野海正俊氏講義録

1997年前期・於東北大理学研究科数学教室

長谷川浩司・記

集中講義

野海正俊講師
（神戸大・理学部）

期間：6月3日(火)〜6日(金)

時間：15:00〜17:00

題目：「アフィンHecke環と多変数直交多項式
—Macdonald-Cherednik理論—」

内容及予備知識：多変数のq直交多項式に対する最近のアフィンHecke環からのアプローチについて概説する。Macdonald多項式及び多変数Askey-Wilson多項式に対してq-Dunkl作用素を導入し、アフィンHecke環の代数構造を用いて、双対性、Pieriの公式、特殊値や内積値の公式などへの基本的な性質を導く。必須ではないが、ルート系やWeyl群についての基礎知識を有していれば都合がよい。

場所：201室

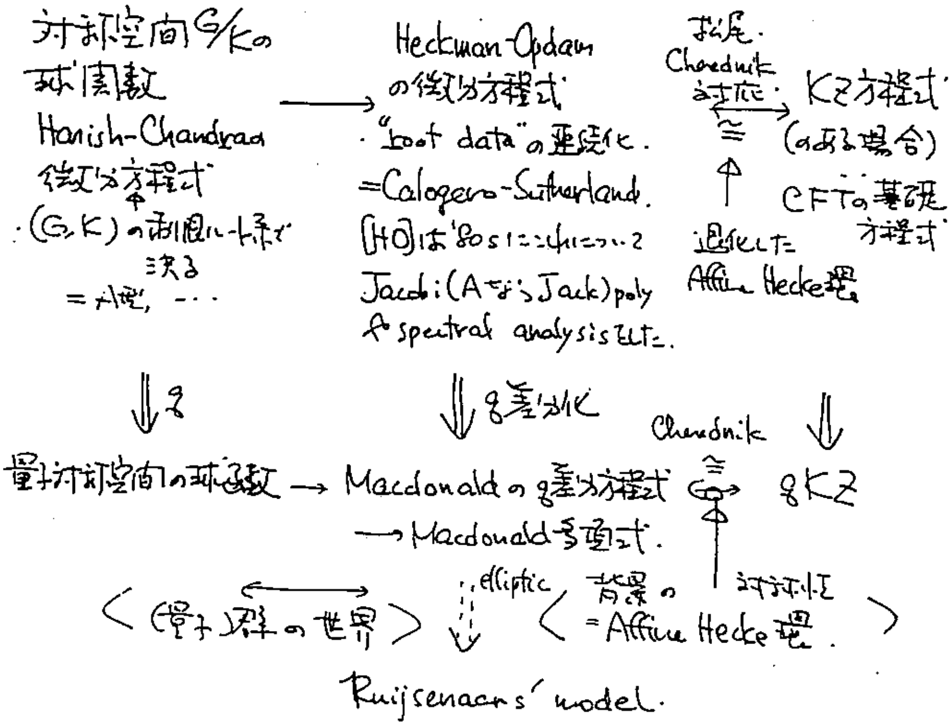
CONTENTS：

No. 1

Date '97・6・2

野海正俊　　Macdonald多項式の対称性　（談話会）16:00–17:10(?)

- "affine Hecke環"なるものを用いて多変数の対称多項式の理論が最近様変わりをしている　そのことについて概説する集中講義をやる予定.
何回か話してはいるが 来られない方も多いでしょうから.



・Macdonaldは元々 Selberg積分etc.の研究から組合せ的予想を主として述べまた解いていた. Cherednikによって affine Hecke alg.を用いて未解決だった(例外型のときの内積値 etc)ものも込めて全て再構成された.

= Macdonald-Cherednik 理論

：affine Hecke環を基礎とする (q,t)直交多項式 q差分方程式 の理論,

例:
- 対称函数 (A型)：主に以下これについてのべる.
- root系に付随する version (for reduced root sys; ~~[illegible]~~)
- 多変数Askey-Wilson多項式 (BC$_n$ の拡張)

§1 Macdonald 多項式 (対称型)

$\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q^{\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{2}})$ (q, t) : parameter

$x = (x_1, \cdots, x_n)$

$\underset{\curvearrowleft}{\mathbb{K}}[x^{\pm 1}] = \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \cdots, x_n^{\pm 1}]$: n変数 Laurent 多項式環

$W = \mathfrak{S}_n$: n次の対称群 by $w.x_j = x_{w(j)}$

- $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W$: 対称な Laurent 多項式環

$$= \underbrace{\mathbb{K}[e_1(x), \cdots, e_{n-1}(x), \overset{\overset{x_1 \cdots x_n}{\shortparallel}}{e_n(x)}, \overset{\overset{(x_1 \cdots x_n)^{-1}}{\shortparallel}}{e_n(x)^{-1}}]}_{\text{algebra としての generators.}}$$

- $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W$ の $\mathbb{K}$-基底は ⓘ?

$$\begin{cases} = \bigoplus_{\lambda \in P^+} \mathbb{K} m_\lambda(x) \\ = \bigoplus_{\lambda \in P^+} \mathbb{K} s_\lambda(x) \end{cases}$$

$P = \mathbb{Z}^n$
$\cup$
$\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n) \in P^+$

$\leftrightarrow$ dominant integral wts.

$\leftrightarrow x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$

$\mathbb{K}[P] \overset{\because}{\xrightarrow{\sim}} \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$.

ここに $m_\lambda(x) = \sum_{\mu \in W.\lambda} x^\mu$: monomial sym. fn. or orbit sum.

$$s_\lambda(x) = \frac{\det[x_j^{\lambda_i + n - i}]}{\det[x_j^{n-i}]}$$: Schur fun. = GL_n char.

$\Downarrow$

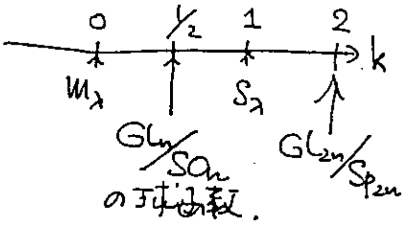
これらを含むような(左図) 1-param family があり,

$\{P_\lambda^{(k)}(x)\}_{\lambda \in P^+}$: Jack poly. と呼ばれる

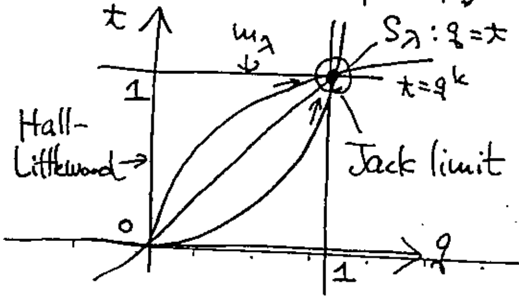
$\Downarrow$ (q, t)-analogue

$\{P_\lambda(x; q, t)\}_{\lambda \in P^+}$: Macdonald poly.

- $P_\lambda(x; q, t = q^k) \xrightarrow[q \to 1]{} P_\lambda^{(k)}(x)$: Jack.



(k ↔ root multiplicity)



④ Macdonald の q 差分方程式.

$M_0=1, M_1, M_2, \cdots, M_n$: q 差分作用素の可換族

$r=0,1,\cdots,n$

$$M_r = t^{r(r-n)/2} \sum_{\substack{I\subset\{1,\cdots,n\} \\ |I|=r}} \prod_{\substack{i\in I \\ j\notin I}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \cdot \prod_{i\in I} \tau_i$$

但 $\tau_i f(x_1,\cdots,x_n) := f(x_1,\cdots,qx_i,\cdots,x_n)$ $\left[\begin{array}{l} x_i = q^{u_i} \\ u_i \mapsto u_i+\delta_{ij} \end{array}\right]$

事実 (1) $M_r : \mathbb{K}[x^{\pm1}]^W \longrightarrow \mathbb{K}[x^{\pm1}]^W$ $\quad r=0,1,\cdots,n$

(2) $[M_r, M_s]=0$: ${}^\forall r, s$

$\rightarrow$ 問: $M_0, M_1, \cdots, M_n$ を $\mathbb{K}[x^{\pm1}]^W$ 上で同時対角化せよ.

定理 (Macdonald) 87 88 ~~97~98~~

$\exists ! \{P_\lambda(x)\}_{\lambda\in P^+}$: $\mathbb{K}[x^{\pm1}]^W$ の $\mathbb{K}$-基底, s.t.

(1) $P_\lambda(x) = m_\lambda(x) + \sum_{\mu<\lambda} u_{\lambda\mu} m_\mu(x)$

$\uparrow$ dominance order.

(2) $M_r P_\lambda(x) = P_\lambda(x) \cdot \underbrace{e_r(q^\lambda t^\rho)}_{\text{eigenvalue.}}$ $\quad$: $r=0,1,\cdots,n$, $\lambda\in P^+$.

$\left[\begin{array}{l} \rho=(\rho_1,\cdots,\rho_n)=\left(\frac{n-1}{2},\cdots,-\frac{n-1}{2}\right), \\ q^\lambda t^\rho = (q^{\lambda_1}t^{\rho_1},\cdots,q^{\lambda_n}t^{\rho_n}). \end{array}\right]$

- これ以後，P_λ について色々なことが判って はた目には わからないことがないぐらいである.
- Jack poly については，去年 KNOPP-SAHI により どんな tableaux の係数がどうであるか，という explicit formula が知られた. しかしこれについては Macdonald ではまだわかっていない。

⑩ Macdonald poly. の基本性質.

ref. Macdonaldの本, 第2版(1995). これはしかし "B.C." = Before Cherednik.

(a) (q,t) の特殊化

(b) q差分方程式

(c) 直交性. $k=0,1,\cdots$ のとき

$$w_k(x) := \prod_{i\neq j}\prod_{r=0}^{k-1}\left(1-q^r\frac{x_i}{x_j}\right) \in \mathbb{K}[x^{\pm1}]$$

とし

$$f, g \in \mathbb{K}[x^{\pm1}]^W \text{ について}$$

positivityをほしければ (q,t) : real とせよ.

$$\langle f, g\rangle_k := \underbrace{\text{C.T.}}_{\text{Constant term.}}\left[f(x^{-1})g(x)w_k(x)\right]$$

このとき
$$\begin{cases} \langle P_\lambda, P_\mu\rangle_k = 0 & : \lambda\neq\mu \\ \langle P_\lambda, P_\lambda\rangle_k & \text{も explicit にわかる。} \end{cases}$$

$\downarrow$

(注) $\langle 1, 1\rangle_k$ でも易しくはない.
A型なら初等的に知られていたが affine Hecke alg. で統一的に扱えるようになった.

(d) $P_\lambda(t^\rho)$ での explicit formula; duality :

$$\widetilde{P}_\lambda(x) = P_\lambda(x)/P(t^\rho) \quad \text{と正規化すると}$$

$$\widetilde{P}_\lambda(q^\mu t^\rho) = \widetilde{P}_\mu(q^\lambda t^\rho) : \forall\lambda,\mu\in P^+.$$

(e). $P_\mu P_\nu = \sum_\lambda \underbrace{c^\lambda_{\mu\nu}} P_\lambda$: Clebsch-Gordan係数

→ 一般にはよくわからないが "Pieri型" は判る

$$e_r(x)\, P_\lambda(x) = \cdots$$

この辺迄は一般の root系でよい ←

(A型) ← (f) 母函数.

(g) 整数性. (($P_\lambda(q,t|x)$の係数の.))

⑦(q) : $P_\lambda(x, q, t) \in \mathbb{Q}(q,t)[x^{\pm 1}]^W$

Jackについては

$$J_\lambda(x, q, t) = c_\lambda \cdot P_\lambda(x; q, t)$$
$$\in \mathbb{Z}[q,t][x^{\pm 1}]^W$$ が示される. ⊛

↑ 1996:

- Kirillov-Noumi
- Knop-Sahi ← interpolation poly. を用いる.
- Garsia-Tesler ← 組合せ論.

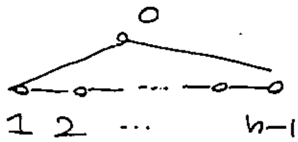
⊛ ⇒ $K_{\lambda\mu}(q,t)$ (q,t)-Kostka coef の positivity $(\in \mathbb{N}[q,t])$ が出る.

- Macdonald のときの positivity $(\in \mathbb{N}[q,t][x^{\pm 1}]^W)$ も現在色々噂があって知っている人もいる (?) 問題.

§2. Affine Hecke 環との関係.

$$W = \mathfrak{S}_n = \langle s_1, \cdots, s_{n-1} \rangle \qquad s_i = (i, i+1).$$
$$\cap$$
$$W^{\mathrm{aff}} = Q \rtimes W = \langle s_0, \cdots, s_{n-1} \rangle$$
$$\cap$$
$$\widetilde{W} = P \rtimes W = \langle s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}, \omega \rangle$$

($A^{(1)}_{I}$)



rel'n ⟷

$$\begin{cases} s_i^2 = 1 \\ s_i s_j = s_j s_i : \overset{i}{\circ} \quad \overset{j}{\circ} \\ s_i s_j s_i = s_j s_i s_j : \overset{i}{\circ}\!-\!\overset{j}{\circ} \\ \omega s_i = s_{i-1} \omega \\ \quad (\text{index mod } n) \end{cases}$$

↓ "Hecke 化"

$$H(\widetilde{W}) = \mathbb{K}\langle T_0, T_1, \cdots, T_{n-1}, \omega \rangle \text{ affine Hecke alg.}$$

$$\begin{cases} (T_i - t^{\frac{1}{2}})(T_i + t^{-\frac{1}{2}}) = 0 & (i = 0, 1, \cdots, n-1) \\ T_i T_j = T_j T_i & : \circ \quad \circ \\ T_i T_j T_i = T_j T_i T_j & : \circ\!-\!\circ \\ \omega T_i = T_{i-1} \omega \end{cases}$$

㊂ q-差分作用素との関係

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D}_{q,x} = \mathbb{K}(x)[\tau^{\pm1}] \arrow[d, Rightarrow] \\ W \arrow[ur, phantom, "\curvearrowright"] & \mathcal{D}_{q.x}[W] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{D}_{q,x} = \mathbb{K}(x)[\tau^{\pm1}]$: 有理函数係数のq差分作用素環

$\overset{\uparrow}{\tau_1^{\pm1}}, \dots, \tau_n^{\pm1}$

$\mathcal{D}_{q.x}[W]$: 接合積,

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{D}_{q.x}[W] & \\ \subset & & \supset \\ \mathbb{K}[x^{\pm1}][W] & & \mathbb{K}[\tau^{\pm1}][W] \\ \cong & & \cong \\ \mathbb{K}[\tilde{W}] & & \mathbb{K}[\tilde{W}] \end{array}$$

ふたつのHecke環が入るのが double affine の要点.

- 実際

$$T_i = t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}\frac{1-tx^{\alpha_i}}{1-x^{\alpha_i}}(s_i-1) \quad , \ i=0,1,\dots,n-1$$

$$\left[\ x^{\alpha_0} = qx_n/x_1 \quad x^{\alpha_i} = x_i/x_{i+1}. \ (\ i=1,\dots,n-1\ )\ \right]$$

$$\omega = s_{n-1}\cdots s_1\tau_1.$$

により,

$$\longrightarrow \ H(\tilde{W}) \curvearrowright \mathcal{D}_{q.x}[W].$$

- $\tilde{W} = P \rtimes W$ の lattice part (P) をどう作るか. (?)

…昔の Lusztig の理論によると

$Y_1, \dots, Y_n$: $Y_i = T_i \cdots T_{n-1}\,\omega\, T_1^{-1}\cdots T_{i-1}^{-1}$

$\left(\ \text{cf. } \tau_i = s_i \cdots s_{n-1}\,\omega\, s_1 \cdots s_{i-1}\ \right)$

定理 (1) $[Y_i, Y_j] = 0$ $\therefore\ \mathbb{K}[Y^{\pm1}] \subset H(\tilde{W})$.

(2) $H(\tilde{W}) = \mathbb{K}[Y^{\pm1}] \otimes H(W)$

(3) $\mathcal{Z}H(\tilde{W}) = \mathbb{K}[Y^{\pm1}]^{W}$: Bernstein-Lusztig.

$Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{D}_{q,x}[W]$: q-Dunkl op. で実現

$$\Rightarrow f(y) \in \mathbb{K}[y^{\pm1}]^W \longmapsto f(Y) \in \mathfrak{Z}H(\tilde{W}) \subset \mathcal{D}_{q,x}[W]$$

$$\shortparallel$$

$$\sum_{w\in W} \underbrace{A^f_w}_{q\text{-差分}} \cdot \underbrace{w}_{\text{群環}(H)\text{の基}}$$

これを基に、 $\Downarrow$

$L_f := \sum A^f_w \in \mathcal{D}_{q,x}$ と projection する

すると

$$\begin{tikzcd}
f(Y) \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=90] & \\
\mathfrak{Z}H(\tilde{W}) \arrow[r, "L"] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \mathcal{D}^W_{q,x} \arrow[u, phantom, "\cap"] \\
\mathbb{K}[Y^{\pm1}]^W \arrow[d, phantom, "\ni"] & \mathbb{K}[M_1, M_2, \dots, M_n, M_n^{-1}] \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[d, phantom, "\ni"] \\
e_r(Y) \arrow[r, mapsto] & M_r
\end{tikzcd}$$

であるが、これにより

となっている。

i.e. (由来が $\mathfrak{Z}H(\tilde{W})$ と分かった。)

そして

$f(Y) \in \mathbb{K}[Y^{\pm1}]^W$

$$\Rightarrow f(Y)\,P_\lambda(x) = L_f\,P_\lambda(x) = P_\lambda(x)\cdot f(q^\lambda t^\mu).$$

※ $\mathbb{K}[\;\;]^W$ でなく non-symmetric version もある。

〈三輪's Q〉
Mausten などとの
関係は？〈A：？〉

※ この辺 Hecke環を使ってをてこにして進む。
duality は難しい。(こんなこと言ったかな？)

※「torusはそのまま」

※ 堀田-カワイでは
離散的 radial part を
みてみたが ここでは (HO)
Cont rad. part を
みようとする問題。

※ G/K の話でいうと 今は Laurent poly. 上で考えているので
自動的に cpt form で考えたことになる※ ※-str. の違い..
(HO) は non-cpt で問題にしたが q で non-cpt を
どう合理的にできるか？は未開拓※.

集中講義目次

野海正俊・述
長谷川浩司・記

1997. 6/3 第1回 (pp1−13)
- ・内容と文献
- §0: 対称函数 (とくに Schur函数)
- §1 Macdonald多項式の定義といくつかの性質
- ・レポート問題

6/4 第2回 (pp14〜28)
- §1 のつづき (D_x の三角性)
- §2 アフィンHecke環 と q-Dunkl 作用素、 p23
  - ◎ $H(\tilde{W})$の定義 ◎ Lusztig 作用素による実現

6/5 第3回 (pp29−41)
- §2 のつづき ・ルート系の幾何の小話
  - ◎ q-Dunkl作用素 ◎ q-Dunklから M.作用素へ
  - ◎ q-Dunkl作用素の R-operatorによる表示.
  - ・lattice part の構成について

6/6 第4回 (pp42〜56)
- §3 double アフィンHecke環 とその応用:
  - ① duality, ② evaluation, ③ Pieri.
  - ◎ 期待値 ◎ Macdonald多項式のduality
  - ◎ Pieriの導出 ◎ $P_\lambda(t^\delta)$ の値
- §4 非対称Macdonald多項式.
  - ◎ q-Dunkl 作用素の三角性
  - ◎ Macdonald多項式との関係,

おまけ・反対称版 ・Cherednikのintertwining op.

< ※ §5 は、時間切れで述べられずにおわった。 >

No. 1

Date '97. 6. 3

集中・第1回

ref: I. G. Macdonald "Symmetric functions and Hall polynomials" 第2版, 1995 Oxford Science publications.

- 直交多項式の理論 ← ((degenerate) affine Hecke 環
  - 最近の発展「様変わり」について紹介する.
  - ⇕ degenerate 微分方程式 [多分述べない.]　⇕ q差分方程式
- 内容:

① Macdonald 多項式 (A型, GL版) … 対称函数の理論

§0. 対称函数 (とくに Schur 函数)
§1 Macdonald 多項式の定義といくつかの性質
} 古典的, アフィン・Hecke 以前. 上の本. (第6章)

§2 アフィンHecke環と q-Dunkl 作用素
§3 二重アフィンHecke環とその応用
§4 非対称型 Macdonald 多項式
§5 内積値の公式
} 本論, 90年代.

[表現論セミナーの記録(5/6)をみよ] ← ② 多変数 Askey-Wilson 多項式 "多変数直交多項式のおじいさん"

- §0-1 : 上にあげた Macdonald の本.
- §2-5 の文献:

I. G. Macdonald
"Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials"
Séminaire Bourbaki, 47ème année 1994-95
[Asterisque に出(てい)る筈.]

これは Cherednik の一連の仕事の解説. モトを1つだけ挙げると

I. Cherednik
"Double affine Hecke algebras and Macdonald conjectures."
Ann. Math., 141 (1995) 191-216.

彼はもともと KZ方程式 (qKZ方程式) を研究しており その方法を 球函数の方程式系 (Macdonald系) に移植したのであった.

Cherednik's lecture note @ IIAS, Date, Jimbo : note
"Lectures on affine K.-Z. equations, quantum many-body problems, Hecke algebras, and Macdonald theory"
が近刊の予定.

§0. 対称函数 (とくにSchur函数)

- $\mathbb{K}$: 標数0の体 e.g. $\mathbb{Q}, \cdots$

  $x = (x_1, \cdots, x_n)$

  $\mathbb{K}[x] = \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$

  $\mathbb{K}[x^{\pm 1}] = \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \cdots, x_n^{\pm 1}]$: n変数Laurent多項式環

- $L = \mathbb{N}^n = \mathbb{N}\varepsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{N}\varepsilon_n$ $\qquad \varepsilon_i = (0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots 0)$,

  $\cap$ $\qquad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$

  $P = \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}\varepsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\varepsilon_n$

  ψ

  $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \leftrightarrow x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$ 多重指数.

により

$$\mathbb{K}[x] = \bigoplus_{\lambda \in L} \mathbb{K} x^\lambda,$$

$\cap$

作用

$$\mathbb{K}[x^{\pm 1}] = \bigoplus_{\lambda \in P} \mathbb{K} x^\lambda.$$

- $W = \mathfrak{S}_n$: n次対称群

  $= \{w : \{1, \cdots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, \cdots, n\}\}$

  $\ni w : \ x_j \mapsto w \cdot x_j = x_{w(j)}$

  これは $\mathbb{K}[x^{\pm 1}] \longrightarrow \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ の $\mathbb{K}$-alg aut.

  i.e. $w(fg) = w(f) \cdot w(g)$.

- $W \curvearrowright P = \mathbb{Z}\varepsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\varepsilon_n$ にも

  $w.\varepsilon_j = \varepsilon_{w(j)}$ で作用を考える. このとき

  $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i$ に対しては

  $$w.\lambda = \sum \lambda_i \varepsilon_{w(i)} = \sum \lambda_{w^{-1}(i)} \varepsilon_i = (\lambda_{w^{-1}(1)}, \cdots, \lambda_{w^{-1}(n)})$$

  即ち $(w\lambda)_i = \lambda_{\underline{w^{-1}(i)}}$ となることに注意.

◎ 対称多項式の環

$$\mathbb{K}[x]^W = \{ f \in \mathbb{K}[x] \mid wf = f \}$$

review:

- 基本対称式 $e_r(x) = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n} x_{j_1} \cdots x_{j_r}$ $(r = 0, 1, \cdots, n)$

$$\Rightarrow (1+ux_1)\cdots(1+ux_n) = \sum_{r=0}^{n} u^r e_r(x).$$

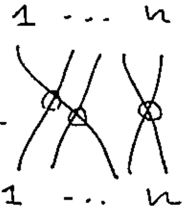
- 差積 $\Delta(x) = \Delta(x_1, \cdots, x_n)$

$$:= \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j) = \det\left[x_j^{n-i}\right]_{1 \le i, j \le n}.$$

- 転倒数 (length)

$w \in W$ に対し

$l(w) := \#\{(i,j) \mid 1 \le i < j \le n,\ w(i) > w(j)\}$: 交わりの数



$\varepsilon(w) := (-1)^{l(w)}$

$$\Longrightarrow w \cdot \Delta(x) = \varepsilon(w) \cdot \Delta(x).$$

命題 (1) $\mathbb{K}[x]^W = \mathbb{K}[e_1(x), \cdots, e_n(x)]$

(2) $f \in \mathbb{K}[x]$ のとき $w \cdot f = \varepsilon(w) f$ $(w \in W)$ $\Leftrightarrow$ $f = \Delta(x) \cdot g$ $(\exists g \in \mathbb{K}[x]^W)$.

◎ $\mathbb{K}[x]^W$ の $\mathbb{K}$-基底

(1) 単項式型対称函数 (monomial symmetric functions)

$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$

$\sigma \cdot \lambda = (\lambda_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, \lambda_{\sigma^{-1}(n)})$ $\mathfrak{S}_n = W \curvearrowright L = \mathbb{N}^n$

$L \ni \lambda$

L上のW軌道全体. $W \backslash L \overset{\sim}{\leftarrow} L^+ = \{\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n \mid \lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_n \ge 0\}$.

そこで, $\lambda \in L^+$ に対し

W軌道 : $\mathfrak{S}_n \cdot \lambda = \{\sigma \cdot \lambda \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$

$$m_\lambda(x) := \sum_{\mu \in W.\lambda} x^\mu \quad \text{(orbitsum)}$$

$= \{\lambda$を並び変えたもの$\}$

$= \{$~~数~~$\sigma \cdot \lambda \mid \lambda \in L^+, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ 完全代表系として $\lambda \in L^+$ がとれる.

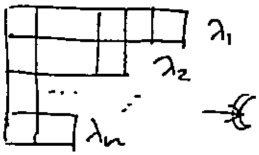
体上でなくても、m_λ は $\mathbb{Z}$上で基になる "universal". →

② m_λ は明らかに対称函数,

$$\mathbb{K}[x]^W = \bigoplus_{\lambda \in L^+} \mathbb{K}\, m_\lambda(x) \quad \text{が成り立つ.}$$

- $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, $\lambda_1 \geqq \cdots \geqq \lambda_n$, を分割とも呼ぶ.

$\Updownarrow$

$T(\lambda) =$ 

Young図形

→（あとでは単に λ とも書く）

$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ の中に $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{が} m_1 \text{コ} \\ 2 \text{が} m_2 \text{コ} \\ \vdots \end{array} \right\}$ のとき

$\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \cdots)$ とも書く.

例

- $m_{(l,0,\cdots,0)}(x) = x_1^l + x_2^l + \cdots + x_n^l$: 巾和 (power sum)

$= m_{(l)}(x) = m_{\underbrace{\boxed{\ }\boxed{\cdots}\boxed{\ }}_{l}}(x)$

- $m_{(\underbrace{1,\cdots,1}_{k},0,\cdots,0)}(x) = x_1 \cdots x_k + \cdots = \sum\limits_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} x_{j_1} \cdots x_{j_k}$

$= m_{(1^k)}(x) = m_{\boxed{\vdots}\,\}k}(x)$

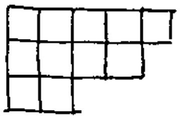
- $m_{\boxed{\ }\boxed{\ }\atop\boxed{\ }}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x$

$= m_{(2,1,0)}$

(2) Schur函数. $S_\lambda(x)$

定義（その1）

- 半標準盤 (semi-standard tableau)：

$\lambda =$  の中に 1〜n を $\left\{\begin{array}{l}\text{横にみると } \leq \\ \text{縦にみると } \wedge\end{array}\right\}$ のように書き込む

n = 5

$$\mathbb{T} = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & \\ 3 & 5 & & \end{array} \longmapsto wt(\mathbb{T}) = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$$

μ_i：$\mathbb{T}$の中に現れる i の個数.

この場合, $wt(\mathbb{T}) = (1, 3, \underset{4}{\cancel{3}}, 0, 1)$ である.

- $SStab_n(\lambda)$ で, 形λに数1,…,nを書き入れた半標準盤全体を表わすとき,

$$\lambda \in L^+ \longmapsto S_\lambda(x) := \sum_{\mathbb{T} \in SStab_n(\lambda)} x^{wt(\mathbb{T})}$$

$$= \sum_\mu \begin{pmatrix} wt(\mathbb{T}) = \mu \text{ となる} \\ \mathbb{T} \in SStab_n(\lambda) \text{の個数} \end{pmatrix} \cdot x^\mu .$$

宮本植退去.
[図書@C405]
〜18:00.

例1

- $S_{(\ell)}(x) = S_{\underset{\leq\ \leq}{\boxed{\ \ |\cdots|\ \ }}}(x) = \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_\ell} x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} = h_\ell(x)$: ℓ次のcomplete homog. sym. fcn.

$$\rightarrow \frac{1}{(1-ux_1)\cdots(1-ux_n)} = \sum_{\ell=0}^\infty h_\ell(x) u^\ell \text{. 母関数.}$$

- $S_{(1^r)}(x) = S_{\boxed{\vdots}\,\overset{\wedge}{\wedge}}(x) = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n} x_{j_1} \cdots x_{j_r} = e_r(x)$

- $S_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}(x_1, x_2, x_3) = \underset{\begin{smallmatrix}1\,1\\2\end{smallmatrix}}{x_1^2 x_2} + \underset{\begin{smallmatrix}1\,1\\3\end{smallmatrix}}{x_1^2 x_3} + \underset{\begin{smallmatrix}1\,2\\2\end{smallmatrix}}{x_1 x_2^2} + \underset{\begin{smallmatrix}1\,2\\3\end{smallmatrix}\ \begin{smallmatrix}1\,3\\2\end{smallmatrix}}{2x_1 x_2 x_3} + \underset{\begin{smallmatrix}1\,3\\3\end{smallmatrix}}{x_1 x_3^2} + \underset{\begin{smallmatrix}2\,2\\3\end{smallmatrix}}{x_2^2 x_3} + \underset{\begin{smallmatrix}2\,3\\3\end{smallmatrix}}{x_2 x_3^2}$

$$= m_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}(x_1, x_2, x_3) + 2 m_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}(x_1, x_2, x_3).$$

・定義(その1)によっては、$S_\lambda(x)$が対称式であることは ただちに明らかというわけにはいかない。

定義(その2)

$$S_\lambda(x) := \frac{\det\left[x_j^{\lambda_i+n-i}\right]_{1\le i,j\le n}}{\Delta(x)} = \frac{\det\left(x_j^{\lambda_i+n-i}\right)}{\det\left(x_j^{n-i}\right]} \in \mathbb{Z}[x$$

定理 $\forall\lambda\in L^+$について $S_\lambda^{(その1)} = S_\lambda^{(その2)}$

これより、$S_\lambda^{(その1)} \in \mathbb{Z}[x]^W$とわかる。また

↓

系 (0) $S_\lambda(x)\in\mathbb{Z}[x]^W$で, $m_\mu(x)$の非負整数の1次結合

$S_\lambda(1,\cdots,1) = \#SStab_n(\lambda)$, しかし これは detの比の式では ただちに代入できないので t^ρを入れ、$t\to1$とする.

(1) $S_\lambda(t^{n-1}, t^{n-2}, \cdots, 1)$ $\left[= \dfrac{\det\left[t^{(n-j)(\lambda_i+n-i)}\right]}{\det\left[t^{(n-j)(n-i)}\right]} \right]$

$$= t^{n(\lambda)} \prod_{i<j} \frac{1-t^{\lambda_i-\lambda_j+j-i}}{1-t^{j-i}} \quad : n(\lambda) := \sum_{i=1}^{n}(i-1)\lambda_i$$

↓ <じっと見る>(10分~15分)

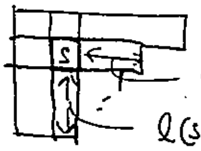
$$= t^{n(\lambda)} \prod_{s\in\lambda} \frac{1-t^{c(s)}}{1-t^{h(s)}} \quad : c(s)\text{はcontent}$$

‖
$j-i$. 内容

(2) $\#SStab_n(\lambda) = S_\lambda(1,\cdots,1)$

$$= \prod_{i<j} \frac{\lambda_i-\lambda_j+j-i}{j-i} = \prod_{s\in\lambda} \frac{c(s)}{h(s)}$$

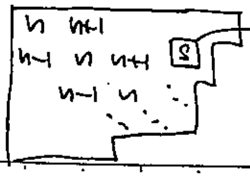
ここで

$\lambda =$ 

$a(s)$: arm length.
$l(s)$: leg length

} $h(s) = a(s)+l(s)+1$
: hook length

又



$s=(i,j)$のとき
$c(s) = n+j-i$: Content.

例1 $\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$

$$S_\lambda(1,1,1) = \frac{\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 4 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}}{\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}} = \frac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot1\cdot1} = 8.$$

これは GL_n の λ できまる irrep の次元を表すもの。

・定理を示すには λについて（nについて）の induction（帰納法）でできる。それには，$n \to n-1$ のとき S_λ が $S_\mu(x_1,\cdots,x_{n-1})$ のどのような和になるかを知り，その rule が（その1）と（その2）で一致することによる。 branching rule を示すのは（その2）必ずしも自明でなく，次の補題による。

定理（Cauchy の補題）

$$x=(x_1,\cdots,x_n),\quad y=(y_1,\cdots,y_n)$$

(1) $$\det\left[\frac{1}{1-x_iy_j}\right] = \frac{\Delta(x)\Delta(y)}{\prod_{i,j}(1-x_iy_j)}$$

(2) $$\frac{1}{\prod_{i,j}(1-x_iy_j)} = \sum_{\lambda\in L^+} S_\lambda(x)S_\lambda(y).$$

注・各 $\lambda\in L^+$ に対し $V(\lambda)$: GL_n の irred.（既約）多項式表現がきまり， $\mathrm{ch}\,V(\lambda) = S_\lambda(x)$.

・上の(2)は，

$$R := \mathbb{K}[t_{ij} \mid 1\le i,j\le n] \circlearrowleft GL_n\times GL_n$$

において $$\left[\ (g_1,g_2)T = g_1 T g_2^t\ \right]$$

$$R = \bigoplus_{\lambda\in L^+} \overset{左}{V}(\lambda)\otimes\overset{右}{V}(\lambda) \quad : \underline{(GL_n, GL_n)\text{-duality}}$$

を character level でみたものに他ならない。

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn}\end{bmatrix}$$

◎ $S_\lambda(x)$ の三角性.

$S_{\boxplus} = m_{\boxplus} + 2m_{目}$ で, $m_{\square\square\square}$ などは表れてこない. 一般に

命題 ∀$\lambda \in L^+$ について

$$S_\lambda(x) = \sum_\mu K_{\lambda\mu} m_\mu(x) \quad : \quad K_{\lambda\mu} \in \mathbb{N}$$

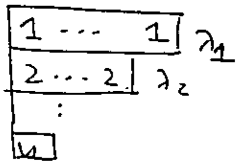
$$= m_\lambda(x) + \sum_{\mu < \lambda} K_{\lambda\mu} m_\mu(x).$$

dominance order.

$$\mu \leq \lambda :\Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 \leq \lambda_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \leq \lambda_1 + \lambda_2 \\ \vdots \\ \mu_1 + \cdots + \mu_{n-1} \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1} \\ |\mu| = \mu_1 + \cdots + \mu_n = |\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \end{cases}$$

highest weight

- $\overset{\leftrightarrow}{\lambda}$ =

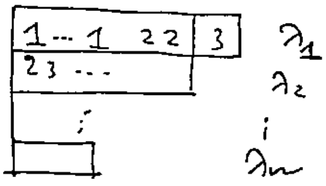


← 1行目 1しか入れない

← 2 2

$$\Leftrightarrow \quad m_\lambda(x) = x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} + \cdots$$

- $\mu \leq \lambda \Leftrightarrow$



1は第1行目にしか入れない.
$\leftrightarrow \mu_1 \leq \lambda_1$

1, 2は第2行目までにしか入れない $\Leftrightarrow \mu_1 + \mu_2 \leq \lambda_1 + \lambda_2$

16:35～5分休憩～16:40

系 $\mathbb{K}[x]^W = \bigoplus_{\lambda \in L^+} \mathbb{K} S_\lambda(x)$

〈∵ 三角性〉

§1. Macdonald 多項式の定義といくつかの性質

$$\mathbb{K}[x]^W = \bigoplus_{\lambda \in L^+} \mathbb{K}\, m_\lambda(x) = \bigoplus_{\lambda \in L^+} \mathbb{K}\, s_\lambda(x) ,$$

ここでたとえば

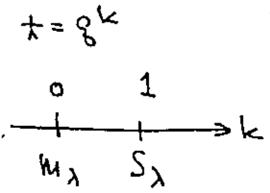
$$m_{\underbrace{\boxed{\;|\cdots|\;}}_{\ell} = \lambda} = x_1^\ell + \cdots + x_n^\ell \qquad s_\lambda = x_1^\ell + x_1^{\ell-1} x_2 + \cdots$$

$\longleftrightarrow$

だいぶちがう。

この2者を interpolate するようなものを作る。

以下 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q, t)$ とする。 補間



"interpolate" $\leftrightarrow$ $\{P_\lambda(x; q, t)\}_{\lambda \in L^+}$: $\mathbb{K}[x]^W$ の $\mathbb{K}$-基底,

$$\begin{cases} t = 1 : & P_\lambda = m_\lambda \\ t = q : & P_\lambda = s_\lambda \end{cases}$$

$\uparrow$

② Macdonald の q 差分方程式.

<u>q-shift op.</u> $\tau_1, \cdots, \tau_n$

$\tau_i : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x]$: $\mathbb{K}$-alg automorphism を

$$\tau_i(x_j) := q^{\delta_{ij}} x_j \qquad \text{i.e.} \begin{cases} x_i \mapsto q x_i \\ x_j \mapsto x_j & : j \neq i \end{cases}$$

により, 一般に

$$f = f(x_1, \cdots, x_n)$$

に対し

$$(\tau_i f)(x_1, \cdots, x_n) := f(x_1, \cdots, q x_i, \cdots, x_n)$$

で定める。

$$\left[\begin{array}{ll} x_i = e^{u_i} , \; q = e^{\hbar} \text{ なら} & \\ q x_i = e^{u_i + \hbar} , & \text{ただの差分.} \end{array} \right]$$

Macdonald's difference operator :

def

$$D_x := \sum_{k=1}^{n} \frac{(tx_k - x_1)\cdots(tx_k - x_{k-1})(tx_k - x_{k+1})\cdots(tx_k - x_n)}{(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)} \tau$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\prod_{j \neq k} \frac{tx_k - x_j}{x_k - x_j} \right)}_{a_k(x)} \tau_k$$

i.e.

$$D_x f(x) = a_1(x) f(qx_1, x_2, \cdots) + a_2(x) f(x_1, qx_2, \cdots) + \cdots .$$

㊟ $a_k(x) = \frac{\Delta(x_1, \cdots, tx_k, \cdots, x_n)}{\Delta(x_1, \cdots, x_n)}$. $\left(\because = \prod_{i<j} \frac{t^{\delta_{ik}} x_i - t^{\delta_{jk}} x_j}{x_i - x_j} \right.$

D_x の性質

(1) D_x は W-不変. $wD_x = D_x w$ $(w \in W)$

$\Leftrightarrow wD_x w^{-1} = D_x$.

《 $\because$ $wx_i w^{-1} = x_{w(i)}$, $w\tau_i w^{-1} = \tau_{w(i)}$ 》

(2) $D_x = \frac{1}{\Delta(x)} \sum_{k=1}^{n} \Delta(x_1, \cdots, tx_k, \cdots, x_n) \tau_k$, 《上の㊟》

(3) $^{\because}$ $D_x(\mathbb{K}[x]^W) \subset \mathbb{K}[x]^W$.

㊟ 対称多項式で → ないと正しくない.

《 実際 $f \in \mathbb{K}[x]^W$ に対し

$\Delta(x) D_x f = \sum_k \Delta(x_1 \cdots tx_k \cdots x_n) \tau_k f \in \mathbb{K}[x]$,

ところがこれは交代式故, $\Delta(x)$ でわれる: $^{\exists}g \in \mathbb{K}[x]^W$ s.t.

$\Delta(x) D_x f = \Delta(x) \cdot {}^{\exists}g$. $\because$ $D_x f = {}^{\exists}g \in \mathbb{K}[x]$.

実はこの $D_x : \mathbb{K}[x]^W \longrightarrow \mathbb{K}[x]^W$ は対角化できる。

定理 (Macdonald)

$\exists ! \{P_\lambda(x)\}_{\lambda \in L^+}$: $\mathbb{K}[x]^W$ の $\mathbb{K}$ 基底, s.t.

(1) $P_\lambda(x) = m_\lambda(x) + \sum_{\mu < \lambda} u_{\lambda\mu} m_\mu(x)$: $u_{\lambda\mu} \in \mathbb{K} = \mathbb{Q}(q, t)$

特に、$P_\lambda(x)$ は $|\lambda|$ 次同次対称多項式.

(2) $D_x P_\lambda(x) = d_\lambda \cdot P_\lambda(x)$,

$$d_\lambda := q^{\lambda_1} t^{n-1} + q^{\lambda_2} t^{n-2} + \cdots + q^{\lambda_n} = \sum_{k=1}^{n} q^{\lambda_k} t^{n-k}$$

・n=2のときを位で
見…とみてる…んだ
・けど…>

(1)は三角性であり, これより P_λ もまた $\mathbb{K}[x]^W$ の基底となることがわかる。
又、(2)の d_λ は λ がちがえばちがう式であり, これより「各固有空間が1次元」であることがわかる. これが定理の内容.

証明には D_x の三角性を用いる.

補題 $L : \mathbb{K}[x]^W \longrightarrow \mathbb{K}[x]^W$, $\mathbb{K}$-linear,

(仮定) $\begin{cases} \forall \lambda \in L^+, & L m_\lambda(x) = c_{\lambda\lambda} m_\lambda(x) + \sum_{\mu < \lambda} c_{\lambda\mu} m_\mu(x). \\ \lambda, \mu \in L^+, & \mu < \lambda \Rightarrow c_{\mu\mu} \neq c_{\lambda\lambda}. \end{cases}$ <三角性>

$\Longrightarrow \forall \lambda \in L^+, \ \exists ! P_\lambda \in \mathbb{K}[x]^W,$

$$\begin{cases} P_\lambda(x) = m_\lambda(x) + \sum_{\mu < \lambda} u_{\lambda\mu} m_\mu(x), \\ L P_\lambda(x) = c_{\lambda\lambda} \cdot P_\lambda(x). \end{cases}$$

② 証 [一意性] $P_\lambda = \sum_{\nu \leq \lambda} u_{\lambda\nu} m_\nu$ に対し

$$LP_\lambda = \sum_{\nu\leq\lambda} u_{\lambda\nu} L m_\nu = \sum_{\nu\leq\lambda} u_{\lambda\nu} \sum_{\mu\leq\nu} c_{\nu\mu} m_\mu$$

$$= \sum_{\mu\leq\lambda} \left(\sum_{\mu\leq\nu\leq\lambda} u_{\lambda\nu} c_{\nu\mu} \right) m_\mu$$

$$LP_\lambda = c_{\lambda\lambda} P_\lambda$$

$$\Leftrightarrow c_{\lambda\lambda} u_{\lambda\mu} = \sum_{\mu\leq\nu\leq\lambda} u_{\lambda\nu} c_{\nu\mu}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(c_{\lambda\lambda} - c_{\mu\mu})}_{\neq 0.} u_{\lambda\mu} = \sum_{\mu<\nu\leq\lambda} u_{\lambda\nu} c_{\nu\mu}.$$

[存在]. $\lambda \in L^+$: fix

$$V = \bigoplus_{\mu\leq\lambda} \mathbb{K} m_\mu(x) \circlearrowleft L$$

$$L(m_\lambda, \cdots) = (m_\lambda, \cdots) \cdot \begin{bmatrix} c_{\lambda\lambda} & & ○ \\ & 三角行列 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \prod_{\mu\leq\lambda} (L - c_{\lambda\lambda})\Big|_V = 0 \quad (\text{Cayley-Hamilton})$$

$$\because \ (L - c_{\lambda\lambda}) \cdot \underbrace{\prod_{\mu<\lambda} (L - c_{\mu\mu}) m_\lambda(x)}_{\text{つまり，これはLのeigen(}} = 0.$$

実際には

$$\prod_{\mu<\lambda} (L - c_{\mu\mu}) m_\lambda(x) = \underbrace{\prod_{\mu<\lambda} (c_{\lambda\lambda} - c_{\mu\mu})}_{\text{(これがわかるとnormalizationもとれOK)}} \cdot m_\lambda(x) + \cdots$$

なので，

$$\rightarrow P_\lambda(x) = \left(\prod_{\mu<\lambda} \frac{L - c_{\mu\mu}}{c_{\lambda\lambda} - c_{\mu\mu}} \right) \cdot m_\lambda(x).$$

//

◍ そこで D_x が三角化であればよいことになるが, これについては明日.

今日の問題 レポート

- $P_{(l)}(x) = P_{\boxed{\ \ \cdots\ \ }}(x)$ について

$$\frac{(t,q)_l}{(q.q)_l} P_{(l)}(x) = \sum_{v_1+\cdots+v_n=l} \frac{(t;q)_{v_1}\cdots(t;q)_{v_n}}{(q;q)_{v_1}\cdots(q;q)_{v_n}} x_1^{v_1}\cdots x_n^{v_n}$$

を示せ. 但 $(a;q)_l = (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{l-1})$.

- $\left.\begin{matrix} t=1 \\ t=q \end{matrix}\right\}$ のとき $P_\lambda = \begin{cases} m_\lambda \\ s_\lambda \end{cases}$ (resp.) となることを示せ.

Date '97・6・4

第2回

<u>D_xの三角性</u> ← q差分作用素の(可換)族を同時に考える方が判り易い。

◎ q差分作用素の可換族

- x_iについてのq-shift op. を $\tau_i = T_{q,x_i}$ とも書く。
  $$(T_{q,x_i} f)(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, \overset{i}{q x_i}, \cdots, x_n)$$
- $D_x^{(0)} = 1, D_x^{(1)}, \cdots, D_x^{(n)}$: q差分作用素、を次でdefする。

<u>def</u>

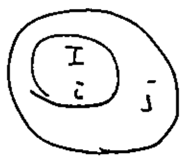
$$D_x^{(r)} := \sum_{\substack{I \subset \{1, \cdots, n\} \\ |I| = r}} A_I(x;t)\, T_{q,x}^{I}$$

$I = \{i_1, \cdots, i_r\}$のとき

$$\left(T_{q,x}^{I} = \prod_{i \in I} T_{q,x_i} = T_{q,x_{i_1}} \cdots T_{q,x_{i_r}} \right)$$

ここに $A_I(x;t) = t^{\binom{r}{2}} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \frac{t x_i - x_j}{x_i - x_j}$

これは $= \frac{T_{t,x}^{I} \Delta(x)}{\Delta(x)}$ とも表せる。 $\Delta = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$



<u>母函数</u> u : parameter

$$D_x(u) := \sum_{r=0}^{n} (-u)^r D_x^{(r)}$$

$$= \sum_{I \subset \{1, \cdots, n\}} (-u)^{|I|} A_I(x;t)\, T_{q,x}^{I}$$

$$= \frac{1}{\Delta(x)} \sum_{I \subset \{1, \cdots, n\}} (-u)^{|I|}\, T_{t,x}^{I}(\Delta(x))\, T_{q,x}^{I}$$

<u>命題</u>

(1) $t = q$ のとき $\overset{\circ}{D}_x(u) := D_x(u)\Big|_{t=q} = \frac{1}{\Delta(x)} (1 - u T_{q,x_1}) \cdots (1 - u T_{q,x_n}) \Delta(x)$

(2) ⑦

㋐ 一般には

$$\delta := (\delta_1, \dots, \delta_n) = (n-1, n-2, \dots, 0)$$

$$D_x(u) = \frac{1}{\Delta(x)} \det\left[x_j^{\overset{\delta_i}{\overbrace{n-i}}} (1 - u t^{\overset{\delta_i}{\overbrace{n-i}}} T_{q,x_j}) \right]_{1 \le i,j \le n},$$

$$:= \frac{1}{\Delta(x)} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \cdot \underline{x_{\sigma(1)}^{n-1} (1 - u t^{n-1} T_{q,x_{\sigma(1)}})} \cdots \underline{x_{\sigma(n)}^{0} (1 - u t^{0} T_{q,x_{\sigma(n)}})}$$

これ等換位はそれぞれの因子内にあり これら同元に並ぶ項。

又は

$$:= \frac{1}{\Delta(x)} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_1^{\delta_{\sigma(1)}} (1 - u t^{\delta_{\sigma(1)}} T_{q,x_1}) \cdots x_n^{\delta_{\sigma(n)}} (1 - u t^{\delta_{\sigma(n)}} T_{q,x_n})$$

○ 一般に:

$$\prod_{j \in J} (1 + u a_j) = \sum_{I \subset J} u^{|I|} \prod_{i \in I} a_i$$

∵ (1)

$$D_x(u) = \frac{1}{\Delta(x)} \left(\sum_I (-u)^{|I|} T_{q,x}^I \right) \Delta(x) \cdot \quad \leftarrow \left[\begin{array}{l} \overset{\because}{T_{q,x}^I(\Delta(x)) \cdot T_{q,x}^I} \\ = T_{q,x}^I(\Delta(x) \cdot\ ) \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{\Delta(x)} \prod_{i=1}^{n} (1 - u T_{q,x_i}) \Delta(x) \cdot$$

(2) f を一般の函数として

$$\Delta(x) D_x(u) f(x) = \sum_I (-u)^I T_{t,x}^I (\Delta(x)) T_{q,x}^I (f(x))$$

$$= \sum_I (-u)^I T_{t,x}^I T_{q,y}^I (\Delta(x) f(y)) \Big|_{x=y}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (1 - u T_{t,x_i} T_{q,y_i}) \Delta(x) f(y) \Big|_{x=y}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (1 - u \underbrace{T_{t,x_i} T_{q,y_i}) (x_1^{\delta_{\sigma(1)}} \cdots x_n^{\delta_{\sigma(n)}}}_{\longrightarrow\ x_i^{\delta_{\sigma(i)}} \mapsto t^{\delta_{\sigma(i)}} x_i^{\delta_{\sigma(i)}}}) f(y) \Big|_{x=y}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (1 - u t^{\delta_{\sigma(i)}} T_{q,y_i}) x_1^{\delta_{\sigma(1)}} \cdots x_n^{\delta_{\sigma(n)}} f(y) \Big|_{x=y}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_i^{\delta_{\sigma(i)}} (1 - u t^{\delta_{\sigma(i)}} T_{q,x_i}) f(y) \Big|_{x=y}.$$

∵ $\Delta(x) D_x(u) f(x)$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_i^{\delta_{\sigma(i)}} (1 - u t^{\delta_{\sigma(i)}} T_{q,x_i}) f(x).$$

//

問 上の(1)を使って，$t=q$ のときに

$$\mathring{D}_x(u)S_\lambda(x)=(1-uq^{\lambda_1+\delta_1})\cdots(1-uq^{\lambda_n+\delta_n})S_\lambda(x)$$

であることを示せ．

命題 $D_x(u)$ の三角性．

$$D_x(u)m_\lambda(x)=(1-uq^{\lambda_1}t^{\delta_1})\cdots(1-uq^{\lambda_n}t^{\delta_n})m_\lambda(x)$$
$$+(\leqslant \text{についての lower order terms.})$$

特に

$$D_x^{(r)}m_\lambda(x)=e_r(q^\lambda t^\delta)m_\lambda(x)+(\text{lower order terms}).$$
$$\langle\!\langle\ q^\lambda t^\delta:=(q^{\lambda_1}t^{\delta_1},\cdots,q^{\lambda_n}t^{\delta_n}).\ \rangle\!\rangle$$

pf

x^μ $(\mu\in L=\mathbb{N}^n)$ への作用をみると，

$$\Delta(x)D_x(u)x^\mu=\det\left[x_j^{\delta_i}(1-ut^{\delta_i}T_{q,x_j})\right]x^\mu$$
$$=\det\left[x_j^{\delta_i}(1-ut^{\delta_i}q^{\mu_j})\right]x^\mu$$
$$=\sum_{w\in W}\varepsilon(w)\prod_{j=1}^{n}(1-ut^{(w\delta)_j}q^{\mu_j})x^{\mu+w\delta}$$

よって $\langle\!\langle \lambda\in L^+$ として$\rangle\!\rangle$

$$m_\lambda(x)=\sum_{\mu\in W\lambda}x^\mu=\frac{1}{|W_\lambda|}\sum_{w\in W}x^{w\lambda}\quad\left(\begin{array}{l}W_\lambda\\:=\{w\in W\,|\,w\lambda=\lambda\}\end{array}\right.$$

と考え，$D_x(u)$ を作用させると

$$|W_\lambda|\cdot\Delta(x)D_x(u)m_\lambda(x)$$
$$=\sum_{w,w'\in W}\varepsilon(w')\prod_{j=1}^{n}(1-ut^{(w'\delta)_j}q^{(w\lambda)_j})x^{w\lambda+w'\delta}$$

$w\to ww'$ とおきかえ

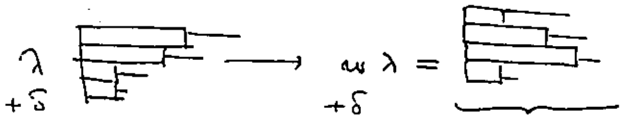
$$=\sum_{w,w'\in W}\varepsilon(w')\prod_{j=1}^{n}(1-ut^{(w'\delta)_j}q^{(w'w\lambda)_j})x^{w'(w\lambda+\delta)}$$
$$=\sum_{w\in W}\prod_{j=1}^{n}(1-ut^{\delta_j}q^{(w\lambda)_j})\cdot\sum_{w'\in W}\varepsilon(w')x^{w'(w\lambda+\delta)}$$

(∵)

$$|W_\lambda|\, D_x(u)\, m_\lambda(x) = \sum_{w\in W}\prod_{j=1}^{n}\left(1-ut^{\delta_j}q^{(w\lambda)_j}\right) S_{w\lambda}(x),$$

但し一般の $\mu\in\mathbb{N}^n$ に対しても Schur fc. の記号を拡張している。

$$S_\mu(x) = \frac{\det\left[x_j^{\mu_i+\delta_i}\right]}{\Delta(x)}.$$



これをまた大きい順に並べなおす.

$\to$ $w\lambda+\delta = v(\mu+\delta)$: $\begin{cases} v\in W \\ \mu\in L^+ \end{cases}$ とすれば

ここで $S_{w\lambda}(x) = \varepsilon(v)\, S_\mu(x)$.

補題 $\lambda\in L^+$

- $w(\lambda)+\delta = w(\mu+\delta)$ $\left\{\begin{matrix} {}^{\exists}v\in W \\ {}^{\exists}\mu\in L^+ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mu\leq\lambda$
- $w(\lambda)+\delta = v(\lambda+\delta) \Leftrightarrow w\lambda=\lambda,\ v=1.$

を認めることにすれば,

$$|W_\lambda|\, D_x(u)\, m_\lambda(x) = |W_\lambda|\cdot \circledcirc\, S_\lambda(x) + \sum_{\mu<\lambda} c_{\lambda\mu} S_\mu(x)$$ の形,

(∵) $$D_x(u)\, m_\lambda(x) = \prod_{j=1}^{n}\left(1-uq^{\lambda_j}t^{\delta_j}\right) S_\lambda(x) + \left(\text{lower order terms}\right).$$

$$= \prod_{j=1}^{n}\left(1-uq^{\lambda_j}t^{\delta_j}\right) m_\lambda(x) + \left(\text{lower order terms}\right).$$

//

… 特に, $D_x = D_x^{(1)}$ の三角性がわかるので, 前項の定理
(Macdonald 多項式の存在) を得る.

・実は，次が成り立つ．

定理

(1) $D_x^{(r)}$ $(r=0,1,\cdots,n)$ は互いに可換：

$$[D_x^{(r)}, D_x^{(s)}]=0 \quad (0\le r,s\le n), \qquad ⇔ [D_x(u), D_x(v)]=0.$$

$[a, b] = ab-ba$

(2) Macdonald多項式は $D_x^{(r)}$ の同時固有函数．

$$D_x(u)P_\lambda(x)=P_\lambda(x)\cdot(1-uq^{\lambda_1}t^{\delta_1})\cdots(1-uq^{\lambda_n}t^{\delta_n})$$

i.e. $D_x^{(r)}P_\lambda(x)=P_\lambda(x)\cdot e_r(q^\lambda t^\delta)$.

⑤ この証明のためには，更に準備が必要．

= **直交性**．

$$\begin{cases} \cdot\ q, t\in\mathbb{R},\ 0<q, t<1, \text{ and/or} \\ \cdot\ t=q^k\ (k=0,1,2,\cdots) \end{cases}$$ とする。

重み函数を，$(a;q)_\infty := \prod_{i=0}^\infty (1-aq^i)$ として

$$w(x;q,t) := \prod_{i\ne j}\frac{(x_i/x_j;q)_\infty}{(tx_i/x_j;q)_\infty}$$

とし，

$t=q^k$ のときは
$$w_k(x,q)=w(x,q,q^k) \leftarrow$$
$$=\prod_{i\ne j}\prod_{\nu=0}^{k-1}(1-q^\nu\frac{x_i}{x_j})$$
$$\in\mathbb{K}[x^{\pm1}].$$
$$\Big\downarrow q\to1$$
$$\prod_{i\ne j}(1-\frac{x_i}{x_j})^k.$$

内積 $\langle\ ,\ \rangle_{q,t}=\langle\ ,\ \rangle_k$ を，$f, g\in\mathbb{K}[x]^W$ に対し

$$\langle f(x), g(x)\rangle_{q,t} := \frac{1}{|W|}\mathrm{C.T.}\left[f(x^{-1})g(x)w(x;q,t)\right]$$

但

$$\mathrm{C.T.}[\varphi(x)] := \text{Constant term in } x \ \text{((Laurent展開できるので，その } x^0 \text{ の項))}$$
$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\oint_{|x_1|=\cdots=|x_n|=1}\varphi(x)\frac{dx_1}{x_1}\cdots\frac{dx_n}{x_n}$$

・ $q, t\in\mathbb{R}$ のときは "$f(x^{-1})$" のところを $\overline{f(x)}$ とすれば

((w も $=\exists\,\overline{\omega}\cdot\omega$ とかけるとおり)) $\langle\ ,\ \rangle$ は hermitian 内積となる

((positivity も明らか.))

<u>命題</u> $D_x^{(r)}$ $(r=0,1,\cdots,n)$ は $\langle\ ,\ \rangle_{q,t}$ について形式的に自己共役.

即ち $\langle D_{q,x}^{(r)} f, g\rangle_{q,t} = \langle f, D_x^{(r)} g\rangle_{q,t}$.

<u>証</u> $T_{q,x_i}^{*} = \dfrac{T_{q,x_i}\, w(x;q,t)}{w(x;q,t)} T_{q,x_i}$ を使えば直接示せる. //

<u>命題</u> $\lambda,\mu\in L^+$, $\lambda\neq\mu \Rightarrow \langle P_\lambda, P_\mu\rangle = 0$.

∵ $D_x P_\lambda = P_\lambda\cdot d_\lambda$ より

$$d_\lambda\langle P_\lambda, P_\mu\rangle = \langle D_x P_\lambda, P_\mu\rangle = \langle P_\lambda, D_x P_\mu\rangle = \langle P_\lambda, P_\mu\rangle d_\mu$$

$\therefore d_\lambda\neq d_\mu \Rightarrow \langle P_\lambda, P_\mu\rangle = 0$. //

<u>補題</u> 内積 $\langle\ ,\ \rangle_{q,t}$ について次の様な性質を持つ $\{Q_\lambda\}_{\lambda\in L^+}$ は一意にきまる.

(1) $Q_\lambda = m_\lambda + ($lower order terms wrt $\leq)$

(2) $\langle Q_\lambda, Q_\mu\rangle_{q,t} = 0$ $(\lambda,\mu\in L^+, \lambda=\mu.)$

∵ $\leq$ で一番小さいのは $(1^r) = \left.\boxed{\vdots}\right\}r$, そのときは $Q_{(1^r)} = e_r$ でよい.

そこで Gram-Schmidt 式に下から順番に Q_λ がきまる.

一意性は

$\left[\ (2) \Leftrightarrow (2') : \langle Q_\lambda, m_\mu\rangle = 0 \quad \left\{\begin{matrix}\lambda,\mu\in L^+\\ \mu<\lambda\end{matrix}\right.\ \right]$ より ; 又は

$\mu<\lambda \Rightarrow Q_\mu = Q'_\mu$ とし $Q_\lambda = Q'_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} a_{\lambda\mu} Q'_\mu$ なら

$$\underbrace{\langle Q'_\mu, Q_\lambda\rangle}_{=\langle Q_\mu, Q_\lambda\rangle = 0} = a_{\mu}\langle Q'_\mu, Q'_\mu\rangle = a_{\lambda\mu}\underbrace{\langle Q_\mu, Q_\mu\rangle}_{}\neq 0\text{(仮定する)}$$

$\therefore a_{\lambda\mu} = 0$ より。//

まとめ

$D_x(u)$: 三角性, 自己共役

$\Downarrow$

$^{\exists}Q_\lambda$, $D_x(u) Q_\lambda = Q_\lambda \cdot d_\lambda(u)$

$\Downarrow$

$Q_\lambda = P_\lambda$

$\Downarrow$

$$D_x(u) D_x(v) P_\lambda = P_\lambda d_\lambda(u) d_\mu(v)$$
$$= D_x(v) D_x(u) P_\lambda$$

i.e. $[D_x(u), D_x(v)] \big|_{\mathbb{K}[x]^{w}} = 0$.

これから実は $\Downarrow$

$[D_x(u), D_x(v)] = 0$ もなる.

補題 $P \in \mathbb{K}[x][T_{q,x}]$ ← まいでもよい , $P\big|_{\mathbb{K}[x]^{w}} = 0$
$\Rightarrow P = 0$

pf

m: 自然数, $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_m)$ とし

$$\varphi_m(x, y) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (1 - x_i y_j^{-1})$$ とおく.

$\gamma \in \mathbb{N}^n$: $|\gamma| = m$ とするとき, "yの特殊化"

$$\eta_\gamma(x) := (x_1, qx_1, \cdots, q^{\gamma_1 - 1}x_1 ; x_2, qx_2, \cdots, q^{\gamma_2 - 1}x_2 ; \cdots ; q^{\gamma_n - 1}x_n) .$$

を考え

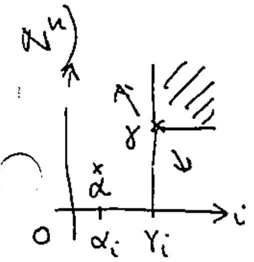
要エル

$$\varphi_m(q^d x ; y) := \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (1 - q^{d_i} x_i / y_j)$$

に代入すると,

$$\varphi_m(q^\alpha x\,;\eta_\gamma(x)) = \prod_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \prod_{\nu=0}^{\gamma_j-1}\left(1-q^{\alpha_i-\nu}\frac{x_i}{x_j}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\prod_{\nu=0}^{\gamma_i-1}\left(1-q^{\alpha_i-\nu}\right) \times \prod_{i\neq j}\prod_{\nu=0}^{\gamma_j-1}\left(1-q^{\alpha_i-\nu}\frac{x_i}{x_j}\right).$$



q-shift op. で
[illegible]の1つだけを
とりだすようなものを
作る. 一種の
interpolation.

∴ $\alpha\in N^n$ について, $\exists i: 0\leq\alpha_i<\gamma_i \Rightarrow \varphi_m(q^\alpha x, \eta_\gamma(x))=0.$
特に $|\alpha|\leq m,\ \alpha\neq\gamma \Rightarrow \varphi_m(q^\alpha x\,;\eta_\gamma(x))=0.$

そこで

$$P=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\,T_{q,x}^{\alpha}\neq 0 \quad : \quad \underline{P\big|_{K[x]^W}=0}$$

なる operator があったとして それをこの $\underbrace{\varphi_m}_{\in K[x]^W}$ ① に施すと

$$0=P_x\varphi_m(x\,;y)=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\,\varphi_m(q^\alpha x\,;y).$$

$y=\eta_\gamma(x)$ とおくと $(|\gamma|=m)$, φ_mの性質より ただ1項 だけが残って

$$0 = a_\gamma(x)\underbrace{\varphi_m(q^\alpha x\,;\eta_\gamma(x))}_{\neq 0}.$$

∴ $a_\gamma(x)=0$ ∴ $P\equiv 0.$ //

◎ <u>Macdonald poly. の母函数</u>

前に述べたように

$x=(x_1,\cdots,x_n)$　$y=(y_1,\cdots,y_n)$ として

$$\prod_{i,j=1}^{n}\frac{1}{1-x_iy_j}=\sum_{\lambda\in L^+}S_\lambda(x)S_\lambda(y)$$ が成り立つ.

- この(q,t)version :

$$\Pi(x,y):=\prod_{i,j=1}^{n}\frac{(tx_iy_j\,;q)_\infty}{(x_iy_j\,;q)_\infty}$$

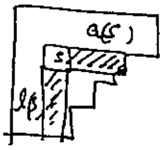
とおく.

$$\left[\ \xrightarrow{t=q^k,\,q\to 1}\ \prod_{i,j}\frac{1}{(1-x_iy_j)^k}\qquad \xrightarrow{t=q}\ \prod_{i,j}\frac{1}{1-x_iy_j}\ \right]$$

定理

(1) $$\Pi(x,y)=\sum_{\lambda\in L^+}b_\lambda P_\lambda(x)P_\lambda(y)\qquad (b_\lambda\in K)$$

(2) $$b_\lambda=\prod_{s\in\lambda}\frac{1-q^{a(s)}t^{l(s)+1}}{1-q^{a(s)+1}t^{l(s)}}$$:



証

- (1) $\Leftrightarrow$ $D_x(u)\Pi(x,y)=D_y(u)\Pi(x,y)$

- この関係式を，(x,y)の有理式についての恒等式によみかえて示す。

（実は、やってみると示すべき式は $\overset{q}{t}$ によらなくなってしまう。そしてそれは $q=t$ の Schur についての場合ですでにわかっている. それが証明になる。これはいかにもtrickyだが時にある；もともとは Macdonald にある. ）

〈以上が <u>Before Cherednik</u>. 〉

§2. アフィンHecke環とq-Dunkl作用素

・"BC"の時代には 主にMacdonaldによる内積と D_{q} とを主な道具として［いかにもad hocに?］やれることをやっていた。その由来は明らかでなく，また A型以外に適用することも難しかった．［cf. van Digen : type B,C, …］それが Cherednik により以下のようにまとめられ 見通しのよいギロンができるようになった．（90年代）

p33.

$G \rtimes H$ 　 $\sigma : H \to G$ 準同型

$h \cdot g = \sigma(h) g \sigma(h^{-1})$

$(g_1, h_1)(g_2, h_2)$

$= (g_1 g_2,$

⑩ アフィンHecke環.

$$W = \mathfrak{S}_n = \langle s_1, s_2, \cdots, s_{n-1} \rangle \qquad s_i = (i, i+1);\ 1 \leq i \leq n-1.$$

$$\cap$$

$$W^{\mathrm{aff}} := \underline{Q \rtimes W \boxed{=} \langle s_0, s_1, \cdots, s_{n-1} \rangle} \quad ,\ ただし，以下$$

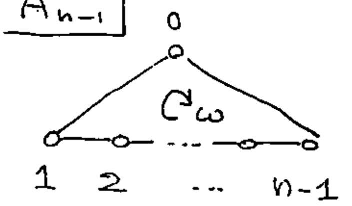
$$\bigcap \quad \begin{cases} Q := \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z} \alpha_i & : \alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \ (1 \leq i \leq n-1) \\ & \langle \text{root lattice} \rangle \\ P := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z} \overline{\varepsilon_i} & \langle \text{weight lattice} \rangle \end{cases}$$

$$\widetilde{W} := P \rtimes W \boxed{=} \langle s_0, s_1, \cdots, s_{n-1} ; \omega \rangle$$

$\downarrow$

基本関係，

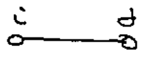
$A_{n-1}^{(1)}$



(0) $s_i^2 = 1 \quad (0 \leq i \leq n-1)$

(1) $s_i s_j = s_j s_i$

(2) $s_i s_j s_i = s_j s_i s_j$



(3) $\omega s_i = s_{i-1} \omega \quad (0 \leq i \leq n-1)$ 添字は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ で読む.

$a = \sum_{x \in G} \alpha_x x.$

$b = \sum_{x \in G} \beta_x x.$

$\in \mathbb{K}[G]$ これら全体

・この $\widetilde{W}$ の群環 $\mathbb{K}[\widetilde{W}]$ を［$\mathbb{K}$-alg の範囲で］変形したのが"Hecke環" $H(\widetilde{W})$.

$a \cdot b = \sum_{x \in G} \left(\sum_{t \in G} \alpha_{xt} \beta_{t^{-1}} \right) x.$

Gの元 g を $\sum_{x \in G} \delta_{x,g} x$ と同一視

$\mathbb{K}[G]$ とする.

- 以下 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q^{\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{2}})$ とする $\left[\begin{array}{l} q^{\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{2}} \text{が} \\ \text{与えられた generatorと思う.}\end{array}\right]$

<u>def</u> <u>$H(\tilde{W})$ の定義.</u>

- 生成元 $T_0, T_1, \cdots, T_{n-1}, \omega^{\pm 1}$
- 基本関係

いろいろ流儀あり. →

(0) $(T_i - t^{\frac{1}{2}})(T_i + t^{-\frac{1}{2}}) = 0$

(1) $T_i T_j = T_j T_i$ $\quad \overset{i}{\circ} \quad \overset{j}{\circ}$

(2) $T_i T_j T_i = T_j T_i T_j$ $\quad \overset{i}{\circ}\!\!-\!\!-\!\!\overset{j}{\circ}$

(3) $\omega T_i = T_{i-1} \omega$ $\quad (i = 0, 1, \cdots, n-1)$

$$\rightarrow H(\tilde{W}) := \mathbb{K}\langle T_0, T_1, \cdots, T_{n-1}; \omega^{\pm 1}\rangle, \text{ : affine Hecke algebra}$$

$$\cup$$

$$H(W^{\text{aff}}) := \mathbb{K}\langle T_0, \cdots, T_{n-1}\rangle,$$

$$\cup$$

$$H(W) := \mathbb{K}\langle T_1, \cdots, T_{n-1}\rangle.$$

㊂ q差分作用素環上での $H(\tilde{W})$ の実現.
(Weyl群つき)

$$\mathcal{D}_{q,x} = \mathbb{K}(x)[\tau^{\pm 1}] \qquad \tau = (\tau_1, \cdots, \tau_n) \text{ : q-shift op.}$$

$$\circlearrowleft W \qquad w.x_j = x_{w(j)}, \quad w.\tau_j = \tau_{w(j)}$$

"Wつきの q-Heisenberg alg." →

接合積 $\rightsquigarrow$ $\boxed{\mathcal{D}_{q,x}[W] = \bigoplus_{w \in W} \mathcal{D}_{q,x}\, w}$ $\left[\begin{array}{l} w P w^{-1} = w.P \\ w \in W, P \in \mathcal{D}_{q,x}\end{array}\right]$

この中に, $\mathbb{K}[\tilde{W}]$ がふた通りに入っている.

⑦
$$\boxed{\begin{array}{ccc} & \mathcal{D}_{q\cdot x}[W] & \\ \cup & & \cup \\ \mathbb{K}[x^{\pm1}][W] & & \mathbb{K}[\tau^{\pm1}][W] \\ \overset{\uparrow}{x^{\lambda}, w} & & \overset{\uparrow}{\tau^{\lambda}, w} \end{array}}$$

ともに $\simeq \mathbb{K}[\widetilde{W}]$.

☺
$$wx^{\lambda} = x^{w.\lambda} w$$
$$w\tau^{\mu} = \tau^{w.\mu} w$$
$$\tau^{\mu} x^{\lambda} = q^{\langle \mu, \lambda \rangle} x^{\lambda} \tau^{\mu}.$$

◦ 今、$\mathbb{K}[\tau^{\pm1}][W]$ を $\simeq \mathbb{K}[\widetilde{W}]$ と同一視する。

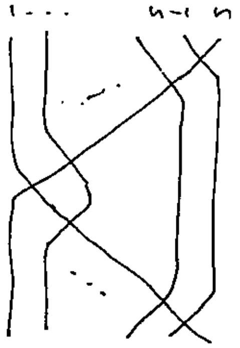
$\Longleftrightarrow$ $\widetilde{W} = \langle s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}, \omega \rangle$ であったが、

$$\begin{cases} s_i = (i, i+1) \quad \omega = s_{n-1} \cdots s_1 \tau_1 \\ (0 \leq i \leq n-1) \\ s_0 = \omega s_1 \omega^{-1} \\ \quad = (1, n) \tau_1 \tau_n^{-1}. \end{cases}$$ となる。

$\Updownarrow$

$$s_{n-1} \cdots s_1 \tau_1 \underbrace{s_1 \tau_1^{-1} s_1} \cdots s_{n-1}$$
$$= s_{n-1} \cdots s_1 \tau_1 \tau_2^{-1} \cdot s_2 \cdots s_{n-1}$$
$$= \underbrace{s_{n-1} \cdots s_1 s_2 \cdots s_{n-1}} \cdot \tau_1 \tau_n^{-1}$$
$$\overset{⊛}{=} (1, n) \quad \tau_1 \tau_n^{-1}.$$

えとき

⊛ 

[これでちゃんと $\mathbb{K}[\tau^{\pm1}][\omega] \simeq \mathbb{K}[\widetilde{W}]$ ができていることは、

$$\begin{tikzcd} & s_0 \arrow[dr] & \\ s_1 \arrow[ur] & \circlearrowleft & s_{n-1} \arrow[ll, dashed] \end{tikzcd}$$ etc. をみればよい：略.]

⊛ cf. これは元々 Bernstein ~~Gelfand~~ の仕事あり.

・$t\to 1$では $T_i\to s_i$. ⇐

→ "affine Hecke algebra and its graded version" J. Amer. Math. Soc 2 (1989) 599-635

∘ $H(\tilde{W})$ を, Lusztig⊕ operator で実現する:

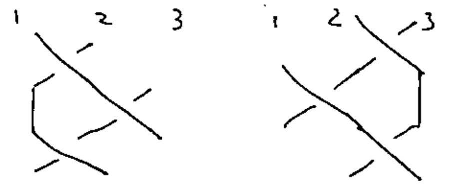
$$T_i = t^{-\frac{1}{2}}\frac{1-tX^{\alpha_i}}{1-X^{\alpha_i}}s_i+\frac{t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}}{1-X^{\alpha_i}} \quad (0\leq i\leq n-1)$$

ただし
$$\begin{cases}\alpha_0=\delta-\varepsilon_1+\varepsilon_n & \leftrightarrow\ X^{\alpha_0}=X^{\delta-\varepsilon_1+\varepsilon_n}=q\frac{x_n}{x_1} \\ & \qquad (x^{\delta}=q) \\ \alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2 & \\ \vdots & \qquad \vdots \\ \alpha_{n-1}=\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n & \leftrightarrow\ X^{\alpha_i}=x^{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}}=\frac{x_i}{x_{i+1}}\end{cases}$$
とする.

(注) T_iの2つの項の係数は
$$t^{-\frac{1}{2}}\frac{1-tX^{\alpha_i}}{1-X^{\alpha_i}}+\frac{t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}}{1-X^{\alpha_i}}=t^{\frac{1}{2}}$$
のように作ってあり, 従って T_iは
$$T_i=t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}\frac{1-tX^{\alpha_i}}{1-X^{\alpha_i}}(s_i-1) \qquad \text{とも}$$
$$=t^{\frac{1}{2}}s_i+\frac{t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}}{1-X^{\alpha_i}}(1-s_i) \qquad \text{とも書ける.}$$
状況によってどの表示が便利かは異なる.

命題 上のLusztig作用素, $T_0, T_1, \cdots T_{n-1}$ と $\omega=s_{n-1}\cdots s_1\tau_1$ は $H(\tilde{W})$の基本関係を満たし, $H(\tilde{W})\xhookrightarrow{inj.}\mathcal{D}_{q,x}[\tilde{W}]$.

例 $T_1T_2T_1=T_2T_1T_2$



<u>pf</u>. $T_iT_jT_i = T_jT_iT_j$ を $\begin{cases} T_i = c_is_i + d_i \\ T_j = c_js_j + d_j \end{cases}$ とおき

unknown fcns c_i, d_i, c_j, d_j の関数等式となる。

そこでそれを解く [この方式で A型以外でも野海さんが くれた]

・そのとき $(T_i - t^{\frac{1}{2}})(T_i + t^{-\frac{1}{2}}) = 0$ か. ⓘ

… $T = cs + d$ とすると

$$\left[\begin{array}{l} s = s_z : z \overset{s}{\to} z^{-1} \text{ に注意 } \left(\left(s_i\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right) = \frac{x_{i+1}}{x_i} \text{ ということ} \right)\right) \\ c = c(z),\ d = d(z) \quad \text{とおく.} \end{array}\right]$$

$(T-\alpha)(T-\beta) = 0$ ((α, β : scalar))

$\to$ $T \cdot 1 = \alpha \cdot 1$, これより $c + d = \alpha$

i.e. $d = \alpha - c$.

$\therefore$ $T = cs + \alpha - c$, $\begin{cases} T - \alpha = c(s-1) \\ T - \beta = c(s-1) + \alpha - \beta. \end{cases}$

$\therefore$ $(T-\alpha)(T-\beta)$ [redacted]

$= c(s-1)\{c(s-1) + \alpha - \beta\} = 0$

$\leftrightarrow$ $(s-1)(cs + (\alpha + \beta - c)) = 0$

$\leftrightarrow$ $s(c) = (\alpha - \beta - c)$ $\therefore$ $\underbrace{c + s(c)}_{} = \underbrace{\alpha - \beta}_{}$

「ほとんど skew, おつりは scalar」

つまり, $c(z) + c(z^{-1}) = \alpha - \beta$. で,

$d(z) = \alpha - c(z)$ とおくと $T = c(z)s_z + d(z)$ は

$(T-\alpha)(T-\beta) = 0$ をみたす. //

- $C(z) + C(z^{-1}) = \text{scalar}$ のような C は，くわしくは
  （pole の位置が $z \leftrightarrow z^{-1}$ で不変 なので $z=1$ として）

$$C(z) = \frac{a+bz}{1-z} \quad \text{である.}$$

$$\because \quad C(z) + C(z^{-1}) = \frac{a+bz}{1-z} + \frac{a+bz^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$= \frac{(a+bz)-(az+b)}{1-z} = a-b. \; //$$

- $C(z) = \dfrac{a+bz+cz^2}{1-z^2}$ でもよい．実際

$$C(z) + C(z^{-1}) = \frac{a+bz+cz^2}{1-z^2} + \frac{a+bz^{-1}+cz^{-2}}{1-z^{-2}}$$

$$= \frac{(a+bz+cz^2)-(az^2+bz+c)}{1-z^2}$$

$$= a-c. \; //$$

㊟ $\underbrace{C(z)}_{\uparrow}$ は 実は p-adic のときの c-function.

cf. Kato.

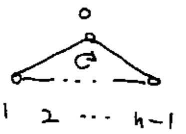
$$T_i = \boxed{t^{-\frac{1}{2}} \frac{1-tx^{\alpha_i}}{1-x^{\alpha_i}}} S_i + \frac{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}}{1-x^{\alpha_i}}$$

この部分.

集中講義 第3日

15:03

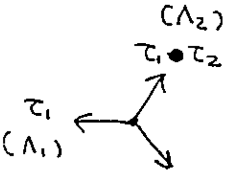
§2：つづき.



$$W=\mathfrak{S}_n \subset W^{\mathrm{aff}} = Q \rtimes W \subset \widetilde{W} = P \rtimes W$$

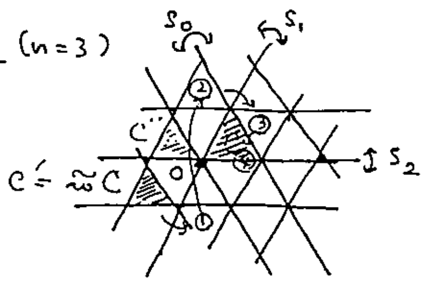
$$\langle s_1,\cdots,s_{n-1}\rangle \qquad \langle s_0,s_1,\cdots,s_{n-1}\rangle \qquad \langle s_0,s_1,\cdots,s_{n-1},\omega\rangle$$

… 構造のわかる表示
vs. 経済的表示. どちらも大事.

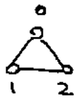


$\varepsilon_2 = \Lambda_2 - \Lambda_1$

例 (n=3)



→ $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_1$, etc :



これらの組みあわせで平行移動もできる。

・alcove C を C' にうつす $\tilde{w}$ で一番経済的なものをさがすには?
… C と C' とを分離する直線に注目する.
((C を囲む3つの直線について同じ側だったら それは C しかない.))
上の格子に沿った coord. を考え a_1 と a_2 の符号の変化をみる といってもよい。
その直線にそって reflection をくり返すと $C' \to C$ となる
((1度の refl. では その直線が分離するのをやめるだけなので 本数回の refl. が必要))

→ 上の絵では

$$\tilde{w} = s_1 s_2 s_1 s_0 \qquad : \ell(\tilde{w}) = 4 = \text{本数}.$$

この場合, C と $\tilde{w}(C) = C'$ の向き迄こめて一致する.
しかし, 上の $C'' = s_1 s_2 C$ については, 向きが 120° ちがっている。それも = にするためには, まず C を diag. aut ((= C の中心についての 120° 回転)) で回さないといけない。 $C' = s_1 s_2 \omega C$.

一般の n でも length が短い平行移動は $s_0,\cdots,s_{n-1}$ では作れず, それで ω が必要となる.

以上 W, W^{aff}, $\widetilde{W}$ についての感覚をもつための アドリブ小話. //

recall :

◎ $H(\widetilde{W}) = \mathbb{K}\langle T_0, T_1, \cdots, T_{n-1} ; \omega^{\pm 1} \rangle$

$$\begin{cases} (T_i - t^{\frac{1}{2}})(T_i + t^{-\frac{1}{2}}) = 0 & \Leftrightarrow T_i^{-1} = T_i - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) \\ T_i T_j = T_j T_i & \overset{i}{\circ} \ \overset{j}{\circ} \\ T_i T_j T_i = T_j T_i T_j & \overset{i}{\circ}\!-\!\!\!-\!\overset{j}{\circ} \\ \omega T_i = T_{i-1} \omega & \end{cases}$$

◎ $\mathcal{D}_{q,x}[W]$ における実現 :

$$c(z) = t^{-\frac{1}{2}} \frac{1 - tz}{1 - z}, \quad d(z) = \frac{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}}{1 - z}$$

とおいて, $T_i = c(x^{\alpha_i}) s_i + d(x^{\alpha_i})$: $i = 0, 1, \cdots, n-1$.

(Lusztig op.) 但 $\begin{cases} \alpha_0 = \delta - \varepsilon_1 + \varepsilon_n & \leftrightarrow \ x^{\alpha_0} = q x_n / x_1 \\ \alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 & \leftrightarrow \ x^{\alpha_1} = x_1 / x_2 \\ \quad \vdots & \\ \alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n & \leftrightarrow \ x^{\alpha_{n-1}} = x_{n-1} / x_n . \end{cases}$

また,

$$\omega = s_{n-1} \cdots s_1 \tau_1 .$$

$$\begin{matrix} \mathcal{D}_{q,x}[W] & \\ \cup \quad \cup & \\ [x^{\pm 1}] \quad H(\widetilde{W}) & \end{matrix}$$

命題 ($H(\widetilde{W})$ の生成元と $x_1, \cdots, x_n$ の交換関係)

(1) $i = 1, \cdots, n-1$ のとき

$$\begin{cases} T_i x_i T_i = x_{i+1} , \\ T_i x_j = x_j T_i \quad (j \neq i, i+1). \end{cases}$$

← [両方 T_i : Hecke(?)!]

(2) $\lambda \in P$ に対し

$$T_i x^{\lambda} - x^{s_i(\lambda)} T_i = d(x^{\alpha_i})(x^{\lambda} - x^{s_i(\lambda)})$$

一般には $(1 \leq i \leq n-1)$

$$T_i f - s_i(f) T_i = d(x^{\alpha_i})(f - s_i(f)) \quad : f(x) \in \mathbb{K}[x^{\pm 1}].$$

∵

$$\begin{aligned} T_i(f\varphi) &= c(x^{\alpha_i}) s_i(\varphi) + d(x^{\alpha_i}) f \varphi \\ -) \quad s_i(f) T_i(\varphi) &= s_i(f) c(x^{\alpha_i}) s_i(\varphi) + s_i(f) d(x^{\alpha_i}) \varphi \end{aligned}$$

∴ $T_i(f\varphi) - s_i(f) T_i(\varphi) = d(x^{\alpha_i})(f - s_i(f)) \varphi$.

⑦ 他の関係式はこれから従う。 d をあらわに書いて

$$T_i f - s_i(f) T_i = \frac{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}}{1 - x_i/x_{i+1}} \left(f - s_i(f)\right)$$

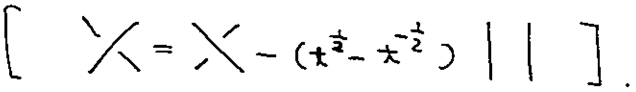
$f = x_i$ とおけば

$$T_i x_i - x_{i+1} T_i = - \frac{\left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right) x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} (x_i - x_{i+1})$$

$$\therefore\ T_i x_i = x_{i+1} (\underbrace{T_i - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})}_{= T_i^{-1}}) = x_{i+1} T_i^{-1}. \quad //$$

$$\uparrow$$

$$T_i^{-1} = T_i - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$$



⑩ q−Dunkl 作用素.

= $H(\tilde{W})$ に隠れている lattice part を $\mathcal{D}_{q,x}[W]$ で実現したもの.

$$\tilde{W} = P \rtimes W,\ \mathbb{K}[\tilde{W}] = \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W] \ni \tau_1, \cdots, \tau_n$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow 変形$$

$$\boxed{H(\tilde{W}) = \mathbb{K}[\underset{\uparrow \mathbb{K}}{Y^{\pm 1}}] \otimes H(W)} \qquad Y_1, \cdots, Y_n$$

< この lattice part をどう作るか? >

- $\tilde{W}$ の中では（最短表示）

$$\begin{cases} \tau_1 = s_1 s_2 \cdots s_{n-1} \omega \\ \tau_2 = s_2 \cdots s_{n-1} \omega \underset{(= s_1^{-1} \text{ for } q=1)}{s_1} \\ \vdots \\ \tau_n = \omega s_1 \cdots s_{n-1} \end{cases}$$

これを見ながら⊗

$$H(\tilde{W}) \ni \begin{cases} Y_1 := T_1 T_2 \cdots T_{n-1} \omega \\ Y_2 := T_2 \cdots T_{n-1} \omega T_1^{-1} \\ \vdots \\ Y_n = \omega T_1^{-1} \cdots T_{n-1}^{-1} \end{cases}$$

“松本の補題” =
⊗~~最短表示を用いて~~
対応する元を作る
[Iwahori-Matsumoto]
[〜 Tits] cf. 参.

しかし、これらの交換関係は明らかでない（それをLusztigがやった.）

= きのうあげた ref.

〈易しい例!〉

⊘ **命題**

(1) $i = 1, \cdots, n-1$ に対し

$$\begin{cases} T_i Y_{i+1} T_i = Y_i \\ T_i Y_j = \underset{i-1}{Y_j} T_i \quad : \quad j \neq i, i+1 \end{cases}$$

(2) $Y_i Y_j = Y_j Y_i \quad : \quad i, j = 1, \cdots, n$

〈Lusztig's rel.〉→ (3) $\mu \in P$ に対し 《$i = 1, \cdots, n-1$》

$$Y \quad \underset{Y_{i+1}}{T_i Y^{\mu}} - \underset{Y_i}{Y^{s_i \mu}} T_i = \frac{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}}{1 - Y^{-d_i}} (\underset{Y_{i+1} - Y_i}{Y^{\mu} - Y^{s_i \mu}}),$$

但 $Y^{\mu} = Y_1^{\mu_1} \cdots Y_n^{\mu_n}$.

$\mu = (0 \cdots \overset{i}{0}\ 1\ 0 \cdots 0)$

∵(1)

- $T_i Y_{i+1} = T_i T_{i+1} \cdots T_{n-1} \omega T_1^{-1} \cdots T_i^{-1}$: Y_{i+1} の def.
  $= Y_i T_i^{-1}$.
- $T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}$ より, $k < l$ のとき

$$(T_k \cdots T_i \underbrace{T_{i+1} \cdots T_l) T_i}_{} = T_k \cdots \underbrace{T_{i-1} T_{i+1} T_i}_{} T_{i+1} \cdots T_l$$

$$= T_{i-1} (T_k \cdots T_l)$$

$T_i Y_j = Y_j T_i$ 《$j \neq i, i+1$》 は これを2回使うことで示せる. //

問: 〈示せ〉

[see also p.41] (2) $Y_1 = T_1 \cdots T_{n-1} \omega$, $Y_2 = T_2 \cdots T_{n-1} \omega T_1^{-1}$

$Y_2 Y_1 = T_2 \cdots T_{n-1} \omega T_1^{-1} Y_1 = T_2 \cdots T_{n-1} \omega T_2 \cdots T_{n-1} \omega$,

$$Y_1 Y_2 = \underbrace{T_1 \cdots T_{n-1} \omega}_{Y_1} T_2 T_3 \cdots T_{n-1} \omega T_1^{-1}$$

$$= T_2 \cdots T_{n-1} \cdot T_1 \cdots T_{n-1} \omega \cdot \omega T_1^{-1}$$

$$= T_2 \cdots T_{n-1} \omega\ T_2 \cdots T_{n-1} T_0 \cancel{T_0^{-1}} \omega = Y_2 Y_1.$$

これで $Y_1 Y_2 = Y_2 Y_1$ がいえた.

あとは $T_2^{-1} Y_2 T_2^{-1} = Y_3$ etc. により $Y_i Y_j = Y_j Y_i$ もいえる. //

② (3) の証明のための

補題 $f(Y) \in \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]$

(∗) $T_i f(Y) - \underrightarrow{s_i(f)}(Y) T_i = d(Y^{-\alpha_i})\bigl(f(Y) - (s_i f)(Y)\bigr)$

〈$s_i(f)$ に Y を代入した〉

について，

- $f(Y)$ が可逆で，(∗) が $f(Y)$ について成立 ⇒ $f(Y)^{-1}$ についても成立
- (∗) が $f(Y)$, $g(Y)$ について成立 ⇒ $f(Y)\,g(Y)$ についても成立.

（(∗)は左辺はある意味で derivation，その derivation law.）

i.e.

$$\begin{cases} T_i Y^{\mu} - Y^{s_i\mu} T_i = d(Y^{-\alpha_i})(Y^{\mu} - Y^{s_i\mu}) & \cdots ① \\ T_i Y^{\nu} - Y^{s_i\nu} T_i = d(Y^{-\alpha_i})(Y^{\nu} - Y^{s_i\nu}) & \cdots ② \end{cases}$$

$$\Longrightarrow T_i Y^{\mu+\nu} - Y^{s_i(\mu+\nu)} T_i = d(Y^{-\alpha_i})\bigl(Y^{\mu+\nu} - Y^{s_i(\mu+\nu)}\bigr)$$

… これは，$① \times Y^{\nu} - Y^{s_i\mu} \times ②$ に他ならない．//

- そこで，(3) を示すためには Y が monomial Y_i (ないし Y_i^{-1}) のときに示せばよい．実はそれは (1) の relation からすぐにわかる //

[もともと，(1) の $T_i Y_{i+1} T_i = Y_i$ のような rel'n．を monomial でない Y^{μ} について書いたらどうなるか ? に答えるのが (3)．]

すでに（宮崎）さん達のlem.によりW̃の言表に対応することがあり $\mathbb{K}[Y^{\pm1}]$上 fin. dim であることはわかっている.

定理 (Berustein, Lusztig)

(1) $\mathbb{K}[Y^{\pm1}]\,[\,G\,H(\tilde{W})\,]$ -module としての $H(\tilde{W})$ の構造$^{\circledast}$:

$$\boxed{H(\tilde{W})=\mathbb{K}[Y^{\pm1}]\otimes_{\mathbb{K}}H(W)=\bigoplus_{w\in W}\mathbb{K}[Y^{\pm1}]T_w .}$$

[但 $W\ni w=s_{j_1}\cdots s_{j_p}$: 最短表示 として $T_w:=T_{j_1}\cdots T_{j_p}$ と定める.]

(2) 中心の構造.

$$\mathfrak{Z}H(\tilde{W}):=\{C\in H(\tilde{W})\mid CA=AC \text{ for } \forall A\in H(\tilde{W})\}$$
$$=\mathbb{K}[Y^{\pm1}]^W=\bigoplus_{\lambda\in P^+}\mathbb{K}m_\lambda(Y).$$

(ここで $P:=\bigoplus\mathbb{Z}\varepsilon_i\supset L:=\bigoplus\mathbb{N}\varepsilon_i$
$\supset P^+:=\{(\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n)\in P\}\supset L^+:=L\cap P^+$)

セツメイ つまり $f(y)\in\mathbb{K}[y^{\pm1}]^W\Rightarrow f(Y)\in\mathfrak{Z}H(\tilde{W})$.

pf(2) 前命題(3)より

$$T_iY^\mu-Y^{s_i\mu}T_i=d(Y^{-\alpha_i})(Y^\mu-Y^{s_i\mu}),$$
$$T_iY^{s_i\mu}-Y^\mu T_i=d(Y^{-\alpha_i})(Y^{s_i\mu}-Y^\mu).$$

$\therefore$ $$T_i(Y^\mu+Y^{s_i\mu})-(Y^\mu+Y^{s_i\mu})T_i=0.$$

- $s_i\mu\neq\mu\Rightarrow T_i(Y^\mu+Y^{s_i\mu})=(Y^\mu+Y^{s_i\mu})T_i$
- $s_i\mu=\mu\Rightarrow T_iY^\mu=Y^\mu T_i$

$\therefore$ $i=1,\cdots,n-1$ のとき $T_if(Y)=f(Y)T_i$

$$\left[\begin{array}{l} f(Y)=\sum_\mu a_\mu Y^\mu=\sum_{s_i\mu=\mu}a_\mu Y^\mu+\frac{1}{2}\sum_{s_i\mu\neq\mu}\underbrace{a_\mu}_{\Uparrow}(Y^\mu+Y^{s_i\mu}) \\ \text{for } f\in\mathbb{K}[y^{\pm1}]^W \text{ に注意} \qquad \boxed{a_\mu=a_{s\mu}} \end{array}\right]$$

あとは
$$H(\tilde{W})=\mathbb{K}\langle\underbrace{Y_1^{\pm1},\cdots,Y_n^{\pm1}}_{\text{これらは } f(Y) \text{ とカカン①}},T_1,\cdots,T_n\rangle^{\circledast}$$
であることから, $f(Y)\in\mathfrak{Z}H(\tilde{W})$. //

$Y_1=T_1\cdots T_{n-1}\omega$ より
$\omega=T_{n-1}^{-1}\cdots T_1^{-1}Y_1$,
$T_0=\omega T_1\omega^{-1}$
だから 実は
$\mathbb{K}\langle Y_1^{\pm1}, T_1,\cdots,T_n\rangle$ でよい.

⊘ q-Dunkl作用素から Macdonald の q差分作用素へ.

$$A = \sum_{w \in W} A_w(x;\tau)\, w \in \mathcal{D}_{q,x}[W]$$

に対し, $\varphi(x)$: x の W-不変な fcn ならば

$$A\varphi = \sum_{w} A_w \underset{=\varphi}{\underline{w\varphi}} = \underbrace{\Big(\sum_{w} A_w\Big)}_{\rotatebox{90}{=}} \cdot \varphi \in \mathcal{D}_{q,x}$$

そこで

$$A = \sum_{w \in W} A_w \cdot w \longmapsto L_A := \sum_{w} A_w \in \mathcal{D}_{q,x}$$

とおく : $A\varphi = L_A \varphi.$

命題 $f(Y) \in ZH(\widetilde{W}) = \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]^W$ のとき

$L_f := L_{f(Y)} \in \mathcal{D}_{q,x}$ とおくと

$$\begin{cases} L_f \in \mathcal{D}_{q,x}^{W} = 《W\text{-不変な}q\text{差分作用素}》, \text{ しかも} \\ [L_f, L_g] = 0. \quad 《f(Y), g(Y) \in ZH(\widetilde{W})》 \end{cases}$$

(∵)

$\varphi(x)$: 一般のW-不変な函数 とする: これに作用させてしらべ。

$$\left[\begin{array}{ll} \text{又は } \mathcal{D}_{q,x}[W] \Big/ \sum_{w} \mathcal{D}_{q,x}[W](w-1) \cong \mathcal{D}_{q,x} \cdot \varphi & \\ \text{の generator.} \qquad\qquad [1] \leftrightarrow \varphi & \end{array}\right]$$

→ L_f : W不変

$\Leftrightarrow wL_f = L_f w \quad (\forall w \in W)$

$\Leftrightarrow wL_f\varphi(x) = L_f\varphi(x)$

$\Leftrightarrow s_i L_f \varphi = L_f \varphi \quad : \quad i = 1, \cdots, n-1.$

(∵) $L_f = \sum_{\mu} a(x)\tau^{\mu}$

$\updownarrow$

$wL_f w^{-1} = \sum_{\mu} w.a(x)\tau^{w\mu}$

$\updownarrow$

$wL_f\varphi = \Big(\sum_{\mu} w.a(x)\tau^{w\mu}\Big)\varphi$

⊘

② 最後の式をcheckする.

$$T_i f(Y) = f(Y) T_i \quad , \left(T_i - t^{\frac{1}{2}}\right) f(Y) = f(Y) \left(T_i - t^{\frac{1}{2}}\right).$$

$T_i = t^{\frac{1}{2}} + c(x^{\alpha_i})(s_i - 1)$ だから

$T_i - t^{\frac{1}{2}} = c(x^{\alpha_i})(s_i - 1)$, よって

$(上の式) \Leftrightarrow c(x^{\alpha_i})(s_i - 1) f(Y) = f(Y)\, c(x^{\alpha_i})(s_i - 1).$

$$\therefore \quad (s\underbrace{{}_i - 1) f(Y}) = c(x^{\alpha_i})^{-1} f(Y) c(x^{\alpha_i})(s_i - 1).$$

[illegible]

この両辺をW-不変な函数 φ に作用させると, (右辺)$=0$.

$\therefore \quad (s_i - 1) f(Y)\varphi = 0$ i.e. $s_i \underline{f(Y)\varphi} = \underline{f(Y)\varphi}$.

$f(Y)\varphi = L_f \varphi$ だから, これは $s_i L_f \varphi = L_f \varphi$ ということ. //

・ <u>可換性</u> $[L_f , L_g] = 0$ は

$$f(Y) g(Y) \varphi = f(Y) \underbrace{L_g \varphi}_{\text{これもsymmetric}} = L_f (L_g \varphi)$$

$$\therefore \quad 0 = [f(Y), g(Y)]\varphi = [L_f , L_g]\varphi$$

[illegible] $\therefore \; [L_f , L_g] = 0.$

//

* かくして,

$$\left\{ L_f \in \mathcal{D}_{q,x}^{W} \;\middle|\; f(y) \in \mathbb{K}[y^{\pm 1}]^{W} \right\}$$

は可換な q差分作用素の族となる。

No. 37

Date

定理

(1) $L : \mathfrak{Z}H(\widetilde{W}) = \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]^W \longrightarrow \mathcal{D}_{q,X}^W$

の像は、$\mathbb{K}[D_X^{(1)}, \cdots, D_X^{(n-1)}, D_X^{(n)}, D_X^{(n)-1}]$ に一致する.

即ち

$$L : \mathfrak{Z}H(\widetilde{W}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}[D_X^{(1)}, \cdots D_X^{(n)}, D_X^{(n)-1}]$$

(2) ${}^\forall f(y) \in \mathbb{K}[y^{\pm 1}]^W$ に対して,

$$f(Y) P_\lambda(x) = L_f P_\lambda(x) = P_\lambda(x) \cdot f(q^\lambda t^\rho)$$

但 $\rho = (\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \cdots, -\frac{n-1}{2}) = \underbrace{(n-1, \cdots, 0)}_{=\delta} - \frac{n-1}{2}(1, \cdots, 1)$.

証明 $\mathbb{K}[y^{\pm 1}]^W \ni e_1(y) = y_1 + \cdots + y_n$

$\mapsto e_1(Y) = Y_1 + \cdots + Y_n$

$$\rightsquigarrow L_{e_1} \underbrace{\varphi(x)}_{一般元} = \boxed{\ ?\ } \cdot \varphi(x)$$

↑ q-差分 op.

これを求めるために、少し準備が必要。次節.

㊂ q-Dunkl 作用素の R-operator による表示.

$$Y_1 = T_1 \cdots T_{n-1}\,\omega, \quad Y_2 = T_2 \cdots T_{n-1}\,\omega\, T_1^{-1}, \cdots$$

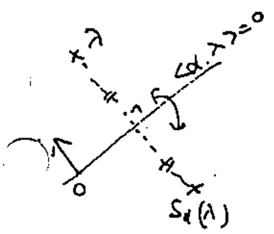
- $\Delta^+ = \{\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\} \subset P$: positive roots (A型).

$\ni \alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \cdots, \alpha_{n-1} := \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$: simple roots,

$\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1}$.

である.

- $T_i = c(x^{\alpha_i}) s_i + d(x^{\alpha_i})$ であった.



$s_\alpha : P \to P$, reflection

$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle\alpha, \lambda\rangle\alpha$

$(\langle\varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle = \delta_{ij} : P \times P \to \mathbb{Z})$

$\langle\alpha \cdot \alpha\rangle = 2$.

一般に, $\alpha \in \Delta$ に対して ($\Delta = \Delta^+ \cup (-\Delta^+)$)

$$R(\alpha) := c(x^\alpha) + d(x^\alpha) s_\alpha \quad \left[s_\alpha(x^\lambda) = x^{s_\alpha\lambda} := x^{\lambda - \langle\alpha,\lambda\rangle\alpha} \right]$$

と定める : $T_i = R(\alpha_i) s_i$ である.

更に

$$\begin{cases} \omega R(\alpha) = R(\omega\alpha)\,\omega \\ \omega x^\alpha = x^{\omega\alpha}\,\omega, \quad \omega s_\alpha = s_{\omega\alpha}\,\omega. \end{cases}$$

∵ $Y_1 = T_1 \cdots T_{n-1}\,\omega$

$$= R(\alpha_1) s_1 R(\alpha_2) s_2 \cdots R(\alpha_{n-1}) s_{n-1} \cdot \underset{\sim}{\omega}$$

$$= R(\varepsilon_1-\varepsilon_2) \underset{\longrightarrow \text{右へ}}{s_1} \cdot R(\varepsilon_2-\varepsilon_3) \underset{\longrightarrow}{s_2} \cdots R(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n) \cancel{s_{n-1}}\, \underline{\cancel{s_{n-1}} \cdots s_1 \tau_1}.$$

$$= R(\varepsilon_1-\varepsilon_2) R(\varepsilon_1-\varepsilon_3) \cdots R(\varepsilon_1-\varepsilon_n)\,\tau_1.$$

一般に

$$Y_i = T_i \cdots T_{n-1}\,\omega\, T_1^{-1} \cdots T_{i-1}^{-1}$$

$$= R(\alpha_i) s_i \cdots R(\alpha_{n-1}) s_{n-1} \cdot s_{n-1} \cdots s_1 \tau_1 s_1 R(\alpha_1)^{-1} s_2 R(\alpha_2)^{-1} \cdots s_{i-1} R(\alpha_{i-1})^{-1}$$

$$= R(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}) \cdots R(\varepsilon_i-\varepsilon_n) \cdot \underbrace{s_{i-1} \cdots s_1 \tau_1 s_1 \cdots s_{i-1}}_{=\tau_i} \cdot R(\varepsilon_1-\varepsilon_i)^{-1} \cdots R(\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_i)^{-1}$$

$s_1 \tau_1 s_1 = \tau_2$
$s_2 \tau_2 s_2 = \tau_3$, etc.

すなわち :

命題 $Y_i = R(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}) \cdots R(\varepsilon_i-\varepsilon_n)\,\tau_i\, R(\varepsilon_1-\varepsilon_i)^{-1} \cdots R(\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_i)^{-1}$.

($i = 1, \sim, n$.)

・さて，$Y_1\varphi$ を計算してみよう。［φ：一般の対称函数．］

$$Y_1\varphi = \overbrace{\left(c\left(\tfrac{x_1}{x_2}\right)+d\left(\tfrac{x_1}{x_2}\right)s_{12}\right)}^{R(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\cdots\overbrace{\left(c\left(\tfrac{x_1}{x_{n-1}}\right)+d\left(\tfrac{x_1}{x_{n-1}}\right)s_{1,n-1}\right)}^{R(\varepsilon_1-\varepsilon_{n-1})}\overbrace{\left(c\left(\tfrac{x_1}{x_n}\right)+d\left(\tfrac{x_1}{x_n}\right)s_{1,n}\right)}^{R(\varepsilon_1-\varepsilon_n)}\varphi \;\; \tau_1$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \times c$$

$$= (\quad \text{〃} \quad)\cdots(\quad \vdots \quad)(▨\,\tau_1 + ◎\,\tau_n)\varphi$$

$$\downarrow \qquad\qquad \times c$$

$$= (\quad \text{〃} \quad)\cdots(▨\,\tau_1 + ◎\,\tau_{n-1} + ◎\,\tau_n)\varphi$$

$$\cdots \qquad \times c$$

$$= (▨\,\tau_1 + ◎\,\tau_2 + \cdots + ◎\,\tau_n)\varphi,$$

▨（τ_1 の係数）

$$= c\left(\frac{x_1}{x_2}\right)c\left(\frac{x_1}{x_3}\right)\cdots c\left(\frac{x_1}{x_n}\right)$$

$$= t^{-\frac{n-1}{2}}\frac{\left(1-t\frac{x_1}{x_2}\right)\left(1-t\frac{x_1}{x_3}\right)\cdots\left(1-t\frac{x_1}{x_n}\right)}{\left(1-\frac{x_1}{x_2}\right)\left(1-\frac{x_1}{x_3}\right)\cdots\left(1-\frac{x_1}{x_n}\right)} = t^{-\frac{n-1}{2}}\prod_{j=2}^{n}\frac{tx_1-x_j}{x_1-x_j}$$

$$\begin{cases} T\varphi = (cs+d)\varphi, \\ R\varphi = (c+ds)\varphi \end{cases}$$

$\therefore\ T_i\varphi = t^{\frac{1}{2}}\varphi$

$T_i^{-1}\varphi = t^{-\frac{1}{2}}\varphi$ →

$\therefore\ R(\alpha)\varphi = t^{\frac{1}{2}}\varphi$

$R(\alpha)^{-1}\varphi = t^{-\frac{1}{2}}\varphi.$

・一般に

$$Y_i\varphi = T_i\cdots T_{n-1}\,\omega\,T_1^{-1}\cdots T_{i-1}^{-1}\varphi \qquad \tfrac{1}{2}\cdot(i-1)$$

$$= \underbrace{R(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})\cdots R(\varepsilon_i-\varepsilon_n)}_{\text{上と同じ計算をすると}}\tau_i\, t^{-\frac{i-1}{2}}\varphi \qquad -\tfrac{n-1}{2}$$

$n-$

$$= (▨\,\tau_i \underbrace{+ ◎\,\tau_{i+1} + \cdots + ◎\,\tau_n}_{\boxed{i\ 以上}})\varphi \quad \text{の形，}$$

$\therefore\ (Y_1+\cdots+Y_n)\varphi = L_{e_1}\varphi$ $\qquad Y_1 Y_2\cdots$

$$= \left(t^{-\frac{n-1}{2}}\prod_{j=2}^{n}\frac{tx_1-x_j}{x_1-x_j}\,\tau_1 + ◎\,\tau_2 + \cdots + ◎\,\tau_n\right)\varphi \qquad Y_1\cdots Y_n$$

ところが，L_{e_1} は W-不変．$\qquad L_{e_1}\cdot t$

$$\therefore\ \boxed{L_{e_1} = t^{-\frac{n-1}{2}}D_x^{(1)}}.$$

//

② $e_r(Y) = \sum_{i_1<\cdots<i_r} Y_{i_1}\cdots Y_{i_r}$ でも同様で

L_{e_r} の $\tau_1\cdots\tau_r$ の係数をくらべて $\boxed{L_{e_r} = t^{-\frac{r(n-r)}{2}} D_x^{(r)}}$

を得る.

として

$$L_{e_r} P_\lambda = t^{-\frac{r(n-r)}{2}} D_x^{(r)} P_\lambda$$

$$= P_\lambda \cdot t^{-\frac{r(n-r)}{2}} e_r(q^\lambda t^\delta) = P_\lambda e_r(q^\lambda t^\rho).$$ //

以上で定理の証明ができた。

rem ここでははじめ $H(\tilde{W})$ を使わず P_λ の存在など示したが
全て $H(\tilde{W})$ だけから出発しても良かった.

rem $\overset{二重}{\text{double}}$ アフィン Hecke 環. とは.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{D}_{q,x}[W] & \\ \cup & & \cup \\ \mathbb{K}[x^{\pm1};T_1,\dots,T_{n-1}] & & H(\tilde{W})=\mathbb{K}(Y^{\pm1};T_1,\dots,T_{n-1}) \end{array}$$

$$\to DH(W) = \mathbb{K}\langle x_1^{\pm1},\dots,x_n^{\pm1};Y_1^{\pm1},\dots,Y_n^{\pm1},T_1,\dots,T_{n-1}\rangle$$

$$= \mathbb{K}\langle x_1^{\pm1},\dots,x_n^{\pm1},T_0,T_1,\dots,T_{n-1},\omega^{\pm}\rangle$$

[DH : Heisenberg-Weyl alg の Hecke 環.
D : D-module の D.
Chenodnik は $\mathcal{HH}$ とかいている. (ミス?)
" $\mathcal{H}$ for Hecke.]

//17:40.

[lattice part の構成について] : 講義のあとできいたこと. [cf. p32]

⊜ $\tilde{W}$ $H(\tilde{W})$

$$\tau^{\nu} = s_{j_1} \cdots s_{j_p} \omega^{l} \longmapsto T_{\tau^{\nu}} = T_{j_1} \cdots T_{j_p} \omega^{l}$$

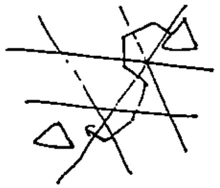
$H(\tilde{W})$ において 元素

$$T_{\tilde{w}_1 \tilde{w}_2} = T_{\tilde{w}_1} T_{\tilde{w}_2} \quad : \text{if } l(\tilde{w}_1 \tilde{w}_2) = l(\tilde{w}_1) + l(\tilde{w}_2)$$

なので,

$$\mu, \nu \in P^{+} \Rightarrow l(\tau^{\mu+\nu}) = l(\tau^{\mu}) + l(\tau^{\nu}) \quad ⊗$$

⊗ 絵でみ易い理由.



length = 間に入った超平面の数.

とあわせて, $\mu \in P^{+}$ に対し

$$Y(\mu) := T_{\tau^{\mu}} \Rightarrow [Y(\mu), Y(\nu)] = 0.$$

この流儀では, 一般の μ に対しては

$$\mu = \mu_{+} - \mu_{-} \text{ とおいて } \quad Y(\mu) := Y(\mu_{+}) Y(\mu_{-})^{-1}$$

とする.

[尚 C型のとき
$$\begin{cases} \tau_1 = s_1 \cdots s_{n-1} \omega \\ \tau_2 = s_2 \cdots s_{n-1} \omega s_1 \end{cases}$$
τ_1 と $\tau_1 \tau_2$ から 逆に τ_2 を求めた.]

// 18:00.

集中 第4日

15:10–.

§3. $\overset{二重}{\text{double}}$ アフィン Hecke 環 とその応用.

① duality.

$$\widetilde{P}_\lambda(x) := \frac{P_\lambda(x)}{P_\lambda(t^\delta)} \qquad \lambda\in L^+ = \{\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \underset{\overset{\vee\!\!\shortparallel}{0}}{\lambda_n})\}.$$

$\delta := (n-1, n-2, \ldots, 0)$.

とおくと

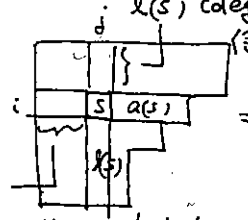
$$\widetilde{P}_\lambda(q^\mu t^\delta) = \widetilde{P}_\mu(q^\lambda t^\delta) \quad : \lambda, \mu \in L^+$$

Fourier 的対称性:
$e^{\xi x}$ $\xi \leftrightarrow x$

② $$P_\lambda(t^\delta) = t^{n(\lambda)}\prod_{s\in\lambda}\frac{1-q^{a'(s)}t^{n-l'(s)}}{1-q^{a(s)}t^{l(s)+1}} :$$

evaluation formula.

超切|解 みたいなもの:
1



coarm length
余腕長

hook len.

$$\Rightarrow \begin{cases} h(s) = a(s)+l(s)+1 \\ c(s) = a'(s)-l'(s)+n \\ \quad = (j-1)-(i-1)+n \\ \quad = n-j-i. \end{cases}$$

content 于

③ Pieri formula.

$$e_r(x)P_\lambda(x) = \sum_\mu ▨\, P_\mu(x)$$

[cf. Schur のときは

$$V_{▤;r} = \wedge^r V \xmapsto{\otimes V(\lambda)} V_{▤}\otimes V(\lambda) = \bigoplus_\mu V(\mu)$$

という分解だった. $\mu\setminus\lambda$: column strip.]

◎ ①, ②, ③ は どれかがあれば他もでる.

ここでは

$$① \Rightarrow \overset{③}{②} \Rightarrow \overset{②}{③}$$

これを ⇑

$DH(\widetilde{W})$: double aff. Hecke

を使って示す. Cherednik

◎ DH(W)

$$\tilde{H}(\tilde{W}) := \mathbb{K}\langle T_0, \cdots, T_{n-1}, \omega^{\pm 1}\rangle = \mathbb{K}\langle \underset{\underset{q\text{-Dunkl}}{\uparrow}}{Y_1^{\pm 1}, \cdots, Y_n^{\pm 1}}, \underbrace{T_1, \cdots, T_{n-1}}_{H(W)}\rangle$$

であった.

$$DH(W) := \mathbb{K}\langle X_1^{\pm 1}, \cdots, X_n^{\pm 1}; T_0, \cdots, T_{n-1}; \omega^{\pm 1}\rangle$$

$$= \mathbb{K}\langle X_1^{\pm 1}, \cdots, X_n^{\pm 1}; Y_1^{\pm 1}, \cdots, Y_n^{\pm 1}, T_1, \cdots, T_{n-1}\rangle$$

$$= \mathbb{K}[X^{\pm 1}] \underset{\mathbb{K}}{\otimes} \underbrace{H(W)}_{\text{有限}} \underset{\mathbb{K}}{\otimes} \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]$$

定理 (Cherednik)

∃! $\mathbb{K}$-alg anti-invol. $\phi : DH(W) \longrightarrow DH(W)$

s.t. $[\, \phi(PQ) = \phi(Q)\phi(P),\ \phi^2 = 1 \,]$

$$\phi : \begin{cases} X_i \mapsto Y_i^{-1} & \\ Y_i \mapsto X_i^{-1} & (1 \le i \le n) \\ T_i \mapsto T_i & (1 \le i \le n-1) \end{cases}$$

証明は略. (前に書いた relation より.)

◎ "期待値" $\langle\ \rangle : DH(W) \longrightarrow \mathbb{K}$ を

$\forall P \in DH(W) \subset \mathcal{D}_{q,x}[W]$ に対し

cf. "Fischerの内積"
$\langle f | g \rangle = f(\partial_x) g(x) \big|_{x=0}.$

$P \cdot \underset{\text{定数関数}}{\underline{1}} \in \mathbb{K}[X^{\pm 1}]$

∴ $\langle P \rangle := P \cdot 1 \big|_{x = t^{-\rho}} \in \mathbb{K}$ として def する.

$\rho = (\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \cdots, -\frac{n-1}{2}).$

このとき

○ $Y_i(1) = t^{\frac{1}{2}(n-2i+1)} = t^{\rho_i}$ [∵ L_{Y_i} の計算と同様]

より

$$\langle \text{▨}\, Y_i \rangle = \langle \text{▨}\, t^{\rho_i} \rangle$$

↖ 任意の operator,

$$\therefore \langle \text{▨}\, (Y_i - t^{\rho_i}) \rangle = 0.$$

○ $x_i \boxed{\cdots}\, 1 \,\Big|_{x=t^{-\rho}} = t^{-\rho_i} \cdot \boxed{\cdots}\, 1 \,\Big|_{x=t^{-\rho}}$ より

$$\langle x_i \text{▨} \rangle = \langle t^{-\rho_i} \text{▨} \rangle$$

$$\therefore \langle (x_i - t^{-\rho_i}) \text{▨} \rangle = 0.$$

○ $\langle \text{▨}\, T_i \rangle = \langle \text{▨}\, t^{\frac{1}{2}} \rangle$; $\langle T_i\, \text{▨} \rangle = \langle t^{\frac{1}{2}} \text{▨} \rangle$.

∵ $T_i 1 = t^{\frac{1}{2}}$: $T_i = t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} \frac{1 - t x_i/x_{i+1}}{1 - x_i/x_{i+1}} (s_i - 1)$

$$\xrightarrow{|x=t^{-\rho}} t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} \frac{1 - t \cdot t^{-1}}{1 - t^{-1}} (s_i - 1) = t^{\frac{1}{2}}.$$

$$\frac{x_i}{x_{i+1}}\Big|_{\cancel{x}=t^{-\rho}} = t^{-1}$$

∴ $\langle\ \ \rangle : DH(W) \big/ \mathcal{J} + \phi(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{K}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J} := \sum_{i=1}^{n} DH(W)(Y_i - t^{\rho_i}) + \sum_{i=1}^{n-1} DH(W)(T_i - t^{\frac{1}{2}}), \\ \phi \Updownarrow \\ \phi(\mathcal{J}) = \sum_{i=1}^{n} (X_i^{-1} - t^{\rho_i}) DH(W) + \sum_{i=1}^{n-1} (T_i - t^{\frac{1}{2}}) DH(W). \end{array} \right.$$

ここで $P, Q \in DH(W)$ に対して

$(P|Q) := \langle \phi(P) Q \rangle \in \mathbb{K}$ と定める。

命題 (1) $\langle \phi(P) \rangle = \langle P \rangle$ for $\forall P \in DH(W)$

(2) $(P \mid Q) = (Q \mid P)$ for $\forall P, Q \in DH(W)$.

∵(1) 念の為.

$$P = \sum_{\lambda, w, \mu} a_{\lambda, w, \mu} X^{\lambda} T_w Y^{\mu} \quad \text{に対して}$$

$$\phi(P) = \sum_{\lambda, w, \mu} a_{\lambda, w, \mu} X^{-\mu} T_{w^{-1}} Y^{-\lambda}$$

$$\left(\because\ w = s_{j_1} \cdots s_{j_p},\ T_w = T_{j_1} \cdots T_{j_p} \mapsto \phi(T_w) = T_{j_p} \cdots T_{j_1} = T_{w^{-1}}. \right)$$

すると

$$\left. \begin{aligned} \langle P \rangle &= \sum a_{\lambda, w, \mu}\, t^{-\langle \rho, \lambda \rangle} t^{\frac{1}{2} \ell(w)} t^{\langle \rho, \mu \rangle} \\ \langle \phi(P) \rangle &= \sum a_{\lambda, w, \mu}\, t^{\langle \rho, \mu \rangle} t^{\frac{1}{2} \ell(w^{-1})} t^{-\langle \rho, \lambda \rangle} \end{aligned} \right) \text{同じ}. \quad //$$

(2) $$\phi(\phi(P) Q) = \phi(Q) P$$

なので

$$\langle \phi(P) Q \rangle \overset{(1)}{=} \langle \phi(\phi(P) Q) \rangle = \langle \phi(Q) P \rangle$$

すなわち $(P \mid Q) = (Q \mid P)$. //

…これからほとんど Macdonald poly. の duality が言える.

◎ Macdonald 多項式の duality.

$P, Q \in DH(W)$ として, $P_\lambda(x)$, $P_\mu(x)$ $(\lambda, \mu \in P^+)$ をとる.

$$\to \left(P_\lambda(x) \middle| P_\mu(x)\right) = \left(P_\mu(x) \middle| P_\lambda(x)\right).$$

この左辺

$$= \langle \phi(P_\lambda(x)) P_\mu(x) \rangle$$
$$= \langle \underbrace{P_\lambda(Y^{-1})}_{\in \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]^W} \overset{\text{eigen}\,!}{P_\mu(x)} \rangle$$
$$= \langle P_\lambda(q^{-\lambda} t^{-\rho}) P_\mu(x) \rangle$$
$$= P_\lambda(q^{-\lambda} t^{-\rho}) P_\mu(t^{-\rho}).$$ 右辺も同様,

$$\therefore \quad P_\lambda(q^{-\lambda} t^{-\rho}) P_\mu(t^{-\rho}) = P_\mu(q^{-\lambda} t^{-\rho}) P_\lambda(t^{-\rho}).$$

これは

補題 $P_\lambda(x; q, t) = P_\lambda(x; q^{-1}, t^{-1})$

[$\because$ $D_x(u) P_\lambda = P_\lambda \cdot d_\lambda(u)$ で $q, t \mapsto q^{-1}, t^{-1}$ としても本質的に同じ方程式.]

を使えば $^{-1}$ がとれてキレイになる:

$$P_\lambda(q^{-\lambda} t^{-\rho}; q, t) P_\mu(t^{-\rho}; q, t) = \cdots$$

$q, t \mapsto q^{-1}, t^{-1}$ $\Downarrow$

$$P_\lambda(q^{\lambda} t^{\rho}; q^{-1}, t^{-1}) P_\mu(t^{\rho}; q^{-1}, t^{-1}) = \cdots$$
$$= P_\lambda(q^{\lambda} t^{\rho}; q, t) P_\mu(t^{\rho}; q, t) = \cdots.$$

すなわち

定理 $\lambda, \mu \in P^+$

$$P_\lambda(q^{\mu} t^{\rho}) P_\mu(t^{\rho}) = P_\mu(q^{\lambda} t^{\rho}) P_\lambda(t^{\rho})$$

または

$$P_\lambda(q^{\mu} t^{\delta}) P_\mu(t^{\delta}) = P_\mu(q^{\lambda} t^{\delta}) P_\lambda(t^{\delta}).$$

- 以下

$$\widetilde{P}_\lambda(x) := \frac{P_\lambda(x)}{P_\lambda(t^\delta)} \leftarrow \neq 0$$ [Schur でたしかめればよい]

とおくと

$$\widetilde{P}_\lambda(q^\mu t^\delta) = \widetilde{P}_\mu(q^\lambda t^\delta) \quad : \underline{\lambda, \mu \in \overset{P^+}{L^+}}.$$

$n-1$

$\cancel{t^{\frac{n-1}{2}}}$ $\cancel{t^{\frac{r(n-1)}{2}}}$

$$\boxed{t^{\frac{rn-r}{2}} \cdot e_r(q^\lambda t^\rho) = e_r(q^\lambda t^\delta)}$$

ρだと $(\frac{n-1}{2}, \dots)$ なので $q^{\frac{t}{2}}$ が出てイヤ. δの方がキレイになるが 一般のtypeに戻るにはρ. 趣味の問題.

[㊟ $P^+ \ni \lambda = (\lambda_1 \overset{\geq}{,} \dots \overset{\geq}{,} \lambda_n)$
$\Rightarrow \lambda = \mu + l(1, \dots, 1) \quad : \begin{cases} \exists \mu \in L^+ \\ l \in \mathbb{Z} \end{cases}$,
このとき $P_\lambda(x) = (x_1 \cdots x_n)^l P_\mu(x)$.]

④ ~~Pieri formula~~ の導出.

$$D_x^{(r)} P_\lambda(x) = P_\lambda(x) e_r(q^\lambda t^\delta).$$

$D_x^{(r)} = M_r\, t^{\frac{rn-r}{2}}$

$$\left[D_x^{(r)} = \sum_{|I|=r} A_I(x;t) T^I_{q;x} \qquad A_I(x;t) = t^{\binom{|I|}{2}} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \right]$$

$t^{\frac{r^2-rn}{2}}$

$t^{\frac{r^2-r}{2}}$

これと, duality を用いて $\lambda \leftrightarrow x$ として よみかえてみる.

$$D_x^{(r)} \widetilde{P}_\mu(x) = \widetilde{P}_\mu(x)\, e_r(q^\mu t^\delta) \quad : \mu \in L^+$$

$\frac{r^2-r}{2}$ $\frac{rn-r}{2}$ から出発すると $\|$

r^2-rn

$$\sum_{|I|=r} A_I(x \underset{\text{以下略}}{[;t]}) \widetilde{P}_\mu(q^{\varepsilon_I} x) \quad : \varepsilon_I = \sum_{i \in I} \varepsilon_i.$$

rn

$r-rn$

$x = q^\lambda t^\delta$ とおくと

$$\sum_{|I|=r} A_I(q^\lambda t^\delta) \widetilde{P}_\mu(q^{\lambda + \varepsilon_I} t^\delta) = \widetilde{P}_\mu(q^\lambda t^\delta) e_r(q^\mu t^\delta).$$

$\|$ duality $\qquad\qquad \|$

$$\sum_{|I|=r} A_I(q^\lambda t^\delta) \widetilde{P}_{\underset{\sim\sim}{\lambda+\varepsilon_I}}(q^\mu t^\delta) . \qquad \widetilde{P}_\lambda(q^\mu t^\delta) e_r(q^\mu t^\delta)$$

$t^{\frac{}{2}}$

「ここでケイガンの読者は1つの問題があることに気付かれるであろう」.

$\lambda+\varepsilon_I$ は partition でない かもしれない.

… これは

となっておこる.

$\Leftrightarrow \lambda_j=\lambda_{j+1}, \quad j\notin I, \ j+1\in I.$

· nonsymmetric Macdonald poly. 達 "内" duality によって $P_{\textcircled{\lambda}}$ ← これを partition 以外にも 回すことができるようにする.

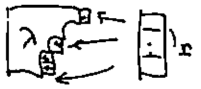
しかし, このとき

$$A_I \Rightarrow \frac{tx_{j+1}-x_j}{x_{j+1}-x_j}=\frac{q^{\lambda_{j+1}}t^{\delta_{j+1}+1}-q^{\lambda_j}t^{\delta_j}}{q^{\lambda_{j+1}}t^{\delta_{j+1}}-q^{\lambda_j}t^{\delta_j}} \underset{\boxed{\delta_j=\delta_{j+1}+1}}{=} 0.$$

つまり, そのような I は和に寄与しない。結局,

$$\left(e_r\cdot\widetilde{P}_\lambda\right)(q^\mu t^\delta)$$

$$=\sum_{\substack{|I|=r\\ \lambda+\varepsilon_I\in L^+}} A_I(q^\lambda t^\delta)\cdot\widetilde{P}_{\lambda+\varepsilon_I}(q^\mu t^\delta).$$



column-strip.

これは $\lambda,\mu\in L^+=\mathbb{N}\Lambda_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{N}\Lambda_n \qquad \Lambda_r=\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_r$

であるが $\left(\left(\ \overset{\mu}{\overset{\shortparallel}{\sum a_i\Lambda_i}}\mapsto x^\mu=x_1^{a_1}(x_1x_2)^{a_2}\cdots(x_1\cdots x_n)^{a_n}\ \right)\right)$

$q^\mu t^\delta\to x$ にしてよく,

$$e_r(x)\,\widetilde{P}_\lambda(x)$$

$$=\sum_{\substack{|I|=r\\ \lambda+\varepsilon_I\in L^+}} \underbrace{A_I(q^\lambda t^\delta)}_{D^{(r)}\text{の coef. から出てしまうのが面白い。}}\cdot\widetilde{P}_{\lambda+\varepsilon_I}(x).$$

- この式は別にCherednik というわけではないが, dualityさえあればできることはわかっていた. dualityも含めてわかっていた.

⑤ $P_\lambda(t^\delta)$ の値 (?)

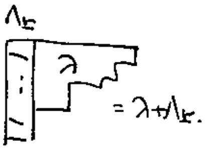
$$P_\lambda(t^\delta) =: a_\lambda$$ とおくと

$\tilde{P}_\lambda(x) := \dfrac{P_\lambda(x)}{P_\lambda(t^\delta)}$ ↓

$$e_r(x)\,\tilde{P}_\lambda(x) = \sum_{|I|=r} A_I(q^\lambda t^\delta)\,\tilde{P}_{\lambda+\varepsilon_I}(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{e_r(x)}_{\substack{\shortparallel \\ x_1\cdots x_r+\cdots}}\left(\frac{1}{a_\lambda}x^\lambda+\cdots\right) = \sum_{|I|=r} A_I(q^\lambda t^\delta)\left(\frac{1}{a_{\lambda+\varepsilon_I}}x^{\lambda+\varepsilon_I}+\cdots\right)$$

∴ $x^{\lambda+\Lambda_r}$ の係数をとると

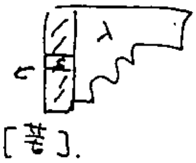


$$\frac{1}{a_\lambda} = A_{\{1,\cdots,r\}}(q^\lambda t^\delta)\cdot\frac{1}{a_{\lambda+\Lambda_r}}.$$

すなわち

$$a_{\lambda+\Lambda_r} = a_\lambda \cdot \underbrace{A_{\{1,\cdots,r\}}(q^\lambda t^\delta)}_{\substack{\shortparallel \\ t^{\binom{r}{2}}\prod\limits_{\substack{1\le i\le r\\ r+1\le j\le n}}\frac{q^{\lambda_i}t^{\delta_i+1}-q^{\lambda_j}t^{\delta_j}}{q^{\lambda_i}t^{\delta_i}-q^{\lambda_j}t^{\delta_j}}}} \quad : \underline{\ell(\lambda)\le r}.$$

これは沢山 factor があるようにみえるが 実は沢山 cancel して、



ここをわたる積になる[著].

∴ これを用いて帰納的に $a_\lambda = P_\lambda(t^\delta)$ の値を定めると はじめの公式 ② になる.

[宣伝] やがて出る「数学のたのしみ」に 上野喜三雄さんが数セミの編集と仲が良いこともあって q の特集をやることになった. 九大の三町さん 神戸の山田さん 私 が書く. 私(のうみ)は考えたあげく 今回の話 (Dunkl → ①②③) を1変数のときに書きます. ここの人は読む必要はないですが…

した。

16:35.
あと1h.

§4 非対称 Macdonald 多項式.

$$f(Y) \in \mathbb{K}[Y^{\pm1}]^W = \mathfrak{Z}H(\widetilde{W})$$

$$f(Y)m_\lambda(x) = f(q^\lambda t^\rho)m_\lambda(x) + \text{lower terms.}$$

symmetrize しでない

\# q-Dunkl op. (そのもの) の三角性があれば、$Y_1, \cdots, Y_n$ そのもの

同時対角化を与えるものがあるはず.

それが Laurent poly. の中である. それが非対称のもの.

もともとは Opdam が言いはじめた.

◎ q-Dunkl 作用素の三角性.

P : weight ($=\mathbb{Z}^n$)

P^+: dominant wt.

$=\{(\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n)\}$

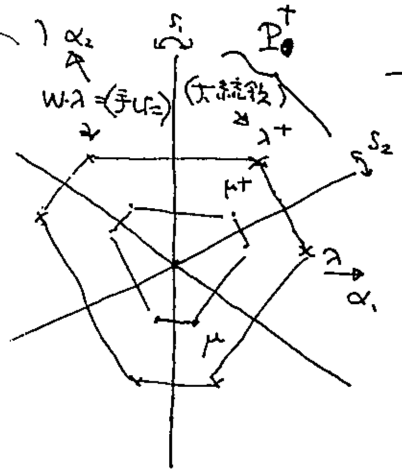
$\lambda \in P$: dominant と限らない とする.

$Y^\mu x^\lambda = ◎ x^\lambda + \cdots$ (適当な order で下位のもの) と表したい.

ordering

- $\lambda \in P = \mathbb{Z}\varepsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\varepsilon_n$ に対し

ここで $(W.\lambda) \cap P^+ = \{\lambda^+\}$: $\exists 1\, \lambda^+$, λ を並びかえてできる P^+ の元.



def $\lambda, \mu \in P$ に対し

$$\mu \precsim \lambda \;:\Leftrightarrow \begin{cases} \mu^+ < \lambda^+ & (\!(P^+ \text{の中で 比較.} :\Leftrightarrow \lambda^+ - \mu^+ \in Q^+)\!) \\ \text{又は} & \\ \mu^+ = \lambda^+ \text{ のときは} & \mu \leq \lambda. \end{cases}$$

dominance order で ホントに比べる.

〈会社員2人をくらべる : どちらの上司がえらいかどうかでまず比べ,
上司が同じなら ホントに比べる 〉
[イヌという わかり易さだ(^^;)]

命題 q-Dunkl 作用素 Y^μ ($\mu \in P$) は次の形の三角性をもつ.

$\forall \lambda \in P$, $$Y^\mu x^\lambda = q^{\langle \mu, \lambda \rangle} t^{\langle \mu, \rho(\lambda) \rangle} x^\lambda + (\prec \text{で低次の項}).$$

- とくに $\lambda \in P^+$ のときは

$$Y^\mu x^\lambda = q^{\langle \mu, \lambda \rangle} t^{\langle \mu, \rho \rangle} x^\lambda + (\quad \text{〃} \quad)$$

ここで, "half sum of pos. roots" の類似を

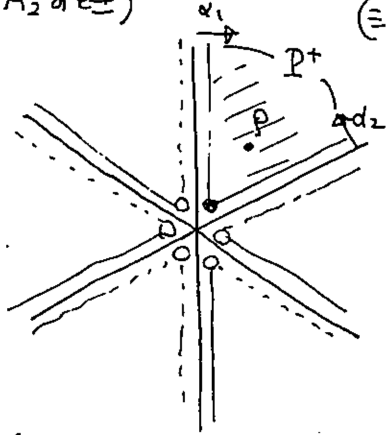
$$\rho(\lambda) := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i<j\}} \varepsilon(\langle \alpha, \lambda \rangle) \alpha, \quad \varepsilon(u) := \begin{cases} 1 & : u \geq 0 \\ -1 & : u < 0 \end{cases}$$

で定めた.

[λ と α が向きが揃ってなければ -1 回と (αがλを負にみるrootなら) 数える]

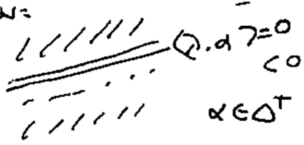
($\lambda \in P^+ \Rightarrow \rho(\lambda) = \rho = \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \ldots, -\frac{n-1}{2}\right)$.)

⊛ A_2 のとき)



{ —— : 入れる
 ‥‥ : 入れない

一般に



(注) $\rho(\lambda)$ の役割.

P をいくつかの "chamber" の disjoint union に分けて⊛
(ふつうは open にとるが bdry を適宜加える)
自分の領域に属す ρ の orbit を assign する。

⊙ $\rho(\lambda)$ は次のように定式化することもできる.

$\lambda \in P$, $\lambda^+ \in P^+$

$\lambda = w\lambda^+$ ($w \in W$) となるような w の中で

$l(w)$: 最小のものを w_λ と書くと

$$\rho(\lambda) = w_\lambda \cdot \rho.$$

証明(説明)

$$R(\alpha) = c(x^\alpha) + d(x^\alpha) s_\alpha$$ を x^λ に作用させると,

$$= t^{\frac{1}{2}} + \underbrace{d(x^\alpha)(s_\alpha - 1)}\ 2 \cdot x^\lambda$$

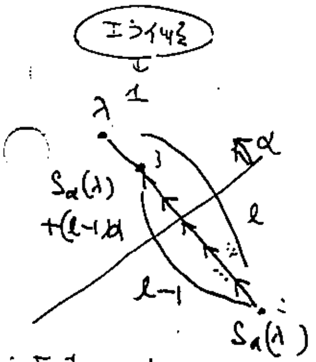
- ⟨α, λ⟩ = ℓ > 0 の時

$$d(x^\alpha)(x^{s_\alpha(\lambda)} - x^\lambda)$$

$$= \frac{(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})}{1 - x^\alpha} x^{s_\alpha(\lambda)}(1 - x^{\ell\alpha})$$

$$= (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) x^{s_\alpha(\lambda)}(1 + x^\alpha + \cdots + x^{(\ell-1)\alpha}).$$

∵ $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \underbrace{\langle\alpha, \lambda\rangle}_{=\ell}\alpha$ とした



エラさの order は 内側はエライ」というもの.

☺ ∵ ホントはもっとチャンとやるべきだが これで大体

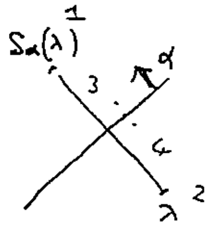
$$R(\alpha)x^\lambda = t^{\frac{1}{2}} x^\lambda + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) x^{s_\alpha(\lambda)}(1 + \cdots + x^{(\ell-1)\alpha})$$

$x^{\ell\alpha}$ までいかないので $x^{s_\alpha(\lambda)} \cdot x^{(\ell-1)\alpha} \lneq x^\lambda$.

$$= t^{\frac{1}{2}} x^\lambda + \text{lower order}.$$ //

- ⟨α, λ⟩ = −ℓ ≤ 0 のときは　まず ⟨α, λ⟩ = 0 なら;

$$R(\alpha)x^\lambda = t^{-\frac{1}{2}} x^\lambda$$



⟨α, λ⟩ < 0 でも, 左図より さっきの計算と同様にして

$$R(\alpha)x^\lambda = t^{-\frac{1}{2}} x^\lambda + \text{lower order terms}.$$ //

- 一般の $Y_k = \prod R(\alpha) \cdots \tau_k \prod R(\alpha)^{-1}$ の形.

→ $Y_k x^\lambda = q^{\lambda_k} t^{\langle \varepsilon_k, \rho(\lambda)\rangle} x^\lambda + \cdots$ となる. //

定理

∃! $\{E_\lambda(x)\}_{\lambda \in P}$: $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ の基底 s.t.

(1) $E_\lambda(x) = x^\lambda + \sum_{\mu < \lambda} v_{\lambda\mu} x^\mu$

(2) $\forall f(y) \in \mathbb{K}[y^{\pm 1}]$, $f(Y)E_\lambda(x) = E_\lambda(x) \cdot f(q^\lambda t^{\rho(\lambda)})$.

- この $E_\lambda(x)$ を non-symmetric Macdonald polynomials と呼ぶ.

[Opdamは, 元々は 彼の"shift operator"との関係で導入した.]

◎ Macdonald 多項式との関係。

E_λ を orbit で足すと P_λ.

$\lambda \in P^+$ とすると

$$P_\lambda = \sum_{\mu \in W\cdot\lambda} a_{\lambda\mu} E_\mu(x) \qquad : a_{\lambda\lambda} = 1$$

Fact ◎ 実は

$$P_\lambda(x) = \mathrm{const}\cdot \underbrace{\sum_{w\in W} t^{\frac{\ell(w)}{2}} T_w}_{\text{"symmetrizer"}} E_\lambda(x) \qquad : \lambda \in P^+$$

でできてしまう。これより $a_{\lambda\mu} = \displaystyle\prod_{\substack{\alpha\in\Delta^+ \\ \langle\alpha,\mu\rangle<0}} \frac{1-q^{\langle\alpha,\mu\rangle} t^{\langle\alpha,\rho(\mu)\rangle-1}}{1-q^{\langle\alpha,\mu\rangle} t^{\langle\alpha,\rho(\mu)\rangle}}$.

となる.

↑

∵
$$\begin{cases} T_i E_\mu(x) = t^{\frac{1}{2}} E_\mu & : (\alpha_i, \mu) = 0 \text{ i.e } s_i(\mu) = \mu \text{ のとき.} \\ T_i E_\mu(x) = a_{i,\mu} E_\mu(x) + b_{i,\mu} E_{s_i\mu}(x) & : \text{o.w.} \end{cases}$$

i.e. T_i で 2次元表現ができる。
ホトンドキヤク.

→ 各 $\lambda \in P_+$ に対して $H(W)$-module

$$V(\lambda) = \bigoplus_{\mu\in W\lambda} \mathbb{K} E_\mu(x)$$ ができる.（既約）.

として

$$\mathbb{K}[x^{\pm1}] = \bigoplus_{\lambda\in P^+} V(\lambda), \qquad : \mathbb{K}[x^{\pm1}] \text{ を } \{T_i\} \text{ で分解しまとめました.}$$

$$\mathbb{K}[x^{\pm1}]^{H(W)} := \left\{ f(x) \in \mathbb{K}[x^{\pm1}] \;\middle|\; \begin{matrix} (T_i - t^{\frac{1}{2}}) f(x) = 0 \\ 1 \le i \le n-1 \end{matrix} \right\}$$

これは $= \mathbb{K}[x^{\pm1}]^W$ と言って同じ。

[∵ $(T_i - t^{\frac{1}{2}}) f = c(x^{\alpha_i}) (s_i - 1) f = 0 \Rightarrow f : \text{sym.}$]

∴

$$\mathbb{K}[x^{\pm1}]^{H(W)} = \bigoplus_{\lambda\in P^+} \underline{V(\lambda)^{H(W)}},$$

⟶ これが P_λ で張られる.

$$V(\lambda)^{H(W)} = \mathbb{K}\cdot P_\lambda(x) \qquad : \lambda\in P_+.$$

すなわち

… $H(\tilde{W})$-module $\mathbb{K}[x^{\pm1}]$ の,

pair $(H(\tilde{W}), H(W))$ に関する "spherical function" が P_λ.

- E_λ について $\left\{\begin{array}{l}\text{Cauchy Lemma の拡張} \\ \text{積分表示}\end{array}\right.$ etc. も判っている.

—o—

- レポート期限: <u>6月末</u>

質問などは noumi@math.s.kobe-u.ac.jp. に

// 17:30.

コーギおしま..

おまけ

◎ ~~[illegible]~~ anti-symmetrized version.

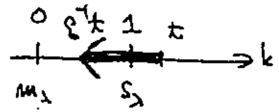
$$U^- = \sum_{w} (-t^{\frac{1}{2}})^{\ell(w)} T_w$$

$$Q_\lambda := \text{const} \cdot U^- E_\lambda = E_\lambda + \cdots$$

$$= \delta_\lambda \cdot \boxed{}$$ わける (anti-sym fc!)

実は，わると P_λ になっている．
ただし，t がかわる．「q倍にずらすなよ」

「t がshiftする」

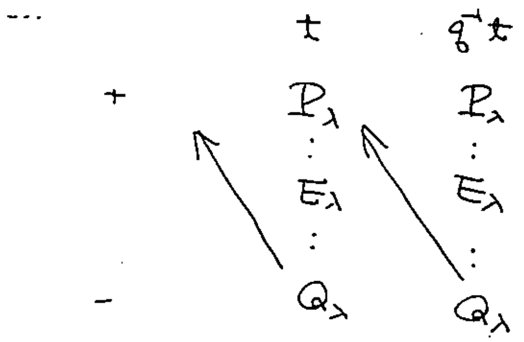


これがOpdamの shift operator.

定理 $\lambda \in P^+$

$$P_\lambda(x;q,t) = \frac{Q_{\lambda+\delta}(x;q,q^{-1}t)}{\delta(x;q^{-1}t)}$$

$$\delta(x,t) = x^\delta \prod_{i<j}\left(1 - t^{-1}\frac{x_j}{x_i}\right)$$



ref Macdonald の
Bourbaki seminar
そこには outline だけ示されて
いるが 全て正当化できる．

こういうことを用いると内積をもカンタンに求まるのへ
式をちゃんと用意しないといけない．それが§4.

◎ Cherednikの intertwining op.

$$Y^{\mu} \longrightarrow Y^{s_i \mu} \qquad H(\tilde{W})\text{のrepのとりかえ}$$

$\updownarrow$

のdualityをとりかえる. → 伴う E_λ

実はそれだけでなく，shiftもつくれて

それにより 1から次々とeigenfcを得られる。

// 17:47.

see also :

M. Noumi, "affine Hecke algebras and Macdonald polynomials."

の Th.4　（IIAS のProc と同じ原稿）.

※このあと18:08のバスで志甫さん（昔野海さんが駒場で1年の線型代数を教えた）の歓迎会に野海さん共になだれこみ，野海さんは2次会@田んぼやでツブレてしまった．どうも御苦労様‼（はじめは田もやるとか言っていたのだが…）

13:00−14:45.

野海　Macdonald多項式のq-差分昇降演算子について　@代数セミナー

A.N. Kirillov − M.N　　q-alg / http://www.math.s.kobe-u.ac.jp/HOME/noumi.

[1] Affine Hecke algebras and raising operators for Macdonald polynomials, to appear in Duke.

これだけわかると H^{aff} なしでもできると判た → [2] q−Difference raising operators for Macdonald polynomials and integrality of transition coefficients, to appear in the Proc. of a CRM workshop (1996)

- Macdonald対称多項式の昇降演算子, 昨年の永友さんの短期共同のRIMS講究録

§

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q,t), \quad \mathbb{K}[x] = \mathbb{K}[x_1,\cdots,x_n], \quad W = \mathfrak{S}_n$$

$$\mathbb{K}[x]^W = \bigoplus_{\lambda\in L^+} \mathbb{K}\, m_\lambda(x) \quad : m_\lambda(x) = \sum_{\mu\in W\lambda} x^\mu \qquad x^\mu = x_1^{\mu_1}\cdots x_n^{\mu_n}$$

monomial sym. fc.

$$= \bigoplus_{\lambda\in L^+} \mathbb{K}\, s_\lambda(x) \quad : s_\lambda(x) = \frac{1}{\Delta(x)}\det\left[x_j^{\lambda_i+\delta_i}\right]$$

$$\Delta(x) = \prod_{i<j}(x_i - x_j), \quad \delta_i = n - i.$$

$$\left(\!\left(\lambda = \begin{array}{|c|}\hline \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \hline\end{array} \in L^+ := \{\lambda = (\lambda_i) \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0\}. \right)\!\right)$$

⦿ Macdonald多項式. $\{P_\lambda(x)\}_{\lambda\in L^+}$

$$\mathbb{K}[x]^W = \bigoplus_{\lambda\in L^+} \mathbb{K} P_\lambda(x) \quad : \mathbb{K}\text{-basis}, \quad P_\lambda(x) = P_\lambda(x;q,t)$$

$$\begin{cases} t = 1 \cdots P_\lambda \to m_\lambda \\ t = q \cdots P_\lambda \to s_\lambda \\ t = q^k,\ q\to 1 \cdots P_\lambda \longrightarrow \text{Jack polynomial.} \Leftrightarrow \text{Heckman-Opdam, Calogero-Sutherland} \\ q\to 0 \cdots P_\lambda \longrightarrow \text{Hall-Littlewood polynomial.} \end{cases}$$

- Jack poly.に対しては, '94~'95頃 Vinet + la Pointe(?) が昇降演算子を構成した。その結果係数の整数性の予想 ((Stanley, Macdonald)) が証明される
それを"qのとき"であるMacdonaldにも拡張しようというのが目標.

③ Macdonald の q 差分作用素

$$(T_{q,x_i}f)(x_1,\cdots,x_n) := f(x_1,\cdots,qx_i,\cdots,x_n) \quad \leftrightarrow q^{x_i\frac{\partial}{\partial x_i}} \quad 1\le i\le n$$

q-shift operator. $T_{q,x}x^n = q^n x^n$ $\quad T^I_{q,x} := \prod_{i\in I} T_{q,i}$

- 可換族 $D_0 = 1,\ D_1,\ \cdots,\ D_n = t^{\binom{n}{2}} T_{q,x_1}\cdots T_{q,x_n}$,

$$[D_i, D_j] = 0, \quad D_i : \mathbb{K}[x]^W \longrightarrow \mathbb{K}[x]^W$$

が、母函数

$$D_x(u) = \sum_{r=0}^{n}(-u)^r D_r = \sum_{I\subset\{1,\cdots,n\}} (-u)^{|I|} t^{\binom{|I|}{2}} \prod_{\substack{i\in I\\ j\notin I}} \frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}\, T^I_{q\,x}$$

で定まる.

これは $= \dfrac{1}{\Delta(x)} \displaystyle\sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, w\cdot\left(x_1^{\delta_1}\cdots x_n^{\delta_n}\prod_{i=1}^{n}(1-ut^{\delta_i}T_{q,x_i})\right)$

とも書ける.

定理 (Macdonald) $\exists!\ \{P_\lambda(x)\}_{\lambda\in L^+}$: $\mathbb{K}[x]^W$ の $\mathbb{K}$-基底 s.t.

(1) $\quad P_\lambda(x) = m_\lambda(x) + \sum_{\mu<\lambda} u_{\lambda\mu} m_\mu(x)$,

特に P_λ : 同次 homogeneous. ↑ dominance ordering : $-\mu+\lambda\in Q^+$

(2) $\quad D_x(u)P_\lambda(x) = P_\lambda(u)\, d_\lambda(u)$

$$d_\lambda(u) := (1-uq^{\lambda_1}t^{\delta_1})\cdots(1-uq^{\lambda_n}t^{\delta}$$

… これは、$D_x(u)$ の三角性 あるいは Gram-Schmidt 直交化で示せる。いずれにせよ係数の割算をするので、一般に $u_{\lambda\mu}\in\mathbb{K}=\mathbb{Q}(q,t)$.

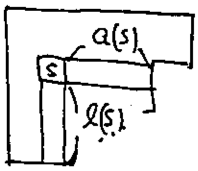
- この $u_{\lambda\mu}$ もだが、組合せ論的には

$$\cdot\ S_\lambda(x) = \sum_\mu K_{\lambda\mu}\, m_\mu(x) \qquad K_{\lambda\mu} : \text{Kostka coef.}$$

$$\cdot\ (\text{Hall-Littlewood}) = \sum K_{\lambda\mu}(t)\cdot m_\mu \qquad K_{\lambda\mu}(t) \xrightarrow{t\to 0} K_{\lambda\mu}$$

も面白い. $K_{\lambda\mu}(t)$ については、Young tableau の数え上げによる '公式' or Lusztig による ~~p-adic~~ flag 上の cohomology 環の Poincaré series としての解釈があって,⊛ t の多項式としての係数が positive (integer) であることがわかっている

⊛ Kazhdan-Lusztig
(!)

$L^+ \ni \lambda =$ 

a(s) : 腕長　l(s) : 脚長

$\longmapsto c_\lambda := \prod_{s\in\lambda}\left(1-q^{a(s)}t^{l(s)+1}\right)$

Jackのときは→
Knop-Sahi,
~'96ごろ.

定理 (Macdonaldの整数性予想)

$J_\lambda(x) := c_\lambda P_\lambda(x)$ $(\lambda \in L^+)$ とおくと, $J_\lambda(x) \in \mathbb{Z}[q,t][x]^W$.

即ち, $J_\lambda(x)$は $m_\mu(x)$ $(\mu \leq \lambda)$ の $\mathbb{Z}[q,t]$係数の1次結合.

- (q,t) − Kostka係数.

$\{S_\lambda(x,t)\}_{\lambda\in L^+}$ を $\prod_{i,j=1}^{n}\frac{1-tx_iy_j}{1-x_iy_j} = \sum_{\lambda\in L^+} S_\lambda(x;t)\underbrace{S_\lambda(y)}_{\text{ふつうのSchur}}$ で

def("Schurのbig S" [Kirillov])

$\rightarrow$ $S_\lambda(x,t) = \sum_\mu \underbrace{K_{\lambda\mu}(q,t)}\, J_\mu(x;q,t)$

↑ (q,t)−Kostka係数 とよぶ.
<これには三角性なし>

$J_\lambda(x;q,t) = \sum_{\mu\leq\lambda} \underbrace{v_{\lambda\mu}(q,t)}_{\in \mathbb{Z}[q,t]}\, m_\mu(x)$　: 上の定理

Jackのときは, $J_\lambda(x)$の係数は正整数であった((?)).

(q,t)のときは,

定理 (整数性予想) $K_{\lambda\mu}(q,t) \in \underline{\mathbb{Z}[q,t]}$

(正値性予想): 実は 〃 $\in \mathbb{N}[q,t]$ であろう.

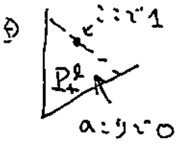
↑ 整数性予想の証明は M.先生が本を出した時はまだ(A_n以外)できなかった.

今は
- Kirillov-Noumi　昇降演算子 ⟶ $\boxed{\text{次節.}}$
- Knop-Sahi　補間多項式.⊛
- Garsia-Tesler　組合せ論.

(および
- 中島啓　ある Hilbert scheme 上の K群に実現, 幾何的))

の証明がある.

↑
「そのうちこれもできるかな」といって書いた。

⊛ 

となるpoly. 取れる.

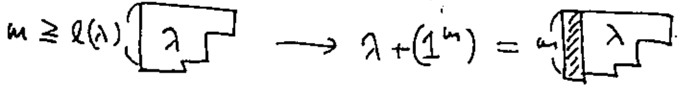
◎ 別型の昇(降)演算子. B_m

$m=0,1,\dots,n$

- $B_m : \mathbb{K}[x]^W \longrightarrow \mathbb{K}[x]^W$: $\mathbb{K}$-linear, s.t.

(※) $$B_m J_\lambda(x) = J_{\lambda+(1^m)}(x) \quad \text{for } \ell(\lambda)\le m$$

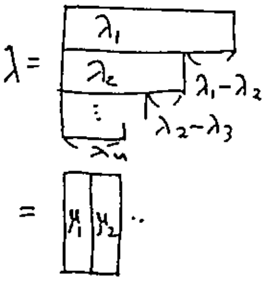
がある. $(1^m) = (\overset{m}{\overbrace{1,\dots,1}},0,\dots,0) =$;



$$\Rightarrow J_\phi = 1 \xrightarrow{B_1} J_{\square} \xrightarrow{B_2} J_{\boxplus} \xrightarrow{B_2} J_{\boxplus\boxplus} \longrightarrow \cdots$$

∵ 上の作用素があれば, $\forall\lambda\in L^+$に対して

$$J_\lambda(x) = B_n^{\lambda_n}\cdots B_2^{\lambda_2-\lambda_3} B_1^{\lambda_1-\lambda_2}(1)$$
$$= B_{\mu_1}B_{\mu_2}\cdots B_{\mu_s}(1) \quad : \mu=\lambda' \text{(転置)}$$



⇝ B_mが係数の整数性を保つことがわかれば, これより $J_\lambda(x)$の係数の整数性もわかる.
しかし B_m の条件(※)は $\ell(\lambda)\le m$ なる λ に対してのものなので「弱い」, このような B_m はいろいろありうる. 次のものをとるとうまくいく というのが Kirillov-Noumi :

$$B_m = \sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,n\}\\ |J|=m}} \underbrace{x_J}_{\text{〈かけ算部分〉}} \underbrace{\sum_{I\subset J}\left(-t^{\overset{\boxed{注①}}{\overline{m-n+1}}}\right)^{|I|} t^{\binom{|I|}{2}} \cdot \prod_{\substack{i\in I\\ j\in\{1,\dots,n\}\setminus I}} \frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}\cdot T_{q,x}^{I}}_{\text{〈Euler op. 的部分〉}}$$

($x_J := \prod_{j\in J} x_j$)

$D \leftrightarrow x\partial_x$: Euler op.
上昇 $\leftrightarrow x(x\partial_x)$
下降 $\leftrightarrow x^{-1}\cdot(x\partial_x)$

[(降)の方はかかないが
$x_J \to x_J^{-1}$
$(-t)^{-} \to$ 少し変える.]

rem

❀ $J_{(1^m)} = \text{Const}\cdot e_m(x)$, このとき $J_{(1^m)} = B_m\cdot 1$ になってほしいが; そのときは "Euler op 的部分" が単に scalar となり, たしかにOK.

❀ Macdonald も一種の超幾何 (cf. Heckman-Opdam) しかし青本-Gelfand の時 Lie 環的に昇降できたのと異り, 可換性を保たないといけないのがハンザツ。

- B_m の別の表示:

基本対称式.

$$B_m = \frac{1}{\Delta(x)} \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, w \cdot \left(x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n}\, e_m\left(X_1^{(m)}, \dots, X_m^{(m)}\right) \right)$$

$$X_i^{(m)} = x_i\left(1 - t^{m-i+1} T_{q,x_i}\right)$$

$$\xrightarrow[q \to 1]{t = q^k} \frac{1}{\Delta(x)} \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, w \cdot (\text{上と同じ}), \quad \text{但}$$

$$X_i^{(m)} = x_i\left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + k(m-i+1)\right).$$

(Jack limit:) [illegible] Lapoint-Vinet の [illegible]. これは Dunkl op. を用いる.

注 B_m : W-不変 (∵ $x_1, \dots, x_n$ の順序づけによらない. (!))

$$: \mathbb{Z}[q, t^{\pm 1}][x]^W \longrightarrow \mathbb{Z}[q, t^{\pm 1}][x]^W$$

↳ しかし t の正巾の元の部分ではとじない. $\boxed{\text{左頁}}$
q の方は正巾の元でとじる. ここは, ∞変数にもっていって $q \leftrightarrow t$ duality で

→

$$\Delta(x) B_m = C_n \in \mathbb{Z}[q, t^{\pm 1}][x; T_{q,x}]$$

$$\frac{1}{\delta(x)} \underbrace{C_m f}_{\cap} \quad [q, t^{\pm 1}][x]^{W.\mathrm{sgn}}.$$

∵ $f \in \mathbb{Z}[q, t^{\pm 1}][x]^W \Longrightarrow B_m f \in \mathbb{Z}[q, t^{\pm 1}][x]^W$.

注 B_m は Cherednik ver の q Dunkl op. をもとにして 微調整してつくった. [1]

$\overline{Y}_j$: q-Dunkl (集中で今日やる, normalization が少しずつ違うといけないので ‾ とかく)

$$\widetilde{B}_m := \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq n} x_{j_1} \cdots x_{j_m} \left(1 - t^m \overline{Y}_{j_1}\right) \cdot \left(1 - t^{m-1} \overline{Y}_{j_2}\right) \cdots \left(1 - t\, \overline{Y}_{j_m}\right)$$

$$\Rightarrow \widetilde{B}_m \big|_{\text{sym fcns}} \underset{\uparrow}{=} B_m.$$

この計算もかなり大変.

・今は, $\widetilde{B}_m$ なしで B_m の元の話をしている [2].

定理 B_m は $\mathbb{Z}[q, t^{\pm 1}][x]^W$ に作用し、

(*) $\quad B_m J_\lambda(x) = J_{\lambda+(1^m)}(x) [\times 1]^{①} \quad (\ell(\lambda) \leq m)$

sketch of pf.

$x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_m)$

① **補題** $(*) \Leftrightarrow B_{m,x} \Pi(x,y) = \frac{1}{y_1 \cdots y_m} D_y(1) \Pi(x,y)$

$(a.q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty}(1-aq^i)$

但 $$\Pi(x,y) := \prod_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} \frac{(t x_i y_j ; q)_\infty}{(x_i y_j ; q)_\infty} \xrightarrow[q \to 1]{t = q^k} \prod_{i,j} (1-x_i y_j)^{-k}$$

$$= \sum_{\ell(\lambda) \leq m} b_\lambda P_\lambda(x) P_\lambda(y)$$

$$D_y(1) P_\lambda(y) = \begin{cases} \text{Const} \cdot P_\lambda(y) & \ell(\lambda) = m \\ 0 & \ell(\lambda) < m \end{cases}$$

これに $\frac{1}{y_1 \cdots y_m}$ がついているので ① の式の右辺は y について

降演算子. $\overset{\text{dual}}{\longleftrightarrow}$ $B_{m,x}$ は昇演算子となる.

<Π は再生核>

② $$\underbrace{B_{m,x} \Pi(x,y)}_{\shortparallel} = \frac{1}{y_1 \cdots y_m} \underbrace{D_y(1) \Pi(x,y)}_{\shortparallel}$$ を示す.

<Π は q-shift で ratl fc 倍になる>

$\begin{pmatrix} x, y \text{ の} \\ \text{ratl fc} \end{pmatrix} \cdot \Pi(x,y) \qquad \begin{pmatrix} x, y \text{ の} \\ \text{ratl fc} \end{pmatrix} \cdot \Pi(x,y)$

これを書くと

(q を含まない式) = (q を含まない式).

③ そこで、$q = t$ のとき [Schur case] に示せばよいが、全て同値できているので、そのとき B_m が昇演算子になっていることを check すればよい。

㋐ それは

$$\overset{\circ}{B}_m S_\lambda(x) = S_{\lambda+(1^m)}(x)\underbrace{\prod_{i=1}^{m}\left(1-t^{\lambda_i+m-i+1}\right)}_{\text{Const. がつく.}}$$

$y=t$

を示すことになる。ここで $\overset{\circ}{J}_\lambda(x) = \overset{\circ}{c}_\lambda\cdot S_\lambda(x)$ （（unnormalization のため～ ））なので右辺に Const がつく.

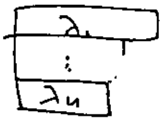
// 14:40.

〈おわってからのおはなし〉

- Hall-Littlewood のときは

KP times の変数でかいていく. →

$$Q_\lambda = B_{\lambda_1}\cdots B_{\lambda_s}(1)$$

$\lambda =$ 

↖ Jing の vertex op. [の係数をとりだして作る]

今の（この話の）B_m は この dual version.

（（ $\lambda =$  とみる ））

[⟷ KP times の変数のとりかえ]

- row をふやす operators も作れることは作れる.

abstract に存在することはわかり, ~~Dual~~ のフクザツな和. しかしそれはカンタンにはなりそうにない. 「KPの変数のとりかえ」のはずだが単純ではない.

- Awata流とは全く approach がちがう.

↑

W-alg の singular vect. これは

~~λ一般には難しく~~, $\lambda = \boxed{\text{長方}}$ のときがベースになる //

λ一般ではそれの積み重ね. 14:45.

野海　多変数 Askey-Wilson 多項式

AM 10:50-

= Tom H. Koornwinder, 1992 [Contemp. Math. 138, pp189-204] による.
van Diejen さんなどは Koornwinder poly. と呼んでるが, 人名がどんどん入ってくる…

- <u>1変数 Askey-Wilson</u> [1985, AMS memoir]

$$x = \frac{z+z^{-1}}{2}, \quad a, b. c d : 4 \text{ parameters } (q \text{ 以外に } 4つ)$$

#param.

$$p_\ell(x) = a^{-\ell}\cdot(ab, ac, ad; q)_\ell \cdot {}_4\varphi_3\left(\begin{matrix} q^{-\ell}, abcdq^{\ell-1}, az, az^{-1} \\ ab, ac, ad \end{matrix}; q, q\right)$$

④ : q だと Jacobi も出し. まとめる master family.

$$= 2^n (abcdq^{\ell-1}; q)_\ell x^\ell + \cdots \quad : x \text{ の polynomial.}$$

・実は a,b,c,d について対称.

② : $\xrightarrow{q\to 1}$ $p_\ell^{(\alpha,\beta)}(x)$: Jacobi poly. [$(1+x)^\alpha(1-x)^\beta$ で直交]

$\alpha=\beta$ ↓

① : $p_\ell^{(\alpha,\alpha)}(x)$: Gegenbauer (ultraspherical)

⇔ Jack / Macdonald fn A_1

$$\cdots \quad \begin{array}{ccc} & AW & \\ \cup & & \cup \\ A_1 & & BC_1 \end{array} \quad \overset{これを}{\rightsquigarrow} \quad \begin{array}{ccc} & \text{multivar. } AW & \\ \cup & & \cup \\ A_n & & BC_n \end{array}$$

に拡張しようというのが動機.

- <u>多変数 Askey-Wilson</u>

$$\mathbb{K}[x^{\pm1}] = \mathbb{K}[x_1^{\pm1}, \cdots, x_n^{\pm1}]$$

$$W = \underset{x_i \leftrightarrow x_i^{-1}}{\{\pm1\}^n} \rtimes \mathfrak{S}_n = W(B_n) = W(C_n) = W(BC_n)$$

$$P := \mathbb{Z}\varepsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\varepsilon_n, \quad Q := \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i$$

但し
$$\begin{cases} (C_n) & \alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \cdots, \alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \quad \alpha_n = 2\varepsilon_n \\ (B_n) & \quad '' \qquad \cdots \qquad '' \qquad, \alpha_n = \varepsilon_n. \end{cases}$$

$$\Delta^+ := \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \, (i<j)\} \cup \{\pm\varepsilon_j, \pm 2\varepsilon_j\}$$
$$= \Delta^+(B_n) \cup \Delta^+(C_n).$$

$$\left.\begin{array}{l} Q = Q(B_n) \cancel{\supsetneq Q(C_n)} = P \\ Q^\vee = Q^\vee(C_n) \cancel{\supsetneq Q(B_n)} = P \end{array}\right\} \quad P = \left\{\begin{array}{l} \lambda \in \mathfrak{t}^*; \\ \langle\alpha^\vee, \lambda\rangle \in \mathbb{Z} \; (\forall \alpha^\vee \in Q^\vee) \end{array}\right\}$$

∴ ⇒ diagram aut なし.　　$= P(C_n)$.

$$P^+ = \{\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \mid \lambda_1 \geqq \cdots \geqq \lambda_n \geqq 0\}$$

dominance order :

$$\mu \leqslant \lambda :\Longleftrightarrow \begin{cases} \mu_1 \leqslant \lambda_1 \\ \mu_1+\mu_2 \leqslant \lambda_1+\lambda_2 \\ \vdots \\ \mu_1+\cdots+\mu_n \leqslant \lambda_1+\cdots+\lambda_n \end{cases}$$

これは

$$\begin{cases} \omega_1 = \varepsilon_1,\ \omega_2 = \varepsilon_1+\varepsilon_2, \cdots, \omega_{n-1} = \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n-1} \\ \omega_n = \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n \end{cases}$$

として ($\langle \omega_i, \lambda \rangle \geqq 0$))

$$\mu \leqslant \lambda \Longleftrightarrow \lambda - \mu \in \sum_{i=1}^{n} \mathbb{N}\alpha_i^\vee \ \left(= \overset{+}{Q}(B_n)\right)$$

ということ $\qquad \uparrow \ \langle \alpha_i^\vee, \omega_j \rangle = \delta_{ij}$.

---

⑤ difference operator. A_nのときと違い、全てmultiplicativeで行く.

a, b, c, d, t : params.

v.D.は a,b,c,d [redacted] を a_1, a_2, a_3, a_4 と書いている.

$$D = \sum_{k=1}^{n} A_k(x)(\tau_k - 1) + \sum_{k=1}^{n} A_k(x^{-1})(\tau_k^{-1} - 1),$$

$$A_k(x) := \underbrace{\frac{(1-ax_k)(1-bx_k)(1-cx_k)(1-dx_k)}{(1-x_k^2)(1-qx_k^2)}}\prod_{j\neq k}\frac{(tx_k-x_j)(1-tx_kx_j)}{(x_k-x_j)(1-x_kx_j)}$$

$n \geqq 2$

$c = q^{\frac{1}{2}}x_k$
$d = -q^{\frac{1}{2}}x_k$
$b = -a$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow b=-1$$

$$\frac{1-a^2x_k^2}{1-x_k^2} \qquad\qquad \frac{1-qx_k}{1-x_k}$$

C型 $\qquad$ B型

Macdonald流 :

root系 の pair に対して定義されているところ
(Weyl群は同じ) 「orthogonal poly's ass. with root system

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{has reduced}}}{(R} , \underset{\substack{\uparrow \\ \supset\ \text{reduced}}}{S)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} (BC_n, B_n) \\ (BC_n, C_n) \end{array} \right.$$

→ t の a q との scaling できまる.

定理 (Koornwinder)

$\exists ! \{P_\lambda(x)\}_{\lambda\in P^+}$: $\mathbb{K}$-basis of $\mathbb{K}[x^{\pm1}]^W$

(1) $P_\lambda(x) = m_\lambda(x) + \sum_{\mu<\lambda} u_{\lambda\mu} m_\mu(x)$ (m_λ : orbitsum)

(2) $DP_\lambda(x) = P_\lambda(x)\, d_\lambda$,

$$d_\lambda = \sum_{k=1}^{n} \left\{ abcd\, q^{-1} t^{2n-k-1}(q^{\lambda_k}-1) + t^{k-1}(q^{-\lambda_k}-1) \right\}$$

- B_n/C_n のときは homogeneity はない…

$$\left\{\begin{array}{l} m_{\square}(x) = \underbrace{x_1+\cdots+x_n}_{\text{ここだけみると A型と同じ}} + x_1^{-1}+\cdots+x_n^{-1} \\ \vdots \\ m_{k\,\boxed{\vdots}}(x) = \displaystyle\sum_{\substack{1\le j_1<\cdots<j_k\le n \\ \varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=\pm1}} x_{j_1}^{\varepsilon_1}\cdots x_{j_k}^{\varepsilon_k} = \underbrace{x_1\cdots x_k}_{} + \cdots + x_1^{-1}\cdots x_k^{-1} \\ \qquad\qquad = e_k(x)+\cdots+e_k(x^{-1}), \end{array}\right.$$

$\boxed{Q}$ P_λ の deg. $|\lambda|$ homogeneous 成分は A型 (Macdonald) の P_λ と一致している (?)

$x_k \to t^k x_k$
$t\to 0$
?

② 直交性 $w(x) = w^+(x)\, w^-(x)$,

$$w^+(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{(x_k^2;q)_\infty}{(ax_k, bx_k, cx_k, dx_k;q)_\infty} \cdot \prod_{i<j} \frac{(\frac{x_i}{x_j}, x_ix_j;q)_\infty}{(t\frac{x_i}{x_j}, tx_ix_j;q)_\infty}$$

a, b, c, d, t を
全て $|\cdot|<1$ にすれば
torus上で w : 正値,
$\langle\, ,\rangle = \int$.

$$\left[\begin{array}{l} (x^2;q)_\infty = (1-x^2)(1-q^2x^2)\cdots \\ \qquad\qquad \times(1-qx^2)(1-q^3x^2)\cdots \\ \qquad = (1-x)(1-qx)\cdots \times(1+x)(1+qx)\cdots \\ \qquad\qquad \times(1-q^{\frac12}x)(1-q^{\frac32}x)\cdots\times(1+q^{\frac12}x)(1+q^{\frac32}x)\cdots \\ \qquad = (x, -x, q^{\frac12}x, -q^{\frac12}x;q)_\infty . \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{T_{q,x_1}w^+(x)}{w^+(x)} = A_1(x). \quad D_x\varphi = \frac{1}{|W_{\varepsilon_1}|}\sum_{v\in W} v\left[\frac{T_{q,x_1}w^+(x)}{w^+(x)}(T_1-1)\varphi\right]$$

である。

No. 4

Date

◎ q差分作用素の可換族の存在 : [J.F. van Diejen]

$$D_X = \underset{\leftrightarrow \omega_1}{\underline{D_1}}, \dots, \underset{\leftrightarrow \omega_n}{\underline{D_n}}$$

$$P^+ = \mathbb{N}\omega_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{N}\omega_n$$

$$\omega_k = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k \; (= \Lambda_k)$$

だれもたしかめてない…?
→ 今は q-Dunkl op. で
使えばできる.
((Cherednik))
しかし両方の関係 (generatorのいみ) はよくわからない.
[固有値でみて推察できる.

- Affine Hecke 環の approach

⊕ 1972 "affine root systems and Dedekind eta function" Inv. Math.

Macdonald : $\underline{CC^\vee}$ ⊕ non-reduced affine root system.

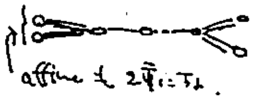
$n \geq 2 \Rightarrow CC^\vee_n$ に 5つの orbit がある. ⟷ a, b, c, d, t.
" Grand father ".

[1994, Amsterdam / Leiden で M先生は講義でおっしゃっている. 書いてない.]

要するに下の話と同じ.

root系.

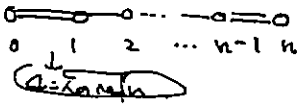
$CC^\vee$ は



affine も 2重につく.

$C_n)$ $\alpha_0 = \delta - 2\varepsilon_1$ $(2\varepsilon_1 = \text{hist root})$ → extended Dynkin diag

$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \alpha_n = 2\varepsilon_n.$



$$\tilde{W} = P \rtimes W = \langle s_0, s_1, \dots, s_n \rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W]$$

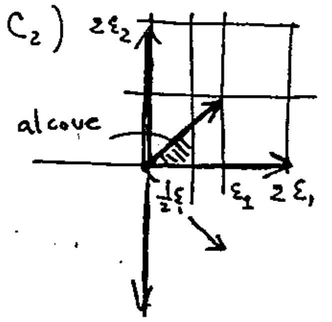
$$s_0 = s_{2\varepsilon_1} \tau_1$$

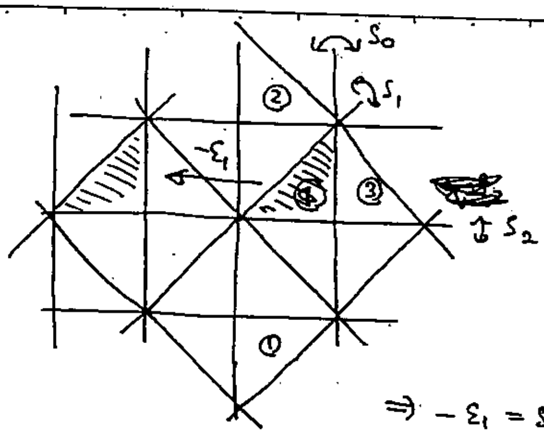
$$\rightsquigarrow H(\tilde{W}) = \mathbb{K}\langle T_0, T_1, \dots, T_n \rangle.$$

: parameters $t_0, t_1 = \dots = t_{n-1}, t_n$
$\quad\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$
$\alpha_0 \quad \underbrace{\alpha_1 \; \dots \; \alpha_{n-1}}_{W\text{-orbit}} \quad \alpha_n$

として, relationは

$$\begin{cases} (T_i - t_i^{\frac{1}{2}})(T_i + t_i^{-\frac{1}{2}}) = 0 & : i = 0, 1, \dots, n \\ T_0 T_1 T_0 T_1 = T_1 T_0 T_1 T_0 & \\ T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} & : i = 1, \dots, n-2 \\ T_{n-1} T_n T_{n-1} T_n = T_n T_{n-1} T_n T_{n-1} & \\ T_i T_j = T_j T_i & \text{for } |i-j| \geq 2. \end{cases}$$



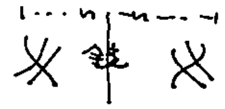


$\Rightarrow -\varepsilon_1 = s_1 s_2 s_1 s_0.$

"☺" $\tau_1, \cdots, \tau_n$ （$\leftrightarrow -\varepsilon_1, \cdots, -\varepsilon_n$ の平行移動）は
$\leftrightarrow Y_1, \cdots, Y_n$

$\omega: q^{-1}x_1 \mid \to x_n \to \cdots \to x_2 \to x_1 \mid \to qx_1 \to \cdots$
-1階 → 0階 → 1階
とあがってゆく.
・$x_1, \cdots, x_n$ への効果は
$x_1 \to qx_1^{-1} \to \cdots \to qx_n^{-1} \to qx_n$
∵ $s_n \cdots s_0$ も全く同じ.

ヒモで書くには



$$\begin{cases} \tau_1 = s_1 s_2 \overset{?}{\cdots} \underline{s_n s_{n-1} \cdots s_1 s_0} = \omega \text{ in type A.} ⊛ \\ \tau_2 = s_2 \cdots \underline{s_n s_{n-1} \cdots s_1 s_0}\, s_1 \\ \vdots \\ \tau_n = \underline{s_n s_{n-1} \cdots s_1 s_0}\, s_1 \cdots s_{n-1}. \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} Y_1 = T_1 \cdots \underline{T_n T_{n-1} \cdots T_0}\ , \\ Y_2 = T_2 \cdots \underline{T_n T_{n-1} \cdots T_0}\, T_1^{-1} \\ \vdots \\ Y_n = \underline{T_n \cdots T_0}\, T_1^{-1} \cdots T_{n-1}^{-1}. \end{cases} \to Y_1^{-1} Y_2 Y_1 = \underbrace{T_{\tau^1}^{-1}}_{Y_1^{-1}} T_{\tau^1 \tau^2}$$

(注) ⊛により,

$$H(\tilde{W}(A_n)) \xrightarrow{\exists\,\text{alg hom}} H(\hat{W}(C_n))$$

$$\text{by} \begin{cases} T_i \longmapsto T_i & (1 \leq i \leq n-1) \\ \omega \longmapsto T_n \cdots T_0 \end{cases}$$

∵"[illegible]"がくさても.

交換関係

$$H(\tilde{W}) = \mathbb{K}\langle T_0, \cdots, T_n\rangle = \mathbb{K}\langle Y_1^{\pm 1}, \cdots, Y_n^{\pm 1}, T_1, \cdots, T_n\rangle$$
$$= \mathbb{K}[Y^{\pm 1}] \otimes H(W).$$

→☺ Y_i と T_j の関係を書けばよい.

$\{a\} = \dfrac{a - a^{-1}}{q - q^{-1}}$
にたいして
$\langle a\rangle := a - a^{-1}$
ソロバン

$$\cdots \begin{cases} T_i Y_{i+1} T_i = Y_i & (i = 1, \cdots, n-1) \\ T_i Y_j = Y_j T_i & (i = 1, \cdots, n-1,\ j \neq i, i+1) \\ T_n Y_j = Y_j T_n & (j = 1, \cdots, n-1) \\ T_n Y_n^{-1} = Y_n T_n^{-1} - \langle t_0^{\frac{1}{2}}\rangle = Y_n T_n - \left(\langle t_0^{\frac{1}{2}}\rangle + \langle t_n^{\frac{1}{2}}\rangle Y_n\right). \end{cases}$$

(∵)

$$T_n Y_n^{-1} = T_n(T_{n-1}\cdots T_1 T_0^{-1} T_1^{-1}\cdots T_n^{-1})$$

T_0^{-1} にかける $\Rightarrow T_0^{-1} = T_0 - \langle t_0^{\frac{1}{2}}\rangle$, するとあとは $\cancel{T_1}T_1^{-1}$ etc cancelする

$$= Y_n T_n^{-1} - \langle t_0^{1/2}\rangle .$$

etc.

T と X の 交換関係をみるのに ここに 2 変数入る. それで 3+2 = 5 ,

② $\mathcal{D}_{q,x}[W]$ での実現

$$H(\tilde{W})_{\underbrace{t_0,t_1,t_n}_{3つ}} \xrightarrow{\rho_{u_0,u_n}} \mathcal{D}_{q,x}[W]$$

- $$T_i = c(x^{\alpha_i})s_i + d(x^{\alpha_i}) \qquad i=1,\sim,n-1 ,$$

[A型の時と同様 $c(z) = t^{-\frac{1}{2}}\dfrac{1-tz}{1-z}$, $c(z)+d(z) = t^{\frac{1}{2}}$ とする。 ($\Leftrightarrow d(z) = \dfrac{\langle t^{1/2}\rangle}{1-z}$)]

- $$\begin{cases} c_0(z) = t_0^{-\frac{1}{2}}\dfrac{(1-t_0^{\frac{1}{2}}u_0^{\frac{1}{2}}z)(1+t_0^{\frac{1}{2}}u_0^{-\frac{1}{2}}z)}{1-z^2} = \dfrac{t_0^{-\frac{1}{2}} - \langle u_0^{\frac{1}{2}}\rangle z - t_0^{\frac{1}{2}}z^2}{1-z^2} \\ d_0(z) = t_0^{\frac{1}{2}} - c_0(z) = \dfrac{\langle t_0^{\frac{1}{2}}\rangle + \langle u_0^{\frac{1}{2}}\rangle z}{1-z^2} \end{cases} ,$$

$\{c_n(z),\ d_n(z)$: 上で $t_0 \rightsquigarrow t_n$, $u_0 \rightsquigarrow u_n$ とする.

として, $i=0,n$ については

$$T_i = c_i(x^{\alpha_i/2})s_i + d_i(x^{\alpha_i/2})$$

$$\begin{cases} x^{\alpha_0/2} = q^{\frac{1}{2}}X_1^{-1} & : \alpha_0 = \delta - 2\varepsilon_1 \\ x^{\alpha_n/2} = X_n \end{cases}$$

i.e.

$$T_n = t_n^{-\frac{1}{2}}\frac{(1-t_n^{\frac{1}{2}}u_n^{\frac{1}{2}}X_n)(1+t_n^{\frac{1}{2}}u_n^{-\frac{1}{2}}X_n)}{1-X_n^2}s_n + \frac{\langle t_n^{\frac{1}{2}}\rangle + \langle u_n^{\frac{1}{2}}\rangle X_n}{1-X_n^2} .$$

$$\xrightarrow[\text{とおくと}]{u_n=1} = t_n^{-\frac{1}{2}}\frac{1-t_nX_n^2}{1-X_n^2}s_n + \frac{\langle t_n^{\frac{1}{2}}\rangle}{1-X_n^2} .$$

- 尚, T_0 は上で $\begin{cases} t_n, u_n \longrightarrow t_0, u_0 \\ X_n \longrightarrow q^{\frac{1}{2}}X_1^{-1} \end{cases}$ として,

T_i ($i\neq 0,n$) も $u_1=\cdots=u_{n-1}=1$ としてまとめて同じでもよい。

交換関係.

$$\begin{cases} T_i x_i T_i = x_{i+1} & : i=1,\cdots,n-1 \\ T_i x_j = x_j T_i & : i=1,\cdots,n-1,\ j\neq i,i+1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_n x_j = x_j T_n \\ T_n x_n = x_n^{-1} T_n^{-1} - \langle u_n^{\frac{1}{2}} \rangle = x_n^{-1} T_n - \left\{ (u_n^{\frac{1}{2}}) + (t_n^{\frac{1}{2}}) x_n \right\} \end{cases}$$

※ これらは より universal な

$$T_i f - s_i f \cdot T_i = d_i(x^{\alpha_i}) \left(f - s_i f \right) \quad : i=0,1,\cdots,n$$

において, d_i を書き下すと直ちに得られる.

※ R-operator による表示もする.

// 12:30

〈ヨ つづき〉

$T_n T_n^{-1} = T_n T_n^{-1} - \langle t_0^{\frac{1}{2}} \rangle$ cf. →

x との関係には u_n が出てきた。このちがいにより "duality" がこわれる

van Diejen の言ってる self-duality cond. for Koornwinder poly.

: $t_0 \leftrightarrow u_n$.

野海　　多変数 Askey-Wilson・つづき

(13:40-)

④ R-operatorによる表示

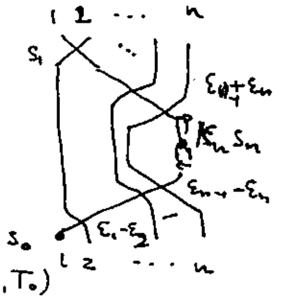
$\alpha \in \Delta$

① $\langle\alpha,\alpha\rangle=2$ $(\underset{i\neq j}{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j})$: $R(\alpha) = c(x^{\alpha}) + d(x^{\alpha}) s_\alpha$

② $\langle\alpha,\alpha\rangle=4$ $(\pm 2\varepsilon_j)$: $K_i(\alpha) = c_i(x^{\alpha/2}) + d_i(x^{\alpha/2}) s_\alpha$ $\quad i=0,n$

$$\begin{cases} T_i = R(\alpha_i) s_i & i=1,\cdots,n-1 \\ T_n = K_n(2\varepsilon_n) s_n \\ T_0 = \cdots \end{cases}$$

⑧ リボンで書くと..



- $Y_1 \overset{\circ}{=} R(\varepsilon_1-\varepsilon_2)s_1 \cdots R(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)s_{n-1}K_n(2\varepsilon_n)s_n$

$$\times R(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)s_{n-1}\cdots R(\varepsilon_1-\varepsilon_2)s_1 T_0$$

$$= R(\varepsilon_1-\varepsilon_2)R(\varepsilon_1-\varepsilon_3)\cdots R(\varepsilon_1-\varepsilon_n)K_n(2\varepsilon_1)$$

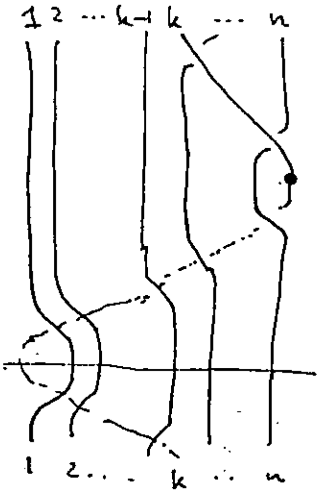
$$\times R(\varepsilon_1+\varepsilon_n)R(\varepsilon_1+\varepsilon_{n-1})\cdots R(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\underbrace{s_1\cdots s_n \cdots s_1 T_0}_{\tau_1^{\frac{1}{2}}K_0(2\varepsilon_1)\tau_1^{\frac{1}{2}}}$$

- $s_1\cdots s_{n-1}s_n s_{n-1}\cdots s_1 T_0 = s_{\varepsilon_1}\left(c_0(\underbrace{q^{\frac{1}{2}}x_1^{-1}}_{x^{\alpha_1/2}})\underbrace{s_0}_{s_{\varepsilon_1}\tau_1} + d_0(\underbrace{q^{\frac{1}{2}}x_1^{-1}}_{})\right)$

$$= c_0(q^{\frac{1}{2}}x_1)\tau_1 + d_0(q^{\frac{1}{2}}x_1)s_{\varepsilon_1}$$

$$= \tau_1^{\frac{1}{2}}\Big(\underbrace{c_0(x_1)+d_0(x_1)s_1}_{K_0(2\varepsilon_1).}\Big)\tau_1^{\frac{1}{2}}$$

一般には



- $Y_k = R(\varepsilon_k-\varepsilon_{k+1})\cdots R(\varepsilon_k-\varepsilon_n)K_n(2\varepsilon_k)$

$$\cdot R(\varepsilon_k+\varepsilon_n)\cdots R(\varepsilon_k+\varepsilon_{k+1})R(\varepsilon_{k-1}+\varepsilon_k)\cdots R(\varepsilon_1+\varepsilon_k)$$

$$\cdot \underbrace{\tau_k^{\frac{1}{2}}K_0(2\varepsilon_k)\tau_k^{\frac{1}{2}}}_{} R(\varepsilon_1-\varepsilon_k)^{-1}\cdots R(\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k)^{-1}.$$

$$= c_0(q^{\frac{1}{2}}x_k)\tau_k + d_0(q^{\frac{1}{2}}x_k)s_{\varepsilon_k}$$

$\varphi(x)$: general W-invariant function

$$Y_1\varphi(x) = \begin{bmatrix} c(x_1/x_2)\bullet\cdots\bullet c_0(q^{\frac{1}{2}}x_1)\tau_1 \\ +\ \tau \text{ について lower な term} \end{bmatrix}\cdot\varphi(x),$$

τ_1 の coef.

$$= c_n(x_1)\,c_0(q^{\frac12}x_1)\,c(x_1/x_2)\cdots c(x_1/x_n)$$
$$\times\, c(x_1 x_2)\cdots c(x_1x_n)$$
$$= t_0^{-\frac12}t_1^{-n+1}t_n^{-\frac12}\frac{(1-t_n^{\frac12}u_n^{\frac12}x_1)(1+t_n^{\frac12}u_n^{-\frac12}x_1)(1-t_0^{\frac12}u_0^{\frac12}q^{\frac12}x_1)(1+t_0^{\frac12}u_0^{-\frac12}q^{\frac12}x_1)}{(1-x_1^2)(1-qx_1^2)}$$
$$\times \prod_{j=2}^{n}\frac{(1-tx_1/x_j)(1-tx_1x_j)}{(1-x_1/x_j)(1-x_1x_j)}$$

$\therefore$
$m_\square(Y) = Y_1+\cdots+Y_n+Y_1^{-1}+\cdots+Y_n^{-1}$ の W-不変な函数への作用は

$$m_\square(Y)\varphi = (\square\tau_1+\cdots+\square\tau_n+\square\tau_1^{-1}+\cdots+\square\tau_n^{-1}+\square)\varphi$$

$\uparrow$ 定数項アリ. $\boxed{d_0 \text{ etc } \text{がいる}}$

$\therefore$ $L_{\varepsilon_1} = (t_0t_n)^{-\frac12}t_1^{-n+1}D + a(x)$ の形.

$t=t_1$.

$D1=0,$

$$L_{\varepsilon_1}1 = m_\square(Y)1 = (t_0t_n)^{\frac12}\frac{1-t^n}{1-t} + (t_0t_n)^{-\frac12}\frac{1-t^{-n}}{1-t^{-1}}$$

$\therefore$ $$L_{\varepsilon_1} = (t_0t_n)^{\frac12}t^{-n+1}D + (t_0t_n)^{\frac12}\frac{1-t^n}{1-t} + (t_0t_n)^{-\frac12}\frac{1-t^{-n}}{1-t^{-1}}.$$

言葉 (param.) の identify は

$$\{a,b,c,d\} = \{t_n^{\frac12}u_n^{\frac12},\ -t_n^{\frac12}u_n^{-\frac12},\ q^{\frac12}t_0^{\frac12}u_0^{\frac12},\ -q^{\frac12}t_0^{\frac12}u_0^{-\frac12}\};$$

一般に　$f(y) \in \mathbb{K}[y^{\pm1}]^W = \mathfrak{Z}H(\tilde{W})$　に対して

$$f(Y)P_\lambda(x) = L_f P_\lambda(x) = P_\lambda(x)\cdot f(\eta_\lambda) \quad : \lambda \in P^+$$

$$\eta_\lambda = \left((t_0t_n)^{\frac{1}{2}}t^{n-1}q^{\lambda_1}, (t_0t_n)^{\frac{1}{2}}t^{n-2}q^{\lambda_2}, \dots, (t_0t_n)^{\frac{1}{2}}t^{0}q^{\lambda_n}\right)$$

$$L : \mathfrak{Z}H(\tilde{W}) = \mathbb{K}[Y^{\pm1}]^W \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}[L_1,\dots,L_n] \subset \mathcal{D}_{q,x}^W$$

但 $L_k := L_{m_{\boxminus;k}}$.

$\boxed{Q}$　$L_1,\dots,L_n$ と van Diejen の operator とを identify せよ.
（下の方から固有値の表を並べて書いて〈computer〉と比較？）

double affine Hecke.

㊟　$DH(W) = \mathbb{K}\langle X_1^{\pm1},\dots,X_n^{\pm1}, Y_1^{\pm1},\dots,Y_n^{\pm1}, T_1,\dots,T_n\rangle$

parameters:
t_0, t_1, t_n, u_0, u_n

double affine Hecke に対する Cherednik's involution の Askey-Wilson 版.

定理　$\exists!\ \phi : DH(W) \xrightarrow{\sim} DH(W)$: $\mathbb{Q}(u_0,t_1,t_n)$-alg. の anti-invol.

s.t.

$$\phi : t_0 \mapsto u_n,\ u_n \mapsto t_0\ ;$$

$$\begin{cases} X_i \longmapsto Y_i^{-1} \\ Y_i \longmapsto X_i^{-1} \\ T_i \longmapsto T_i \quad (1 \le i \le n) \end{cases}$$

$$\left[\begin{aligned} &\phi(PQ) \\ &= \phi(Q)\phi(P), \\ &\phi^2 = 1. \end{aligned}\right]$$

このあと今日の講義では　これのA型版を用いていろいろなことを示す.
それはBCでもできる；どれがどのようにできるかは各自確かめよ.

（これは無理だよ！
多分, N.）

◎ BC$_\ell$ の対称空間. (compact form)

AIII) $U_n/U_\ell \times U_{n-\ell}$: complex Grassmann , BC$_\ell$
但 . $n=2\ell$ なら C$_\ell$.

CII) $Sp_{2n}/Sp_{2\ell}\times Sp_{2(n-\ell)}$: 4元 Grassman , BC$_\ell$
但 $n=2\ell$ なら C$_\ell$.

DIII) SO_{2n}/U_n $\begin{cases} n=2\ell+1 & \cdots \mathrm{BC}_\ell \\ n=2\ell & \cdots \mathrm{C}_\ell \end{cases}$

キカ = param. が動かない.
くない いろいろ で
BC$_\ell$ の短い root の
おおきさ的に (対称空間的)
重複 param に
∞系列に) なる

これらの量子群版の帯球函数は multi-var AW で表わせる.

AIII, $U_n/U_\ell\times U_{n-\ell} \overset{=G/K}{}$ のとき.

① $\exists$ 1-parameter family of quantized complex Grassmanians
$(G/K_\sigma)_q$ ← K に parameter があって
σ によると conj. でうつらず 互に非同型.

- Gr $=\mathbb{C}P^1$ のときは Podles の quantum sphere に他ならない.

帯球函数 :

$$\mathcal{H}^{\sigma,\tau} := A_q(K_\tau\backslash G/K_\sigma) \subset A_q(G) \qquad \begin{matrix} G \\ \cup \\ \mathbb{T}^n \end{matrix}$$

$$\mathcal{H}^{\sigma,\tau} \xhookrightarrow{|_{\mathbb{T}}} \mathbb{C}[z_1^{\pm1}, \cdots, z_n^{\pm1}] = A(\mathbb{T}) ,$$

$$\mathcal{H}^{\sigma,\tau} \xrightarrow[\sim]{|_{\mathbb{T}}} \mathbb{C}[x_1^{\pm1}, \cdots, x_n^{\pm1}]^W \subset \mathbb{C}[z_1^{\pm1}, \cdots, z_n^{\pm1}] ,$$

但 $\begin{cases} x_1 = z_1/z_n \\ x_2 = z_2/z_{n-1} \\ \quad\vdots \\ x_\ell = z_\ell/z_{n+1-\ell} . \end{cases}$

$$\mathfrak{Z}U_q(\mathfrak{gl}_n) \curvearrowright \mathcal{H}^{\sigma,\tau} = \bigoplus_{\lambda\in P^+(G,K)} \mathbb{C}\varphi_\lambda$$

$$P^+(G,K) := \{\underset{\substack{\| \\ (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{Z}^n = P(G)}}{\lambda} \in P^+ = P^+(G) \mid V(\lambda)^K \neq 0\}$$

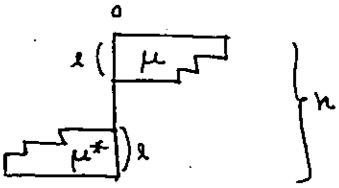
$\lambda_1 \geqq \cdots \geqq \lambda_n \quad : \quad P^+$

※ この μ が BC_ℓ の dom. int. wt. の 意味.

Fact : $V(\lambda)^K \neq 0$ $\left(\lambda : \underline{K\text{-spherical}} \text{ という}\right)$ $\Longleftrightarrow \exists \mu = (\mu_1,\dots,\mu_\ell)\in\mathbb{Z}^\ell : \mu_1 \geqq \cdots \geqq \mu_\ell \geqq 0$

s.t. $\lambda = (\mu_1,\dots,\mu_\ell,0,\dots,0,-\mu_\ell,\dots,-\mu_1)$

$=$



定理 $\lambda = (\mu_1,\dots,\mu_\ell,0,\dots,0,-\mu_\ell,\dots,-\mu_1)$ のとき

$$\varphi_\lambda\Big|_{\mathbb{T}^n} = \text{const.}\, P_\mu^{AW}(\underline{x_1,\dots,x_\ell}; a,b,c,d; \overset{t}{q^2}; \overset{q}{q^2})$$

"Schur の類似."

但 $\begin{cases} x_1 = \frac{z_1}{z_n}, \dots, x_\ell = \frac{z_\ell}{z_{n+1-\ell}} : \text{[illegible]}, \\ \{a,b,c,d\} = \{q^{\sigma-\tau+1}, -q^{\sigma+\tau+1}, q^{-\sigma-\tau+1}, -q^{-\sigma+\tau+2(n-2\ell)+1}\} \end{cases}$

<σ, τ は conti. param.>

param.

σ の入れ方.

$\boxed{q=1}$: $K = G_J \quad : \quad J\in \mathrm{Herm}_n$ の Stabilizer

とすれば $G/K = G\cdot J \quad (\, g\cdot X = gXg^* \quad : g\in U_n\,)$

$$J_0 = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & \cdot^{\cdot^{1}} \\ \hline 0 & 1 \ddots 1 & 0 \\ \hline 1 \cdot^{\cdot^{1}} & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \ell \\ n-2\ell \\ \ell \end{array} \end{array} \xleftrightarrow[\text{Cayley}^? \text{ 変.}]{} J_\infty = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 \ddots 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \ddots \end{array}\right) \begin{array}{l} \ell \\ n-2\ell \\ \ell \end{array}$$

$\boxed{\text{これを } q \text{ にする}}$

$\uparrow q^\sigma \to 1 \qquad\qquad\qquad \nearrow q^\sigma \to 0$ (scalar 倍[illegible])

$$J_\sigma = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \ell & n-2\ell & \ell \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c} -q^{2\sigma}+1 \ddots -q^{2\sigma}+1 & 0 & q^\sigma \cdot^{\cdot^{q^\sigma}} \\ \hline 0 & 1 \ddots 1 & 0 \\ \hline q^\sigma \cdot^{\cdot^{q^\sigma}} & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \left[\begin{array}{c|c|c} 1 \ddots 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \ddots 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -q^\sigma \ddots -q^\sigma \end{array}\right]$$

上の J_0, J_∞ を interpolate している.

- この $J = J_\sigma$ は次の reflection eq. をみたしている.

$$R_{12} \underbrace{J_1}_{X_1} R_{12}^{-1} \underbrace{J_2}_{X_2} = J_2 R_{21}^{-1} J_1 R_{21}$$

$R =$ Jinbo's R matrix.

量子群でも
… ある部分だけは 点がある ということ.

<u>以上</u> Noumi + Mathewis + Sugitani.
in Fields inst. communications.

〃 14:55.

おしまい