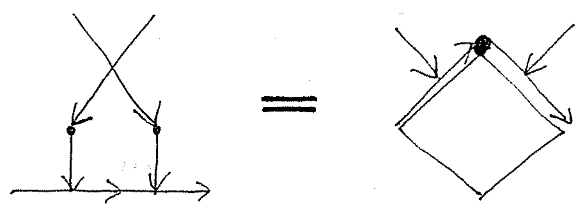
神保先生 '91度東大集中講義

「q-Vertex operators とその周辺」

1992.2.3～6, 東大理学部数学教室



述：神保 道夫（京大理）

記：長谷川 浩司（東北大理）

No 0

Date

神保道夫先生 1991年度
東京大学集中講義記録

「q-vertex operators とその周辺」

1992.02.3 ~ 6，東大理学部
記録：長谷川 浩司（東北大理）

目次

神保先生

§0. 背景(オハナシ)

q-vertex op
↑
1-vertex op = CFT ⊗ massless field theory
↕
SCM vis crit. pt. の上にあたる
高い symmetries ~ Vir ∞-dim
それによって理論が決まってしまう

variants of symm : ACA, …
これに関してV.op. が
def される [TK]

モト : BPZ.(杉田) 了是をもはじめはへきこすしたという位難し…

$\Phi(z) : V(\lambda) \longrightarrow V(\mu) \otimes V$
field
その一点関数(col. fcn.)が知りたい
CFTではそれが lin. diff. eq. で決定されてしまう
(Hypergeometric).

これらは massless のための高い対称性が
効いている それらいけれることはどうしてよいか
わからなかった、が、

可解な模型というのは Leningrad school が
いくつかもっている : 量子逆散乱法

今、量子群 とかな 代数的 背景が わかるようになってきた

Smirnov : corel. をいう以前の "form factor" という

$\langle m|\varphi(z)|n\rangle$

について色々やってきた人.

これが実は q-vertex op. というので
わかり易くなることがわかった. (昨年5.の来日へ.)

今回のことは このSmirnovの話のものでなく
これに inspire されたと思われる
Frenkel – Reshetikhin
の話: q-KZ.

diff. eq. or q-difference eq.
にかわる.

そしてモノドロミーにあたるものが YBE の
elliptic solution となる.

それは長いこと(?)であった ell. sol'n の
代数的セツメイをあたえる.

標語: 「q-vertex op. は たぶん massless で
ないときへの拡張への key であろう.」
→ 幅広く, 主論, …

q-vertex op
と
crystal. [Kashiwara]

目標 [FR] を解説すること. $\boxed{U_q\mathfrak{g} \Rightarrow qKZ}$

(4年生のために、と思ってきているので
たくさんいるプロの人には退屈かもしれない…)

予定：

§1 $U_q\mathfrak{g}$ の表現

§2 Universal R-matrix

§3 Vertex operator と KZ方程式

§4 q差分方程式，接続行列

V.op.の交換関係　YBEの解

全部を準備するのはとてもじゃないので ごまかすところはある
それといってごまかすなら確信犯ですから (^^)
しかし formal にじゃところや例はちゃんとやるようにしたい

おそらく $\mathfrak{g} = \widehat{sl}_2$ のときとして話すことになるだろう。プロの人は一般のときへの拡張を
そのつど考えて退屈をさけてもらいたい。

$\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}}_2$ K＝基礎体（標数0）

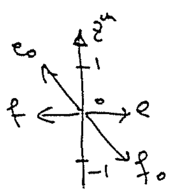
〈$K = \mathbb{C}(q)$ を念頭にして…〉

記号　この辺はどうやっても道具となるが…

- $\mathfrak{sl}_2 = Ke \oplus Kf \oplus Kh$,
  $[h, e] = 2e,\ [h, f] = -2f,\ [e, f] = h$

- $\widehat{\mathfrak{sl}}_2 = \mathfrak{sl}_2 \otimes K[z, z^{-1}] \oplus Kc \oplus Kd$,
  $[X \otimes z^m, Y \otimes z^n] = [X, Y] \otimes z^{m+n} + m\delta_{m+n,0}\, \mathrm{tr}_{2\times 2}(XY)c$
  $[c, \widehat{\mathfrak{sl}}_2] = 0$
  $[d, X \otimes z^m] = mX \otimes z^m$ i.e. $d = z\frac{d}{dz}$.
  for $^\forall X, Y \in \mathfrak{sl}_2$.

- Kac-Moody Lie 環としての presentation.



$$\begin{cases} e_0 := f \otimes z & f_0 := e \otimes z^{-1} & h_0 := c - h_1 \\ e_1 := e \otimes z^0 & f_1 := f \otimes z^0 & h_1 := h \otimes z^0 \end{cases}$$

とおくと，次が成り立つ.

$[h, e_i] = \langle \alpha_i, h \rangle e_i$
$[h, f_i] = -\langle \alpha_i, h \rangle f_i$
$[h, h'] = 0$ for $h, h' \in \mathfrak{h}$
$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i$
$(\mathrm{ad}\, e_i)^3 e_j = 0 = (\mathrm{ad}\, f_i)^3 f_j = 0$ $(i \neq j)$

ここで $\mathfrak{h} := Kh_0 \oplus Kh_1 \oplus Kd$，このbaseの dualを $\mathfrak{h}^* = K\Lambda_0 \oplus K\Lambda_1 \oplus K\delta$（このように）とするとき

$\alpha_0 := \delta - \alpha_1,\ \alpha_1 = 2(\Lambda_1 - \Lambda_0)$ δ: null root

Fact $\langle e_i, f_i, h_i, d \rangle_{\text{free Lie alg}} \Big/ \text{above 7 relns}$

$$\simeq \widehat{\mathfrak{sl}}_2 .$$

・ $\mathfrak{h}^*$ 上の内積 $(\ ,\ )$ (symmetric, bilinear) を

$$\begin{array}{c|ccc} & \alpha_0 & \alpha_1 & \Lambda_0 \\ \hline \alpha_0 & 2 & -2 & 1 \\ \alpha_1 & -2 & 2 & 0 \\ \Lambda_0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

を内積表として定める : $(\alpha_i, \alpha_i) = 2$ の normalization をとっている。

ひ(人によって, たとえば [illegible] は最近 $(\alpha_i, \alpha_i) = 1$ にしたりしている.

$\mathfrak{h}^* \simeq \mathfrak{h}$ という同一視を $(\ ,\ )$ で行うと

$$h_i = \alpha_i \qquad \Lambda_0 = d \qquad \delta = c$$

となっている。

$$\rho := \Lambda_0 + \Lambda_1$$

とおく。

)

5月5日

root

§1 $U_q\mathfrak{g}$

以下「代数」といったら 1をもつ結合代数のこと。

（☺ 準同型といったら 1は1にいくものを考える.）

また当分 $K = \mathbb{Q}(q)$ としてしまってもしかたない.

— Kの素体 $\supset \mathbb{Q}$, それと q は超越的, という位で良い筈だけど.

$$P := \mathbb{Z}h_0 \oplus \mathbb{Z}h_1 \oplus \mathbb{Z}d$$
$$P^* := \mathbb{Z}\Lambda_0 \oplus \mathbb{Z}\Lambda_1 \oplus \mathbb{Z}\delta$$

とおく。

代数 $U_q(\hat{sl}_2) = U$ の定義　天下りに…

生成元： $e_0, e_1, f_0, f_1, \underbrace{q^h}_{\text{symbol} \oplus} \ (h \in P)$

⊕ あとでは実際に $h \in U$ かどうかが問題となるが、ここではそうまじめにしないでおく

関係式：
$$q^h q^{h'} = q^{h+h'}, \quad q^0 = 1$$
$$q^h e_i q^{-h} = q^{\langle \alpha_i, h \rangle} e_i$$
$$q^h f_i q^{-h} = q^{-\langle \alpha_i, h \rangle} f_i$$
$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} \frac{t_i - t_i^{-1}}{q - q^{-1}} \qquad t_i := q^{h_i}$$

〈柏原さんのnotationに合わせて時には k_i とかいてた

$$e_i^3 e_j - [3] e_i^2 e_j e_i + [3] e_i e_j e_i^2 - e_j e_i^3 = 0$$
$$f_i^3 f_j - [3] f_i^2 f_j f_i + [3] f_i f_j f_i^2 - f_j f_i^3 = 0$$
$$(i \neq j)$$

ここで
$$[n] := \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}] \quad (n \in \mathbb{Z})$$
また
$$[m]! := [m][m-1]\cdots[1] \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$
$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} := \frac{[m]!}{[n]!\,[m-n]!} \quad (m \geq n \geq 0)$$
もあとで必要となる。

おまけ　ここで U の意味について少し述べるのが
いつものシキタリ：知っている人も多いので
今更だが，はじめての人もいると思うので…
・KMほどもない simple Lie alg は deform できない
・ここのものは $q = e^{\hbar} = 1 + \hbar + \cdots \to 1$ のときに
もとにもどるようなものを $[\,,\,]$ をこえて定めたことに
なっている

㊟ あと　ときどき問題になるのは
$$d = z\frac{d}{dz}$$
を U の中に入れるかどうかであるが
ここでは厳密に
q^d を入れたものを U
q^d をおとしたものを U'
i.e. $U' := U'_q\, sl_2 := \Big($ e_i, f_i, t_i $(i=0,1)$ が生成する U の subalg (i.e. q^d をおとす) $\Big)$
と区別する。
また
$U_q(sl_2) := \Big($ e_1, f_1, t_1 で生成された U の subalg. $\Big)$

Hopf 代数の構造

初心者には沢山symbolが出てきてわかりにくいかとは思うが　それらをfullに使わないと話ができないので　使えるようになるためにも…

Fact. 次の linear maps (Δ, ε, S) が存在する：

① $\Delta : U \longrightarrow U \otimes U$, $\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b)$

$$\Delta(e_i) := e_i \otimes 1 + t_i \otimes e_i$$
$$\Delta(f_i) := f_i \otimes t_i^{-1} + 1 \otimes f_i$$
$$\Delta(q^h) := q^h \otimes q^h$$

② $\varepsilon : U \longrightarrow K$, $\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b)$

$$\varepsilon(e_i) = \varepsilon(f_i) = 0, \quad \varepsilon(q^h) = 1.$$

これも標準になし→ 最近は a とおくことが多いが ここでは S とおく.

③ $S : U \longrightarrow U$, $S(ab) = S(b)S(a)$ 反準同型

$$S(e_i) = -t_i^{-1} e_i, \quad S(f_i) = -f_i t_i, \quad S(q^h) = q^{-h}$$

- これらの定義がうまくいってるか？ というcheckは必要：e.g.

$$\Delta(e_i)\Delta(f_i) - \Delta(f_i)\Delta(e_i) \overset{?}{=} \Delta\left(\frac{t_i - t_i^{-1}}{q - q^{-1}}\right).$$

しかし，それは確かにうまくいくことがわかる。

重要なのはむしろ次の性質：

(1) $(\Delta \otimes id)\Delta = (id \otimes \Delta)\Delta$

(2) $(\varepsilon \otimes id)\Delta = id = (id \otimes \varepsilon)\Delta$

(3) $m(S \otimes id)\Delta = \varepsilon = m(id \otimes S)\Delta$

ここに $m : U \otimes U \to U$ は積：$a \otimes b \mapsto ab$.

証明:

$a\in U \longmapsto \Delta(a)=\sum a_i'\otimes a_i'' \in U\otimes U$ とかけると、ちょうど各々は

(1) $\Leftrightarrow \sum \Delta(a_i')\otimes a_i'' = \sum a_i'\otimes\Delta(a_i'') \in U^{\otimes 3}$

(2) $\Leftrightarrow \sum \varepsilon(a_i')\, a_i'' = a = \sum a_i'\,\varepsilon(a_i'')$

(3) $\Leftrightarrow \underset{\substack{\cap\\ U}}{\sum S(a_i')a_i''} = \underset{\substack{\cap\\ K}}{\varepsilon(a)}\cdot \underset{\substack{\cap\\ U}}{1} = \underset{\substack{\cap\\ U}}{\sum a_i' S(a_i'')}$

ということをイミしている。

定義. 代数 A と、代数射 $\Delta: A\longrightarrow A\otimes A$
$\varepsilon: A\longrightarrow K$
反代数射 $S: A\longrightarrow A$
が与えられ 性質(1)~(3)が成り立つとき (A,Δ,ε,S) を
Hopf代数という。

これだけみるとかなり抽象的というか人工的なものだが 自然であることはおいおいわかってくると思う。
((J先生にとっては)) イミは表現で考えるとわかりやすい:

Hopf代数構造のイミ.

群の表現 V_1, V_2 のテンソル積 などというのは しょっちゅう考えるし これに抵抗をもつ人はいない:

$$g(v_1\otimes v_2) = gv_1\otimes gv_2.$$

リー環のとき: $g=e^{\varepsilon X}$ (($\varepsilon\to 0$)) とすると⊛

$$X(v_1\otimes v_2) = (Xv_1)\otimes v_2 + v_1\otimes(Xv_2)$$

((($Xv_1\otimes Xv_2$ ではなく!)))

i.e. テンソル積 $\Leftrightarrow \Delta(X)=X\otimes 1+1\otimes X$. と $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ に $\mathfrak{g}$ をうめこむ.

これがうまくいく $\Leftrightarrow [\Delta(X),\Delta(Y)] = \Delta([X,Y])$

こういうことを一般化したのがHopf代数といって良いと思う。

⊛あと、群の方からのセツメイもあるだろうが…

◎ 表現のレベルでは：

Hopf 代数 A の表現 $\pi_V : A \longrightarrow \mathrm{End}_K(V)$ （これは単に代数射）

達について、"付加構造" $\underset{\varepsilon}{\Delta}$ によって次のようなものができる。

(1) テンソル積： $A \xrightarrow{\Delta} A\otimes A \xrightarrow{\pi_{V_1}\otimes\pi_{V_2}} \mathrm{End}(V_1\otimes V_2)$.

(2) 自明表現： $A \xrightarrow{\varepsilon} K = \mathrm{End}(K)$, ie. $a.1 = \varepsilon(a)1$.

(3) 反傾表現： $A \xrightarrow{S} A \xrightarrow{\pi_V^t} \mathrm{End}(V^*)$

（双対表現）

dual rep (π_V, V)

$a \longmapsto \pi_V(a)^t$ (※)

反準同型　反準同型　だから合成は代数射。

ここでギモンがあってしかるべきで 代数射にするためだけなら別に S でなくても良いはずなのに：

こうするのは「Δ との相性がいい」ため。

※ 一般に $f\in\mathrm{Hom}_K(V,W)$ に対し $f^t\in\mathrm{Hom}_K(W^*,V^*)$ を $\langle f^t(w^*),v\rangle := \langle w^*, f(v)\rangle$ で定める。（以後 t は右肩におく。）

性質 (1)〜(3) は、上の表現レベルの話とは次のように対応している（∵ axiom として自然。）

(1) $\longleftrightarrow$ $(V_1\otimes V_2)\otimes V_3 \overset{\text{canonically}}{\cong} V_1\otimes(V_2\otimes V_3)$

$(\Delta\otimes id)\Delta = (id\otimes\Delta)\Delta$

Q. $V_1\otimes V_2 \overset{?}{\cong} V_2\otimes V_1$ か？

… $\Delta(a) = \sum a_i'\otimes a_i''$ とかくと

$a.(v_1\otimes v_2)$
$= \Delta(a)v_1\otimes v_2$
$= \sum a_i' v_1\otimes a_i'' v_2 \xmapsto{\text{単純に成分入替すると}} \sum a_i'' v_2\otimes a_i' v_1$ と違う！

$a.v_2\otimes v_1$
$= \sum a_i' v_2\otimes a_i'' v_1$

A.(注意). 一般のHopf代数では 一般に $V_1 \otimes V_2 \neq V_2 \otimes V_1$ (!) と限らぬ。

例. U_q, $q^N=1$ ($/\mathbb{C}$) で反例あり。

我々の状況では〈non-trivial に〉$V_1 \otimes V_2 \simeq V_2 \otimes V_1$ が作れることがあとでわかる。

——〈休憩〉——

注. ところで
$$\Delta(e_i) = e_i \otimes 1 + t_i \otimes e_i$$
$$\Delta(f_i) = f_i \otimes t_i^{-1} + 1 \otimes f_i$$
$$\Delta(q^h) = q^h \otimes q^h$$
というΔ等の定義だが (Δ, ε, S) のとり方は人によって違う。((とくに, Hopf代数というときSは可逆とする — 我々のUでは正しい。)

- まず, $\sigma : A\otimes A \longrightarrow A\otimes A$, $a\otimes b \overset{\sigma}{\mapsto} b\otimes a$ とすれば, $(\sigma\circ\Delta, \varepsilon, S^{-1})$ も一般に別のHopf代数構造。

よく $\sigma\circ\Delta = \Delta'$ とかき "opposite な余積" とよぶ。

いうのを忘れたが, ふつう
Δ: 余積
ε: counit
S: antipode
とよばれる。

- その他
$$\Delta(e_i) = e_i \otimes t_i^{-1} + 1\otimes e_i$$
$$\Delta(f_i) = f_i \otimes 1 + t_i \otimes f_i$$
$$\Delta(q^h) = q^h \otimes q^h$$
でも良い: Frenkel-Reshetikhin はそうだろう。

・古典 Lie 環のときは

$$\Delta(X) = X\otimes 1 + 1\otimes X$$

$$S(X) = -X$$

$$\therefore\ S^2 = id$$

であるが，U においては：

$$S(e_i) = -t_i^{-1}e_i\ ,\quad S(f_i) = -f_i t_i\ ,\ S(q^h) = q^{-h}$$

$$\therefore\ S^2(e_i) = S(-t_i^{-1}e_i) = -(-t_i^{-1}e_i)t_i = q_i^{-2}e_i\ ,$$

$$S^2(f_i) = q_i^2 f_i\ ,$$

$$S^2(q^h) = q^h\ .$$

すなわち $S^2 \neq 1$. しかしこの S^2 という準同型は

$$\rho = \Lambda_0 + \Lambda_1\ :\ (\rho, \alpha_i) = 1\ \text{をみたす}$$

を用いると

$$\begin{cases} q^{-2\rho}e_i q^{2\rho} = q^{-(2\rho,\alpha_i)}e_i = q^{-2}e_i \\ q^{-2\rho}f_i q^{2\rho} = q^{(2\rho,\alpha_i)}f_i = q^2 f_i \\ q^{-2\rho}q^h q^{2\rho} = q^h \end{cases}$$

なので，結局

$$\boxed{S^2(x) = q^{-2\rho}\,x\,q^{2\rho} \qquad \forall x\in U}$$

とかける〈inner!〉.　　　これはあとで用いる。

表現. 2つのタイプの表現を扱う. [今回のマリユフさんのセミナーに来た人には，すでに聞き知っての通り].

$\boxed{\text{(i) 最高ウェイト表現.}}$

$$\lambda = m_0\Lambda_0 + m_1\Lambda_1 \in P^+ \quad \left(\left(m_0, m_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\right)\right)^{⊛}$$

⊛ $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ でなく $\mathbb{C}$ でもできる。でも今回は細かいところには立入らない……

に対して,

$V(\lambda)$: 最高ウェイト λ をもつ既約最高ウェイト加群

i.e. $V(\lambda) := U/I$,

但 I は $\left\{ e_i,\ f_i^{\langle\lambda, h_i\rangle+1}\ (i=0,1),\ q^h - q^{\langle\lambda, h\rangle}\cdot\mathrm{id}\ (h\in P) \right\}$ で生成される左 ideal

が定まる。すなわち

$$1 \bmod I = |\lambda\rangle \qquad \text{ケットベクトル}$$

と書くと

$$\begin{cases} e_0|\lambda\rangle = 0,\ e_1|\lambda\rangle = 0, \\ f_0^{m_0+1}|\lambda\rangle = 0 = f_1^{m_1+1}|\lambda\rangle, \\ q^h|\lambda\rangle = q^{\langle\lambda, h\rangle}|\lambda\rangle, \\ \qquad V(\lambda) = U|\lambda\rangle \qquad \text{単項式} \end{cases}$$

ここで q^h は scalar 倍だし e_i は消してしまうので 生成するには f_i しか使えない。正確には次が知られている：

((Poincaré-Birkhoff-Witt) for U.)

Fact.
$$U^+ := \langle e_0, e_1\rangle_{\text{subalg}} \subset U$$
$$U^- := \langle f_0, f_1\rangle_{〃} \subset U$$
$$U^0 := \langle q^h\rangle_{〃}$$
としたとき
$$U^- \otimes U^0 \otimes U^+ \xrightarrow{\sim} U \quad : \text{vector sp. の同型}$$
$$x\otimes y\otimes z \longmapsto xyz.$$

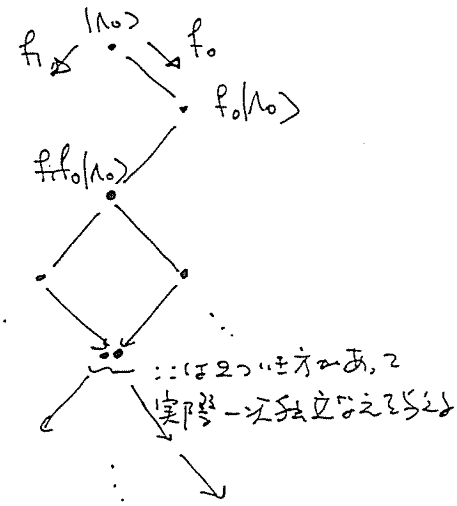
これにより確かに $V(\lambda) = \mathrm{Span}\{f_{i_1}\cdots f_{i_k}|\lambda\rangle\}$.

② 感じがわからないといけないので、くどいようだが絵をかいてみると：

$V(\Lambda_0)$ のとき.

$\Leftrightarrow m_0=1,\ m_1=0$

$$\therefore \begin{cases} f_0^{\,2}\,|\Lambda_0\rangle = 0 \\ f_1\,|\Lambda_0\rangle = 0 \end{cases}$$



ここで・の位置は"weight"に従って書いたことになっている。

def 一般にU加群Mに対し $\nu \in P^*$ ごとに

$$M_\nu := \{ v \in M \mid q^h v = q^{\langle \nu, h\rangle} v \quad \forall h \in P \}$$

をweight ν のweight部分空間という。

すると $v \in M_\nu \Rightarrow f_i v \in M_{\nu - \alpha_i}$

となって $-\alpha_1 \swarrow \ \searrow -\alpha_0$ の座標の下に上のような絵ができることになる。

さて 2つめのタイプの表現は:

$\boxed{\text{(ii). 有限次元表現 (の affine 化).}}$

< $\overset{\ast}{U_q}(\hat{sl}_2)$ は 大体 loop alg, loop alg は (その alg の) fin. dim. rep に作用できる... >

・ まず $U_q(sl_2)$ の $(l+1)$ 次元既約表現 を用意しておく㊟ ($l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: fix.)

㊟ $(l+1)$-dim irrep., どうとっても一緒でも良いけど これで十分だろう. explicitだし.

$$V(l) = K v_0 \oplus K v_1 \oplus \cdots \oplus K v_l ,$$

$$\begin{cases} e_1 v_k := [l-k+1]\, v_{k-1} \\ f_1 v_k := [k+1]\, v_{k+1} \\ t_1 v_k := q^{l-2k}\, v_k \end{cases}$$

$$(v_{-1} = v_{l+1} = 0.)$$

特に $\underline{l=1}$ のとき : $V(1) = V = K v_+ \oplus K v_-$,

$$\begin{array}{ccc} & v_+ & v_- \\ e_1 = & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \end{array}, \quad f_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad t_1 = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{bmatrix}.$$

・ さて これを $\underline{\text{affine 化}}$ する.

$\underline{\text{注}}$: $\hat{sl}_2$ のときは $\begin{cases} \text{・generators \& relations} \\ \text{・loop alg の extension} \end{cases}$

と2つの def ができたが $U(\hat{sl}_2)$ の方は gen. と reln で def して..て loop の parameter z は みえて..ない.

affine化 とは それを 表現のレベルで みえるようにすることにあたる.

$q=1$ でいえば

$sl_2\otimes K[z,z^{-1}]\oplus Kc\oplus \underbrace{Kd}_{\text{忘れる}}$

で $c=0$ とした

loop の rep.

$sl_2\otimes K[z,z^{-1}] \curvearrowright V\otimes K[z,z^{-1}]$

$d \curvearrowright z\frac{d}{dz}$

これは $c=h_0+h_1=0$

i.e. h_0+h_1 は逆元

が必要になっている(!)

def V: $U_q(sl_2)$ 加群　とするとき

$\mathrm{Aff}(V) := V_z := V\otimes K[z,z^{-1}]$: $U=U_q(\widehat{sl}_2)$ 加群

を次のように作る。

$$\begin{cases} e_1\mapsto e_1\otimes \mathrm{id},\ f_1\mapsto f_1\otimes \mathrm{id},\ t_1\mapsto t_1\otimes \mathrm{id}, \\ e_0\mapsto f_1\otimes z,\ f_0\mapsto e_1\otimes z^{-1},\ t_0\mapsto t_1^{-1}\otimes \mathrm{id}, \\ q^d\mapsto \mathrm{id}\otimes q^{z\frac{d}{dz}} \\ \quad \text{ここで}\ (q^{z\frac{d}{dz}}\varphi)(z) := \varphi(qz). \end{cases}$$

この表現が well-defined であることも示せばできる

この表現は $\otimes K[z,z^{-1}]$ しているだけ無限次元

となっている。しかしこれは次のようにもできる。

$x\in K^{\times}$ を固定し，上で $\otimes z$ を $\cdot x$ と読むと

$\underset{\sim}{U'}$ 加群の構造が同様に V に入る。

$e_0 = xf_1$

そうしてできる U'-加群を V_x と書く。

―― x を数と思うと x の何次式ということに

行かなくなるから degree はおかしくない

→ d も更に($=c$ の他に忘れる)

→ U'-加群(にしかならない…)

注　(i)は KM alg でも定義できるが (ii)は affine と

いう事情など色々な特殊な状況の下に定義できる。

諸概念の確認

も含め、いくつか考えておく。

⊛ $V = Kv_+ \oplus Kv_-$,

$V \otimes V \ni v_+ \otimes v_+$ t_1 の固有値 q^2

$v_+ \otimes v_-, v_- \otimes v_+$ 1

$v_- \otimes v_-$ q^{-2}

例1 $V = V(1)$, V_z について、⊛

Q. $V_z \otimes V_w \xrightarrow{\sim} V_w \otimes V_z$ (U加群として)

i.e. $\Leftrightarrow$ $\exists ?$ $\check{R} : V_z \otimes V_w \xrightarrow{\sim} V_w \otimes V_z$

$\to$ $\check{R}(\pi_z \otimes \pi_w)\Delta(x) = (\pi_w \otimes \pi_z)\Delta(x) \cdot \check{R}$.

— あるとすれば ($x = t_1$ ととってみれば)

$\check{R}(x_+ \otimes x_+) = ⓒ\, v_+ \otimes v_+$ が必要。

ここで $\check{R}(x_+ \otimes x_+) = 1 \cdot v_+ \otimes v_+$

と正規化して計算する (π_z v, π_w z)

$x = f_1$:

$\to$ $\check{R}(f_1 \otimes t_1^{-1} + 1 \otimes f_1)(v_+ \otimes v_+) = (f_1 \otimes t_1^{-1} + 1 \otimes f_1)v_+ \otimes v_+$

∴ $\check{R}(v_- \otimes q^{-1}v_+ + v_+ \otimes v_-) = v_- \otimes q^{-1}v_+ + v_+ \otimes v_-$.

$x = e_0$:

$\to$ $\check{R}(z v_- \otimes v_+ + q^{-1} v_+ \otimes w v_-) = w v_- \otimes 1 + q^{-1} v_+ \otimes z v_-$

$\to$ これらを連立させて解けば

$$\begin{cases} \check{R}\, v_- \otimes v_+ = \cdots \\ \check{R}\, v_+ \otimes v_- = \cdots \end{cases}$$

が共にわかる。もう一度 f を使うと $\check{R} v_- \otimes v_-$ の式もえて、結局 ⓩ

⑦ 結果.

$$\check{R} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \dfrac{z(q-q^{-1})}{zq-wq^{-1}} & \dfrac{z-w}{zq-wq^{-1}} & \\ & \dfrac{z-w}{zq-wq^{-1}} & \dfrac{w(q-q^{-1})}{zq-wq^{-1}} & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

《 $v_+\otimes v_+$, $v_+\otimes v_-$, $v_-\otimes v_+$, $v_-\otimes v_-$ に関して 》

となる。//

〈あと，時間がないので結果のみになってしまった…〉
《17:34》

例12　$V = V(1)$　　$V^* = Kv_+^* \oplus Kv_-^*$

$\{v_+^*, v_-^*\}$: $\{v_+, v_-\}$ の dual base

$(V_z)^*$ とかこうと → ちょっと考えなくてはならないが，略.

このとき $(V^*)_z = V^*_z$ とかくと，実は

$$\begin{cases} V_{zq^{-2}} \xrightarrow{\sim} V^*_z \\ v_+ \longmapsto v_-^* \\ v_- \longmapsto -q v_+^* \end{cases}$$

は $U_q(\widehat{sl}_2)$ の加群として同型，$K[z, z^{-1}]$-linear となる。… $V_\cdot$ と $V^*_\cdot$ とに関係がある

— 証明するつもりだったが略. 概念を忠実に追えばわかる //

それから，単位がほしい人のために：

演習. $V = V(1) = Kv_+ \oplus Kv_-$ とし

$$V\otimes V \ni \begin{cases} u_0 := v_+\otimes v_+ , \quad u_1 := q^{-1} v_-\otimes v_+ + v_+\otimes v_- \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u_0' := q\, v_-\otimes v_+ - v_+\otimes v_- \\ u_2 := v_-\otimes v_- \end{cases}$$

とおく。このとき

① $U_q(sl_2)$ 加群として

$$\begin{cases} Ku_0\oplus Ku_1\oplus Ku_2 \simeq V(2), \\ Ku_0' \simeq V(0) \end{cases}$$

であることを示せ。

② $x, y \in K^\times$ (fix) し $V_x\otimes V_y$: U'加群を考える。このとき

$$e_0 u_0 = \frac{1}{[2]}\left\{(x+y)u_1 + (x-q^{-2}y)u_0'\right\}$$

$$e_0 u_0' = (-x+q^2 y)u_2$$

となることを確かめ，更にこの他の U' の作用を書き下せ。

③ ②を使って次を示せ：

$x/y = q^2 \iff V(0)$ が U'-submodule

$x/y = q^{-2} \iff V(2)$ 〃

$x/y \neq q^{\pm 2} \iff V_x\otimes V_y$ は U' の作用で既約。

u_0
$\downarrow$
u_1
$\downarrow$
u_2

②の coef. が 0になったりすると u_2に辿りつかずに u_0, u_1で とじたりする。それを調べる。

17:42

No 20

Date '92.2.4

神保先生・第2日 — 準備のつづき

§2. Universal R-matrix

昨日 $V_1\otimes V_2$ と $V_2\otimes V_1$ との intertwiner を作ってみたが Universal R というのはそれを "表現を考える前" に代数のレベルで作るもの.
Hopf algebra の演算をたくさん使う。
また いわゆる
"sigma notation"
というのを使う: 昨日は

$$\Delta(a) = \sum_i a_i' \otimes a_i'' \in A\otimes A$$

などと書いていたが 今日こうしていると たちまち 添字がなくなるので 教科書にしたがい(!)

$$\Delta(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)}$$

のようにかく. この(a)も略すことが多…

$$\Delta^{(n)} = (\Delta\otimes id)\circ\Delta^{(n)}, \quad \Delta^{(1)} = id$$

についても

$$\Delta^{(n)}(a) = \sum a_{(1)}\otimes \cdots \otimes a_{(n+1)}$$

とかく.
この記法は((あぶないときもあるが)) 慣れると便利.
Hopf代数の公理は

(1) $\sum \Delta(a_{(1)}) \otimes a_{(2)} = \sum a_{(1)} \otimes \Delta(a_{(2)})$
$= \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes a_{(3)}$

左辺で $a_{(1)}$ というのは → イミがちがいうる

(2) $\sum \varepsilon(a_{(1)})\, a_{(2)} = a = \sum a_{(1)}\, \varepsilon(a_{(2)})$

(3) $\sum S(a_{(1)})\, a_{(2)} = \sum a_{(1)}\, S(a_{(2)})$

とかける。

例1 〈どれ位このnotationがイイかデモ(?)〉 $\Delta^{(3)}(a) = \sum a_{(1)} \otimes \underbrace{a_{(2)} \otimes a_{(3)}}_{S} \otimes a_{(4)}$

$$\sum a_{(1)} \otimes \underbrace{S(a_{(2)})\, a_{(3)}} \otimes a_{(4)}$$

$= \sum a_{(1)} \otimes \varepsilon(a_{(2)}) \otimes a_{(4)}$ となるべきだが $a_{(3)}$ に昇格する

$$= \sum a_{(1)} \otimes 1 \otimes a_{(2)}.$$

etc. ∅

Quantum double.

Hopf alg

$$A \rightsquigarrow A^* \xrightarrow[\text{Drinfeld}]{} A \otimes A^*$$

一般論で A^* もHopf alg になる

vector sp. として ここに alg. str. を (⊗ のとび方に)入れなおして また Hopf alg. にできる.

- しかし ∞-dim だと * の位相などが問題となってくるので 以下しばらく $\dim A < \infty$ と仮定して全てを準備し、「∞ でもうまくいく」の一言で逃げる。

↗

⟨ , ⟩

例 A : $\dim A < \infty$, Hopf alg, $\exists S_A$

$B = A^*$ に m_B, Δ_B, ε_B, S_B, 1_B を次で定める。

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
m_B) & \langle a, b_1 b_2 \rangle := \langle \Delta_A(a), b_1 \otimes b_2 \rangle = \sum \langle a_{(1)}, b_1 \rangle \langle a_{(2)}, b_2 \rangle \\
\Delta_B) & \langle a_1 a_2, b \rangle =: \langle a_2 \otimes a_1, \Delta_B(b) \rangle \\
1_B) & \langle a, 1_B \rangle := \varepsilon_A(a) \\
\varepsilon_B) & \langle 1_A, b \rangle =: \varepsilon_B(b) \\
S_B) & \langle S_A(a), S_B(b) \rangle := \langle a, b \rangle
\end{array}
\right.
$$

Δ_B の $a_2 \otimes a_1$ について：順序に注意（あとのため）あとで式がきれいになるように。

S_A : invertible としてったのがこれで def になってる…

注 Δ_B のところで右辺を $\langle a_1 \otimes a_2, \Delta_B(b) \rangle$ としたときは S_B の式を

$$\langle S_A^{-1}(a), S_B(b) \rangle := \langle a, b \rangle$$

としないといけない…。

def 以上の性質をもつ非退化な pairing

$$A \otimes B \to K$$

を Hopf pairing と呼ぶことにする。

定理 $A, B, \langle , \rangle$: Hopf pairing に対し

次の性質をもつ Hopf 代数 D が唯一つ存在する。

↗

⑦ <u>性質</u>:

(i) $A, B \subset D$ Hopf subalgebra.

(ii) $\begin{array}{ccc} A \otimes B & \longrightarrow & D \\ \cup & & \cup \\ a \otimes b & \longmapsto & ab \end{array}$ は vector space の同型.

(iii) D における積として,

$$ba = \sum \langle a_{(1)}, S(b_{(1)}) \rangle \langle a_{(3)}, b_{(3)} \rangle a_{(2)} b_{(2)}.$$

このときDを $(A, B, \langle , \rangle)$ の, または単にAの, <u>quantum double</u> と呼ぶ。

<u>証明</u> $\{a_i\} \subset A$, $\{b_j\} \subset B$: dual base とすれば
Dのbaseは $\{a_i b_j\}$. このbaseに対し, (i)によれば

$$\Delta_D(a_i b_j) = \Delta_D(a_i) \Delta_D(b_j) = \Delta_A(a_i) \Delta_B(b_j).$$

同様に ε_D, S_D も同じように決まっている。
唯一nontrivialなのは, 積を考えたときで

$$a_i \underbrace{b_j \cdot a_k} b_l$$

ここを入れ替えないと $a_☆ b_☆$ の形にならない。

この入れ替え方を(iii)で与えるとDがちゃんとHopf alg. となる, というのが定理の主張。
有限次元性もいらない。
証明は check が長く退屈なので略。
むしろ $U_q\mathfrak{g}$ との関係を述べた方が有益であろう。

⑦

$U_q\mathfrak{g}$ と quantum double との関係

$U_q sl_2$ の場合を考える

- A：生成元 $x,\ k^{\pm1}$
  関係式 $kxk^{-1}=q^2x$

$$\begin{cases} \Delta(x)=x\otimes 1+k\otimes x, & \Delta(k)=k\otimes k, \\ \varepsilon(x)=0, & \varepsilon(k)=1, \\ S(x)=-k^{-1}x, & S(k)=k^{-1}. \end{cases}$$

(i.e. $A\simeq\langle \underset{x}{\underset{\updownarrow}{e_1}},\ \underset{k}{\underset{\updownarrow}{t_1}}\rangle\subset U_q sl_2$.)

- B：生成元 $y,\ \bar{k}^{\pm1}$
  関係式 $\bar{k}y\bar{k}^{-1}=q^{-2}y$.

(i.e. $B\simeq\langle \underset{y}{\underset{\updownarrow}{f_1}},\ \underset{\bar{k}}{\underset{\updownarrow}{t_1}}\rangle\subset U_q sl_2$)

- Hopf pairing $\langle\ ,\ \rangle$ の決め方。

結局weightのペアリングのような計算.

例えば、

$$\langle kx,\bar{k}\rangle=\langle x\otimes k,\Delta(\bar{k})\rangle=\langle x,\bar{k}\rangle\langle k,\bar{k}\rangle$$
$$\shortparallel$$
$$\langle q^2xk,\bar{k}\rangle=q^2\langle k\otimes x,\Delta(\bar{k})\rangle=q^2\langle k,\bar{k}\rangle\langle x,\bar{k}\rangle$$

$$1=\varepsilon(k)=\langle k,1\rangle=\langle k,\bar{k}\cdot\bar{k}^{-1}\rangle=\langle\Delta(k),\bar{k}\otimes\bar{k}^{-1}\rangle=\langle k,\bar{k}\rangle\langle k,\bar{k}^{-1}\rangle$$

$\therefore\ \langle x,\bar{k}\rangle=0,\ \langle k,\bar{k}^{-1}\rangle=\langle k,\bar{k}\rangle^{-1}.$

同様にして、次が得られる。

$\boxed{\text{pairingの公式}}$

$$\langle x^mk^n,\ y^{m'}\bar{k}^{n'}\rangle=\delta_{mm'}\,q^{\frac{m(m-1)}{2}}[m]!\,\langle x,y\rangle^m q^{-2nn'}$$

$(m,m'\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\ n,n'\in\mathbb{Z}.)$

ⓐ ここで、 $\langle x, y\rangle$ だけは不定で残っているが
これはあたり前で x を scale しても A には
何のかわりもないから これは手で入れなくてはいけない。

ここでは
$$\langle x, y\rangle = \frac{-1}{q-q^{-1}}$$
ととる。 こうすると"良い"ことがあとでわかる。
さて

思い出すと
ba
$= \sum \langle a_{(1)}, S(b_{(1)})\rangle \langle a_{(3)}, b_{(3)}\rangle a_{(2)} b_{(2)}$
であった.

- $D = D(A)$ は何か?

  yx を計算するために まず
  $$\Delta^{(2)}(x) = x\otimes 1\otimes 1 + k\otimes x\otimes 1 + k\otimes k\otimes x$$
  $$\Delta^{(2)}(y) = y\otimes \bar{k}^{-1}\otimes \bar{k}^{-1} + 1\otimes y\otimes \bar{k}^{-1} + 1\otimes 1\otimes y$$

に注意する. $yx = \sum \langle \quad \rangle \langle \quad \rangle x_{(2)} y_{(2)}$ だから
pairing の面を思い出すと "cross term" は $\langle x, 1\rangle = \varepsilon(x) = 0$
のようにして消える。 結局

$$\begin{aligned} yx = &\ \langle x, S(y)\rangle \langle 1, \bar{k}^{-1}\rangle 1\cdot \bar{k}^{-1} \\ &+ \langle k, S(1)\rangle \langle 1, \bar{k}^{-1}\rangle xy \\ &+ \langle k, S(1)\rangle \langle x, y\rangle k\cdot 1 \\ = &\ \langle x, -y\bar{k}\rangle \bar{k}^{-1} \\ &+ xy \\ &+ \langle x, y\rangle \\ = &\ \frac{1}{q-q^{-1}} \bar{k}^{-1} + xy - \frac{1}{q-q^{-1}} k. \end{aligned}$$

$$\therefore\ [x, y] = \frac{k - \bar{k}^{-1}}{q-q^{-1}}.$$

Date

② この $[x, y]$ が一番厄介な pattern で あとはカンタンに

$$y \cdot k = q^2 k y$$
$$\bar{k} \cdot x = q^2 x \bar{k}$$
$$\bar{k} \cdot k = k \bar{k}$$

とわかる。

以上をまとめると,

$$D = \langle x, y, k^{\pm 1}, \bar{k}^{\pm 1} \rangle$$

$k x k^{-1} = q^2 x$ $\qquad \Delta(x) = x \otimes 1 + k \otimes x$

$\bar{k} y \bar{k}^{-1} = q^{-2} y$ $\qquad \Delta(y) = y \otimes \bar{k}^{-1} + 1 \otimes y$

$[x, y] = \dfrac{k - \bar{k}^{-1}}{q - q^{-1}}$ $\qquad$ etc,

$z := k \cdot \bar{k}^{-1}$ は central(*) $\qquad \Delta(z) = z \otimes z$.

(*) k も $\bar{k}$ も x, y と同じ rel をみたすから $k\bar{k}^{-1}$ は x, y と可換.

(z は Hopf ideal を生成しているから それで割ることができて)

$$D / \langle z - 1 \rangle \simeq U_q(sl_2) \quad : \text{Hopf alg. として.}$$

注 ここで $z-1$ で割るところは もともと pairing を nondeg にするためもあって A と B とで Cartan がダブっている, だから それを割らないといけないことになるわけ。 (U_q とみるには)

一般の場合も同様で、次が知られている

<u>定理</u> (Rosso, 谷崎)

$$\begin{cases} U^{\geqq 0} := U^+U^0 := \langle e_i, q^h \rangle \subset U \\ U^{\leqq 0} := U^-U^0 := \langle f_i, \overline{q^h} \rangle \subset U \end{cases}$$

とおく。 《ここだけの記号。q^h のダミーというイミで $-$ をかけている》

(i) 次をみたす Hopf pairing $\langle\ ,\ \rangle : U^{\geqq 0} \times U^{\leqq 0} \longrightarrow K$ が唯一存在する:

$$\langle q^h, \overline{q^{h'}} \rangle = q^{-(h,h')}$$

$$\langle q^h, f_i \rangle = 0 = \langle e_i, \overline{q^h} \rangle$$

$$\langle e_i, f_j \rangle = -\delta_{ij} \frac{1}{q-q^{-1}}.$$

(ii)
$$\begin{cases} U^+_\beta := \mathrm{span}\{e_{i_1}\cdots e_{i_r} \mid \alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_r}=\beta\} \\ U^-_\beta := \mathrm{span}\{f_{i_1}\cdots f_{i_r} \mid \quad \text{〃} \quad\} \end{cases}$$

: for $\beta \in Q_+$

とおくと 《$\widehat{sl_2}$ では, $\beta = m_0\alpha_0 + m_1\alpha_1 \in Q_+ = \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_0 \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_1$》

$\langle\ ,\ \rangle$ に関し $U^+_\beta \perp U^-_{-\gamma}$: $\beta \neq \gamma$

$\langle\ ,\ \rangle : U^+_\beta \times U^-_{-\beta} \longrightarrow K$ は非退化.

(iii) 対応する quantum double D に対し

$$D \big/ \langle q^h - \overline{q^h} \rangle \simeq U_q\mathfrak{g} \quad \text{(Hopf代数として)}$$

(注) pairing の非退化性のみ non-trivial : Verma加群を使って示すが、「q が $\mathbb{Q}$ 上超越的」を使う。本当にあぶないのは1の巾根のときだけだと思われるが、それを示すのは難しいらしい…。

[文献 : 谷崎, RIMS preprint Killing forms, Harish-Chandra isomorphism & Universal R matrix (?).]

Universal R-matrix.

再び $\dim A<\infty$, $B=A^*$, $D=D(A)$: quantum double

$\{a_i\}\subset A$, $\{b_i\}\subset B$: dual base

$$R:=\sum a_i\otimes b_i\in A\otimes B\hookrightarrow \underbrace{D\otimes D}_{\text{代数としての}\otimes}$$

とおく (canonical element.) (i.e. 積は成分ごと.)

すると これが 新しい "universal R" となる:

定理 (Drinfeld)

(i) $R\cdot\Delta(x)=\Delta'(x)\cdot R \quad \forall x\in D$

$\Delta'(x)=\sigma\circ\Delta(x)=\sum x_{(2)}\otimes x_{(1)}$

(ii) $(\Delta\otimes id)R=R_{13}R_{23}$

$(id\otimes\Delta)R=R_{13}R_{12}$

但 $R_{12}=\sum a_i\otimes b_i\otimes 1$, $R_{13}=\sum a_i\otimes 1\otimes b_i$,

$R_{23}=\sum 1\otimes a_i\otimes b_i$.

(iii) $(\varepsilon\otimes id)R=1=(id\otimes\varepsilon)R$.

また, R は可逆で

$(S\otimes id)R=R^{-1}=(id\otimes S^{-1})R$

となる. (Sでなく S^{-1} なのは Bの方で Δ をひっくり返していることと関係.)

定義 D : Hopf代数, $R\in(D\otimes D)^\times$ が

(i)〜(iii) をみたすとき (D,R) を 準三角 Hopf代数という。

quasi-triangular.

(YBE ⇒ star-triangle rel. とか triangle eq. など 呼ばれる のtriangle だと思われる)

定理の系 $\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}$.

$$
\begin{aligned}
\because \quad \text{LHS} &= \mathcal{R}_{12}(\Delta\otimes id)\mathcal{R} && :(\text{ii}) \\
&= \sum (\mathcal{R}\,\Delta(a_i))\otimes b_i && \text{よ}(\text{i}) \\
&= \sum (\Delta'(a_i)\,\mathcal{R})\otimes b_i && \text{よ } \Delta' = \sigma\circ\Delta \\
&= (\sigma\otimes id)(\Delta\otimes id)\mathcal{R}\cdot\mathcal{R}_{12} && \text{よ}(\text{ii}) \\
&= (\sigma\otimes id)(\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23})\cdot\mathcal{R}_{12} \\
&= \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\cdot\mathcal{R}_{12} = \text{RHS}. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

天下りに定理の性質を書き並べたので不明もあろうか 証明はあとまわしにして定理をまず示すことにする

証明のsketch

(i)を $x = a \in A$ のときに示す。

$$\Big(\sum a_i\otimes \underbrace{b_i\Big)\Big(\sum a_{(1)}\otimes a_{(2)}}\Big) \overset{?}{=} \Big(\sum a_{(2)}\otimes a_{(1)}\Big)\Big(\sum a_i\otimes b_i\Big)$$

ここで、ここの積の逆順. これをなおすと:

$a_{(2)}$を3つにわけるから $a_{(2)}, a_{(3)}, a_{(4)}$ がでてくる

$$(*):\quad \text{LHS} = \sum a_i a_{(1)}\otimes \langle a_{(2)}, S(b_{i(1)})\rangle\langle a_{(4)}, b_{i(3)}\rangle a_{(3)} b_{i(2)}.$$

一方 dual base の定義から,

$$(\#):\quad \forall b\in B,\quad b = \sum_j \langle a_j, b\rangle b_j,$$

$$(\#)':\quad \forall a\in A,\quad a = \sum \langle a, b_i\rangle a_i.$$

(＊)において、(#)を $b = b_{i(2)}$ として適用すると

〈 〉〈 〉〈 〉のところを 揃えて 〈⊗⊗, ⊗⊗〉にかいた

$$
\begin{aligned}
(*) &= \sum \langle a_{(2)}, S(b_{i(1)})\rangle\langle a_{(4)}, b_{i(3)}\rangle\langle a_j, b_{i(2)}\rangle a_i a_{(1)}\otimes a_{(3)} b_j \\
&= \sum \langle S^{-1}(a_{(2)})\otimes a_j\otimes a_{(4)},\ \underbrace{b_{i(1)}\otimes b_{i(2)}\otimes b_{i(3)}}_{\Delta^{(2)}(b_i)}\rangle a_i a_{(1)}\otimes a_{(3)} b_j
\end{aligned}
$$

Hopf pairingの性質より σ∘mult

$$= \sum \langle a_{(4)} a_j S^{-1}(a_{(2)}),\ b_i\rangle a_i a_{(1)}\otimes a_{(3)} b_j$$

$$= ㋐$$

㋐ 更に，(#) を $a = a_{(4)} a_j S^{-1}(a_{(2)})$ として適用すると

$$㋐ \equiv \sum \langle a_{(4)} a_j S^{-1}(a_{(2)}), b_i \rangle a_i a_{(1)} \otimes a_{(3)} b_j$$

$$= \sum a_{(4)} a_j \underbrace{S^{-1}(a_{(2)}) a_{(1)}}_{S^{-1}(S(a_{(1)}) a_{(2)})} \otimes a_{(3)} b_j$$

$$= \sum a_{(3)} a_j S^{-1}(\varepsilon(a_{(1)})) \otimes a_{(2)} b_j$$

$$= \sum a_{(2)} a_j \otimes a_{(1)} b_j$$

$$= \text{RHS}.$$

となって，示せた。//

Hopf alg の公理の double contr. は全ていえどかけでないか(?)

—— リボンでかける (武部, のうみ.)

< 16:49 —— 休憩 —— >

< 17:01 —— 再開 —— >

<u>Remark</u> $R^{(-)} = \sigma(R^{-1}) = \sum b_i \otimes S(a_i)$

も (i)〜(iii) をみたす。 $B \ni f$, $A = U^{\geq 0} \ni e$

i.e. uniqueness はこれだけではない。

三角性を要求すれば up to Δ(Center) 倍くらいで

unique といえるかもしれない。

表現のレベルで(i)〜(iii)を書き直す。

Universal $R \in D \otimes D$

↓ 表現

"functorial properties"

[(i)〜(系)の……など]

をもつ intertwiners の族

D の表現 (π_V, V), … に対し

$$R_{VW} := (\pi_V \otimes \pi_W)(\mathcal{R}) \quad \in \mathrm{End}(V \otimes W)$$

とおく.

(i) $\leftrightarrow$ $R_{VW}(\pi_V \otimes \pi_W)(\Delta(x)) = (\pi_V \otimes \pi_W)(\Delta'(x)) \cdot R_{VW}$

(ii) $\leftrightarrow$ $R_{V_1 \otimes V_2, W} = R_{V_1 W} R_{V_2 W}$ on $V_1 \otimes V_2 \otimes W$,

$R_{V, W_1 \otimes W_2} = R_{V W_2} R_{V W_1}$ on $V \otimes W_1 \otimes W_2$.

《$R_{V_1 W}$ は V_2 上 id, etc.》

(iii) $\leftrightarrow$ $R_{\underbrace{K}_{\text{trivial rep.}}, V} = \mathrm{id}_V = R_{V, K}$,

$R_{V^*, W} = (R_{VW}^{-1})^{t_1}$, $R_{VW^*} = (R_{VW}^{t_2})^{-1}$.

(系) $\leftrightarrow$ $R_{V_1 V_2} R_{V_1 V_3} R_{V_2 V_3} = R_{V_2 V_3} R_{V_1 V_3} R_{V_1 V_2}$ on $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$.

$\odot$ for e.g. (iii).

$$R_{VW^*}^{-1} = (\pi_V \otimes \pi_{W^*})(\mathcal{R}^{-1}) \qquad \pi_{W^*} : D \xrightarrow{S} D \xrightarrow{\pi_W^t} \mathrm{End}(W^*), \quad \mathcal{R}^{-1} = (1 \otimes S^{-1})(\mathcal{R}).$$

$$= (\pi_V \otimes \pi_W^t \circ S)(1 \otimes S^{-1}(\mathcal{R}))$$

$$= (\pi_V \otimes \pi_W^t)(\mathcal{R})$$

$$= [(\pi_V \otimes \pi_W)(\mathcal{R})]^{t_2} = R_{VW}^{t_2}.$$

《 $f_i \in \mathrm{End}(V)$, $g_i \in \mathrm{End}(W)$ のとき

$$(\textstyle\sum f_i \otimes g_i)^{t_1} = \sum f_i^t \otimes g_i,$$
$$(\textstyle\sum f_i \otimes g_i)^{t_2} = \sum f_i \otimes g_i^t.$$ 》

//

<u>Remark</u>

$$R_{VW} : V\otimes W \longrightarrow V\otimes W$$

に対し

$$P_{VW} : V\otimes W \longrightarrow W\otimes V, \quad v\otimes w \longmapsto w\otimes v$$

として

$$\check{R}_{VW} := P_{VW} \circ R_{VW}$$

とおくと これは次をみたす。

$$\check{R}_{VW}\,(\pi_V\otimes\pi_W)\big(\Delta(x)\big) = (\pi_W\otimes\pi_V)\big(\Delta(x)\big)\cdot\check{R}_{VW}.$$

i.e. $\check{R}_{VW} : \underset{\Delta(x)}{V\otimes W} \xrightarrow{\sim} \underset{\underline{\Delta(x)}}{W\otimes V}$ は <u>intertwiner</u>.

(($\Delta'(x)$ではなくて))

//

explicitにかけたのは このときくらいのもの

(!)

(11) さて，$U = U_q\mathfrak{g}$ のときには $\dim U = \infty$ であるが，
形式的に求めると 次の expression を得る

$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ のとき，

$$R = \exp_q\left(-(q-q^{-1})\, e\otimes f\right)\cdot q^{-\frac{1}{2}h\otimes h}$$

但 $\exp_q z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{-n(n-1)/2}}{[n]!} z^n$

$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ のとき，

$$R = \left(\sum_{\beta\in Q_+} C_\beta\right)\cdot q^{-T}$$

但
- C_β : $U^+_\beta \otimes U^-_{-\beta}$ の canonical elt
  i.e. $C_\beta = \sum_i u_{\beta i}\otimes u^i_{-\beta}$
  $\{u_{\beta i}\}_i \subset U^+_\beta$, $\{u^i_{-\beta}\}\subset U^-_{-\beta}$: $\langle\ \rangle$についての dual basis.
- $T = \frac{1}{2}h\otimes h + c\otimes d + d\otimes c$ は
  $\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h}$ の $(\,,\,)$に関するcanonical elt.

問題点
① ∞ 和の解釈
② q^{-T} ? $\left(\left(\in D\otimes D\right.\right.$ になってない$\left.\left.\right)\right)$

②について: $\boxed{\text{Drinfeld の流儀}}$: Uの定義を $q = e^{\hbar}$ とおいて $K[[\hbar]]$ 上の代数とし， $h\in U$ $(h\in\mathfrak{h})$ とする
→ ②の $\sum \frac{1}{n!}\hbar^n T^n$ は $K[[\hbar]]$の位相による completion の中に入っている : $R\in \widehat{U\otimes U}$ (completion)

[see 谷崎, appeared in CMP.]

(7)

⑦

$\boxed{\text{谷崎氏の流儀}}$

h は U に入れない。

$$q^{T} \underbrace{v_\lambda}_{wt\,\lambda} \otimes \underbrace{v_\mu}_{wt\,\mu} := q^{(\lambda,\mu)} v_\lambda \otimes v_\mu$$

という operation を $M \otimes N$ 上に定義すると，$\mathcal{R}$ は $U \otimes U$ には入らないが この operation では書ける。

①について（∞ 和 $\sum C_\beta$ の解釈）

① 最高ウェイト表現のとき：

$$V(\lambda) \otimes V(\mu) \ni v \otimes v'$$

$$C_\beta \cdot \underbrace{v}_{wt\,\lambda} \otimes v' = \sum_i u_{\beta i} v \otimes u^i_{-\beta} v'$$

$$v : wt\,\lambda \Rightarrow u_{\beta i} v \ : wt\ \lambda + \beta.$$

$\therefore$ 各 vector ごとに，有限個の β 以外 $C_\beta v \otimes v' = 0$.

$\therefore$ $\sum C_\beta$ は well-defined.

—— この場合は問題がない。㊟

㊟最高ウェイト表現のとき（この解釈）＋（operation T を入れる）で functorial property が全てまとまることが証明されている。

② 有限次元表現の affine 化.

この場合 ① のように単純には消えない。

$$V = V(1) = Kv_+ \oplus Kv_- \quad \text{のとき}$$

$$\langle\!\langle\, wt = \bar\Lambda_1 \quad -\bar\Lambda_1 \quad : \bar\Lambda_1 = \Lambda_1 - \Lambda_0 \,\rangle\!\rangle$$

$V_z \otimes V_w$ に C_β を作用させる

揃っているときが一番長い

《その長さ $= m_0$》

㊟ $e_0 e_1 e_0 e_1$ のとき

$$v_- \xrightarrow{e_1} v_+ \xrightarrow{e_0} v_-$$

揃ったまま m_0 だけ $\left(\frac{z}{w}\right)$ が出る.

$\beta = m_0\alpha_0 + m_1\alpha_1$ のとき㊟

$$C_\beta v \otimes v' = \sum u_{\beta i} \overset{\pi_z}{\curvearrowleft} \otimes u^i_{-\beta} \overset{\pi_w}{\curvearrowleft} v'$$

$$= \left(\frac{z}{w}\right)^{m_0} \sum \pi_1(u_{\beta i}) v \otimes \pi_1(u^i_{-\beta}) v'$$

π_1 は "$\pi_z|_{z=1}$"

$$\therefore \left(\sum_\beta C_\beta\right) v \otimes v' = \sum \left(\frac{z}{w}\right)^{m_0} (\pi_1 \otimes \pi_1)(C_\beta)\, v \otimes v'$$

—— $\mathcal{R}$ の image は $\mathrm{End}(V \otimes W)$ を係数とする z/w の formal pow. ser. として well-defined.

⑦

⑦ 実例: $V=V(1)$, $V_z\otimes V_w$ 上の $\mathcal{R}$ の image は ?

— $R=(\pi_z\otimes\pi_w)(\mathcal{R})$:

$$R(\pi_z\otimes\pi_w)\Delta(x)=(\pi_z\otimes\pi_w)\Delta'(x)R$$
$$\forall x\in U.$$

・ $R\,v_+\otimes v_+ \overset{\exists}{=} \rho(z/w)\,v_+\otimes v_+$, この ρ を使うと

$$R=\rho(z/w)\underbrace{\bar{R}(z/w)}_{=P\check{R}(z/w)},$$ $\check{R}$: 昨日のもの の書.

・ 他方 $R_{V_z^*V_w}=\left(R_{V_zV_w}^{-1}\right)^{t_1}$, また

$$R_{V_z^*V_w} = (C\otimes id)R_{V_{zq^{-2}},V_w}(C\otimes id)\quad : \exists\ V_z^*\overset{C}{\xleftarrow{\sim}}V_{zq^{-2}}$$

explicit formula より

$$\left(\bar{R}(z)^{-1}\right)^{t_1}=q^{-1}\frac{1-z}{1-q^{-2}z}(C\otimes 1)\bar{R}(zq^{-2})(C\otimes 1)^{-1},$$

これより $\rho(z)\rho(zq^{-2})=q^{-1}\dfrac{1-z}{1-q^{-2}z}$.

$\begin{cases} z\mapsto zq^2 \\ z\mapsto zq^4 \end{cases}$ として比べると

$$\begin{cases} \dfrac{\rho(z)}{\rho(zq^4)}=\dfrac{(1-q^2z)^2}{(1-z)(1-q^4z)} \\ \rho(z)\in K[[z]],\quad \underline{\rho(0)=q^{-1/2}}\ ※ \end{cases}$$

これより $\dfrac{\rho(z)}{\rho(zq^{4n})}=\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}\frac{(1-q^{2+4j}z)^2}{(1-q^{4j}z)(1-q^{4j+4}z)}$.

$n\to\infty$ として

$$\therefore\quad \rho(z)=q^{-1/2}\frac{(q^2z)_\infty^2}{(z)_\infty(q^4z)_\infty},\quad (z)_\infty:=(z;q^4)_\infty^{\#}=\prod_{j=0}^{\infty}(1-q^{4j}z).$$ //

※ $z=0$ のときの値は
$R=(\sum(z)C_p)q^{(h,h)}v_+\otimes v_+$
$z=0$ のときどうなるかみると、こうなる.

\# ここの $4=2\times h^\vee$ dual Coxeter#.
一般には $2(k+h^\vee)$ がでてくるが、
今は $k=0$ しか扱ってないので.
<プロ向けの注意>

'92. 9. 5

第3日.

明日 vertex op. に入る前に，昨日やるはずだった準備をもう1つ.

Drinfeld's Casimir operator:

: [Drinfeld, On almost cocommutative Hopf algebras, Leningrad Math. J. vol. 1 (1989? 90?)] より.

Lemma. (D, R) : 準三角Hopf代数 に対し

$$u := m\circ\sigma\,(id\otimes S)(R) \;\underset{\uparrow}{=}\; \sum S(b_i)\,a_i$$

とおく. $\boxed{R=\sum a_i\otimes b_i \text{ とすると}}$

$\Longrightarrow$ uは可逆で，

$$\begin{cases} u^{-1} = \sum S^{-1}(b_j)\,S(a_j), \\ u x u^{-1} = S^2(x), \quad \forall x\in D. \end{cases}$$

pf.

$$R_{12}\,\Delta^{(2)}(x) = (\Delta'\otimes id)\Delta(x)\cdot R_{12} \qquad \forall x\in D$$

である. (∵ $R\Delta=\Delta' R$.) これより

$$\sum a_i x_{(1)}\otimes b_i x_{(2)}\otimes x_{(3)} = \sum x_{(2)} a_i\otimes x_{(1)} b_i\otimes x_{(3)}.$$

両辺に $id\otimes S\otimes S^2$ を施して 321の順の成分の積をとると

$$\sum S^2(x_{(3)})\cdot S(b_i x_{(2)})\,a_i x_{(1)} = \sum S^2(x_{(3)})\,S(x_{(1)} b_i)\,x_{(2)} a_i,$$

よって

$$\begin{aligned} LHS &= \sum S^2(x_{(3)})\,S(x_{(2)})\,\underbrace{S(b_i)a_i}\,x_{(1)} \\ &= \sum S(x_{(2)}S(x_{(3)}))\cdot u\cdot x_{(1)} \\ &= u\cdot x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RHS &= \sum S^2(x_{(3)})\,S(b_i)\,S(x_{(1)})x_{(2)}\,a_i \\ &= \sum S^2(x)\,S(b_i)\,a_i \\ &= S^2(x)\,u. \end{aligned}$$

∴ $ux = S^2(x)\,u$. ㋐

②

また

$$1 = R\,(S\otimes \mathrm{id})(R)$$
$$= \sum a_i S(a_j)\otimes b_i b_j$$

より

$m\cdot\sigma\cdot(\mathrm{id}\otimes S)$ を施して：

$$1 = \sum S(b_i b_j)\, a_i S(a_j)$$
$$= \sum S(b_j)\, u\, S(a_j) \qquad \because\ ux = S^2(x)\,u$$
$$= u\cdot\sum S^{-1}(b_j)\,S(a_j).$$

∴ uは可逆で 右逆 $=\sum S^{-1}(b_j)S(a_j)$. //

同様に $1 = R(\mathrm{id}\otimes S^{-1})(R)$ を用いれば

uは両側逆をもつことがわかる。

■

$U = U_q\mathfrak{g}$ の場合

無限次元でも、形式的には

$$R = \Big(\sum_\beta u_{\beta i}\otimes u^i_{-\beta}\Big)\, q^{-T}, \quad T = \frac{1}{2}h\otimes h + c\otimes d + d\otimes c$$
$$= \sum h_i\otimes h_i$$

③ ② $\sim \sum$④ $h_i\otimes h_i$ ④ ①

であった。

これに対する「u」は（形式的には）

《①②③④の順の積になるが、計算すれば》

$$u = \Big(\sum_\beta S(u^i_{-\beta})\,u_{\beta i}\Big)\, q^{\frac{h^2}{2}+2cd}$$

とわかる。そして

$$u x u^{-1} = S^2(x) \qquad x\in U$$

をみたす。一方

$$q^{-2\rho} x\, q^{2\rho} = S^2(x).$$

であった。

∴ $z = q^{2\rho}u$ は $\forall x\in U$ と可換。//

② 以上「形式的」にであったが、谷崎氏により
この z は $V(\lambda)$: highest wt. module 上
well-defined である，とわかっている。

Lemma. $z|_{V(\lambda)} = q^{(\lambda, \lambda+2\rho)} \times id_{V(\lambda)}$.

※ むしろ, well-definedness.
これさえ認めれば Schur の
Lemma で $\propto id$. //

∵ id に比例すること※は [谷崎]. 値をきめるのは易しい。

$$z|\lambda\rangle = q^{2\rho}\Big(\sum_\beta S(u^i_{-\beta})u_{\beta i}\Big) q^{(\lambda,\lambda)}|\lambda\rangle$$

1つでも＋方向なら $e_i|\lambda\rangle = 0$.

$$= q^{(2\rho,\lambda)+(\lambda,\lambda)}|\lambda\rangle.$$

■

値からも推測されるように，この z は "Casimir 作用素" の
q-version :

$U_q(sl_2)$ の時，

$$R = \big(1-(q-q^{-1})e\otimes f+\cdots\big)q^{-\frac{1}{2}h\otimes h}$$

これより $q = e^\hbar$, $\hbar \to 0$ のとき

$$z = 1+\hbar\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}h^2+ef+fe\right)}_{\text{Casimir}}+\cdots$$

(注) $U_q\mathfrak{g}$ ($\mathfrak{g}$: classical, not affine) のとき
R は $\hbar$-adic で収束している.
しかし $U_q\hat{\mathfrak{g}}$ ではそうなっていない…
→ 有限次元表現上では

$$u = \Big(\sum_\beta S(u^i_{-\beta})\otimes u_{+\beta i}\Big) q^{\frac{1}{2}h^2+2cd}$$

も $z^{-\beta}\times z^{\beta}$ でうち消すように
なるので 考えることができな‥ (!!)

//

§3 q-Vertex operator と qKZ方程式.

$\lambda, \mu \in (P_+)_k := \{m_0\Lambda_0 + m_1\Lambda_1 \mid m_0, m_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, m_0 + m_1 = k\}$.

ここに $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: <u>level</u>. (fix)

V : 有限次元 $U_q(sl_2)$-加群 ($V = V(l)$)

V の weight $\bar{\lambda}$

$\bar{\ }: \mathfrak{h}^* = K\alpha_1 \oplus (K\Lambda_0 \oplus K\delta) \longrightarrow \bar{\mathfrak{h}}^* = K\alpha_1$ orthogonal projection

以下 sl_2 の weight は $\bar{\lambda}$ などと $\bar{\ }$ をつけて表わす.

・必要に応じ $\bar{\mathfrak{h}}^* \hookrightarrow \mathfrak{h}^*$ とも見なすあろう。

<u>def</u>. Vertex operator とは

$$\hat{\Phi} : V(\lambda) \longrightarrow V(\mu) \hat{\otimes} V_z \quad \text{intertwiner}$$

のことをいう。

ここで $\hat{\otimes}$ にしないとダメなのだが, その $\hat{\otimes}$ は

$$M \hat{\otimes} N := \bigoplus_{\nu} \underbrace{\prod_{\xi} M_{\xi} \otimes N_{\nu-\xi}}$$ ← weight space

とする (total wt ν の形の無限和の有限和.

即ち : $v \in V(\lambda)_\nu$, に対して

$$\hat{\Phi} v = \sum_{\substack{j \\ n \in \mathbb{Z}}} (\Phi_{jn} v) \otimes v_j \cdot z^{-n}$$

$^{\otimes}$ wt $= -n\delta$

wt $\bar{\lambda}_j$ とする ($v_j \in V$ は weight basis)

の形. これにより定まる $\Phi_{j,n}$ は

$$\Phi_{jn} : V(\lambda)_\nu \longrightarrow V(\mu)_{\nu - \bar{\lambda}_j + n\delta}$$

という well-defined な写像。

$^{\otimes}$ $q^d = q^{z\frac{d}{dz}}$

Date

今後は、最後の式をキレイにする為に分数巾をつけて

$$\Phi(z) := z^{\Delta_\mu - \Delta_\lambda} \sum_j \Phi_j(z) \otimes v_j ,$$

$$\Phi_j(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi_{jn} z^{-n} \ : \ \mathrm{Hom}(V(\lambda), V(\mu))\text{-値形式級数.}$$

とおく。ここに

$$\Delta_\lambda := \frac{(\lambda, \lambda+2\rho)}{2(k+2)}$$

は 堀-カニエに出てきた量.

注 各vector $v \in V(\lambda)$ ごとに $\Phi_j(z)v$ の z の負べきは有限項.

(∵ $\sum \underbrace{\Phi_{jn} v}_{}\, z^{-n}$ nだけwtがずれるが $v \in V(\lambda)$ のwtは上にboundedなので 有限コしかない。//)

存在と正規化

次のことがいえる.
(時間がなく詳細を述べられない)

定理 $\lambda, \mu \in (P_+)_k$, $V = V(\ell)$

このとき

$$\mathrm{Hom}_U\left(V(\lambda), V(\mu)\hat{\otimes} V_z\right) \simeq \left\{ v \in V \;\middle|\; \begin{array}{l} v \text{ は weight } \bar{\lambda}-\bar{\mu}, \\ e_i^{\langle \mu, h_i\rangle + 1} v = 0 \ (i=0,1) \end{array} \right\}$$

(vertex operators の空間)

対応は

$$\hat{\Phi} \longmapsto \left(\begin{array}{l} \hat{\Phi}|\lambda\rangle = |\mu\rangle \otimes v + \sum_{r>0} f_{i_1}\cdots f_{i_r}|\mu\rangle \otimes v' \\ \text{と書いたときの } v \text{。} \end{array} \right)$$

で与えられる.

(そしてこの v が右側の条件をみたし 逆にこの v から $\hat{\Phi}$ が回復されるというのが主張.)

(ア) この定理については see [Date, Okado, J.]

(注). • $V(\lambda)$ のかわりに $M(\lambda)$: λ generic のときの Verma module

とったときは v として weight の条件だけあれば良い。

(ie. "$e_i^{\langle\mu,h_i\rangle+1}v=0$" は不要.)

• 今の場合は V の weight multiplicity が高々1

なので、weight λ, μ を与えれば v は

up to Const. で unique (又は, 0.)

そこで $\{v_j\}\subset V$ (base) を fix して

$$\hat{\Phi}|\lambda) = |\mu\rangle\otimes v + \cdots \quad , v\in\{v_j\}$$

と正規化する。この $\hat{\Phi}$ に対応する Φ(分数巾付き)を

$$\Phi_\lambda^{\mu\,V}(z)$$

と書く。

• weight mult. があるときは crystal base (global base) を使うとキレイに記述できる。

Vertex operator の合成.

$$\hat{\Phi} = \sum \Phi_{jm} \otimes v_j z_1^{-m} \quad : V(\mu) \longrightarrow V(\nu) \hat{\otimes} V_{z_1}$$

$$\hat{\Psi} = \sum \Psi_{\ell n} \otimes w_\ell z_2^{-n} \quad : V(\lambda) \longrightarrow V(\mu) \hat{\otimes} W_{z_2}$$

を"合成する"とは

$$(\hat{\Phi} \otimes \mathrm{id}_W)\Psi : V(\lambda) \longrightarrow \underbrace{V(\mu)}_{\text{ここに}\hat{\Phi}\text{を作用させる}} \hat{\otimes} W_{z_2} \longrightarrow V(\nu) \hat{\otimes} V_{z_1} \hat{\otimes} W_{z_2}$$

を考えるということだが、これを単に

$$\Phi(z_1)\Psi(z_2)$$

のように表わす。一般に

$$V(\mu_n) \to V(\mu_{n-1}) \hat{\otimes} V_{z_n} \to V(\mu_{n-2}) \hat{\otimes} V_{z_{n-1}} \hat{\otimes} V_{z_n} \to \cdots$$

$$\cdots \to V(\mu_0) \hat{\otimes} V_{z_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} V_{z_n}.$$

の合成は

$$\Phi^{\mu_0 V_1}_{\mu_1}(z_1) \cdots \Phi^{\mu_{n-2} V_{n-1}}_{\mu_{n-1}}(z_{n-1}) \Phi^{\mu_{n-1} V_n}_{\mu_n}(z_n)$$

と表わす。《$V_1 = \cdots = V_n = V$; Vのsuffixは$V \otimes \cdots \otimes V$の成分の位置を表わす。》

これは次の形をしている。

$$z_1^{\Delta_{\mu_0} - \Delta_{\mu_1}} \cdots z_n^{\Delta_{\mu_{n-1}} - \Delta_{\mu_n}} \times$$

$$\times \sum \left(\Phi^{\mu_0 V_1}_{\mu_1}\right)_{j_1 m_1} \cdots \left(\Phi^{\mu_{n-1} V_n}_{\mu_n}\right)_{j_n m_n} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_n} \cdot z_1^{-m_1} \cdots z_n^{-m_n}.$$

<u>n点関数</u>　vertex op. の合成に対し、その"n点関数"なるものを（真空期待値）定義する。そのために、まず：

<u>right module</u>

<u>def.</u> $V^r(\lambda)$: 最高weight λ の既約最高ウェイト右加群

ie. $V^r(\lambda) = \langle\lambda|\cdot U$,

$$\begin{cases} \langle\lambda| f_i = 0 \\ \langle\lambda| e_i^{\langle\lambda, h_i\rangle+1} = 0 \\ \langle\lambda| q^h = q^{\langle\lambda, h\rangle}\langle\lambda| . \end{cases}$$

<u>Lemma</u> 次の非退化な pairing が唯一つある。

$$\begin{array}{ccc} V^r(\lambda)\otimes V(\lambda) & \longrightarrow & K \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \langle u|\otimes|v\rangle & \longmapsto & \langle u|v\rangle \end{array}$$

s.t. $\begin{cases} \langle\lambda|\lambda\rangle = 1 \\ \langle ux|v\rangle = \langle u|xv\rangle \quad \forall x\in U. \end{cases}$

（以下 $\langle u|x|v\rangle$ とも書く。）

この<u>Lem</u>を示すことは表現論的に standard にできる //

<u>定義</u>. $\langle\mu_0|\Phi_{\mu_1}^{\mu_0 V_1}(z_1)\cdots\Phi_{\mu_n}^{\mu_{n-1}V_n}(z_n)|\mu_n\rangle =: \Phi(z_1,\cdots,z_n)$

を n点関数と呼ぶ。（もちろん $\langle\ |\cdot|\ \rangle$ は $(\Phi_{\mu_1}^{\mu_0 V_1})_{j_1\mu_1}, \cdots, (\Phi_{\mu_n}^{\mu_{n-1}V_n})$ 達についてとっている。）

これは分数巾を除いて $V\otimes V\otimes\cdots\otimes V$ 値形式的級数.

Date

どれかp倍すると → (A_j という matrix)×自分 となる — "q-差分方程式".

定理 (Frenkel - Reshetikhin.) n点関数は差分方程式系をみたす:

$$\Psi(z_1,\cdots,pz_j,\cdots,z_n)=A_j(z_1,\cdots,z_n)\,\Psi(z_1,\cdots,z_n),$$

$$A_j(z_1,\cdots,z_n):=R^{(-)}_{V_{j-1}V_j}\left(\frac{z_{j-1}}{pz_j}\right)^{-1}\cdots R^{(-)}_{V_1V_j}\left(\frac{z_1}{pz_j}\right)^{-1}\times$$
$$\times\, p^{-\phi_j}R^{(-)}_{V_jV_n}\left(\frac{z_j}{z_n}\right)\cdots R^{(-)}_{V_jV_{j+1}}\left(\frac{z_j}{z_{j+1}}\right)$$

但し
$$\begin{cases} p:=q^{2(k+2)},\quad \phi:=\dfrac{\bar{\mu}_0+\bar{\mu}_n+2\bar{\rho}}{2(k+2)},\quad \phi_j:=1\otimes\cdots\otimes\overset{j}{\phi}\otimes\cdots\otimes 1, \\ R^{(-)}_{VW}\left(\frac{z}{w}\right):=\left(\pi_{V_z}\otimes\pi_{W_w}\right)\left(\mathcal{R}^{(-)}\right),\quad \mathcal{R}^{(-)}:=\sigma\left(\mathcal{R}^{-1}\right). \end{cases}$$

注 $(R_{V_1V_j}\cdots R_{V_{j-1}V_j})^{-1}=(R_{V_1\otimes\cdots\otimes V_{j-1},V_j})^{-1}$

また "$V(\lambda)\longrightarrow V_z\otimes V(\mu)$" のようなものとして vertex op. を定めると $\mathcal{R}^{(-)}$ でなく R が出てくる。$\mathcal{R}^{(-)}$ は R とは triangularity (三角分解) の形が逆になっていることに注意。また

$$R^{(-)}_{VW}(z)\in \mathrm{End}(V\otimes W)[[z^{-1}]]$$

である。

ことば 定理中の方程式を q-deformed Knizhnik-Zamolodchikov eq (qKZ) という。

・感じをつかむため $\underline{\underline{n=2}}$で explicitに書いてみると：

$$\begin{cases} \Psi(pz_1, z_2) = \left(p^{-\phi} \otimes 1\right) R^{(-)}_{V_1 V_2}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \Psi(z_1, z_2) \\ \Psi(z_1, pz_2) = R^{(-)}_{V_1 V_2}\left(\frac{z_1}{pz_2}\right)^{-1} \left(1 \otimes p^{-\phi}\right) \Psi(z_1, z_2) \end{cases}$$

特に

$$\Psi(pz_1, pz_2) = \left(p^{-\phi} \otimes p^{-\phi}\right) \Psi(z_1, z_2)$$

$$= p^{-(\phi, \mu_2 - \mu_0)} \Psi(z_1, z_2).$$

$$\Big(\!\Big(\langle \mu_0 | \Phi^{\mu_0 V}_{\mu_1}(z_1) \Phi^{\mu_1 V}_{\mu_2}(z_2) t_1 | \mu_2 \rangle$$

$$= t_1 \otimes t_1 \langle \mu_0 | t_1 \Phi \Phi \mu_2 \rangle$$

$$t_1 \otimes t_1 \Psi(z_1, z_2) = q^{(\mu_2 - \mu_0, \mu_1)} \Psi(z_1, z_2). \Big)\!\Big)$$

— この方程式は，n点関数を解析関数として決定してしまう位の力をもっている。⊛ また他との具体的場合には古典的なq-解析の面白い拡張となっていたりして興味深い。

　多変数のq-解析というのは個人的にはあまりやられていなかったが、その例を与える。

⊛ defにより intert. property から次々と項を求めて<…>を求めてはいけるが、それは気の遠くなる作業。それが閉じた形で求まる!

Date

实例 で この方程式を解いてみると：

$$U = U_q(\widehat{sl}_2)\ ,\ V = V(1)\quad : \begin{cases} h = 2 \\ k = 1 \end{cases}\quad p = q^6$$

この場合に 定理の方程式から

$$\Psi(z_1, z_2) = \langle \Lambda_0 | \Phi_{\Lambda_1}^{\Lambda_0 V}(z_1)\Phi_{\Lambda_0}^{\Lambda_1 V}(z_2) | \Lambda_0 \rangle$$

を求めてみよう。

$$\left(\left(\begin{array}{l} \text{normalization は} \\ \Phi_{\Lambda_0}^{\Lambda_1 V}(z)|\Lambda_0\rangle = |\Lambda_1\rangle \otimes v_- + \cdots , \\ \Phi_{\Lambda_1}^{\Lambda_0 V}(z)|\Lambda_1\rangle = |\Lambda_0\rangle \otimes v_+ + \cdots . \end{array}\right)\right)$$

$$\Psi(z_1, z_2) = f_1(z_1, z_2) v_+ \otimes v_- + f_2(z_1, z_2) v_- \otimes v_+$$
$$= z_1^{-\frac{1}{4}} z_2^{\frac{1}{4}} \left(1 \cdot v_+ \otimes v_- + \cdots\right)$$

と書ける。ここに

f_1, f_2 は $\left(z = \frac{z_2}{z_1}\right.$ の z の形式的級数$\left.\right) \times z^{\frac{1}{4}}$. ⊛

⊛ ∵ 前頁の
$\Psi(pz_1, pz_2)$
$= p^{-(\Phi, \mu_2 - \mu_0)} \Psi(z_1, z_2)$.
による。

さて、 R は昨日求めているので qKZ は explicit に書ける。 それを書くと： ⑦

(7)

$$\begin{bmatrix} f_1(pz) \\ f_2(pz) \end{bmatrix} = \frac{\rho(pz)}{1-zpq^2}\begin{bmatrix} (1-zp)q^2 & (1-q^4)q^{-1}zp \\ (1-q^2)q & 1-zp \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{bmatrix}$$

但 $\rho(z) := q^{-\frac{1}{2}}\dfrac{(q^2z)_\infty^2}{(z)_\infty (q^4z)_\infty}$

$$(z)_\infty := (z;q^4)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty}(1-q^{4j}z)$$

(<：巾関数のanalogue)

これは 2つの基本解系をもつ筈だが

$$q f_1(pz)+f_2(pz) = \rho(pz)\left(q f_1(z)+f_2(z)\right)$$

が言るので $p=q^6$ であることに注意しこの両辺の z の巾を match させると 実はあっていない。

$\therefore$ $q f_1(z)+f_2(z)=0$ が必要

これより 2×2 の方程式が 1×1 におちて それは

$$\frac{f_1(pz)}{f_1(z)} = q^{3/2}\frac{(q^4z)_\infty (q^{12}z)_\infty}{(q^6z)_\infty (q^{10}z)_\infty}$$

となる. これを解くと（易；うまく q^6 の入った $(\ )_\infty$ はきえる）

$\therefore$ $f_1(z) = z^{\frac{1}{4}}\dfrac{(q^6z)_\infty}{(q^4z)_\infty}$,

$f_2(z) = -q f_1(z)$

注 ここで一般論なら基本解系の2次元がそのまま出てくる筈だが 1次元になってしまう：これは CFT の"truncation" に対応すること. q の世界ではそれが易しくでてくる。 //

[FR]のとは違う。

◎ 以下 formalに qKZ を導いてみよう。
((after Smirnov's idea*))

Step 1 : $\mathcal{R} = \sum a_i \otimes b_i$, $\zeta = q^{2\rho} u$

$$\Rightarrow (\zeta \otimes \mathrm{id}) \hat{\Phi} \zeta^{-1} = \sigma(\mathcal{R}) \sum (1 \otimes b_j q^{-2\rho}) \hat{\Phi} a_j$$

Step 2 : $$\Phi_\lambda^{\mu\nu}(pz) = \sigma\left(\mathcal{R}'(q^{k+g})\right)(1 \otimes q^{-2\bar{\rho}}) \times \sum_j 1 \otimes S^{-2}(b_j') \Phi_\lambda^{\mu\nu}(z) a_j'$$

但* $$\mathcal{R}'(x) := \left[\left(\sum \underbrace{x^{\langle d, \beta \rangle}} c_\beta \right) q^{-\frac{1}{2} h \otimes h - c \otimes d - d \otimes c} \boxed{q^{c \otimes d + d \otimes c}}_{x} \right]$$

・null root 方向に重みをつけたもの

(* 更に
$\mathcal{R}'(1) =: \mathcal{R}'$ とおく
を用い $= \sum a_j' \otimes b_j'$ とおく。)

Step 3 : qKZ.

◎ 「やってはいけないこと」: q を V_z に働かせること
「やること」 a_i ((e)) を右へ, b_i ((f)) を左へ。

∵ step 1 ((V(λ) → V(μ)⊗V₂ に限らず))

Lem. 一般に $\hat{\Phi} : V_1 \to V_2 \otimes V_3$: U-linear に対し,

$$\sum x_{(1)} \otimes x_{(2)} \cdot \hat{\Phi} = \hat{\Phi} x \quad (\forall x \in U)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1 \otimes x \cdot \hat{\Phi} = \sum S(x_{(1)}) \otimes 1 \cdot \hat{\Phi} \cdot x_{(2)} \quad \forall x$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \otimes 1 \cdot \hat{\Phi} = \sum 1 \otimes S^{-1}(x_{(2)}) \cdot \hat{\Phi}\, x_{(1)} \quad \forall x$$

追加の準備:

$(\Delta \otimes id)R = R_{13} R_{23}$

$\Leftrightarrow \sum a_{i(1)} \otimes a_{i(2)} \otimes b_i = \sum a_i \otimes a_j \otimes b_i b_j$,

$(id \otimes \Delta)R = R_{13} R_{12}$

$\Leftrightarrow \sum a_i \otimes b_{i(1)} \otimes b_{i(2)} = \sum a_i a_j \otimes b_j \otimes b_i$.

∵ 例えば

$$\sum S(x_{(1)}) \otimes 1\, \hat{\Phi}(x_{(2)}) = \sum S(x_{(1)}) x_{(2)} \otimes x_{(3)} \hat{\Phi} = 1 \otimes x\, \hat{\Phi}$$

, etc. 形式的. ■

よって

$$(u \otimes 1)\hat{\Phi} = \sum S(b_i) a_i \otimes 1 \cdot \hat{\Phi}$$

$$= \sum S(b_i) \otimes S^{-1}(a_{i(2)}) \cdot \hat{\Phi} \cdot a_{i(1)}$$

$$= \sum S(b_i b_j) \otimes S^{-1}(a_j)\, \hat{\Phi}\, a_i$$

$(S \otimes S)\Delta = \Delta' \cdot S$

∵ $\sum S(a_{(1)}) \otimes S(a_{(2)}) = \sum S(a)_{(2)} \otimes S(a)_{(1)}$.

一方

$$\hat{\Phi} u^{-1} = \hat{\Phi} \sum S^{-1}(b_r) S(a_r)$$

$$= \sum S^{-1}(b_{r(2)}) \otimes S^{-1}(b_{r(1)})\, \hat{\Phi}\, S(a_r)$$

$$= \sum S^{-1}(b_r) \otimes S^{-1}(b_s)\, \hat{\Phi}\, S(a_r a_s).$$

∴

$$(u \otimes 1)\hat{\Phi} u^{-1} = \sum S(b_i b_j) \otimes S^{-1}(a_j)\, \hat{\Phi}\, \underbrace{a_i u^{-1}}_{= u^{-1} S^2(a_i)}$$

$$= \sum S(b_i b_j) \otimes S^{-1}(a_j) \cdot S^{-1}(b_r) \otimes S^{-1}(b_s) \cdot \hat{\Phi} \cdot S(a_r a_s) \cdot S^2(a_i)$$

$$= \sum S(b_j) \underline{S(b_i)} S^{-1}(b_r) \otimes S^{-1}(a_j) S^{-1}(b_s)\, \hat{\Phi}\, S(a_s) S(a_r) \underline{S^2(a_i)}$$

$$= \sum S(b_j) b_i S^{-1}(b_r) \otimes S^{-1}(a_j) S^{-1}(b_s)\, \hat{\Phi}\, S(a_i a_r a_s)$$

$$= \sum S(b_j) \otimes S^{-1}(a_j) S^{-1}(b_s)\, \hat{\Phi}\, S(a_s).$$ ⊘

$(S \otimes S)R = R$

∵ $\sum S(a_i) \otimes S(b_i) = \sum a_i \otimes b_i$.

$\sum a_i a_r \otimes b_i S^{-1}(b_r) = R(1 \otimes S^{-1})(R) = 1$

$q^{-2\rho} x q^{2\rho} = S^2(x)$ (

(?) ∵

$$(\zeta\otimes 1)\hat{\Phi}\zeta^{-1} = (q^{2\rho}\otimes 1)(u\otimes 1)\hat{\Phi}u^{-1}q^{-2\rho}$$
$$= \sum S^{-1}(b_j)q^{2\rho}\otimes S^{-1}(a_j)S^{-1}(b_s)\cdot\hat{\Phi}q^{-2\rho}S^{-1}(a_s)$$
$$= \sum b_j\otimes a_j\cdot q^{2\rho}\otimes b_s\cdot q^{-2\rho}\otimes q^{-2\rho}\cdot\hat{\Phi}\cdot a_s$$
$$= \sigma(R)\cdot\sum_s 1\otimes b_s q^{-2\rho}\cdot\hat{\Phi}\cdot a_s$$

となって、これが Step 1 の目標の式。 ▨

Step 2. $\Phi_\lambda^{\mu V}(pz) = (pz)^{\Delta_\mu-\Delta_\lambda}(1\otimes p^d)\hat{\Phi}$

に注意。ここで Δ_μ とか Δ_λ とかは ζ の値から出てくる量なので Step. 1 で処理できる。p^d を調べれば良い。

∵ Step. 1 より、

$$LHS = (\zeta\otimes q^{2(k+2)d})\hat{\Phi}\zeta^{-1}$$

一方 $R = q^{c\otimes d+d\otimes c}R'$

$$\because \sum a_i\otimes b_i = \sum(q^{c_2 d}a_j')\otimes(q^{c_1 d}b_j')$$

あとは Step. 1 で $\begin{cases} a_i \mapsto q^{c_2 d}a_i' \\ b_i \mapsto q^{c_1 d}b_i' \end{cases}$

とおきかえた計算をやり component ごとに c の値が 0 となったりすることに注意して Step 1 ⊞ の式を適用すれば良い。 ▨

Step 3 : qKZ.

j 番目をたたく

$$\underbrace{\Phi_{\mu_1}^{\mu_0 V_1}(z_1)\cdots}\ \Phi_{\mu_j}^{\mu_{j-1}V_j}(pz_j)\underbrace{\cdots\Phi_{\mu_n}^{\mu_{n-1}V_n}(z_n)}$$

$$= \underbrace{\Phi_{\mu_1}^{\mu_0 V_1\cdots V_{j-1}}(z_1,\cdots,z_{j-1})}\times$$

$$\times\left(\sigma\left(R'q^{k+\kappa}\right)\left(1\otimes q^{-2\rho}\right)\sum 1\otimes S^{-2}(b_j')\,\Phi_{\mu_j}^{\mu_{j-1}V_j}(z_j)\,a_j\right)$$

$$\times\ \underbrace{\Phi_{\mu_n}^{\mu_j V_{j+1}\cdots V_n}(z_{j+1},\cdots,z_n)}$$

ここで $\Phi_{\mu_{j-1}}^{\mu_0 V_1\cdots V_{j-1}}$ などは intertwiner. そのことに注意しつつ b_i を左へ, a_i を右へ運んでいく。

$\left\{\begin{array}{l} V_{j+1}\cdots V_n \text{ への作用は } R \text{ で} \\ \mu_j \text{ への作用は Cartan の weight で} \end{array}\right.$

書くように計算していくと

$$(\text{qKZ の LHS}) = \sum \pi_{V_1\otimes\cdots\otimes V_{j-1}}(b'_{i(2)})\cdot\pi_{V_j}\left(\tilde{a}_i' q^{-2\rho}S^{-2}(b_r')\right)\cdot\pi_{V_{j+1}\otimes\cdots\otimes V_n}\left(S^{-1}(a'_{r(2)})\right)$$

$$\times\langle\mu_0|\,b'_{i(1)}\,\Phi_{\mu_n}^{\mu_0 V_1\cdots V_n}(z_1,\cdots,z_n)\,a'_{r(1)}|\mu_n\rangle$$

但 $\tilde{a}_i' := q^{(k+\kappa)d}\,a_i'\,q^{-(k+\kappa)d}$.

となる。ここに左㊀の注意と,

$$\sum a_r'|\mu_n\rangle\otimes b_r' = |\mu_n\rangle\otimes \underbrace{q^{-\mu_n}}_{\text{h は weight だけになる}}$$

を使うと $= \underbrace{(\text{ある operation})}\cdot\langle\quad\rangle$
となり　これが更に R にまとまる。 ↗

ここで
$(\Delta\otimes id)R' = RR$, である
$(\Delta\otimes id)R' = R_{13}'(q^{-c_2})R_{23}'$
$(id\otimes\Delta)R' = R_{13}'(q^{c_2})R_{12}'$
を使って縮約をする。 ㊀

Date

⑦ そして結果は

$$\mathrm{LHS} = \left(\pi_{V_j} \otimes \pi_{V_1 \otimes \cdots \otimes V_{j-1}}\right)\left(\mathcal{R}'(p)\right) \pi_{V_j}\left(q^{-\mu_0 - 2\bar{\rho} - \mu_n}\right) \times$$

$$\times \left(\pi_{V_{j+1} \otimes \cdots \otimes V_n} \otimes \pi_{V_j}\right)\left(\mathcal{R}'\right)^{-1} \Psi(z_1, \cdots, z_n)$$

$\blacksquare$

KZ のときとの関係

$\begin{cases} \{L_n\} \ (\mathrm{Vir}) \\ \{X_n\} \ (\mathrm{Aff}) \end{cases}$ との intert. property

これを q にするのに [FR] の idea は

・まず $\{X_n\}$ を "L-op" $L^{\pm}(z) = \left(\pi_{V(\lambda)} \otimes \pi_V\right)\left(\mathcal{R}(z)\right)$ で代用

・$\{L_n\}$ のためには "q-Vir" なんてものは今の所ない

ので KZ のときも L_0 だけあれば足りたことに注意して (: Smirnov)

$$L_0 + d = \frac{\mathrm{Casimir}}{2(k+h^\vee)}$$

に基づき $\begin{cases} q^{d} \text{ を考える.} \\ z = q^{2p} u \end{cases}$

そして機械的に計算すると上のようになる。

(17:47)

R(が 221

第4日

§4. 接続行列

qKZ方程式:

$$\begin{cases} \Psi(z_1,\cdots,pz_j,\cdots,z_n) = A_j(z_1,\cdots,z_n)\Psi(z_1,\cdots,z_n) \\ \text{但 } A_j(z_1,\cdots,z_n) = R_{j-1\,j}\left(\frac{z_{j-1}}{pz_j}\right)^{-1}\cdots R_{1j}\left(\frac{z_1}{pz_j}\right)^{-1}\times \\ \qquad\qquad \times\, p^{-\phi_j} R_{jn}\left(\frac{z_j}{z_n}\right)\cdots R_{j\,j+1}\left(\frac{z_j}{z_{j+1}}\right), \end{cases}$$

ここで

(※) $[p^{-\phi}\otimes p^{-\phi}, R(z)] = 0$,※ $\quad \phi = \dfrac{\overline{\Lambda}_0+\overline{\Lambda}_n+2\bar{\rho}}{2(k+2)}$

※:これは $R(z/w): V_z\otimes V_w$ ⟲ が $R\Delta(x)=\Delta'(x)R$ をみたしていることからわかる

また R はYang-Baxter方程式(YBE)の解:

(※)′
$$R_{12}(z_1/z_2)R_{13}(z_1/z_3)R_{23}(z_2/z_3) = R_{23}(z_2/z_3)R_{13}(z_1/z_3)R_{12}(z_1/z_2)$$

というような状況であった。ここで少し昨日とは notation を変えて

昨日の $R^{(-)}_{V_zV_j}$ を 単に $R_{ij}(z)$

とかいている。((☺ これは z の formal pow. ser. でもこういう事はこの以下は今日は使わない))

・実は(※)と(※)′だけを用いると、qKZ が(compatible な、むしろ(超えられても)) integrable な方程式であることがわかる。まずそれを示そう。

Date

記号

・ $(T_j f)(z_1,\dots,z_n) := f(z_1,\dots,pz_j,\dots,z_n)$

$\leftarrow$ ordered set《大きさの順に並べる》　《これは誰の記号??》

・ $I, J \subset \{1,\dots,n\}$ に対して

$R_{IJ}(z_1,\dots,z_n)$ を inductive に定める:

$$R_{\{i\},\{j\}}(z_1,\dots,z_n) = R_{ij}(z_i/z_j) \in \mathrm{End}(V\otimes\cdots\otimes V)$$

"functorialに"。

$$R_{IJ,K}(z_1,\dots,z_n) = R_{IK}(z_1,\dots,z_n)R_{JK}(z_1,\dots,z_n)$$

$$R_{I,JK}(z_1,\dots,z_n) = R_{IK}(z_1,\dots,z_n)R_{IJ}(z_1,\dots,z_n)$$

ここで IJ とかいているのは
set としては $I\sqcup J$, その元を
大きさの順に並べたもの
のこと.

この記号を用いると qKZ に出てくる A_j は

$$A_j = R_{I,j}^{-1}\, p^{-\phi_j}\, R_{jK}$$

$$I:=\{1,\dots,j-1\},\ K=\{j+1,\dots,n\}$$

と書ける。　　幸せにしかならないな..

また $R_{IJ}(z_1,\dots,z_n) =: R_{IJ}(z_I|z_J)$

とかけて, これも YBE をみたす:

$$R_{IJ}(z_I|z_J)\,R_{IK}(z_I|z_K)R_{JK}(z_J|z_K)$$
$$= R_{JK}(z_J|z_K)\,R_{IK}(z_I|z_K)R_{IJ}(z_I|z_J).$$

更に $I=\{i_1,\dots,i_k\}$　$i_1<\dots<i_k$ に対し

$$p^{-\phi_I} := 1\otimes\cdots\otimes \overset{i_1}{p^{-\phi}}\otimes\cdots\otimes \overset{i_k}{p^{-\phi}}\otimes\cdots\otimes 1$$

とおく。

これらの記号では、qKZは

$$\text{qKZ} \Leftrightarrow \Psi(z_I, pz_J, z_K) = R_{IJ}(z_I|z_J)^{-1} p^{-\phi_J} R_{JK}(z_J|z_K)\Psi$$

$$: \forall I \sqcup J \sqcup K = \{1,\cdots,n\}$$

$$\Leftrightarrow \Psi(pz_J, z_K) = p^{-\phi_J} R_{JK}(z_J|z_K)\Psi$$

と書ける：ここで $pz_J := \{pz_j\}_{j\in J}$.

この system の integrability condition：

$\Psi(p^2 z_I, pz_J, z_K)$ を2つに書き直せる：

$$\begin{cases} = p^{-\phi_{IJ}} R_{IJ,K}(pz_I, z_J|z_K)\, p^{-\phi_I} R_{I,JK}(z_I|z_J z_K)\Psi, \\ = p^{-\phi_I} R_{I,JK}(pz_I|pz_J, z_K)\, p^{-\phi_{IJ}} R_{IJ,K}(z_I z_J|z_K)\Psi. \end{cases}$$

これが一致するか？ というのが integrability.

Lemma

$$\left.\begin{array}{c} R_{IJ} \text{ の YBE} \\ [p^{-\phi_I}\otimes p^{-\phi_J}, R_{IJ}] = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{integrability cond. が成り立つ.}$$

証明は略.（演習問題①）

《すぐ》
あとで、R_{ij} を scalar 倍だけとり換える
ことが出てくる，そのための Lem:

<u>Lemma</u>

$$R_{ij}(z) = \rho_{ij}(z)\,\overline{R}_{ij}(z)$$

$$\frac{\varphi_{ij}(pz)}{\varphi_{ij}(z)} = \rho_{ij}(z)$$

$$\Psi(z_1,\cdots,z_n) = \prod_{i<j}\varphi_{ij}(z_i/z_j)\cdot\overline{\Psi}(z_1,\cdots,z_n)$$

$\Rightarrow\ T_j\overline{\Psi} = \overline{A_j}\,\overline{\Psi}$ が成立つ.

但 $\overline{A_j}$ は A_j の式で R を $\overline{R}$ でおきかえたもの。

《∵: 易.》

$$\begin{tikzcd} V_{z_1}\otimes V_{z_2} \arrow[d, "PR_{12}"] \\ V_{z_2}\otimes V_{z_1} \arrow[d, "PR_{21}"] \\ V_{z_1}\otimes V_{z_2} \end{tikzcd}$$

<u>Lemma</u> 《必要なら上の Lemma により scalar 倍だけ R をとりかえて》

$$PR_{ij}(z)\,PR_{ji}(z^{-1}) = 1 \qquad \forall i,j$$

と仮定する．このとき
$s_i = (i,i+1)$ に対し

$$\Psi^{s_i}(z_1,\cdots,z_n) := R_{i,i+1}(z_i/z_{i+1})^{-1}P_{i,i+1}\Psi(z_1,\cdots,z_{i+1},z_i,\cdots,z_n)$$

とおけば

トル

$$T_j\Psi^{s_i} = A_j^{\cancel{s_i}}\Psi^{s_i}$$

~~但 $A_j^{s_i}$ は A_j において $R_{kl}(z_k/z_l)$ を $R_{s_i(k),s_i(l)}(z_{s_i(k)}/z_{s_i(l)})$ としたもの~~

が成り立つ。

② $n=2$ のときの説明：

$$\Phi^S(z_1, z_2) = R(z_1/z_2)^{-1} P\Phi(z_2, z_1).$$

また

$$\begin{cases} \Phi(pz_1, z_2) = (p^{-\phi}\otimes 1)R(z_1/z_2)\,\Phi(z_1, z_2) \\ \Phi(z_1, pz_2) = R(z_1/pz_2)^{-1}\, 1\otimes p^{-\phi}\,\Phi(z_1, z_2) \end{cases}$$

であった

⇒ Φ^S はやはり同じ方程式をみたす：

eq. $\Phi^S(pz_1, z_2)$

$$= R(pz_1/z_2)^{-1} P R(z_2/pz_1)^{-1}\, 1\otimes p^{-\phi}\,\Phi(z_2, z_1)$$

$$= P\cdot 1\otimes p^{-\phi}\cdot PR(z_1/z_2)\Phi^S(z_1, z_2)$$

$$= p^{-\phi}\otimes 1\cdot R(z_1/z_2)\,\Phi^S(z_1, z_2). \quad //$$

演習（はじめに出した単位円の問題が気に入らない人のための）

一般の場合をたしかめよ。

Lemma（後者）は，変数を入れかえることで

1つの解から他の解が生ずることを言っている

こういうことは、わたしたちでもあまりfamiliarでないだろうから：

Ref: G. D. Birkhoff, The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations, Proc. Amer. Acad. Arts & Sci, 49 521-568 (1913).

又 全集 I(?) p259 も。
(↑Riemann problem との関係が詳しい。)

あと この話を1変数に帰着して多変数のことを論じた
[K. Aomoto A note on holonomic q-difference systems, Algebraic Analysis vol.1 (1988) 25-28 (佐藤記念号)]
もあげておく。

ここで

q差分方程式の解析的理論

から準備をしておく。

$q \in \mathbb{C}^\times$, $0 < |q| < 1$; 1変数の場合

$$\begin{cases} Y(qz) = z^\alpha A(z) Y(z) & : m\times m \text{ 行列系}, \ \alpha\in\mathbb{C} \\ A(z) = A_0 + \frac{A_1}{z} + \cdots & \text{収束} \ (|z| \geq R) \end{cases}$$

という系を考える。これを

仮定 $\det A_0 \neq 0$,
A_0 の固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ に対し
$\lambda_i/\lambda_j \notin \{q, q^2, q^3, \cdots\}$ $\forall i,j$
(固有値にmultiplicityはあってよい。)

の下で考えると、次が成り立つ。

定理 次の形の形式解がただ1つ存在し、
$|z| > {}^\exists r \ (> R)$ で収束する。

$$Y(z) = \left(1 + \frac{Y_1}{z} + \cdots\right) z^{\frac{\log A_0}{\log q}} \times q^{\frac{\alpha}{2}(u^2 - u)}$$

但 $u = \dfrac{\log z}{\log q}$ $(\Leftrightarrow z = q^u.)$

注意 1) q差分方程式の解の不定性はその函数になりうる(trivialだが重要)

i.e. $Y(z)$:解 $\Rightarrow$ $Y(z)\,C(z)$, も解

但 $C(qz) = C(z)$ とする

このような$C(z)$を pseudo constant と称する.

2) $Y(z) = \cdots$ の式のうしろの方のtermはうるさいけれど

スカラー方程式 $f(qz) = z^{d} f(z)$ の解は

$$f(z) = q^{\frac{d}{2}(u^2-u)} \times (\text{pseudoconst.})$$

ということから来ている.

local theory では $d=0$ としていってもいいけれど

global theory ではどうしても考えることになる。

3) $z=0$ での局所理論は $z=\infty$ に帰着。

<考えている空間が $\mathbb{P}^1$ でなく $z \in \mathbb{C}^{\times}$ ①>

$$Y(qz) = z^{d} A(z) Y(z) \Leftrightarrow Y(z^{-1}) = z^{d} A(z^{-1})^{-1} Y(q z^{-1})$$

4) 固有値に関する仮定が成立しない場合(ただし $\det A_0 \neq 0$ とする)

も、上に帰着する。

$$Y(z) = \begin{bmatrix} 1_r & \\ & z\cdot 1_s \end{bmatrix} Z(z), \quad Y(z) \mapsto \underset{\text{定数}}{G}\, Y(z)$$

とすると、

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & (zq)^{-1} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} \lambda & \\ & \lambda q \end{bmatrix} + O\left(\tfrac{1}{z}\right)\right)\begin{bmatrix} 1 & \\ & z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ * & \lambda \end{bmatrix} + O\left(\tfrac{1}{z}\right)$$ となり固有値の比を1にもっていける

但この変換をすると形式解の初 term が 1 でなく

退化していることもある (⇒ 原点の外に pole.)

$(\lambda, \lambda q)$

$\mapsto (\lambda, \lambda)$

となっている

ということ.

略証(定理の)

$\alpha = 0$ としてよい.

$$Y(z) = \hat{Y}(z)\, z^{\frac{\log A_0}{\log q}} \text{ と代入}$$

$$\Rightarrow \hat{Y}(qz)A_0 = A(z)\hat{Y}(z), \quad \hat{Y}(z) = 1 + \frac{Y_1}{z_1} + \cdots$$

$$\Leftrightarrow q^{-n}Y_n - A_0 Y_n A_0^{-1} = \sum_{j=1}^{n} A_j Y_{n-j} A_0^{-1}$$

$n = 1, 2, \cdots$

固有値の仮定より

$$\mathrm{Ad}\,A_0 : X \longmapsto A_0 X A_0^{-1}$$

は $\{q^{-1}, q^{-2}, \cdots\}$ を固有値にもたない.

$\therefore$ $q^{-n} - \mathrm{Ad}\,A_0$ は可逆

$$\therefore \quad Y_n = (q^{-n} - \mathrm{Ad}\,A_0)^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} A_j Y_{n-j} A_0^{-1}.$$

従って形式解が inductive にきまる.

収束性. $|A_j| \le M R^{-j} \quad \forall j \ge 0$

operator norm →

$$\sup_n \|(q^{-n} - \mathrm{Ad}\,A_0)^{-1}\| = C < \infty$$

のとき, r, K を

$$|Y_1| \le K r^{-1}$$

$$CM|A_0^{-1}| \frac{r/R}{1 - r/R} \le 1$$

ととれば

$$|Y_n| \le K r^{-n} \quad \forall n$$

とわかり, これより収束性がわかる. ▨

以上は local theory.
global theory :

有理函数係数の場合

$A(z)$: z の有理函数　$Y(qz) = A(z)Y(z)$

を考え
$$A(z) = z^{\alpha}\left(A_\infty + O\left(\tfrac{1}{z}\right)\right) \quad : z \to \infty$$
$$= z^{\beta}\left(A_0 + O(z)\right) \quad : z \to 0$$
（$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$）

とするとき

仮定 A_∞, A_0 : 非退化 かつ 固有値の比 $\notin \{q, q^2, \dots\}$

とすれば
$$\begin{cases} Y_\infty(z) = (1+\cdots)\, z^{\frac{\log A_\infty}{\log q}} \times q^{\frac{\alpha}{2}(u^2-u)} & : |z| \text{大で収束} \\ Y_0(z) = (1+\cdots)\, z^{\frac{\log A_0}{\log q}} \times q^{\frac{\beta}{2}(u^2-u)} & : |z| \text{小で収束} \end{cases}$$

という2つの解がある。これらについて次が成り立つ。

Lemma （べき函数と $q^{\frac{1}{2}\cdots}$ を除き）, $Y_\infty(z), Y_0(z)$ は
$\mathbb{C}^\times$ 上有理型で,
$Y_\infty(z)$ の poles $\subset \{aq, aq^2, aq^3, \dots \mid a : A(z) \text{ の pole}\}$
$Y_0(z)$ の poles $\subset \{b, bq^{-1}, bq^{-2}, \dots \mid b : A(z)^{-1} \text{ の pole}\}$
をみたす。

$\because$ $z \in \mathbb{C}^\times$ に対し $|q^{-N}z|$: 十分大 となるように N をとると
$$Y_\infty(z) = A(q^{-1}z)Y_\infty(q^{-1}z) = \cdots$$
$$= A(q^{-1}z)\cdots A(q^{-N}z)\, Y_\infty(q^{-N}z)$$
同様に
$$Y_0(z) = A(z)^{-1}Y_0(qz) = \cdots$$
$$= A(z)^{-1}\cdots A(zq^{N})^{-1}\, Y_0(q^{N}z).$$
これらよりわかる。 $\boxed{/\!/}$
(すぐ)

例1 1×1 の場合

$$y(qz) = \frac{b-z}{a-z}\, y(z) \qquad \text{のとき.}$$

これを

$$\frac{y(z)}{y(q^{-1}z)} = \frac{1-bqz^{-1}}{1-aqz^{-1}},$$

とかけば

$$y_\infty(z) = \frac{1-bqz^{-1}}{1-aqz^{-1}} \cdot \frac{1-bq^2z^{-1}}{1-aq^2z^{-1}} \cdots$$

$$= \frac{(bqz^{-1})_\infty}{(aqz^{-1})_\infty}, \quad (z)_\infty := (z;q)_\infty := \prod_{j=0}^{\infty}(1-q^jz);$$

$$y_0(z) = z^\lambda \cdot \frac{1-a^{-1}z}{1-b^{-1}z} \frac{1-qa^{-1}z}{1-qb^{-1}z} \cdots$$

$$= z^\lambda \frac{(a^{-1}z)_\infty}{(b^{-1}z)_\infty} \qquad : 但\ q^{-\lambda} = \frac{a}{b}.$$

とわかる

これらは pseudoconst しかちがわない筈:

$$y_0(z) = y_\infty(z)\, C(z). \quad : \ {}^\exists C(z) = C(qz).$$

具体形は 上の式より

$$C(z) = z^\lambda \frac{(a^{-1}z)_\infty}{(b^{-1}z)_\infty} \frac{(aqz^{-1})_\infty}{(bqz^{-1})_\infty}$$

$$= z^\lambda \frac{\Theta(a^{-1}z)}{\Theta(b^{-1}z)}$$

とわかる : ここで

$$\Theta(z) := (z)_\infty (qz^{-1})_\infty (q)_\infty$$

は((本質的に)) elliptic theta fcn.

② こうした状況は((1×1でなくても))一般的.

<u>接続行列</u>

$$Y_0(z) = Y_\infty(z)\,C(z)$$ によって $C(z)$ を定義する。

⇒ ・$C(z)$ は z のベキと $q^{\frac{1}{2}\cdots}$ を除き $\mathbb{C}^\times$ 上有理型。

更に

・$z = q^u$ のとき $C(z) = \bar{C}(u)$ と書く;

z-plane	u-plane
zq	$u+1$
$ze^{2\pi i}$	$u + \frac{2\pi i}{\log q} =: u + \omega$

$\left(\text{i.e. } \omega := \frac{2\pi i}{\log q}\right)$

このとき

$$Y_\infty(z e^{2\pi i}) = Y_\infty(z)\, e^{2\pi i \frac{\log A_0}{\log q}}\, q^{\frac{\alpha}{2}(2\omega u + \omega^2 - \omega)}$$

なので

$$\bar{C}(u+\omega) = Y_\infty(z e^{2\pi i})^{-1}\, Y_0(z e^{2\pi i})$$

$$= (-)^{\alpha-\beta}\, \underbrace{e^{(-\alpha+\beta)2\pi i(u + \frac{\omega}{2})}}_{u\text{について1次!}}\, e^{-\omega \log A_\infty}\, \bar{C}(u)\, e^{\omega \log A_\infty}.$$

となる ―― 一方明らかに

$$\bar{C}(u+1) = \bar{C}(u).$$

これらの性質は theta fns を characterize するものであるから,

∴ $\bar{C}(u)$ の行列要素は theta 函数

といえる. ((この辺をちゃんといったのが Birkhoff?))

Date

「今日は体調に…って とてもおかしいで…ので…」
(16:52)

多変数の場合.

$$T_j Y = A_j Y \qquad (T_j f)(z_1,\dots,z_n) = f(z_1,\dots,q z_j,\dots,z_n)$$

$$A_j(z_1,\dots,z_n) : (z_1,\dots,z_n) \text{ の有理函数}$$

を考える。

可積分条件: $(T_k A_j)\cdot A_k = (T_j A_k) A_j \quad \forall j, k$

が成立しているものとする。

青本の方法: どれか1つの変数に注目し一変数のときをapply。

$z_1 \to \infty$ のとき

$$A_j(z_1,\dots,z_n) = z_1^{\mu_j}\left(A_j^{(0)} + z_1^{-1} A_j^{(1)}(z_2,\dots,z_n) + \cdots\right)$$

但 $\begin{cases} \mu_j \in \mathbb{Z} \\ A_j^{(l)}(z_2,\dots,z_n) : (z_2,\dots,z_n) \text{ の多項式} \end{cases}$

と書いたとき, 次が成り立っているとする。

仮定
- $A_j^{(0)}$ は可逆かつ $(z_2,\dots,z_n)$ によらない
- $A_1^{(0)}$ の固有値の比 $\notin \{q, q^2, \dots\}$

$\Downarrow$

注) 可積分条件より → $\mu_j = 0 \ (j \neq 1)$

$[A_j^{(0)}, A_k^{(0)}] = 0 \ (j \neq k)$.

定理 (青本): 次の形の解が一意的に存在する:

$$Y(z) = q^{\frac{\mu_1}{2}(u_1^2 - u_1)}\, \hat{Y}(z)\, z_1^{\Lambda_1}\cdots z_n^{\Lambda_n}, \quad \Lambda_j := \frac{\log A_j^{(0)}}{\log q},$$

$\hat{Y}(z) = 1 + z_1^{-1} Y_1(z_2,\dots,z_n) + \cdots$ は

$\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^{n-1}$ 上有理型, 各 $Y_l(z_2,\dots,z_n)$ は多項式で

${}^\forall R>0,\ {}^\exists D_R : |z_1| > R,\ (z_2,\dots,z_n) \in D_R$ で収束.

$\bigcup_{R>0} D_R = \mathbb{C}^{n-1}, \quad D_R \subset D_{R'} \text{ if } R < R'$.

以上 一般論が長くつづいたが
これらのおかげで n点函数が formal でなく
analyticにも意味をもつことがいえる
ただし、定理の仮定(固有値の)が
dominant integral のときの Vertex op. の
n点函数にたいしては成り立たない。⊗: Verma module
ならOK.

⊗ 前の例でも
$\begin{bmatrix} 1 & \\ & \rho^2 \end{bmatrix}$
のようになっていた。

• そこでカンタンの為 以下では Vertex operatorは

$$M(\lambda) \longrightarrow M(\mu) \hat{\otimes} V_z$$

$M(\lambda)$: Verma module , λ, μは"generic"

のものを考える　$\left(\begin{array}{l} \lambda = m_0\Lambda_0 + m_1\Lambda_1 \\ m_0, m_1 \in \mathbb{C}, \text{"generic"} \end{array}\right)$

この状況の下で

$$\langle \mu_0 | \Phi_{\mu_1}^{\mu_0 V_1}(z_1) \cdots \Phi_{\mu_n}^{\mu_{n-1} V_n}(z_n) | \mu_n \rangle \Big/ \exists \prod_{i<j} \varphi_{ij}(z_i/z_j)$$

は $\bar{R}(z)$ (:有理関数) を用いた qKZ方程式の解。
固有値に関する仮定もみたされることが言える
これより $\langle \mu_0 | \cdots | \mu_n \rangle$ は(ベキの部分を除き)
$(\mathbb{C}^{\times})^n$ 上有理型。

Date

Rem. $\langle \text{highest} | \cdots | \text{highest} \rangle$ のみでなく

$V^t(\mu_0) \ni {}^\forall \langle u|$, $V(\mu_n) \ni {}^\forall |v\rangle$

に対し $\langle u| \cdots |v\rangle$ は有理型。

$\because$ $\langle u|$, $|v\rangle$ の weight についての induction.

Φ の intertwining property により

$$\langle u| \cdots f_i |v\rangle = \Delta^{(n-1)}(k_i^{-1}) \langle u| f_i \cdots |v\rangle + \Delta^{(n-1)}(f_i) \langle u| \cdots |v\rangle$$

で、e_i, f_i の作用では高々 $z_\ell^{\pm 1}$ が生じるのみである //

・同様にして、

$$\langle \mu_0 | \underset{\text{intertwiner}}{\cdots} | \mu_n \rangle = 0 \Rightarrow \langle u| \cdots |v\rangle = 0 \quad \text{for } {}^\forall \langle u| , {}^\forall |v\rangle .$$

もわかる

（intertwining property があるから、何か示そうと思ったら $\langle \text{highest} | \cdots | \text{highest} \rangle$ で示せばよい（!））

Vertex operators の交換関係

$\otimes = \hat{\otimes}$ →

V_1, V_2
$:= V_{z_1}\otimes V_{z_2}$ の 1st/2nd compo.

$$
\begin{tikzcd}
\underline{M(\mu_2)}_{\text{start}} \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_{\mu_2}^{\mu_1 V_1}"'] & M(\mu_1')\otimes V_{z_2} \arrow[dd] \\
M(\mu_1)\otimes V_{z_1} \arrow[d, "\Phi_{\mu_1}^{\mu_0 V_2}(z_2)"'] & \\
M(\mu_0)\otimes V_{z_1}\otimes V_{z_2} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes R(z_1/z_2)"'] & \underline{M(\mu_0)\otimes V_{z_1}\otimes V_{z_2}}_{\text{goal}}
\end{tikzcd}
$$

この diagram は commute するわけではないが、
start から goal への 2つの intertwiners を与える
→ intertwiners の base がわかっていれば、互いをそれで展開できるはず。

Fact 実は

- $\left\{\Phi_{\mu_1'}^{\mu_0 V_1}(z_1)\,\Phi_{\mu_2}^{\mu_1' V_2}(z_2)\right\}_{\mu_1'}$ は、$M(\mu_2)\to M(\mu_0)\otimes V_{z_1}\otimes V_{z_2}$ なる intertwiners の空間の base
- $\left\{\langle\mu_0|\,\Phi_{\mu_1'}^{\mu_0 V_1}(z_1)\,\Phi_{\mu_2}^{\mu_1' V_2}(z_2)\,|\mu_2\rangle\right\}_{\mu_1'}$ は、qKZ方程式の解の空間の base.

∵ : [Tsuchiya-Kanie] と同様。
(と知っていれば良い)

//

変数をひっくり返してRをかけたものも解になった ∵LHSもqKZをみたす。

〈もともとのKZではRのかわりに「解析接続してz_2をまわす」操作が左辺にいたところ。ここもqでかわっている。〉

⑦ これにより

$$R(z_1/z_2)\,\Phi_{V_1}^{\mu_0 V_2}(z_2)\,\Phi_{\mu_0}^{\mu_1 V_1}(z_1)$$

$$=\sum_{\mu_1'}\Phi_{\mu_1'}^{\mu_0 V_1}(z_1)\,\Phi_{\mu_2}^{\mu_1' V_2}(z_2)\cdot C\left(\begin{matrix}\mu_0 & \mu_1\\ \mu_1' & \mu_2\end{matrix}\,\middle|\, z_1/z_2\right)$$

と展開できることになる。

両辺の期待値をとると 上の係数Cは

qKZの接続行列 $\left(\!\left((z_2, z_1)\to(z_1, z_2)\right)\!\right)$ ①

scalar因子を除き

∴ Cはtheta函数で書ける。

Frenkel - Reshetikhin の主張 (∵本講義の目標) 17:22

Cは《face型》Yang - Baxter方程式をみたす。

∵ $M(\mu_3)\longrightarrow M(\mu_0)\otimes V_{z_1}\otimes V_{z_2}\otimes V_{z_3}$

を2通りにかく。 ⑦

以下

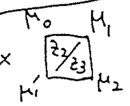
$$\begin{array}{ccc}\mu_0 & & \mu_1\\ & \boxed{\;z\;} & \\ \mu_1' & & \mu_2\end{array} := C\left(\begin{matrix}\mu_0 & \mu_1\\ \mu_1' & \mu_2\end{matrix}\,\middle|\, z\right)$$

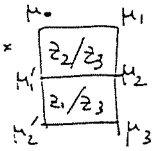
とかく。

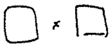
⑦ まず

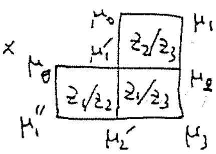
$$R_{12}(z_1/z_2)R_{13}(z_1/z_3)R_{23}(z_2/z_3)\Phi^{\mu_0 V_3}_{\mu_1}(z_3)\Phi^{\mu_1 V_2}_{\mu_2}(z_2)\Phi^{\mu_2 V_1}_{\mu_3}(z_1)$$

$$= R_{12}(z_1/z_2)R_{13}(z_1/z_3)\sum_{\mu_1'}\Phi^{\mu_0 V_2}_{\mu_1'}(z_2)\Phi^{\mu_1' V_3}_{\mu_2}(z_3)\Phi^{\mu_2 V_1}_{\mu_3}(z_1)$$

$\times$ 

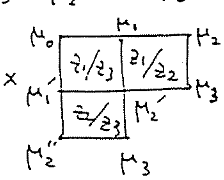
$$= R_{12}(z_1/z_2)\sum_{\mu_1'\mu_2'}\Phi^{\mu_0 V_2}_{\mu_1'}(z_2)\Phi^{\mu_1' V_1}_{\mu_2'}(z_1)\Phi^{\mu_2' V_3}_{\mu_3}(z_3)\times$$ 

 は →  (注) のいみ.

$$= \sum_{\mu_1'\mu_2'\mu_3'}\Phi^{\mu_0 V_1}_{\mu_1''}(z_1)\Phi^{\mu_1'' V_2}_{\mu_2'}(z_2)\Phi^{\mu_2' V_3}_{\mu_3}(z_3)\times$$ 

同様にして

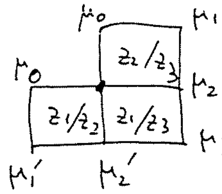
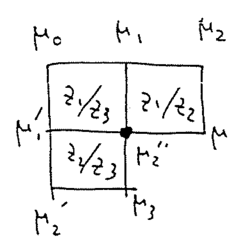
$$R_{23}(z_2/z_3)R_{13}(z_1/z_3)R_{12}(z_1/z_2)\overbrace{\Phi^{\mu_0 V_3}_{\mu_1}(z_3)\Phi^{\mu_1 V_2}_{\mu_2}(z_2)\Phi^{\mu_2 V_1}_{\mu_3}(z_1)}^{\text{上と同じ}}$$

$$= \sum_{\mu_1'\mu_2'\mu_3'}\Phi^{\mu_0 V_1}_{\mu_1''}(z_1)\Phi^{\mu_1'' V_2}_{\mu_2'}(z_2)\Phi^{\mu_2' V_3}_{\mu_3}(z_3)\times$$ 

となる.

☺ RのYBE

Φの独立性 } より

$\sum_{\mu_1''}$  $=\sum_{\mu_2''}$ 

((:face の YBE)).

理論を dom. int. wt. に制限すると "restricted" model の(face) YBE が出る.

[FR]は C をカンタンなときに求め [ABF] による face の解と一致することをたしかめている

((2点関数として書けるものが q-hypergeom. で接続問題がわかっているとき.))

→ 今迄 face の解 がなぜ elliptic であるか, それに((はじめて)) 答を与えた.

尚 [青本-三輪-加藤] のカンタンな場合と [FR] との関係は 最近 松尾氏が示した.

しかし まだ不明の点が多い。

問題 ((おもいつくままに!))

① gKZの解を積分表示せよ. ((Jackson integral) でも何でも.(?))

<①のために有用>

② boson表示 (Wakimoto rep) を構成せよ.

③ Monodromy を規定する代数 (?)

④ gKZ方程式を, R(u) として elliptic solution を用いて調べること

...

「知られている解が全て このようにして出てくるか?」 → と当然予想するのだが 実際に Yes! という為には 接続問題を具体的に 解かないといけない, それには道具なしでは すぐいきづまる. そこで ①〜③ のようなQ.が 生ずる.

$p^{-\Phi}$ は 分数巾を吸収する 為の「ゲタ」で, gKZ eq. そのものを定義するには不要.

cf. CFTのとき: ((Comment.))
"$U_q(sl_2)$ に関係した braid rep"
という表わせた: 但 $\hat{q} = e^{\frac{2\pi i}{k+2}}$.

"Wakimoto表現って知ってる?" "ううん" とささやき交わしている学生さん有り《仲々大変!》

... ③, ④ のあたりから U_q の elliptic extension のようなものがでてくる (??)
//(17:42.)

以上。