量子群と q 特殊函数

— 量子対称空間の球函数の観点から —

野海 正俊 (神戸大学・理学部)

これは、80 年代終盤以降の「量子群と q 特殊函数」の研究のうち、とくに (コンパクト型) 量子等質空間の球函数に関連したものについての覚書である。この表題で言及すべきことは外にもたくさんあるが、筆者が直接関与していることを中心にまとめたものなので、その点はお許し願いたい。

1: q 解析は、q と書かれるパラメータを含む、無限和や無限積で表わされる函数を扱う解析学であり、テータ函数や q 超幾何函数がその主役である。その原型は Euler や Gauss にまで遡るが、q 超幾何函数が導入されてからでも優に 150 年の歴史がある。q 超幾何函数は q 差分方程式で特徴づけられ、それ自身豊かな構造をもつ対象である。通常の超幾何函数やその微分方程式は q が 1 に近づくときの極限と思えるので、このことを称して、q 超幾何は超幾何の q 類似である — という言い方をする。

古典直交多項式を系統的にとらえるための Askey's scheme と呼ばれるものがある。q の世界の古典直交多項式に対する Askey の図式の頂上には、Askey-Wilson 多項式と呼ばれる、q 超幾何級数 ${}_4\phi_3$ で表わされる q 直交多項式の 4 パラメータの族が置かれていて、continuous q-Jacobi 多項式をはじめとする一連の q 直交多項式が、master family である Askey-Wilson 多項式の特殊化として得られるという構図になっている。正確には、もう一つの親玉として q-Racah 多項式と呼ばれるものがある。q-Racah 多項式は、Askey-Wilson 多項式で独立変数とパラメータを読み替えて得られるので、いわば Askey-Wilson 多項式の兄弟分である。この q-Racah 多項式を特殊化することで、選点系の古典直交多項式が得られる仕組みである。

R. Askey と J.A. Wilson がこの Askey-Wilson 多項式の族を導入した論文 “Some basic hypergeometric polynomials that generalize Jacobi polynomials” [1] が出版されたのは 1985 年のことであった。

2: 量子群が発見 (Hopf 代数の言葉で定式化) されたのが丁度この頃である ([5], [8], [46])。その 2,3 年後にあたる 88 年頃までに、量子群と q 解析の関係にとって

重大な 2 つの発見がなされている。一つは、量子群 $SU_q(2)$ の Clebsch-Gordan 係数 (3-j symbol) がいわゆる q-Hahn 多項式で、6-j symbol が q-Racah 多項式で表わされるという事実の発見である ([9] 等)。この発見は、knot や link の量子群不変量の構成と関連している。もう一つは、同じ量子群 $SU_q(2)$ の既約ユニタリ表現の行列要素が、いわゆる little q-Jacobi 多項式で表わされるという事実の発見である。量子群が Lie 群を函数環の水準で q 変形したものであるから、その意味では、Clebsch-Gordan 係数や表現の行列要素が q 変形されても不思議ではないし、有限体や p 進体上の群の表現論から q 直交多項式が現われることは既に知られていたとはいえ、q 直交多項式 の q が連続的なパラメータのままで群論的な解釈をもつというのは、驚くべきことであった。長い歴史をもつ q 超幾何函数の群論的対称性を記述する代数構造が、150 年の年月を経て見つかったことに、感嘆以上のものを感じるのは筆者だけではないであろう。

後者の発見は、増田・三町・中神・野海・上野 (喜三雄) の 5 人のグループ [19], [20] と、Vaksman-Soibelman [45], Koornwinder [10] によって独立になされた。$SU_q(2)$ の不変測度から自然に little q-Jacobi 多項式の直交性が従い、q 差分方程式は、量子環 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の中心元の動径成分として得られる — 等々。5 人のグループによる発見は 88 年の 2 月から 3 月にかけての時期であった。(そもそもこの 5 人の共同研究のきっかけは 88 年 2 月の賢島での研究集会「量子群と形式群」での議論であった。) その年、京都の関西セミナーハウスで量子群関連の国際ワークショップがあり、このときに三町氏の講演を聞いた P. Kulish から Vaksman-Soibelman が同じ様なことをやっていたようだというコメントがあった。完全に同じ内容だったかどうかは解らないが、Vaksman-Soibelman も 87 年には同様の結果を得ていたようである。我々のプレプリントを受け取った Koornwinder は、折り返し、彼が同じ結果を Woronowicz に書き送っていたことを知らせてきた。ともあれ、これを出発点として「量子群上の球函数論を構築せよ」という問題が明確に意識されるようになった。

3: Askey の図式に照らし合わせると、Askey-Wilson 多項式の 4 つのパラメータを 2 こまで落として始めて Jacobi 多項式の水準になる。しかも q-Jacobi に落とすやり方はいろいろあって、それに応じて、continuous q-Jacobi, big q-Jacobi, little q-Jacobi といった、q-Jacobi 多項式の複数の variant が存在する。パラメータが一般のときの Askey-Wilson 多項式や、continuous q-Jacobi 多項式は通常の Riemann 積分の連続的な測度に関する直交多項式で、重み函数にパラメータ q が入る。これに対し big q-Jacobi 多項式や little q-Jacobi 多項式は、原点に集積する点列での値の総和をとる離散的な測度 (Thomae-Jackson の q 積分) に関する直交多項式である。(little のときは 1 方向から、big のときは

2 方向から原点に集積する。)

$SU_q(2)$ の既約表現の行列要素として現われた little q-Jacobi 多項式は q 超幾何級数 ${}_2\phi_1$ で表わされるもので、$[0,1]$ 区間上の q 積分の離散的な測度に関する直交多項式である。

– なぜ little q-Jacobi なのか?
– なぜ離散的な測度の直交多項式でなくてはいけないのか？

という素朴な疑問が生じる。

実はこのような疑問をもつに至る動機がもう一つあった。同じ 87 年から 88 年の時期に、I.G. Macdonald はいわゆる Jack 多項式の q 類似に当たる多変数の q 直交多項式のクラスと、そのルート系に付随する version を導入し、いくつかの組合せ論的な予想を提出した ([15], [16])。(この時期は、Heckman-Opdam がルート系に付随する可換微分作用素族の固有函数の議論を開始した頃でもあり、勿論これと無関係ではない。) この Macdonald 多項式は、球函数の微分方程式の動径成分の q 変形にあたる q 差分方程式を満たすが、直交函数系としてはトーラス上の通常の Riemann 積分に関する直交多項式系である。一変数の A_1 や BC_1 で見れば continuous q-Jacobi の subfamily に対応するものであり、$SU_q(2)$ の行列要素から出てくる little q-Jacobi とは別系列のものであった。(離散的な測度に関する多変数の q 直交多項式はまだ知られていなかったのである。)

程なくして坂内・川中・Song の仕事 [2] が出て、有限体上の線形群の枠組みで Macdonald 多項式が自然に現われることが確認された。同じ q-family なのだから、量子群でも多変数の球函数として Macdonald 多項式のようなものが自然に現われてほしい — という期待もあった。

4: なぜ little q-Jacobi なのか、big や continuous は 量子群の球函数としては現われないのか？ — 三町氏と筆者との量子球面の球函数についての共同研究の主な動機は、この問に答えることであった。

量子群 $SU_q(2)$ を対角線上の $U(1)$ で割って商空間を作ると、一つの量子球面 $S_q^2 = SU_q(2)/U(1)$ が得られる。面白いことに、球面 S^2 の「量子化」にあたる量子等質空間 (「函数環」が量子群 $SU_q(2)$ の対称性をもち、然るべく既約分解するもの) は実はこれだけではない。Podles の量子球面と呼ばれる 1 パラメータ族の量子空間 $S_{q,t}^2$ が存在する (Podles [40])。$t=0$ のときの $S_{q,0}^2$ が「標準的な」$S_q^2 = SU_q(2)/U(1)$ である。量子群 $SU_q(2)$ は $SO(2)$ に対応する量子部分群をもたない (はずな) ので "$SU_q(2)/SO_q(2)$" のような商空間は存在しないが、量子等質空間としては $t=1$ のときの $S_{q,1}^2$ が $SU(2)/SO(2)$ の「量子化」に対応する。

88 年の夏、M & Φ に参加のため Swansea に滞在中、Podles の量子球面の不変測度の計算ができたので、国際電話で三町氏に問い合わせたところ、それは big q-Jacobi の直交性を決める測度だという返事で、$S^2_{q,t}$ の球函数が big q-Jacobi 多項式になることが確実になった。(ちなみに、初めて Woronowicz に会ったのがこの Swansea であった。)

この量子球面 $S^2_{q,t}$ の「函数環」を既約分解し、各既約成分で $U(1)$ の作用を対角化する基底を構成すると、$U(1)$ の作用で不変な変数についての big q-Jacobi 多項式が現われる (野海・三町 89 年, [28])。更に、$SU_q(2) = S^3_q$ の Peter-Weyl 型の分解で little q-Jacobi が出てきたところがまるごと、big q-Jacobi に置き換わってしまうような $SU_q(2)$ 上の量子空間 $\widetilde{S}^3_q$ (3 次元球面の族の全空間の量子化にあたる) を構成することも可能である ([29])。

5: Koornwinder も同じ様な疑問を抱いたらしいが、彼は我々とは別の方向に進む。彼のやったことは、「量子群 $SU_q(2)$ には $SO(2)$ に対応する量子部分群がない」と諦めないで、それを $SO(2)$ の Lie 環 の生成元に対応する量子環 $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ のある元 θ (およそ $e - f$) で代用することである。$SU_q(2)$ の既約表現の行列要素で θ に関して両側不変なものは、continuous q-Legendre 多項式 (パラメータが特別な continuous q-Jacobi) になる — というのが Koornwinder の結果である。これは結果的に、量子球面 $(SU(2)/SO(2))_q$ の帯球函数を考えていることに当る。無限小の作用で代用することで「失われた部分群」の自由度を回復しようというのが、彼の着想であった。

驚くべきことに、semisimple な twisted primitive element の族 θ_t が構成できて、$t = 0$ では $U(1)$ の、$t = 1$ では $SO(2)$ の Lie 環の生成元に対応するようにできる。Koornwinder は更に、右と左でパラメータの値をかえて組 (θ_s, θ_t) に関する帯球函数を考察し、Askey-Wilson 多項式の 2 パラメータ族 (Jacobi の中の Legendre にあたる部分) の実現を与えた。

6: 89 年、三町氏と筆者は Ohio での研究集会 “Orthogonal Polynomials: Theory and Practice” に参加したが、R. Askey をはじめとする米国の直交多項式のグループが一同に会して印象深いものであった。(報告集が NATO ASI Series, Kluwer Acdemic press, 1990 にある。) この集会の会期中に、会場に向かうバスの中で、徹夜明けらしく興奮した面もちの Koornwinder から直接 “big news” として知らされたのが、5 節に書いた話であった。

Koornwinder のこの結果は、まだ離散的な球函数しか扱っていなかった我々には、意外でもあり、ショックでもあった。三町氏と筆者は直ちにこの結果を検討し、米国滞在中に θ_t に関する不変式環が Podles の $S^2_{q,t}$ の函数環に外ならないことを確認して、我々の big q-Jacobi の実現との関係を理解した。さらに「そうならば、既約表現の行列要素で (θ_s, θ_t) について両側で相対不変なも

のを決定すれば、4 パラメータの Askey-Wilson 多項式の実現ができる」と確信した。

Askey-Wilson 多項式はかなり複雑な対象であり、実際に計算を遂行するのは容易ではないが、結局 3 項間漸化式に持ち込むアイディアで 89 年の暮れまでにはそれも完成する。それからの帰結として、Askey-Wilson 多項式に対する加法公式も得られる ([31], [32])。

$SU_q(2)$ 上で 4 パラメータの Askey-Wilson 多項式の実現が得られて、これでやっと一段落となった。q-Jacobi 多項式の多様性が、そのまま量子群の部分群の問題や自明でない量子等質空間の「幾何学的」問題と対応していたのである。(この辺りの詳しい事情については、[33], [22] を参照されたい。)

7: 量子群上の球函数として $SU_q(2)$ の次に考察の対象となったのは、奇数次元の球面 $S^{2n-1} = U(n)/U(n-1)$ と複素射影空間 $\mathbb{CP}^{n-1} = U(n)/U(n-1) \times U(1)$ の量子群版である。(時間的には上の Askey-Wilson に至る話と平行している。) この場合の帯球函数も実質的には little q-Jacobi 多項式であるが、S_q^{2n-1} の文脈では q-disk polynomial ともよばれる (野海・山田 (裕史)・三町 [34], Soibelman-Vaksman [45])。量子ユニタリ群 $U_q(n)$ の表現の量子行列式を用いた実現 (standard monomial theory) など、表現論的な基礎を明確にする必要があったが、帯球函数の議論自身は $SU_q(2)$ の場合を然るべく拡張すればよい。

$\widetilde{S}_q^3$ の高次元化にあたる big version の「球面族」$\widetilde{S}_q^{2n-1}$ も構成できる (Vaksman-Korogodsky [14])。これらの例については 5 節で述べたのと同様の意味で Askey-Wilson 多項式を実現する仕事 (Dijkhuizen・野海 [4]), (big) q-disk polynomial と 加法公式の研究 (Floris [7]) などもある。

量子群 $GL_q(n)$ の対称性もとで dual pair $(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{o}_n)$ の観点から球面調和函数の理論を展開したのが、野海・梅田・若山 [38], [39] である。B, D 型の量子群 $SO_q(n)$ の対称性をもつ量子球面での球面調和函数の議論は杉谷 [42] による。

8: 量子群版で、高い階数の対称空間を考察した最初の例は $U(n)/SO(n)$ の量子化を議論した上野 (喜三雄)·竹林の仕事である (90 年, [44])。彼等は、量子環 $U_q(\mathfrak{gl}(n))$ の中で、およそ $e_i - f_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ から生成される ideal を考察し、量子群 $U_q(n)$ の函数環の中でのその不変式環を「函数環」$A_q(U(n)/SO(n))$ とすることにより量子化 $(U(n)/SO(n))_q$ を捉えた。さらに $(U(3)/SO(3))_q$ では帯球函数が A_2 型の Madonald 多項式で表わされることを示している。これは Koornwinder による $(SU(2)/SO(2))_q$ での continuous q-Legendre 多項式の実現の階数 2 への拡張にあたる。一般の n でも $(U(n)/SO(n))_q$ の帯球函数が A_{n-1} 型の Macdonald 多項式で表わされるであろうと予想されたが、その決着がつくまでにはもう少し時間がかかる。量子対称空間 $(U(n)/SO(n))_q$ の構造

については Jing・山田 (裕史) による研究もあったようであるが、未発表のままである。

90 年の秋、Leningrad (現在の St. Petersburg) の LOMI で量子群のワークショップがあり、世界中から多数の量子群関係者が集まった。Kulish の編集した Springer の Lecture Notes in Math. 1510 を見ると、非常に高いレベルのワークショップであったことが解る。実際、その後の量子群の研究で重要になる keyword の多くがすでにこの時期の報告集の中にあるのはちょっと驚きである。野海·三町による $SU_q(2)$ 上での Askey-Wilson 多項式の実現や、上野·竹林による A_2 型 Macdonald 多項式の実現の話題もこのワークショップで発表されている。このときの上野氏の講演を聞いた Faddeev の興奮ぶりは特に印象的であった。彼は、量子等質空間の議論でも R 行列と L 作用素の枠組みを積極的に用いるべきである — と力説していた。その後の量子対称空間の議論は結果として、この Faddeev の示唆に影響されている。筆者個人としては Olshanski の twisted Yangian の話や、Semenov-Tian-Shansky の反射方程式 (境界型 Yang-Baxter 方程式) の話も印象深かった。

同じ 90 年の夏には、ICM90 の satellite conference の一つとして、特殊函数のワークショップ (林原フォーラム 90) があった。ホテルのロビーで、Heckman と Cherednik が Dunkl 作用素をどう考えるべきかについて議論していたのが印象的であった。今思えば、80 年代の後半はありとあらゆることが一斉に噴出してきた時期であった。

9: 量子対称空間 $(U(n)/SO(n))_q$ が Macdonald 多項式で表されることが確認されたのは 91 年から 92 年にかけてである。対称空間 $U(n)/SO(n), U(2n)/Sp(2n)$ の量子群版を構成し、帯球函数が A_{n-1} 型の Macdonald 多項式で表されることを示した論文 [24], [25] がそれである。(論文はコンパクト実形では書いてないが、実質は同じである。) その論点は、次のように要約できる。$G = U(n)$ とその部分群 K の組 (G, K) に対して等質空間 G/K の量子群版を考えるには

1. $q \to 1$ の極限で K の Lie 環 $\mathfrak{k}$ に対応するような $U_q(\mathfrak{g})$ の coideal $\mathfrak{k}_q$ をとり、組 $(U_q(\mathfrak{g}), \mathfrak{k}_q)$ で考えればよい。量子群 G_q の函数環 $A_q(G)$ の中で $\mathfrak{k}_q$ 不変式環を、量子等質空間 $(G/K)_q$ の函数環と考える。
2. $U_q(\mathfrak{g})$ の coideal $\mathfrak{k}_q$ を構成するには、量子群 G_q を決める R 行列に対する適当な反射方程式の定数解 J を作り、L 作用素と J を用いて $\mathfrak{k}_q$ を定義する方法がある。
3. その様にして構成した組 $(U_q(\mathfrak{g}), \mathfrak{k}_q)$ は自動的に Gelfand 対になる。つまり $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現に $\mathfrak{k}_q$ 不変元は高々 1 次元分しか現われない。然るべき既約表現が実際に $\mathfrak{k}_q$ 不変元をもつことは、構成的に示す。

4. 帯球函数を決定するには、$U_q(\mathfrak{g})$ の適当な中心元の動径成分を計算して、帯球函数のトーラスへの制限の満たす q 差分方程式を決定する。

結局のところ、複雑になっていく交換関係を、R 行列と L 作用素を用いて制御する必要があったのである。(同様の事情は、量子群 $GL_q(n)$ の Capelli 恒等式を論じた [37] にも当てはまる。)

10: 古典型の対称空間には、次の 10 系列がある。コンパクトな実形で書くと

a) $U(n), \quad SO(n), \quad Sp(2n)$
b) $U(n)/SO(n), \quad U(2n)/Sp(2n)$
c) $SO(2n)/U(n), \quad Sp(2n)/U(n)$
d) $U(n)/U(n-l) \times U(l), \quad SO(n)/SO(n-l) \times SO(l),$
$Sp(2n)/Sp(2(n-l)) \times Sp(2l)$

a) は群多様体の場合で、量子群版でも帯球函数が既約表現の指標であることに変わりはない。上で述べた論文 [25] で扱われているのは、対称空間 G/K の制限ルート系が A 型の場合で b) の系列である。

論文 [25] の段階では、他の型の対称空間のことは念頭になかったが、杉谷氏の精力的な計算によって、G が B, C, D 型の場合でも、反射方程式の定数解が存在し、それを用いて [25] と同様の構成法が可能であることが徐々に解ってきた。95 年までには、上の全ての系列に対して、ある意味で標準的な量子対称空間の構成が可能であること、またその帯球函数が制限ルート系から決まる Macdonald 多項式か、BC 型の場合には Koornwinder による多変数 Askey-Wilson 多項式を用いて表されることが判明している (野海・杉谷 [35], [36] および 杉谷 [43])。c) の系列については比較的早い時期に、帯球函数の決定が終わったが、d) の Grassmann 多様体の系列では、$U_q(\mathfrak{g})$ の中心元の動径成分の決定に極めて複雑な計算が必要であった ([43])。

現在の段階で、少なくとも古典型に関しては、Macdonald 多項式の住む「環境」としての量子対称空間の全体像が整ってきたと言って良いと思われる。但し、動径成分の決定等、複雑な個別的な計算に依存している部分が多いので、理論的には改良の余地がかなり残っている。例外型まで含めたような、intrinsic な量子対称対の理論と、その Harish-Chandra 理論というべきものを完成するには、もう少し飛躍が必要なのであろう。

11: ルート系に付随する Macdonald 多項式の、Macdonald の元々の定式化では BC_l 型には (ルートの重複度を q でスケールするやり方の違いで) (BC_l, B_l), (BC_l, C_l) という二つの version がある。しかし、BC_1 に限っても、どちらも (4

つのパラメータをもつ) Askey-Wilson 多項式の subfamily で、Askey-Wilson 多項式全体をカバーするような仕組みにはなっていない。

このことを考慮して、92年頃に Koornwinder [13] は l 変数 Askey-Wilson 多項式と呼ぶべき q 直交多項式の class を定義した。$l \geq 2$ では、Askey-Wilson 的な4つのパラメータ (a, b, c, d) と Macdonald 的なパラメータ t の 5 個のパラメータを含む class で、パラメータが特殊な場合として BC_l 型の Macdonald 多項式 (の 2 つの version) を含むようなものである。

上に述べた対称空間の系列のうち、例えば c) の $SO(2n)/U(n)$ で $n = 2l + 1$ の場合は、制限ルート系が BC_l となる。この場合の帯球函数を調べると、Macdonald の BC_l の 2 つの version ではカバーできない (ように見える) が、幸い (?) Koornwinder の 多変数 Askey-Wilson 多項式のカテゴリーに入る。

12: $SU_q(2)$ の対称性をもつ量子等質空間には、Podles の量子球面という非自明な変形族が存在し、これが球函数の水準では、Askey-Wilson 多項式の実現に関連していることを前に述べた。このような現象は高い階数でも存在するのだろうか — というのは自然な疑問であろう。

複素 Grassmann 多様体の系列 $U(n)/U(n-l) \times U(l)$ の量子群版を調べると Podles の量子球面と同様、1 パラメータの変形族が存在することが解る。この観点からすれば、Podles の量子球面は量子 $\mathbb{CP}^1$ だったのである。実際、この場合の反射方程式の 1 パラメータの解が構成でき、これで作った coideal から、$q = 1$ では全て同型であるが一般の q ではもはや同型でないような量子等質空間の族が得られる。5 節で述べたように、右左で coideal のパラメータの値をかえて帯球函数を調べると、Koornwinder の多変数 Askey-Wilson 多項式の 3 パラメータの族が実現されていることが解る (野海・Dijkhuizen・杉谷 [27])。

離散的な測度に関する多変数の q 直交多項式も、このような変形族の極限の場合の球函数として現われる。このような現象の内在的な意味について、Poisson 構造との関連を最近 Dijkhuizen 氏が指摘している。

∞: Cherednik は彼の一連の仕事の中で、affine Hecke 環に付随する q KZ 方程式と Macdonald の q 差分方程式の関係を確立し、Macdonald 多項式に関するいくつかの基本的予想を解決している ([3] 等)。それを契機に、Macdonald 多項式の理論は affine Hecke 環の構造論の立場から再構成され (Macdonald [18])、現在多くの研究がこの方向で進行中である。多変数 Askey-Wilson 多項式もまた、affine Hecke 環の構造論から再構成することができる (野海 [26], Macdonald [18])。Macdonald は、多変数 Askey-Wilson 多項式を $CC^\vee$ 型の non reduced なアフィンルート系の枠組みで捉えられることを指摘し、これを多変数直交多項式の grandfather と呼んでいる。

量子対称空間の球函数の問題が、どのようなやり方で affine Hecke 環の構造論と結びつきうるのかは興味深い問題であり、量子対称対の intrinsic な理論とあわせて、今後解明されなければいけない問題であろう — と考えている。(1997 年 1 月)

参考文献

[1] R. Askey and J.A. Wilson: Some basic hypergeometric polynomials that generalize Jacobi polynomials, Memoire Amer. Mth. Soc. **319**.

[2] E. Bannai, N. Kawanaka and S.-Y. Song: The character table of $\mathcal{H}(GL_{2n}(\mathbb{F}_q), Sp_{2n}(\mathbb{F}_q))$, J. Algebra **129**(1990), 320–366.

[3] I. Cherednik: Double affine Hecke algebras and Macdonald conjectures, Ann. Math. **141**(1995), 191–216.

[4] M.S. Dijkhuizen and M. Noumi: A family of quantum complex projective spaces and q-hypergeometric orthogonal polynomials, Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).

[5] V.G. Drinfeld: Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equations, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **283**(1985), 1060–1064.

[6] V.G. Drinfeld: Quantum groups, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Berkeley, California, USA, 1986, pp.798–820.

[7] P.G.A. Floris: On quantum groups, hypergroups ans q-special functions, Thesis, University of Leiden, 1995.

[8] M. Jimbo: A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation, Lett. Math. Phys. **10**(1985), 63–69.

[9] A.N. Kirillov and N.Yu. Reshetikhin: Representations of the algebra $U_q(\mathfrak{sl}(2))$, q-orthogonal polynomials and invariants of links, *Infinite Dimensional Lie Algebras and Groups* (V.G, Kac, ed.), World Scientific, 1989, pp.285–339.

[10] T.H. Koornwinder: Representations of the twisted $SU(2)$ quantum group and some q-hypergeometric orthogonal polynomials, Ned. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **92**(1989), 97–117.

[11] T.H. Koornwinder: Continuous q-Legendre polynomials as spherical matrix elements of irreducible representations of the quantum $SU(2)$ group, CWI Quarterly **2**(1989), 171–173.

[12] T.H. Koornwinder: Orthogonal polynomials in connection with quantum groups, *Orthogonal Polynomials: Theory and Practice* (P. Nevai, ed.), NATO ASI Series, Kluwer Academic Press, 1990, pp.257–292.

[13] T.H. Koornwinder: Askey-Wilson polynomials associated with root systems of type BC, Comtemp. Math. **138**(1992), 189–204.

[14] L.I. Korogodsky and L.L.Vaksman: Quantum G-spaces and Heisenber algebra, *Quantum Groups*(P.P. Kulish, ed.), Proceedings of Workshops held in the Euler International Mathematical Institute, Leningrad, Fall 1990, Springer Lecture Notes in Math. 1510, Springer Verlag, 1992, pp.56–66.

[15] I.G. Macdonald: A new class of symmetric functions, *Actes Séminaire Ltharingen*, Publ. Inst. Rech. Math. Adv., Strasbourg, 1988, 131–171.

[16] I.G. Macdonald: Orthogonal polynomials associated with root systems, preprint 1988.

[17] I.G. Macdonald: *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Second Edition, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1995.

[18] I.G. Macdonald: Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials, Séminaire Bourbaki, 47ème année, 1994–95, no.797.

[19] T. Masuda, K. Mimachi, Y. Nakagami, M. Noumi and K. Ueno: Representations of quantum groups and a q-analogue of orthogonal polynomials, C. R. Acad. Sci. Paris **307**(1988), 559–564.

[20] T. Masuda, K. Mimachi, Y. Nakagami, M. Noumi and K. Ueno: Representations of the quantum group $SU_q(2)$ and the little q-Jacobi polynomials, J. Funct. Anal. **99**(1991), 357–386.

[21] M. Nakatani and M. Noumi: q-Hypergeometric systems arising from quantum Grassmannians, preprint 1996.

[22] M. Noumi: Quantum groups and q-orthogonal polynomials — Towards a realization of Askey-Wilson polynomials on $SU_q(2)$ —, in *Special Functions* (M. Kashiwara and T. Miwa, eds.), ICM-90 Satellite Conference Proceedings, Springer Verlag, 1991, pp. 260–288.

[23] M. Noumi: Quantum Grassmannians and q-hypergeometric seires, CWI Quarterly **5**(1992), 293–307.

[24] M. Noumi: A realization of Macdonald's symmetric polynomials on quantum homogeneous spaces, Proceedings of XXI International Conference on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics, Tianjin, China, 5–9 June 1992; Int. J. Mod. Phys. A (Proc. Suppl.) **3A**, 1993, pp. 218–223.

[25] M. Noumi: Macdonald's symmetric polynomials as zonal spherical functions on some quantum homogeneous spaces, Adv. Math. **123**(1996), 16–77.

[26] 野海 正俊: Macdonald-Koornwinder 多項式と affine Hecke 環, 数理解析研究所講究録 **919**(1995), 44-55.

[27] M. Noumi, M.S. Dijkhuizen and T. Sugitani: Multivariable Askey-Wilson polynomials and quantum complex Grassmannians, Proceedings of the Workshop "Special Functions, q-Series and Related Topics", Toronto, Canada (June 19–23, 1995) (to appear).

[28] M. Noumi and K. Mimachi: Quantum 2-spheres and big q-Jacobi polynomials, Comm. Math. Phys. **128**(1990), 521–523.

[29] M. Noumi and K. Mimachi: Spherical functions on a family of quantum 3-spheres, Compositio Mathematica **83**(1992), 19–42.

[30] M. Noumi and K. Mimachi: Rogers's q-ultraspherical polynomials on a quantum 2-sphere, Duke Math. J. **63**(1991), 65–80.

[31] M. Noumi and K. Mimachi: Askey-Wilson polynomials and the quantum group $SU_q(2)$, Proc. Japan Acad. **66**, 1990, 146–149.

[32] M. Noumi and K. Mimachi: Askey-Wilson polynomials as spherical functions on $SU_q(2)$, *Quantum Groups*(P.P. Kulish, ed.), Proceedings of Workshops held in the Euler International Mathematical Institute, Leningrad, Fall 1990, Springer Lecture Notes in Math. 1510, Springer Verlag, 1992, pp.98–103.

[33] 野海 正俊, 三町 勝久: 量子群の表現論に現われる特殊函数 — Askey-Wilson 多項式の $SU_q(2)$ における実現 —, 『特殊函数の代数的側面』1989 年 12 月, 於 名古屋大学.

[34] M. Noumi, H. Yamada and K. Mimachi: Finite dimensional representations of the quantum group $GL_q(n;\mathbb{C})$ and the zonal spherical function on $U_q(n-1)\backslash U_q(n)$, Japanese J. Math. **19**(1993), 31–80.

[35] M. Noumi and T. Sugitani: Quantum symmetric spaces and related q-orthogonal polynomials, Group Theoretical Mathods in Physics, Proceedings XX ICGTMP, Toyonaka, Japan, 1994 (A. Arima et al, eds.), World Scientific, Singapore, 1995, pp.28–40.

[36] M. Noumi and T. Sugitani: Quantum symmetric spaces and multivariable q-orthogonal polynomials, preprint 1996.

[37] M. Noumi, T. Umeda and M. Wakayama: A quantum analogue of the Capelli identity and an elementary differential calculus on $GL_q(n)$, Duke Math. J. **76**(1994), 567–594.

[38] M. Noumi, T. Umeda and M. Wakayama: A quantum daul pair $(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{o}_n)$ and the assocaiated Capelli identity, Lett. Math. Phys. **34**(1995), 1–8.

[39] M. Noumi, T. Umeda and M. Wakayama: Dual pairs, spherical harmonics and a Cepelli identity in quantum group theory, Compositio Mathematica (to appear).

[40] P. Podles: Quantum spheres, Lett. Math. Phys. **14**(1987), 193–202.

[41] N.Yu. Reshetikhin, L.A. Takhtajan and L.D. Faddeev: Quantization of Lie groups and Lie algebras, Algebra and Analysis **1**(1989), 178–206; English translation in Leningrad Math. J. **1**(1990), 193–225.

[42] T. Sugitani: Harmonic analysis on quantum spheres associated with representations of $U_q(\mathfrak{so}_N)$ and q-Jacobi polynomials, Compositio Mathematica **99**(1995), 249–281.

[43] T. Sugitani: Zonal spherical functions on quantum Grassmann manifolds, preprint.

[44] K. Ueno and T. Takebayashi: Zonal spherical functions on quantum symmetric spaces and Macdonald's symmetric polynomials, *Quantum Groups* (P.P. Kulish, ed.), Proceedings of Workshops held in the Euler International Mathematical Institute, Leningrad, Fall 1990, Lecture Notes in Math. **1510**, Springer-Verlag, 1992, pp.142–147.

[45] L.L. Vaksman and Ya.S. Soibelman: Algebra of functions on the quantum group $SU(2)$, Func. Anal. Appl. **22**(1988), 170–181.

[46] S.L. Woronowicz: Twisted $SU(2)$ group: An example of non-commutative differential calculus, Publ. RIMS. Kyoto Univ. **23**(1987), 117-181.

[47] S.L. Woronowicz: Compact matrix pseudogroups, Comm. Math. Phys. **111**(1987), 613–665.