappa,\lambda}(\varepsilon_{n+1})$ として
$[p_1, \cdots, p_n, q]$ の標準形

$[p_1, \cdots, p_n, q] \sim$ 

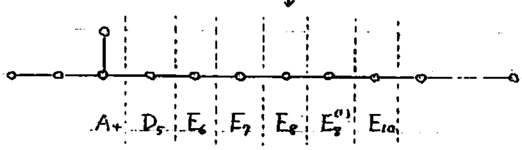
を計算すると, z_i は $z_i(\varepsilon)$ の c を ε_{n+1} に変えたものに一致する. このことと, ε_{n+1} が $W_{m,n}$ の作用で変化しないことに注意すれば主張がでる □

・楕円パンルベ方程式

$m=2,3,4$ で $W_{m,n}$ の型をかくと次のようになる.

$m=2$ のとき  D_n 型.

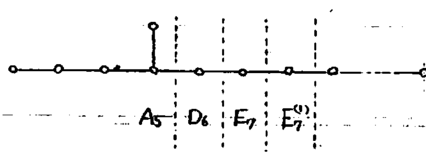
ここまでが有限型

$m=3$ のとき 

物理の人はこうかく

$E_8^{(1)} = \tilde{E}_8 = E_9$

不定符号

$m=4$ のとき 

$E_7^{(1)} = \tilde{E}_7$

Date　　　・　　・　　　No.

dual

このなかでアフィン型になるのは $(m,n) = \underbrace{(3,9),\ (6,9)}_{E_8^{(1)}\text{型}},\ \underbrace{(4,8)}_{E_7^{(1)}\text{型}}$ の場合である.

$W_{m,n}$ がアフィン型のとき, ルートごとに平行移動（$T_{\alpha^\vee}$）ができる.

$$W_{m,n} \simeq Q^\vee \rtimes W_0 \quad (Q = \mathbb{Z}\alpha_0^\vee \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_{n-2}^\vee,\ W_0 = \langle s_1, \cdots, s_{n-1} \rangle)$$

$$T_{\alpha^\vee} \longleftarrow \alpha^\vee \in Q^\vee$$

このとき, $Z_i(T_{\alpha^\vee}(\varepsilon)) = R_i^{T_{\alpha^\vee}}(u, z(\varepsilon))$ を楕円パンルベ方程式と呼ぶ.

§4. τ関数と双線形方程式

後々の都合上、記号を少し準備しておく。

$\Delta^{Re} := W_{m,n}\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{f}_{m,n}^*$ Real root. ← Simple root に $W_{m,n}$ を作用させたものの集り。

$\mathbb{K} = \mathbb{C}([\alpha] : \alpha \in \Delta^{Re})$: $[\alpha]$ の有理関数体

$P = \mathbb{Z}e_0 \oplus \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_m \subset \mathfrak{f}_{m,n}$ ← Picard lattice とよぶことにする。

$\Lambda = de_0 - \nu_1 e_1 - \cdots - \nu_n e_n$: "Linear system" ← $\deg \Lambda$ で d を表すことにする。

i.e. $\deg \Lambda = d$.

$L(\Lambda) = \{\varphi(x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_m]_d : \mathrm{ord}_{p_i}(\varphi) \geqq \nu_i \ (i = 1, \cdots, n)\}$

↑ d 次同次多項式全体のなす

$\mathrm{ord}_p(\varphi) \geqq \nu \Leftrightarrow \partial_x^\alpha \varphi(p) = 0$ for $|\alpha| < \nu$

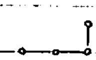
↑ $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ に対し $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$

$M = W_{m,n} e_n \subset P$ (orbit sp)

<u>Rem.</u> $L(\Lambda)$ の元は $p_1, p_2, \cdots, p_n$ において少なくとも ν_1 位, ν_2 位, $\cdots$, ν_n 位の零点をもつ d 次の同次関数。

・R_i^w の例とその性質。

まず簡単な場合で R_i^w を求めて見る。

<u>例</u>. $(m, n) = (3, 4)$, $w = s_1 s_0 s_3$ の時。(デンキン図形は  A_4 型)

$$[p_1, p_2, p_3, p_4, q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y \end{bmatrix}$$

Date　　　No.

とする. ワイル群の作用は

$$
\begin{aligned}
s_0(x) &= 1/x & s_0(y) &= 1/y \\
s_1(x) &= 1/x & s_1(y) &= y/x \\
s_2(x) &= y & s_2(y) &= x \\
s_3(x) &= (x-y)/(1-y) & s_2(y) &= -y/(1-y)
\end{aligned}
$$

だったので

$$
[p_1, p_2, p_3, p_4, q]\, s_1 s_0 s_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & 1 & 1 \\ & 1 & & 1 & w(x) \\ & & 1 & 1 & w(y) \end{bmatrix}
$$

$$
x \xrightarrow{s_1} \frac{1}{x} \xrightarrow{s_0} x \xrightarrow{s_3} \frac{x-\frac{x}{y}}{1-\frac{x}{y}} = \frac{x(1-y)}{x-y} = w(x)
$$

$$
y \longrightarrow \frac{y}{x} \longrightarrow \frac{x}{y} \longrightarrow \frac{-\frac{x}{y}}{1-\frac{x}{y}} = \frac{x}{x-y} = w(y)
$$

つまり. $q \cdot w = (1:x:y)w = (1:w(x):w(y)) = \left(\frac{x_2-x_3}{x_2} : \frac{x_1-x_3}{x_1} : 1\right)$

$$\left(x = \frac{x_2}{x_1},\ y = \frac{x_3}{x_1} \right)$$

故に $R_2^w(z_2) = \dfrac{z_2(1-z_3)}{z_2-z_3}$, $R_3^w(z_3) = \dfrac{z_2}{z_2-z_3}$

…さて. (このようなカンタンな例を見ただけではわからないが) もう少し修業をつむと次のコトが観察される.

<u>観察</u>　$w(z_i) = \dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)} \dfrac{Q_i(x)}{P_i(x)}$　($w \in W_{m,n}$ $P_1(x), Q_1(x), P_i(x), Q_i(x)$: 同次多項式)

index i によらない.

$$\left(z_i = \frac{x_i}{x_1} \right)$$

つまり.

$$
(1 : w(z_2) : w(z_3) : \cdots : w(z_m)) = \left(\frac{Q_1(x)}{P_1(x)} : \frac{Q_2(x)}{P_2(x)} : \cdots : \frac{Q_m(x)}{P_m(x)} \right)
$$

とかける. しかも $\deg P_i$, $\deg Q_i$, および P_i, Q_i の $p_1, \cdots, p_n$ における零点の位数は

特徴的な表れ方をする. —— もう少し詳しく言うと、各 $\Lambda \in M$ に対し. $\phi(\Lambda) \in L(\Lambda)$ が定って

$$w(z_i) = \text{const} \cdot \frac{\phi(w(\alpha_0^\vee + e_i))}{\phi(w \cdot e_i)} \frac{\phi(w \cdot e_1)}{\phi(w(\alpha_0^\vee + e_1))}$$

とかける.

$\Lambda = de_0 - \nu_1 e_1 - \cdots - \nu_n e_n$ とすると、$\phi(\Lambda)$ は $p_1 \cdots p_n$ で少なくとも $\nu_1, \ldots, \nu_n$ 位の零点をもつ d 次の同次多項式.

チョットこの例で確認してみる ....

$w = s_1 s_0 s_3$

$$w(e_1) = e_0 - e_1 - e_3$$
$$w(e_2) = e_0 - e_2 - e_3$$
$$w(e_3) = e_4$$
$$w(\alpha_0^\vee + e_1) = w(e_0 - e_2 - e_3) = e_0 - e_1 - e_4$$
$$w(\alpha_0^\vee + e_2) = w(e_0 - e_1 - e_3) = e_0 - e_2 - e_4$$
$$w(\alpha_0^\vee + e_3) = w(e_0 - e_1 - e_2) = e_3$$

$$\begin{array}{cccc} & & & \\ \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y \end{matrix}\right] \\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow \\ p_1\ p_2\ p_3\ p_4 \end{array}$$

より $\phi(w(e_1))$ $(= \phi(e_0 - e_1 - e_3))$ は、p_1 と p_3 を少なくとも一位の零点とする1次の同次多項式. よって $\phi(w(e_1)) = \text{const} \cdot x_2$ となる. 同様に. $\phi(w(\alpha_0^\vee + e_1))$ $(= \phi(e_0 - e_1 - e_4))$ は. p_1 と p_4 を少なくとも一位の零点にする1次の同次多項式だから $\phi(w(\alpha_0^\vee + e_1)) = \text{const} \cdot (x_2 - x_3)$ となる. 以下この操作をつづけると

$$\phi(w(e_2)) = \text{const} \cdot x_1 \quad , \ \phi(w(\alpha_0^\vee + e_2)) = \text{const} \cdot (x_1 - x_3)$$
$$\phi(w(e_3)) = \text{const} \quad \ , \ \phi(w(\alpha_0^\vee + e_3)) = \text{const}.$$

$e_3 = 0 - (-1) \cdot e_3$

$\phi(e_3)$ は p_3 において高々一位の極をもつ0次の同次多項式なので const.

となる. 故に

$$(1 : w(z_2) : w(z_3)) = \left(1 : c_2' \frac{x_1 - x_3}{x_1} \frac{x_2}{x_2 - x_3} : c_3' \frac{x_2}{x_2 - x_3}\right)$$

$$= \left(c_1 \frac{x_2 - x_3}{x_2} : c_2 \frac{x_1 - x_3}{x_1} : c_3\right)$$

$$-\langle \alpha_0, \Lambda \rangle = (m-2)d - \nu_1 - \cdots - \nu_m$$

Date　　No.

これは P30 の結果と矛盾しない！

・τ 関数の枠組

$e_0, e_1, \cdots, e_n$ に対応する不定元 $\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_n$ を取ってきて、

$$R = \bigoplus_{\Lambda \in P} \mathbb{K}(x)_{\deg \Lambda} \, \tau^\Lambda$$

と言う代数を考える。ここで

$$\mathbb{K}(x)_d = x_1^d \, (\overset{z_2}{\overset{\shortparallel}{x_2/x_1}}, \cdots, \overset{z_m}{\overset{\shortparallel}{x_m/x_1}})$$

$$= \left\{ \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} : \varphi(x), \psi(x) \text{ は } x \text{ の同時多項式で } \deg\varphi - \deg\psi = d \right\}$$

$$\tau^\Lambda = \tau_0^d \tau_1^{-\nu_1} \tau_2^{-\nu_2} \cdots \tau_n^{-\nu_n} \quad (\Lambda = de_0 - \nu_1 e_1 - \nu_2 e_2 - \cdots - \nu_n e_n)$$

である。この R への $W_{m,n} = \langle \mathfrak{S}_n, s_0 \rangle$ $(\mathfrak{S}_n = \langle s_1, \cdots, s_{n-1} \rangle)$ の作用を、

$$s_0(\tau^\Lambda \varphi(\varepsilon; x)) = \tau^{s_0 \Lambda} \varphi(s_0(\varepsilon); x^{-1}) \prod_{i=1}^m x_i^{d-\nu_i}$$
$$\times (-1)^d [\alpha_0]^{-\langle \alpha_0, \Lambda \rangle} \prod_{i=1}^m \left(\frac{[\alpha_0 + \varepsilon_{i\, m+i}]}{[\varepsilon_{i\, m+i}]} \right)^{d-\nu_i} \quad \text{—} (\#)$$

$$s_k(\tau^\Lambda \varphi(\varepsilon; x)) = \tau^{s_k \Lambda} \varphi(s_k(\varepsilon); s_k(x)) \quad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$(\varphi(\varepsilon; x) \in \mathbb{K}(x)_{\deg \Lambda}, \ \Lambda = de_0 - \nu_1 e_1 - \nu_2 e_2 - \cdots - \nu_n e_n \in P)$$

で定める。ただし $W_{m,n}$ の $\mathbb{K}_0(x) = \mathbb{K}(x_2/x_1, \cdots, x_m/x_1)$ への作用は、

・$k = 0$ のとき $\cdots\cdots$ $s_k(x_i) = \dfrac{1}{x_i}$ $(i = 1, \cdots, m)$

・$k = 1, \cdots, m-1$ のとき $\cdots$ $s_k(x_i) = x_{(k\, k+1) i}$ $(i = 1, \cdots, m)$

(次ページへ)

・$k=m$ のとき ……… $\Delta_k(x_i) = \begin{cases} x_i - x_m & (i=1,\cdots,m-1) \\ -x_m & (i=m) \end{cases}$

・$k=m+1$ のとき ……… $\Delta_k(x_i) = \dfrac{[\alpha_0+\varepsilon_{i\,m+1}][\varepsilon_{i\,m+2}]}{[\varepsilon_{i\,m+1}][\alpha_0+\varepsilon_{i\,m+2}]} x_i \quad (i=1,\cdots,m)$

・$k=m+2,\cdots,n-1$ のとき …… $\Delta_k(x_i) = x_i \quad (i=1,\cdots,m)$

とする.

<u>Rem. 1.</u> "(#) の右辺" $\in L(\Delta_0\Lambda)$ で $^{\Delta_0\Lambda}$ である.

$$\Delta_0\Lambda = \tilde{d}e_0 - \hat{\nu}_1 e_1 - \cdots - \hat{\nu}_n e_n$$

$$\tilde{d} = (m-1)d - \nu_1 - \cdots - \nu_m$$
$$\tilde{\nu}_i = (m-2)d - \nu_1 - \cdots - \nu_{i-1} - \nu_{i+1} - \cdots - \nu_m \quad (i=1,\cdots,m)$$
$$\hat{\nu}_i = \nu_i \quad (i=m+1,\cdots,n)$$

<u>Rem. 2.</u> X を.

$$X = \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & & & 1 \cdots 1 & x_1 \\ & \ddots & & \boxed{u_{ij}} & x_2 \\ & & 1 & & \vdots \\ & & & & x_m \end{array}\right] \quad \left(u_{ij} = u_{ij}(\varepsilon) \leftarrow \text{P23 の } u_{ij}(\varepsilon)\right)$$

とおくと.

$$X\cdot\Delta_{m+1} = \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & & & 1 & 1 \cdots 1 & x_1 \\ & \ddots & & u_{2,m+2} & \boxed{u_{ij}} & x_2 \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & u_{m,m+2} & & x_m \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & & & 1 \cdots 1 & x_1 \\ & \ddots & & \boxed{\dfrac{u_{ij}}{u_{i\,m+2}}} & \boxed{} \\ & & 1 & & \end{array}\right] \quad \text{---} (*)$$

$$\frac{x_i}{u_{i\,m+2}}$$

Date . . No.

ここで、$u_{i\,m+2} = \dfrac{c_1}{c_i}$ $\left(c_i = \dfrac{[\alpha_0 + \varepsilon_{i\,m+1}][\varepsilon_{i\,m+2}]}{[\varepsilon_{i\,m+1}][\alpha_0 + \varepsilon_{i\,m+2}]} \right)$ より

$$(*) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & & & 1 & \cdots & 1 & c_1 x_1 \\ & \ddots & & & & & c_2 x_2 \\ & & & & & & \vdots \\ & & 1 & & & & c_m x_m \end{array} \right]$$

つまり

$$\Delta_{m+1}(x_i) = \frac{[\alpha_0 + \varepsilon_{i\,m+1}][\varepsilon_{i\,m+2}]}{[\varepsilon_{i\,m+1}][\alpha_0 + \varepsilon_{i\,m+2}]}\, x_i \qquad (i = 1, \cdots, m)$$

となる。―― 前ページで定めた $\mathbb{K}_0(x)$ への $W_{m,n}$ の作用は、このことから来ている。

<u>Thm</u>. P32のように作用を定義すると、$W_{m,n}$ は R に自己同型群として作用し、その作用は $\mathbb{K}(x)_0 = \mathbb{K}(z_1, \cdots, z_m)$ の作用の拡張をあたえる。

$f_i = \dfrac{\Delta_0(\tau_i)}{\tau_i}$ $(i = 1, \cdots, m)$ とおくと、　　※ f_i はパンルヴェ方程式の不変因子に相当

$$f_i = \frac{\tau_0}{\tau_1 \cdots \tau_m} \cdot x_i \cdot \frac{[\alpha_0][\alpha_0 + \varepsilon_{i\,m+1}]}{[\varepsilon_{i\,m+1}]}$$

$$\left(\because \quad \Delta_0(\tau_i) = \tau^{\Delta_0(e_i)} x_i \cdot [\alpha_0] \frac{[\alpha_0 + \varepsilon_{i\,m+1}]}{[\varepsilon_{i\,m+1}]} \right.$$

$$\left. \Delta_0(e_i) = e_0 - e_1 - \cdots - \hat{e}_i - \cdots - e_m \right)$$

よって

$$x_i = \frac{\tau_1 \cdots \tau_m}{\tau_0} \frac{[\varepsilon_{i\,m+1}]}{[\alpha_0][\alpha_0 + \varepsilon_{i\,m+1}]} f_i$$

とかける。この式を $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} \tau^{\Lambda} \in R$ $(\deg\varphi = \deg\psi = d)$ に代入すると、

$$\Lambda = d e_0 - \nu_1 e_1 - \cdots - \nu_n e_n$$

(次ページへ)

$$\frac{\varphi(c\cdot f)}{\psi(c\cdot f)}\cdot \tau_1^{d-\nu_1}\cdots \tau_m^{d-\nu_m}\,\tau_{m+1}^{-\nu_{m+1}}\cdots\tau_n^{-\nu_n} \qquad \left(c_i = \frac{[\varepsilon_{i\,m+1}]}{[\alpha_0][\alpha_0+\varepsilon_{i\,m+1}]} \right)$$

故に R は次のようにかける

$$R = S[\tau_1^{\pm 1},\cdots,\tau_n^{\pm 1}] \qquad \left(S = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathbb{K}(f_1,\cdots,f_m)_d \subset \mathbb{K}(f_1,\cdots,f_m) \right)$$

↑ 分母,分子が $f_1,\cdots,f_m$ の同次多項式で,"分子の次数－分母の次数"$=d$ となるもの全体.

この $f_1,\cdots,f_m$ と $\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_n$ を用いると,(目がつぶれない程度の複雑さで)楕円パンルベ系を記述できる(詳しいことは5節で述べる)

なお,$W_{m,n}$ の $f_1,\cdots,f_m,\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_n$ の作用を表にすると次のようになる

	$\tau_1,\cdots,\tau_m$	$\tau_{m+1},\cdots,\tau_n$	$f_1,\cdots,f_m$
s_0	$\tau_i f_i$	τ_i	$1/f_i$
s_1	$\tau_{(k\,k+1)i}$		$f_{(k\,k+1)i}$
$\vdots$			
s_{m-1}			
s_m			$(*)$
s_{m+1}			f_i
$\vdots$			
s_n			

$$(*)\quad s_m(f_i) = \frac{\tau_m}{\tau_{m+1}}\left(\frac{[\varepsilon_{i\,m+1}][\alpha_0+\varepsilon_{m\,m+1}]}{[\varepsilon_{im}][\alpha_0]} f_i - \frac{[\varepsilon_{m\,m+1}][\alpha_0+\varepsilon_{i\,m+1}]}{[\varepsilon_{im}][\alpha_0]} f_m \right)$$

$(i=1,2,\cdots,m-1)$

$$s_m(f_m) = \frac{\tau_m}{\tau_{m+1}} f_m$$

Date　　　　No.

Memo. (*)の所だけ計算をかいておく。

$$\left(\begin{array}{l} s_m(\alpha_0) = \alpha_0 + \varepsilon_{m\,m+1} \\ s_m(\varepsilon_{i\,m+1}) = \varepsilon_{im} \end{array}\right)$$

$i = 1, 2, \cdots, m-1$ のとき… $f_i = \dfrac{\tau_0}{\tau_1 \cdots \tau_m} x_i \dfrac{[\alpha_0][\alpha_0 + \varepsilon_{i\,m+1}]}{[\varepsilon_{i\,m+1}]}$ より

$$s_m(f_i) = \frac{\tau_0}{\tau_1 \cdots \tau_{m-1}\tau_{m+1}} (x_i - x_m) \frac{[\alpha_0 + \varepsilon_{m\,m+1}][\alpha_0 + \varepsilon_{i\,m+1}]}{[\varepsilon_{im}]}$$

$$= \frac{1}{[\varepsilon_{im}][\alpha_0]} \frac{\tau_m}{\tau_{m+1}} \left\{ \frac{\tau_0}{\tau_1 \cdots \tau_m} x_i \frac{[\alpha_0][\alpha_0 + \varepsilon_{i\,m+1}]}{[\varepsilon_{i\,m+1}]} \cdot [\varepsilon_{i\,m+1}][\alpha_0 + \varepsilon_{m\,m+1}] - \underbrace{\frac{\tau_0}{\tau_1 \cdots \tau_m} x_m \frac{[\alpha_0][\alpha_0 + \varepsilon_{m\,m+1}]}{[\varepsilon_{m\,m+1}]}}_{f_m} \cdot [\varepsilon_{m\,m+1}][\alpha_0 + \varepsilon_{i\,m+1}] \right\}$$

$$= \frac{\tau_m}{\tau_{m+1}} \left(\frac{[\varepsilon_{i\,m+1}][\alpha_0 + \varepsilon_{m\,m+1}]}{[\varepsilon_{im}][\alpha_0]} f_i - \frac{[\varepsilon_{m\,m+1}][\alpha_0 + \varepsilon_{i\,m+1}]}{[\varepsilon_{im}][\alpha_0]} f_m \right)$$

$i = m$ のとき…

braid relation

$$s_m(f_m) = \frac{s_m s_0(\tau_m)}{s_m(\tau_m)} = \frac{s_m s_0 s_m(\tau_{m+1})}{\tau_{m+1}} \quad \left(\begin{array}{l} s_m s_0 s_m = s_0 s_m s_0 \\ s_0(\tau_{m+1}) = \tau_{m+1} \end{array}\right)$$

$$= \frac{s_0(\tau_m)}{\tau_{m+1}} = \frac{\tau_m}{\tau_{m+1}} f_m$$

・格子上のτ関数

Thm 各$\Lambda \in M$に対し、次をみたす$\tau(\Lambda) \in \mathcal{R}$が一通りに定まる。

- $\tau(e_i) = \tau_i \quad (i = 1, \cdots, n)$
- $w.\tau(\Lambda) = \tau(w.\Lambda) \quad (w \in W_{m,n})$
- $\tau(\Lambda) = \tau^{\wedge}\phi(\Lambda) \quad (\phi(\Lambda) \in L(\Lambda))$

∵ $\Lambda = w.e_n$として$\tau(\Lambda)$を$\tau(\Lambda) = w.\tau_n$と定めればよい □

Rem P34 で見たように $\dfrac{\Delta_0(\tau_i)}{\tau_i} = \dfrac{\tau_0}{\tau_1 \cdots \tau_m} x_i \dfrac{[\alpha_0][\alpha_0 + \varepsilon_{i\,m+1}]}{[\varepsilon_{i\,m+1}]} = f_i$ よって

$(i = 1, \cdots, m)$

$$\frac{f_i}{f_1} = \frac{[\alpha_0 + \varepsilon_{i\,m+1}][\varepsilon_{1\,m+1}]}{[\alpha_0 + \varepsilon_{1\,m+1}][\varepsilon_{i\,m+1}]} \frac{x_i}{x_1}$$

$$\left(z_i = \frac{x_i}{x_1}\right)$$

$$\therefore\ z_i = \frac{[\alpha_0 + \varepsilon_{1\,m+1}][\varepsilon_{i\,m+1}]}{[\alpha_0 + \varepsilon_{i\,m+1}][\varepsilon_{1\,m+1}]} \frac{f_i}{f_1}$$

ここで $f_i = \dfrac{\Delta_0(\tau_i)}{\tau_i} = \dfrac{\Delta_0(\tau(e_i))}{\tau_i} = \dfrac{\tau(\alpha_0^\vee + e_i)}{\tau(e_i)}$ より

$$w(f_i) = \frac{\tau(w(\alpha_0^\vee + e_i))}{\tau(we_i)} = \tau^{w\alpha_0^\vee} \frac{\phi(w(\alpha_0^\vee + e_i))}{\phi(we_i)}$$

$$\therefore\ w(z_i) = \underbrace{w\left(\frac{[\ ][\ ]}{[\ ][\ ]}\right)}_{\text{const.}} \frac{w(f_i)}{w(f_1)} = w\left(\frac{[\ ][\ ]}{[\ ][\ ]}\right) \frac{\phi(w(\alpha_0^\vee + e_i))}{\phi(w \cdot e_i)} \frac{\phi(we_1)}{\phi(w(\alpha_0^\vee + e_1))}$$

故に、

$$(1 : w(z_2) : \cdots : w(z_m)) = \left(c_1 \frac{\phi(w(\alpha_0^\vee + e_1))}{\phi(we_1)} : \cdots\cdots : c_m \frac{\phi(w(\alpha_0 + e_m))}{\phi(we_m)} \right)$$

となる。これが P30 で書いた"観察"である。

Rem $\tau_0 = 1$, $\tau_n = [\varepsilon_n - c]$ とおくと、$\Lambda = de_0 - \nu_1 e_1 - \cdots - \nu_n e_n \in M$ に対し

$$\tau(\Lambda) = [\lambda - c] \quad (\lambda = d\varepsilon_0 - \nu_1 \varepsilon_1 - \cdots - \nu_n \varepsilon_n)$$

となる。（実は、$w \cdot e_n = \Lambda$ とすると、$w \varepsilon_n = \lambda$ だから

$$\tau(\Lambda) = \tau(w \cdot e_n) = w \cdot \tau(e_n) = w[\varepsilon_n - c] = [\lambda - c]$$

である）よって、

$$f_i = \frac{\Delta_0(\tau_i)}{\tau_i} = \frac{[\alpha_0 + \varepsilon_i - c]}{[\varepsilon_i - c]}$$

$$\Delta_m \Delta_0(\tau_i) = \Delta_m(\tau(e_0 - e_1 - \cdots - \hat{e}_i - \cdots - e_m))$$

$$= \tau(e_0 - e_1 - \cdots - \hat{e}_i - \cdots - e_{m-1} - e_{m+1})$$

$$\therefore\ z_i = \frac{[\varepsilon_{im+1}][\alpha_0 + \varepsilon_{im+1}][\varepsilon_i - c][\alpha_0 + \varepsilon_i - c]}{[\alpha_0 + \varepsilon_{im+1}][\varepsilon_{im+1}][\alpha_0 + \varepsilon_i - c][\varepsilon_i - c]} \quad \leftarrow \text{P37の上から3行目参}$$

となる。これはP27の標準的な楕円関数解である。

・τ関数の双線形方程式

Δ_m の f_i $(i=1,2,\cdots,m-1)$ への作用は、

$$\Delta_m(f_i) = \frac{\tau_m}{\tau_{m+1}} \frac{1}{[\alpha_0][\varepsilon_{im}]} \left([\varepsilon_{im+1}][\alpha_0 + \varepsilon_{mm+1}] f_i - [\varepsilon_{mm+1}][\alpha_0 + \varepsilon_{im+1}] f_m \right)$$

であった。(P35参)。この式に $f_i = \frac{\Delta_0(\tau_i)}{\tau_i}$ $(i=1,\cdots,m)$ を代入して整理すると、

$$\frac{\Delta_m \Delta_0(\tau_i)}{\Delta_m(\tau_i)} = \frac{\tau_m}{\tau_{m+1}} \left(\frac{[\varepsilon_{im+1}][\alpha_0 + \varepsilon_{mm+1}]}{[\alpha_0][\varepsilon_{im}]} \frac{\Delta_0(\tau_i)}{\tau_i} - \frac{[\varepsilon_{mm+1}][\alpha_0 + \varepsilon_{im+1}]}{[\alpha_0][\varepsilon_{im}]} \frac{\Delta_0(\tau_m)}{\tau_m} \right)$$

$$\rightarrow [\alpha_0][\varepsilon_{im}]\tau_{m+1} \Delta_m \Delta_0(\tau_i) = [\varepsilon_{im+1}][\alpha_0 + \varepsilon_{mm+1}] \tau_m \Delta_0(\tau_i)$$
$$- [\varepsilon_{mm+1}][\alpha_0 + \varepsilon_{im+1}] \tau_i \Delta_0(\tau_m)$$

$$\rightarrow [\varepsilon_{im}][\alpha_0] \tau(e_{m+1}) \tau(\check{\alpha}_0 + e_i - e_{m+1}) - [\varepsilon_{im+1}][\alpha_0 + \varepsilon_{mm+1}] \tau(e_m) \tau(\check{\alpha}_0 + e_i)$$
$$+ [\varepsilon_{mm+1}][\alpha_0 + \varepsilon_{im+1}] \tau(e_i) \tau(\check{\alpha}_0 + e_m) = 0$$

となる。とくに $\Lambda = e_0 - e_1 - \cdots - \hat{e}_i - \cdots - e_{m-1}$, $\lambda = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \cdots - \hat{\varepsilon}_i - \cdots - \varepsilon_m$ とおけば、この式は

$$[\varepsilon_i - \varepsilon_m][\lambda - \varepsilon_m - \varepsilon_i] \tau(e_{m+1}) \tau(\Lambda - e_{m+1})$$
$$+ [\varepsilon_m - \varepsilon_{m+1}][\lambda - \varepsilon_m - \varepsilon_{m+1}] \tau(e_i) \tau(\Lambda - e_i)$$
$$+ [\varepsilon_{m+1} - \varepsilon_i][\lambda - \varepsilon_{m+1} - \varepsilon_i] \tau(e_m) \tau(\Lambda - e_m) = 0$$

と表せる。これを $\mathfrak{S}_n$ 不変な形に直すと、

$$[\varepsilon_j - \varepsilon_k][\lambda - \varepsilon_j - \varepsilon_k] \tau(e_i) \tau(\Lambda - e_i) + [\varepsilon_k - \varepsilon_i][\lambda - \varepsilon_k - \varepsilon_i] \tau(e_j) \tau(\Lambda - e_j)$$
$$+ [\varepsilon_i - \varepsilon_j][\lambda - \varepsilon_i - \varepsilon_j] \tau(e_k) \tau(\Lambda - e_k) = 0 \quad \text{—(4)}$$

$$\Lambda = e_0 - e_{\ell_1} - e_{\ell_2} - \cdots - e_{\ell_{m-2}} \in \mathfrak{f}_{m,n}$$
$$\lambda = \varepsilon_0 - \varepsilon_{\ell_1} - \varepsilon_{\ell_2} - \cdots - \varepsilon_{\ell_{m-2}} = \langle \Lambda, \cdot \rangle \in \mathfrak{f}_{m,n}^*$$

となる。ただし、$1 \leq i, j, k, \ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_{m-2} \leq n$ で、$i, j, k, \ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_{m-2}$ は相異なるものである。

(4)のような双線形関係式を、広田-三輪型の方程式という。

Rem 1. s_m を f_m へ作用させた式

$$s_m(f_m) = \frac{\tau_m}{\tau_{m+1}} f_m$$

に $f_i = \dfrac{s_0(\tau_i)}{\tau_i}$ を代入すると、

$$\frac{s_m s_0(\tau_m)}{s_m(\tau_m)} = \frac{\tau_m}{\tau_{m+1}} \frac{s_0(\tau_m)}{\tau_m}$$

となる。ここで、この式の左辺を計算すると　　$s_m s_0 s_m = s_0 s_m s_0$

$$\frac{s_m s_0(\tau_m)}{s_m(\tau_m)} = \frac{s_m s_0 s_m(\tau_{m+1})}{\tau_{m+1}} = \frac{s_0 s_m s_0(\tau_{m+1})}{\tau_{m+1}}$$
$$= \frac{s_0(\tau_m)}{\tau_{m+1}} = \text{右辺}$$

故に、s_m の f_m への作用からは当り前の式しかでない。

Rem 2. 今の議論の逆もたどれる。つまり、各 $\Lambda \in M$ に対して $\tau(\Lambda)$ が定まっていて、これらが(4)と $w \cdot \tau(\Lambda) = \tau(w\Lambda)$ をみたしていたとすると、

$$f_i = \frac{s_0(\tau_i)}{\tau_i} = \frac{\tau(\alpha_0 + e_i)}{\tau(e_i)}$$
$$\tau_i = \tau(e_i)$$

は $W_{m,n}$ の R への作用を再現する。

Date ・ ・ No.

Rem 3. $\tau(\Lambda) = [\lambda - C]$ ($\lambda \equiv \langle \Lambda, \cdot \rangle$) のとき (R) はリーマンの関係式になる.

Rem 4. (R) は Ohta-Rammani-Grammaticos (J. Phys 2001) や、坂井さんの双線形方程式と同じものである.

§5 $E_8^{(1)}$型の楕円パンルベ方程式

・ $W_{3,9}$ の平行移動

$Q^\vee(E_8^{(1)})$, δ を次のように定める。

δ は $\langle \delta, \alpha_i \rangle = 0$ $(i=0,\cdots,8)$ $w(\delta) = \delta$ $(w \in W_{3,9})$ をみたす。

$$Q^\vee(E_8^{(1)}) = \mathbb{Z}\alpha_0^\vee \oplus \mathbb{Z}\alpha_1^\vee \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_8^\vee$$

$$\delta = 3e_0 - e_1 - e_2 - \cdots - e_9 = 3\alpha_0^\vee + 2\alpha_1^\vee + 4\alpha_2^\vee + 6\alpha_3^\vee + 5\alpha_4^\vee + 4\alpha_5^\vee + 3\alpha_6^\vee + 2\alpha_7^\vee + \alpha_8^\vee$$

また $\alpha^\vee \in Q^\vee(E_8^{(1)})$ 方向への平行移動 $T_{\alpha^\vee} \in W_{3,9}$ を

$$T_{\alpha^\vee}(\Lambda) = \Lambda + \langle \delta, \Lambda \rangle \alpha^\vee - \left(\frac{1}{2}\langle \alpha^\vee, \alpha^\vee \rangle \langle \delta, \Lambda \rangle + \langle \alpha^\vee, \Lambda \rangle\right)\delta \quad (\Lambda \in P)$$

と定める。

$\alpha^\vee = \alpha_7^\vee$ のとき $T_{\alpha_7^\vee}$ の作用は次のようになる

$\langle e_0, e_0 \rangle = -1$

$$T_{\alpha_7^\vee}(e_0) = e_0 - 3\alpha_7^\vee + 3\delta$$

$$T_{\alpha_7^\vee}(e_i) = e_i - \alpha_7^\vee + (1 - \langle \alpha_7^\vee, e_i \rangle)\delta \quad (i = 1, 2, \cdots, 8)$$

さらに $w = s_{127} s_{347} s_{567} s_{15} s_{26} s_8 s_9$ (s_{ijk} は $e_0 - e_i - e_j - e_k$ に関する折り返し、s_{ij} は $e_i - e_j$ に関する折り返し) とおくと $T_{\alpha_7^\vee}$ は

$$T_{\alpha_7^\vee} = w^2$$

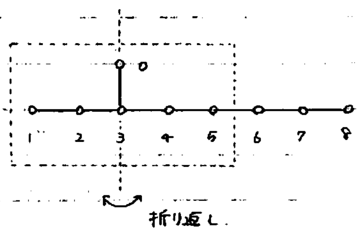
とかける ── このことに注意して次の所で $T_{\alpha_7^\vee}(e_i)$ の形を具体的に記述する

これより、$E_8^{(1)}$型の楕円パンルベ方程式の具体的な形がわかる。

Date　　・　・　　No.

<u>Rem</u>　$T_{\alpha_7^\vee}$ を simple reflection の積で表すと 58 個の積になる (これでも $\alpha_0^\vee, \alpha_1^\vee, \dots, \alpha_7^\vee$ の中では一番短い). 故に, 単純な方法で $T_{\alpha_7^\vee}(f_i)$ を求めようとすれば s_i ("τ と f の有理式") を 58 回計算することになる.

<u>Rem</u>　$\sigma = s_{127} s_{347} s_{567} s_{15} s_{26}$ とおくと $\omega = \sigma s_8 s_7$ である. この σ は, 下図のような折り返しを行う変換である.



なお, ω の具体的な作用は次の通り.

$$\omega(e_0) = e_0 - 2e_7 + e_8 + e_9 + \delta \qquad \omega(e_5) = e_0 - e_2 - e_7$$
$$\omega(e_1) = e_0 - e_6 - e_7 \qquad \omega(e_6) = e_0 - e_1 - e_7$$
$$\omega(e_2) = e_0 - e_5 - e_7 \qquad \omega(e_7) = e_9$$
$$\omega(e_3) = e_0 - e_4 - e_7 \qquad \omega(e_8) = -e_7 + e_8 + e_9 + \delta$$
$$\omega(e_4) = e_0 - e_3 - e_7 \qquad \omega(e_9) = e_8$$

・楕円パンルベ方程式の形

$$f_i = \frac{s_0(\tau_i)}{\tau_i} \quad (i = 1, 2, 3) \text{ とおくと,}$$

$$x_i = \frac{\tau_1 \tau_2 \tau_3}{\tau_0} \frac{[\varepsilon_{i4}]}{[\alpha_0][\alpha_0 + \varepsilon_{i4}]} f_i$$

と表せた (P34 参) ので, z_i は次のようにかける.

$$z_i = \frac{x_i}{x_1} = \frac{[\alpha_0 + \varepsilon_{14}][\varepsilon_{i4}]}{[\alpha_0 + \varepsilon_{i4}][\varepsilon_{14}]} \frac{f_i}{f_1}$$

故に $T_{\alpha_7^\vee}(f_i)$ がどのような形をしているかわかれば楕円パンルベ方程式の形もわかる.

Lem. (i) $\tau(e_0-e_i-e_j)=\dfrac{\tau_1\tau_2\tau_3}{\tau_i\tau_j}F_{ij}(f)\quad(1\leq i<j\leq 9)$

$$F_{ij}(f)=\sum_{k=1}^{3}\lambda_{ij}^{k}f_k\qquad \lambda_{ij}^{k}=\frac{[\varepsilon_{ki}][\varepsilon_{kj}][\varepsilon_{kij}]}{[\varepsilon_{123}]\prod_{\substack{l=1,2,3\\ l\neq k}}[\varepsilon_{kl}]}$$

(ii) $\tau(2e_0-e_1-e_2-e_3-e_i-e_j)=\dfrac{\tau_1\tau_2\tau_3}{\tau_i\tau_j}G_{ij}(f)\quad(4\leq i<j\leq 9)$

$$G_{ij}(f)=-f_1f_2f_3\sum_{k=1}^{3}\mu_{ij}^{k}f_k^{-1}$$

$$\mu_{ij}^{k}=\frac{[\varepsilon_{123}+\varepsilon_{ki}][\varepsilon_{123}+\varepsilon_{kj}][\varepsilon_{kij}]}{[\varepsilon_{123}]\prod_{\substack{l=1,2,3\\ l\neq k}}[\varepsilon_{kl}]}$$

ここで $\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_0-\varepsilon_i-\varepsilon_j-\varepsilon_k$ である.

∵ (i) $f_1=\dfrac{s_0(\tau_1)}{\tau_1}$ と $s_0(e_1)=e_0-e_2-e_3$ より

$$\tau(e_0-e_2-e_3)=\tau_1f_1$$

である. よってあとは $w(e_0-e_2-e_3)=e_0-e_i-e_j$ となる $w\in W_{3,9}$ を取って $w(\tau_1f_1)$ を計算すればよい. 例えば $i=4,\ j=5$ の時だと

$$\tau(e_0-e_2-e_3)=\tau_1f_1$$

$$\Big\downarrow\ s_3\text{を作用}$$

$$\tau(e_0-e_2-e_4)=\frac{\tau_1\tau_3}{\tau_4}\frac{1}{[\varepsilon_{13}][\alpha_0]}\left([\varepsilon_{14}][\alpha_0+\varepsilon_{34}]f_1-[\varepsilon_{34}][\alpha_0+\varepsilon_{14}]f_3\right)$$

$$\Big\downarrow\ s_4$$

$$\tau(e_0-e_2-e_5)=\frac{\tau_1\tau_3}{\tau_5}\frac{1}{[\varepsilon_{13}][\alpha_0]}\left([\varepsilon_{15}][\alpha_0+\varepsilon_{35}]f_1-[\varepsilon_{35}][\alpha_0+\varepsilon_{15}]f_3\right)$$

$$\Big\downarrow\ s_2$$

$$\tau(e_0-e_3-e_5)=\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_5}\frac{1}{[\varepsilon_{12}][\alpha_0]}\left([\varepsilon_{15}][\alpha_0+\varepsilon_{25}]f_1-[\varepsilon_{25}][\alpha_0+\varepsilon_{15}]f_2\right)$$

Date　　・　　・　　No.

$$\downarrow s_3 \qquad\qquad s_3(\alpha_0+\varepsilon_{25}) = \varepsilon_{145}$$

$$s_3(\alpha_0+\varepsilon_{15}) = \varepsilon_{245}$$

$$\tau(e_0-e_4-e_5) = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_5}\frac{1}{[\varepsilon_{12}][\alpha_0+\varepsilon_{34}]} \qquad \alpha_0 = \varepsilon_{123}$$

$$\times\Big\{[\varepsilon_{15}][\varepsilon_{145}]\frac{\tau_3}{\tau_4}\frac{1}{[\varepsilon_{13}][\alpha_0]}\big([\varepsilon_{14}][\alpha_0+\varepsilon_{34}]f_1-[\varepsilon_{34}][\alpha_0+\varepsilon_{14}]f_3\big)$$

$$-[\varepsilon_{25}][\varepsilon_{245}]\frac{\tau_3}{\tau_4}\frac{1}{[\varepsilon_{23}][\alpha_0]}\big([\varepsilon_{24}][\alpha_0+\varepsilon_{34}]f_2-[\varepsilon_{34}][\alpha_0+\varepsilon_{24}]f_3\big)\Big\}$$

$$=\frac{\tau_1\tau_2\tau_3}{\tau_4\tau_5}\Big\{\frac{[\varepsilon_{14}][\varepsilon_{15}][\varepsilon_{145}]}{[\varepsilon_{12}][\varepsilon_{13}][\varepsilon_{123}]}f_1+\frac{[\varepsilon_{24}][\varepsilon_{25}][\varepsilon_{245}]}{[\varepsilon_{21}][\varepsilon_{23}][\varepsilon_{123}]}f_2$$

$$+\frac{[\varepsilon_{34}]}{[\varepsilon_{123}][\varepsilon_{124}][\varepsilon_{12}][\varepsilon_{31}][\varepsilon_{32}]}\big([\varepsilon_{15}][\varepsilon_{145}][\varepsilon_{234}][\varepsilon_{32}]$$

$$-[\varepsilon_{25}][\varepsilon_{245}][\varepsilon_{134}][\varepsilon_{31}]\big)\Big\}$$

リーマンの関係式より $[\varepsilon_{12}][\varepsilon_{124}][\varepsilon_{12}][\varepsilon_{345}]$

$$=\frac{\tau_1\tau_2\tau_3}{\tau_4\tau_5}\left(\lambda_{45}^1 f_1+\lambda_{45}^2 f_2+\lambda_{45}^3 f_3\right)$$

となる.

(ii) $4\leq i<j\leq 9$ のとき. $\tau(e_0-e_i-e_j)$ に s_0 を作用させれば主張がでる □.

<u>Thm</u> $\omega, g_i, F_{ij}^\omega, G_{ij}^\omega$ $(i,j=1,2,3)$ を次のように定める.

$\omega = s_{127}s_{357}s_{567}s_{15}s_{26}s_8s_7$ (← P.41 の ω)

$g_i = \omega(f_i)$ $(i=1,2,3)$

$$F_{ij}^\omega(g)=\sum_{k=1}^3\omega(\lambda_{ij}^k)g_k,\quad G_{ij}^\omega(g)=-g_1g_2g_3\sum_{k=1}^3\omega(\mu_{ij}^k)g_k^{-1}$$

このとき

$$T_{\alpha_7^\vee}(f_i)=\frac{G_{7-i,7}^\omega(g)}{F_{7-i,7}^\omega(g)}$$

となる

P42参

$\because$ $\omega(e_0-e_2-e_3) = 2e_0 - e_1 - e_2 - e_3 - e_6 - e_7$, $\omega(e_1) = e_0 - e_6 - e_7$ より.

$$g_1 = \omega(f_1) = \omega\left(\frac{\tau(e_0-e_2-e_3)}{\tau(e_1)}\right)$$

$$= \frac{\tau(2e_0-e_1-e_2-e_3-e_6-e_7)}{\tau(e_0-e_6-e_7)}$$

$$= \frac{G_{67}(f)}{F_{67}(f)}$$

同様に g_2, g_3 を f で表すと.

$$g_2 = \frac{G_{57}(f)}{F_{57}(f)}, \quad g_3 = \frac{G_{47}(f)}{F_{47}(f)}$$

となる. よって.

$$\begin{aligned} T_{\alpha_7^\vee}(f_i) &= \omega^2(f_i) \\ &= \omega(g_i) \\ &= \frac{G^{\omega}_{7-i,7}(\omega(f))}{F^{\omega}_{7-i,7}(\omega(f))} \\ &= \frac{G^{\omega}_{7-i,i}(g)}{F^{\omega}_{7-i,i}(g)} \end{aligned}$$

$\omega(F_{ij}(f)) = F_{ij}^{\omega}(\omega(f))$

$\omega(G_{ij}(f)) = G_{ij}^{\omega}(\omega(f))$.

を得る. □

Rem $G_{ij}(f)$ は f の2次同次多項式, $F_{ij}(f)$ は f の1次同次多項式だから.

$$g_k = \frac{f\text{の2次同次多項式}}{f\text{の1次同次多項式}}$$

従って.

$$T_{\alpha_7^\vee}(f_i) = \frac{f\text{の5次同次多項式}}{f\text{の4次同次多項式}}$$

であるが, 実は分母分子に同じ因子がでてきて

$$T_{\alpha_\eta^\vee} = \frac{f\text{の4次同次多項式}}{f\text{の3次同次多項式}}$$

となる. —— このことは次のことからもわかる.

一般に $\tau(\Lambda) = \tau^{\Lambda}\phi(\Lambda)$ $(\phi(\Lambda) \in L(\Lambda))$ だったので

$x_i = \mathrm{cons}\,\dfrac{\tau_1\cdots\tau_m}{\tau_0} f_i$

$$\tau(\Lambda) = \tau_0^{d}\tau_1^{-\nu_1}\cdots\tau_n^{-\nu_n} \times (x_1,\dots,x_m\text{のd次同次多項式})$$

$$= \frac{\tau_1^{d-\nu_1}\cdots\tau_m^{d-\nu_m}}{\tau_{m+1}^{\nu_{m+1}}\cdots\tau_n^{\nu_n}} \times (f_1,\dots,f_m\text{のd次同次多項式})$$

$$(\Lambda = de_0 - \nu_1 e_1 - \cdots - \nu_n e_n)$$

故に,

$$T_{\alpha_\eta^\vee}(s_0(e_1)) = T_{\alpha_\eta^\vee}(e_0 - e_2 - e_3) = 4e_0 - e_1 - 2e_2 - 2e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - 2e_7 - e_9$$

$$T_{\alpha_\eta^\vee}(e_1) = e_1 - \alpha_\eta^\vee + \delta = 3e_0 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - 2e_7 - e_9$$

より

$$T_{\alpha_\eta^\vee}(f_1) = T_{\alpha_\eta^\vee}\left(\frac{s_0(\tau_1)}{\tau_1}\right)$$

$$= \frac{\tau(T_{\alpha_\eta^\vee}(s_0(e_1)))}{\tau(T_{\alpha_\eta^\vee}(e_1))} = \frac{f\text{の4次同次多項式}}{f\text{の3次同次多項式}}$$

となる.

・$E_8^{(1)}$型楕円パンルベ方程式の超幾何関数解

$w = s_{126}s_{346}s_{568}s_{15}s_{28}s_{79}s_{67}$ とおくと $T_{\alpha_6^\vee} = w^2$ となる. また $g_i = w(f_i)$ とおくと

$$g_i = \frac{-f_1f_2f_3\sum_{k=1}^{3}\zeta_i^{k} f_k^{-1}}{\sum_{k=1}^{3}\eta_i^{k} f_k}$$

$$\zeta_i^k = \frac{[\varepsilon_{123}+\varepsilon_{kj}][\varepsilon_{123}+\varepsilon_{k6}][\varepsilon_{kj6}]}{[\varepsilon_{123}]\prod_{\substack{l=1,2,3\\ l\neq k}}[\varepsilon_{kl}]}$$

$$\eta_i^k = \frac{[\varepsilon_{kj}][\varepsilon_{k6}][\varepsilon_{kj6}]}{[\varepsilon_{123}]\prod_{\substack{l=1,2,3\\ l\neq k}}[\varepsilon_{kl}]} \qquad j=\begin{cases}8 & (i=1)\\ 5 & (i=2)\\ 4 & (i=3)\end{cases}$$

となることが示せる．故に（P45と同じ議論により）

$$T_{\alpha_6^\vee}(f_i) = \frac{-g_1g_2g_3\sum_{k=1}^{3}\omega(\zeta_i^k)\,g_k^{-1}}{\sum_{k=1}^{3}\omega(\eta_i^k)\,g_k}$$

を得る．これらの式において，$\varepsilon_4\to\varepsilon_3$，$f_3\to\infty$ とすると，

$$g_1 = \frac{\bigcirc f_2f_3+\bigcirc f_1f_3+\bigcirc f_1f_2}{\bigcirc f_1+\bigcirc f_2+\bigcirc f_3}$$

$$g_2 = \frac{\bigcirc f_2f_3+\bigcirc f_1f_3+\bigcirc f_1f_2}{\bigcirc f_1+\bigcirc f_2+\bigcirc f_3}$$

$$g_3 = \frac{\bigcirc f_2f_3+\bigcirc f_1f_2+\bigcirc f_1f_2}{\bigcirc f_1+\bigcirc f_2+\bigcirc[\varepsilon_{34}]f_3}$$

$$T_{\alpha_6^\vee}(f_1) = \frac{\bigcirc g_2g_3+\bigcirc g_1g_3+\bigcirc g_1g_2}{\bigcirc g_1+\bigcirc g_2+\bigcirc g_3}$$

$$T_{\alpha_6^\vee}(f_2) = \frac{\bigcirc g_2g_3+\bigcirc g_1g_3+\bigcirc g_1g_2}{\bigcirc g_1+\bigcirc g_2+\bigcirc g_3}$$

$$T_{\alpha_6^\vee}(f_3) = \frac{\bigcirc g_2g_3+\bigcirc g_1g_3+\bigcirc g_1g_2}{\bigcirc g_1+\bigcirc g_2+\bigcirc[\varepsilon_{34}]g_3}$$

（$\bigcirc$は．$\varepsilon_4\to\varepsilon_3$としても．0にも$\infty$にもならない項）

から．$g_3\to\infty$，$T_{\alpha_6^\vee}(f_3)\to\infty$ がわかる．よって．$\varepsilon_4\to\varepsilon_3$，$f_3\to\infty$ としたときの $T_{\alpha_6^\vee}(f_1)$，$T_{\alpha_6^\vee}(f_2)$，g_1，g_2 は

$$\bar{f}_i = \bigcirc g_1+\bigcirc g_2 \quad (i=1,2) \qquad (\bar{f}_i = T_{\alpha_6^\vee}(f_i))$$

$$g_i = \bigcirc f_1+\bigcirc f_2$$

という形をしている．これから g_1，g_2 を消去して f_1，f_2 に関する差分方程式系

$$\bar{f}_1 = \square f_1+\square f_2$$

$$\bar{f}_2 = \square f_2+\square f_3$$

Date . . No.

を作り、これを3項間漸化式

$$\bar{f}_1 = \bigcirc f_1 + \bigcirc \underline{f}_1 \qquad (\underline{f}_1 = T_{\alpha_6 v}^{-1}(f_1))$$

に直して、f_1 をうまく変数変換すると、P8の楕円超幾何方程式が得られる。
(詳細はP2の論文を見よ。)

Date　　No.

索引

Date . . No.

記号

Date　　No.

付録

・リーマンの関係式

$$[A][B][C][D] = \left[\tfrac{1}{2}(A+B+C+D)\right]\left[\tfrac{1}{2}(A+B-C-D)\right]\left[\tfrac{1}{2}(A-B-C+D)\right]\left[\tfrac{1}{2}(A-B+C-D)\right]$$
$$+ \left[\tfrac{1}{2}(A+B+C-D)\right]\left[\tfrac{1}{2}(A+B-C+D)\right]\left[\tfrac{1}{2}(A-B+C+D)\right]\left[\tfrac{1}{2}(-A+B+C+D)\right]$$

・Fayの公式

$$\det\left(\frac{[\lambda+z_i+w_j]}{[\lambda][z_i+w_j]}\right) = \frac{[\lambda+\sum_{i=1}^n z_i+\sum_{i=1}^n w_i]}{[\lambda]\prod_{i,j=1}^n [z_i+w_j]} \prod_{1\le i<j\le n} [z_i-z_j][w_i-w_j]$$

∵ リーマンの関係式より、

$$[\lambda+z_i+w_j][\lambda+z_k+w_l][z_i+w_l][z_k+w_j]$$
$$= [\lambda][\lambda+z_i+z_k+w_j+w_l][z_i-z_k][w_j-w_l] + [\lambda+z_i+w_l][\lambda+z_k+w_j][z_i+w_j][z_k+w_l]$$

となる これを使って帰納法で示す ―― 以下 $a_{ij} = \dfrac{[\lambda+z_i+w_j]}{[\lambda][z_i+w_j]}$ とする

$n=2$ のとき…… $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$= \frac{1}{[\lambda]^2}\frac{1}{[z_1+w_1][z_2+w_2][z_1+w_2][z_2+w_1]}$$
$$\times\Big([\lambda+z_1+w_1][\lambda+z_2+w_2][z_1+w_2][z_2+w_1]$$
$$- [\lambda+z_1+w_2][\lambda+z_2+w_1][z_1+w_1][z_2+w_2]\Big)$$
$$= \frac{1}{[\lambda]}\frac{[\lambda+z_1+z_2+w_1+w_2][z_1-z_2][w_1-w_2]}{[z_1+w_1][z_2+w_2][z_1+w_2][z_2+w_1]}$$

より OK.

(次ページへ)

$n-1$まで主張が成り立ったとする・・・・

$$\det\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ \hline a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{array}\right]$$

$$= a_{nn}\det\left[\begin{array}{c|c} a_{ij} & a_{in}\cdot a_{nn}^{-1} \\ \hline a_{nj} & 1 \end{array}\right]$$

$$= a_{nn}\det\left[\begin{array}{c|c} a_{ij}-a_{in}a_{nj}a_{nn}^{-1} & \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= a_{nn}^{2-n}\det\left(a_{ij}a_{nn}-a_{in}a_{nj}\right) \quad — (☆)$$

ここでリーマンの関係式を使うと

$$a_{ij}a_{nn}-a_{in}a_{nj} = \frac{[\lambda][\lambda+z_i+z_n+w_j+w_n][z_i-z_n][w_j-w_n]}{[\lambda]^2[z_i+w_j][z_n+w_n][z_i+w_n][z_n+w_j]}$$

故に

$$(☆) = a_{nn}^{2-n}\left(\frac{[\lambda+z_n+w_n]}{[\lambda][z_n+w_n]}\right)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}\frac{[z_i-z_n][w_i-w_n]}{[z_i+w_n][z_n+w_i]}$$

$$\times\det\left(\frac{[\lambda+z_n+w_n+z_i+w_j]}{[\lambda+z_n+w_n][z_i+w_j]}\right)$$

$$= \frac{[\lambda+\sum_{i=1}^{n}z_i+\sum_{i=1}^{n}w_i]}{[\lambda]\prod_{i,j=1}^{n}[z_i+w_j]}\prod_{1\le i<j\le n}[z_i-z_j][w_i-w_j]$$

でOK!