KP方程式 （導入とSato方程式への書き換えまで）

§1. KdV方程式

。次の非線型偏微分方程式は KdV方程式 と呼ばれ soliton解を持つ.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+3u\frac{\partial u}{\partial x}$$

。広田の直接法 による解法

P を 2変数多項式とし.

$$P(D_x.\ D_t)f\cdot g\equiv P\left(\frac{\partial}{\partial x'},\frac{\partial}{\partial t'}\right)\left\{f(x+x',t+t')\,g(x-x',t-t')\right\}\Big|_{x'=t'=0}$$

とおく. 広田の従属変数 τ を

$$u=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\tau$$

で定義する。（ $\tau\longmapsto(ax+b)\,e^{f(t)}\tau$ の自由度がある） この時 広田の双一次方程式

$$(4D_xD_t-D_x^4)\,\tau\cdot\tau=0$$

は もとのKdV方程式と等価である。

。解の例

$$\tau=1+a\exp(2kx+2k^3t)$$

は 1-soliton解を与える.

§2. Lax 方程式

$$\begin{cases} B = \partial^3 + 3u\partial + \frac{3}{2}(\partial u) \\ L = \partial^2 + 2u \end{cases}$$

Lax 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}L = [B.L]$$

は KdV 方程式と同値である。

check

$$\begin{cases} [\partial^3, L] = 2(\partial^3 u) + 6(\partial^2 u)\partial + 6(\partial u)\partial^2 \\ [3u\partial, L] = -3(\partial^2 u)\partial - 6(\partial u)\partial^2 + 6u(\partial u) \\ [\frac{3}{2}(\partial u), L] = -\frac{3}{2}(\partial^3 u) - 3(\partial^2 u)\partial \end{cases}$$

$$\therefore \quad [B.L] = \frac{1}{2}(\partial^3 u) + 6u(\partial u)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial L}{\partial t} = [B.L] \iff \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3u\frac{\partial u}{\partial x}. \qquad \blacksquare$$

§3. KP方程式

。擬微分作用素

$$L = \partial + u_2 \partial^{-1} + u_3 \partial^{-2} + \cdots$$

。KP方程式

$$(*) \quad \frac{\partial L}{\partial x_n} = [B_n , L] \quad ; \quad B_n = (L^n)_+$$

note: $\{ B : \text{diff op} , \ [B , L]_+ = 0 \} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{C} (L^n)_+$

・可積分条件

$$(**) \quad \frac{\partial B_n}{\partial x_m} - \frac{\partial B_m}{\partial x_n} + [B_n , B_m] = 0$$

逆に この式を満たす n次の diff op. B_n が与えられれば (*)を満たす L が unique に存在する。

(***). Gauge変換

$$\exists W = 1 + \omega_1 \partial^{-1} + \omega_2 \partial^{-2} + \quad ; \quad L = W \partial W^{-1}$$

このような W は $W' = WC$ でつくされる.

§4. Sato方程式への書き換え

KP eq. $$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [B_n . L] \qquad B_n = (L^n)_+ \qquad (1)$$

$$B_n^c \equiv -L^n + B_n = -(L^n)_-$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t_n} = [B_n^c , L] \qquad (\because \quad [L^n . L] = 0) \qquad (2)$$

$$\begin{cases} \Omega \equiv \sum_{n=1}^{\infty} dt_n B_n \\ \Omega^c \equiv \sum_{n=1}^{\infty} dt_n B_n^c \end{cases} \qquad d = \sum_{n=1}^{\infty} dt_n \frac{\partial}{\partial t_n}$$

(1).(2)は次の形になる

$$(*) \qquad dL = [\Omega . L] = [\Omega^c , L]$$

prop. $(**) \left| \begin{array}{l} d\Omega = \Omega \wedge \Omega \\ d\Omega^c = \Omega^c \wedge \Omega^c \end{array} \right.$ は (*) と同値

Zakharov-Shabat eq.

proof $(*) \Rightarrow (**)$
$$\begin{aligned} 0 = d^2 L &= d[\Omega . L] \\ &= [d\Omega , L] - [\Omega , dL] \\ &= [d\Omega . L] - [\Omega , [\Omega . L]] \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Jacobi id.} \quad [\Omega , [\Omega , L]] - [\Omega , [L . \Omega]] + [L . [\Omega . \Omega]] = 0 \\ \therefore [\Omega . [\Omega . L]] = \frac{1}{2} [[\Omega . \Omega] , L] = [\Omega \wedge \Omega . L] \end{array} \right]$$

$$= [d\Omega - \Omega \wedge \Omega , L]$$

$$L = W\partial W^{-1}$$

$$dL = dW\partial W^{-1} + W\partial dW^{-1}.$$

$$= dW\cdot W^{-1}\, W\partial W^{-1} - W\partial W^{-1} dW W^{-1}$$

$$= [dW\cdot W^{-1},\ L]$$

一方(*)より

$$dL = [\Omega^c, L]$$

$$\therefore\ [dW\cdot W^{-1} - \Omega^c, L] = 0$$

$$\text{i.e. } [W^{-1}(dWW^{-1} - \Omega^c)W,\ \partial] = 0$$

$\Theta \equiv W^{-1}(dW\cdot W^{-1} - \Omega^c)W$ は $\dfrac{\partial\Theta}{\partial x} = 0$

$$\Theta = W^{-1}dW - W^{-1}\Omega^c W$$

$$d\Theta = -W^{-1}dWW^{-1}dW + W^{-1}dWW^{-1}\Omega^c W - W^{-1}\overset{\Omega^c\wedge\Omega^c}{\overset{\uparrow}{d\Omega^c}}W + W^{-1}\Omega^c WW^{-1}dW$$

$$= -(W^{-1}dW - W^{-1}\Omega^c W)\wedge(W^{-1}dW - W^{-1}\Omega W)$$

$$= -\Theta\wedge\Theta$$

i.e. $d\Theta + \Theta\wedge\Theta = 0$ (pure gauge)

$$\Longrightarrow\ \Theta = -dC\cdot C^{-1} \qquad C = 1 + C_1(t)\partial^{-1} + \cdots$$

$$\therefore\ W^{-1}(dW W^{-1} - \Omega^c)W = -dC\cdot C^{-1}$$

$$dW\cdot W^{-1} - \Omega^c = -WdC\cdot C^{-1}W^{-1}$$

$$dW\cdot C\cdot C^{-1}W^{-1} + WdC\cdot C^{-1}W^{-1} - \Omega^c = 0$$

$$d(WC)(WC)^{-1} - \Omega^c = 0$$

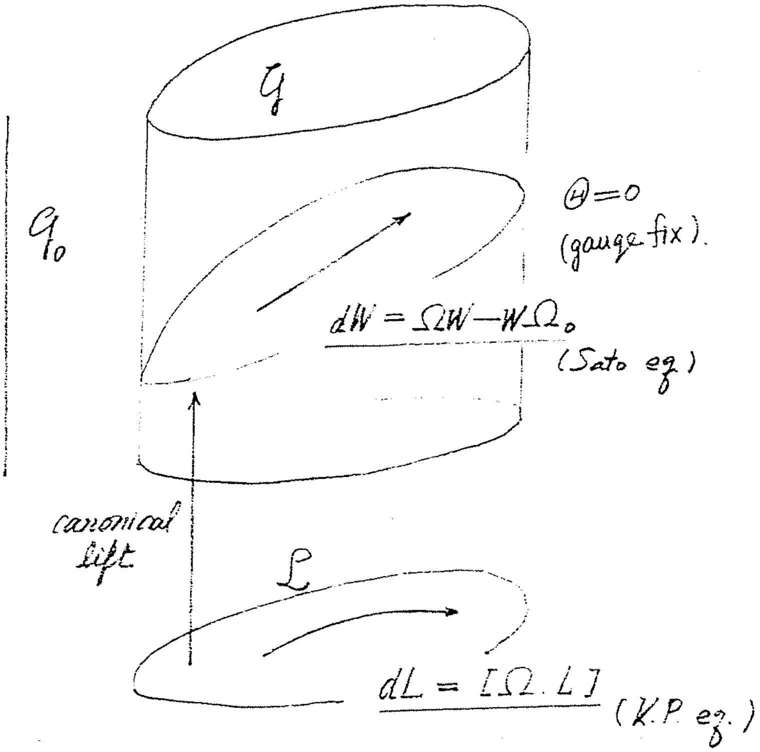
$$\therefore \quad WC \longrightarrow \hat{W} \qquad \text{(gauge fix)}$$

$$\boxed{dW = \Omega^c W}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t_n} = B_n^c W = B_n W - L^n W$$

$$= B_n W - W\partial^n$$

$$\therefore \quad \boxed{\begin{gathered} \frac{\partial W}{\partial t_n} = B_n W - W\partial^n \\ B_n = (W\partial^n W^{-1})_+ \end{gathered}}$$



$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[d] & \underline{\underline{\text{Sato eq}}} \\ & \mathcal{L} & \underline{\underline{\text{K.P eq}}} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

KP方程式の解空間の構造 と τ-function （有限型の場合） 土屋氏 lecture

§1. 復習

$$\underline{t} = (t_1, t_2, \cdots)$$

$$u_j = u_j(x, \underline{t}) \in \mathbb{C}[[x, \underline{t}]]$$

pseudo differential operator L

$$L = \partial + u_1 \partial^{-1} + u_2 \partial^{-2} + \cdots \qquad \partial = \frac{\partial}{\partial x}.$$

KP eq

$$(*) \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial t_n} = [B_n, L] & n = 1, 2, \cdots \\[2ex] B_n = (L^n)_+ & (+ \text{ は微分 part }) \end{cases}$$

Thm i) (*) が解 L をもてば

$$(**) \begin{cases} \dfrac{\partial B_n}{\partial t_m} - \dfrac{\partial B_m}{\partial t_n} = [B_m, B_n] & m, n = 1, 2, \cdots \\[2ex] B_n = \partial^n + u_{n,1} \partial^{n-1} + u_{n,2} \partial^{n-2} + \cdots + u_{n,n} \end{cases}$$

ii) 逆に $B_n = \partial^n + \sum_{j=1}^{n} u_{n,j} \partial^{n-j}$, $u_{n,j} \in \mathbb{C}[[x, \underline{t}]]$, $u_{n,1} \equiv 0$ が (**) を満たすならば

$\exists_{L}$ (unique) st L : solution of (*) and $B_n = (L^n)_+$

($\Leftrightarrow$ $L = (B_n)^{1/n}$ $n \to \infty$).

Thm. $L = \partial + u_1\partial^{-1} + u_2\partial^{-2} + \cdots$ に対して.

i) $\exists\, W = 1 + w_1\partial^{-1} + w_2\partial^{-2} + \cdot$ $\quad w_j \in \mathbb{C}[[x, t]]$.

s.t. $L = W\partial W^{-1}$

ii) 上記のような W は,

$$C = 1 + C_1\partial^{-1} + C_2\partial^{-2} + \cdots \qquad C_j \in \mathbb{C}[[t]]$$

を乗ずる自由度 $(W \longrightarrow W' = WC)$ をのぞいて unique

系 L についての KP eq は 適当に C を選ぶことにより W についての方程式

$$(***)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t_n} = B_n W - W\partial^n & n = 1, 2, \cdot \\ B_n = (L^n)_+ \ , \quad L = W\partial W^{-1} \end{cases}$$

と等価である.

§ 有限型の場合

$$W = \partial + w_1\partial^{-1} + w_2\partial^{-2} + \cdots \qquad w_j \in \mathbb{C}[[x.\mathbf{t}]]$$

方程式 (＊＊＊) は 次のように書ける.

(＊＊＊) $$dW = \Omega W - W\Omega_0$$

$$\begin{cases} d = \sum_{n=1}^{\infty} dt_n \frac{\partial}{\partial t_n} \\ \Omega = \sum_{n=1}^{\infty} dt_n B_n \\ \Omega_0 = \sum_{n=1}^{\infty} dt_n \partial^n \end{cases}$$

ここでは この方程式の解空間（実は Grasman variety）を有限型の場合に与える.

Def $m \geq 1$ $n \geq 1$ integer

$W = 1 + w_1\partial^{-1} + w_2\partial^{-2} + \cdots$ $w_j \in \mathbb{C}[[x.\mathbf{t}]]$ が有限型 とは

(I_m) $W_m \equiv W\partial^m$ が diff. op. (i.e. $w_j = 0$ for $j \geq m+1$).

(II_n) $Q_n \equiv \partial^n W^{-1}$ が diff op

をみたすことを言う。

$$\boxed{\text{Thm} \quad (m.n)\text{型 の 解空間} \cong G_0(m.N) \quad N = m+n}$$

$G_0(m.N)$ の定義は以下の証明の過程で与える.

$(I_m) \Rightarrow$

$$W_m \equiv W\partial^m = \partial^m + w_1\partial^{m-1} + \cdots + w_m \quad \text{diff op.}$$

$\xi_j(x)$ $j=0,1,\dots,m-1$ を 線型微分方程式

$$W_m \xi_j(x) = 0$$

の 1次独立な 解とすると

$$V(W_m) \equiv \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{C}\xi_j \subseteq \mathbb{C}[[x]]$$

は W_m の 解空間になる。

$$\xi \equiv (\xi_0, \xi_1, \cdots \xi_{m-1})$$

が 1次独立 であることは、Wronsky行列式

$$\mathrm{Wron}(\xi) \equiv \det \begin{pmatrix} \xi_0(x) & \xi_1(x) & \cdots & \xi_{m-1}(x) \\ \xi_0'(x) & \xi_1'(x) & \cdots & \xi_{m-1}'(x) \\ \vdots & & & \\ \xi_0^{(m-1)}(x) & \xi_1^{(m-1)}(x) & \cdots & \xi_{m-1}^{(m-1)}(x) \end{pmatrix} \quad \text{（実は } x \text{ によらない）}$$

が nonzero と同値である。

lemma

$(I_m)(II_n) \Rightarrow$ $\xi_0(x), \cdots, \xi_{m-1}(x)$ は 高々 $N-1$次の多項式である。

~~proof~~ $$Q_n W_m \xi_j = \partial^n W^{-1} W \partial^m \xi_j = \partial^{n+m}\xi_j = 0 \qquad \blacksquare$$

そこで $N-1$次の多項式の空間 $V(N)$ の basis を

$$V(N) = \sum_{\nu=0}^{N-1} \mathbb{C}\left(\frac{1}{\nu!}x^\nu\right)$$

ととれば

解空間 $V(W_m) \subseteq V(N)$ であって $\xi \in V(W_m)$ は この basis で

$$\xi = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \xi_0^{(0)} & \cdots & \xi_{m-1}^{(0)} \\ \vdots & & \\ \xi_0^{(m-1)} & \cdots & \xi_{m-1}^{(m-1)} \end{matrix}} \\ \begin{matrix} \xi_0^{(m)} & \quad & \xi_{m-1}^{(m)} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_0^{(N-1)} & & \xi_{m-1}^{(N-1)} \end{matrix} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta \\ \hline * \end{bmatrix}}^{m} \begin{matrix} \}m \\ \}n \end{matrix}$$

但し、$\underline{\det \Delta \neq 0}$

と書ける。

<u>Def</u> $G_0(m,N) = \{ \tilde{V} \subseteq V(N)$ m次元 subspace ; $\det\Delta \neq 0 \}$.

さて 逆に $V(N) \supseteq \tilde{V}$ m次元 subspace でその basis ξ が $\det\Delta \neq 0$ なるものが与えられたとき、これを解空間とするような有限階の W があることを示そう。

$$\xi_j(x) = \sum_{\nu=0}^{N-1} \xi_j^{(\nu)} \frac{x^\nu}{\nu!}$$

とする。

$$W_m' \equiv \underrightarrow{\det} \begin{vmatrix} \xi_0^{(0)}(x) & \cdots & \xi_{m-1}^{(0)} & 1 \\ \xi_0^{(1)}(x) & \cdots & \xi_{m-1}^{(1)} & \partial \\ \vdots & & \vdots & \\ \xi_0^{(m)}(x) & \cdots & \xi_{m-1}^{(m)} & \partial^m \end{vmatrix} = \sum_{n=0}^{m} \tau_n(\xi)\, \partial^{m-n}$$

とする。$\underrightarrow{\det}$ は ∂ を一番右にして積をとる意味. $\det\Delta \neq 0$ から

$$\tau_0(\xi) \neq 0$$

に注意しよう。そこで

$$W_m = \frac{1}{\tau_0} W_m'$$

がわかる。実際 この W_m が 与えられた $\tilde{V}$ を解空間にする diff op. で (I_m) を満たすことは明らかである。そこで この W_m が (II_n) を満たすことを示そう.

$\xi_j(x)$ は高々 $(N-1)$ の多項式であるから $\partial^N \xi_j(x) = 0$ である. 一方で

$$W_m \xi_j(x) = 0$$

であった。

$$\begin{cases} P = \partial^N \\ W_m = \partial^m + w_1 \partial^{m-1} + \cdots + w_m \end{cases}$$

とおくと.

$$P = Q W_m + R$$

$$\begin{cases} Q = \partial^n + q_1 \partial^{n-1} + \cdots + q_n \qquad q_j \in \mathbb{C}[[x, t]]. \\ R = \sum_{j=0}^{r} a_j \partial^j \quad (0 \leq r < m \end{cases}$$

と一意的に書ける。(割り算の原理) そこで

$$R \xi_j = (P - Q W_m) \xi_j = 0$$

$$\text{i.e} \quad (a_0, a_1, \cdots a_r, 0, \cdots 0) \begin{vmatrix} \xi_0^{0}(x), & \cdots & \xi_{m-1}^{(0)}(x) \\ & & \vdots \\ \xi_0^{(N-1)}(x), & \cdots & \xi_{m-1}^{(N-1)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

従って $\det \Delta \neq 0$ より $a_0 = a_1 = \cdots = a_r = 0$ i.e $R = 0$.

$$\therefore \quad \partial^{m+n} = Q W_m = Q W \partial^m$$

$$\partial^n W^{-1} = Q$$

これは 定義により 微分 operator であったから これで (II_n) が示された。

以上のことをまとめておく.

$$V(N)=\sum_{\nu=0}^{N-1}\mathbb{C}\left(\frac{x^{\nu}}{\nu!}\right)\cong\mathbb{C}^{N}$$

$$\rotatebox{90}{$\subseteq$}$$

$$GM(m,N)\equiv\{\tilde{V}:m\text{次元 subspace of }V(N)\}\quad(\text{Grasmann 多様体})$$

$$\rotatebox{90}{$\subseteq$}$$

$$GM_0(m,N)\equiv\{\tilde{V}:m\text{次元 subspace of }V(N),\ \det\Delta\neq 0\}.$$

$$\rotatebox{90}{$\cong$}$$

(m,n)型 W の解空間

Sato方程式の解

$$\hat{W}=\partial+\hat{w}_1\partial^{-1}+\hat{w}_2\partial^{-2}+\cdots+\hat{w}_m\partial^{-m}\quad\in GM_0(m,N).$$

$$\hat{w}_j\in\mathbb{C}[[x]]$$

を初期値とした Sato方程式の解をもとめてみよう. すなわち.

$$W=\partial+w_1\partial^{-1}+w_2\partial^{-2}+\cdots+w_m\partial^{-m}\quad\in GM_0(m,N)$$

$$w_j\in\mathbb{C}[[x,t]]$$

で

$$\begin{cases} w_j(x,0,0,0,\cdots)=\hat{w}_j(x) \\ \dfrac{dW}{dt_n}=B_nW-W\partial^{n}\quad(n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

なるものを求める.

解の構成

$\hat{W}$が有限型であるから. その解空間 $\hat{V}$ の basis を $\xi=(\xi_0,\xi_1,\cdots\xi_{m-1})$ とすると $\det\Delta\neq 0$.

$$\xi_j(x,\underline{t}) \equiv \begin{pmatrix} \xi_j^{(0)}(x,\underline{t}) \\ \vdots \\ \xi_j^{(N-1)}(x,\underline{t}) \end{pmatrix} \equiv e^{(x+t_1)\Lambda + t_2\Lambda^2 + t_3\Lambda^3 +} \begin{pmatrix} \hat{\xi}_j^{(0)} \\ \vdots \\ \hat{\xi}_j^{(N-1)} \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$\partial^{\nu} \xi_j^{(0)}(x,\underline{t}) = \xi_j^{(\nu)}(x,\underline{t}).$$

である。この $\xi_j(x,\underline{t})$ から $W_m = \partial^m + w_1 \partial^{m-1} + \cdots + w_m$ を作って

$$W = W_m \partial^{-m}$$

とすれば これが Sato 方程式の解になる。すなわち.

Thm $\dfrac{\partial W}{\partial t_n} = B_n W - W \partial^n$ （初期条件をみたすことは自明）.

proof 定義により

$$\begin{cases} W_m = \dfrac{1}{I_0(\xi)} \underset{\rightarrow}{\det} \begin{pmatrix} \xi_0^{(0)} & \cdots & \xi_{m-1}^{(0)} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \xi_0^{(m)} & \cdot & \xi_{m-1}^{(m)} & \partial^m \end{pmatrix} \\[2ex] \dfrac{\partial \xi_j}{\partial t_n} = \partial^n \xi_j \end{cases}$$

は. 方程式

$$W_m \xi_j = 0$$

に従う。 W_mはこの意味で unique であるから この式より求める結果が得られるはずである。実際 これを t_nで微分すれば

$$\frac{\partial W_m}{\partial t_n}\xi_j + W_m \partial^n \xi_j = 0$$

そこで $$\Phi \xi_j \equiv \underbrace{\frac{\partial W_m}{\partial t_n}}_{\text{高々 } m+1 \text{ 次}} \xi_j + \underbrace{W_m \partial^n}_{m+n \text{ 次の微分}} \xi_j$$ とおけば

Pは N次 diff op. で 最高次は ∂^Nであり、 $P\xi_j = 0$ に従う.

さきほどと同様に

$$\begin{cases} P = B_n W_m \\ B_m = \partial^n + \cdot \quad + u_{n,n} \quad \text{diff op.} \end{cases}$$

が示される. すなわち.

$$\frac{\partial W_m}{\partial t_n} + W_m \partial^n = B_n W_m$$

i.e $$\boxed{\frac{\partial W}{\partial t_n} + W \partial^n = B_n W}$$

がわかる。 ∎

ここで与えられた B_n が $(L^n)_+$ とかけることは 積分可能条件より出てくる。

無限次元への拡張

$m' \geq m,\ n' \geq n$ integer とする 定義により.

W が (m,n) 型 $\Longrightarrow$ W が (m',n') 型

である。この時 次のことが成り立つ.

Thm (m,n) 型 W の解空間は そのまま (m',n') 型の解空間とも見なせる.

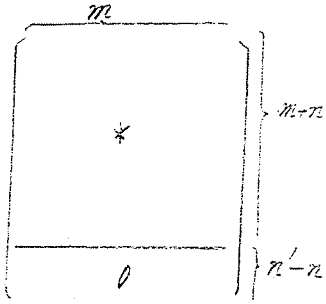
proof i) $m' = m$ の場合

$$V(m+n) \hookrightarrow V(m+n')$$

この部分空間は 行列表示で 右図のようになっているが

これは Λ の作用の下で invariant であるから

解空間は $V(m+n')$ 内で動かしても不変である.



ii) $n' = n \quad m' = m+1$ の場合

$W_{m+1} = W_m \partial$ の解空間は W_m の解 ξ_j を const. なしで積分したもの

$$\partial(\xi'_j) = \xi_j$$

から

$$V(W_{m+1}) = \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{C}\, \xi'_j \oplus \mathbb{C}$$

と作ればよい。

§3. Grassman mfd の Projective imbedding と τ-function

(Fermion による書き換え).

$GM(m.N) = \{ W :$ m次元 subspace of $\mathbb{C}^N \}$: Grassman mfd

$W \in GM(m.N)$ を fix する.

$$\begin{cases} \underline{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \cdots \xi_{m-1}) \\ \underline{\xi}' = (\xi_0', \xi_1', \cdots, \xi_{m-1}') \end{cases}$$

を W の 2つの basis とすると

$$\underline{\xi}' = \underline{\xi} A \qquad (\xi_j' = \xi_i a_{ij}) , \quad \det A \neq 0$$

$\Lambda^m V$: V の m 次の外積空間 , $\dim \Lambda^m V = \binom{N}{m}$

$e_0, e_1, \cdots e_{N-1}$ を V の basis とすれば

$e_{\nu_0} \wedge e_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge e_{\nu_{m-1}}$: $0 \leq \nu_0 < \cdots < \nu_{m-1} \leq N-1$

が $\Lambda^m V$ の basis になる.

basis $\underline{\xi}$ に対して $\Lambda^m V$ の元 $\Lambda^m \underline{\xi}$ を

$$\Lambda^m \underline{\xi} \equiv \xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_{m-1} = \sum_I \xi_I e_I .$$

$$\begin{cases} I = (\nu_0, \nu_1, \cdots \nu_{m-1}) \qquad 0 \leq \nu_0 < \nu_1 < \cdots < \nu_{m-1} \leq N-1. \\ e_I = e_{\nu_0} \wedge e_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge e_{\nu_{m-1}} \\ \xi_I = \det \begin{vmatrix} \xi_0^{(\nu_0)} & \cdots & \xi_{m-1}^{(\nu_0)} \\ & & \\ \xi_0^{(\nu_{m-1})} & \cdots & \xi_{m-1}^{(\nu_{m-1})} \end{vmatrix} \end{cases}$$

と定義する. 異なる basis ξ' をとれば

$$\Lambda^m \xi' = (\det A)\, \Lambda^m \xi$$

となる。そこで

$$\begin{tikzcd}
C^* \arrow[r] & \widetilde{GM}(m,N) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[rd, phantom, "\circlearrowright"] & \Lambda^m V \setminus \{0\} \arrow[d] \\
& GM(m,N) \arrow[r, hook] & P(\Lambda^m V) \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& \xi \arrow[r, mapsto, dashed] & (\xi_I)
\end{tikzcd}$$

が可換となるような Grossman mfd $GM(m,N)$ の $P(\Lambda^m V)$ へのうめ込みがある.
この (ξ_I) を $W \in GM(m,N)$ のプリュッカー座標という.

V^* : V の dual space.

$e_0^*, e_1^*, \ldots, e_{N-1}^*$: V^* の (e_ν に dual な) dual basis

とすると

$$e_I^* \equiv e^*_{\nu_{m-1}} \wedge e^*_{\nu_{m-2}} \wedge \cdots \wedge e^*_{\nu_0} \qquad 0 \leq \nu_0 < \nu_1 < \cdots < \nu_{m-1} \leq N-1$$

は $\Lambda^m V^*$ の basis であって

$$\langle e^*_{\mu_{m-1}} \wedge \cdots \wedge e^*_{\mu_0},\ e_{\nu_0} \wedge \cdots \wedge e_{\nu_{m-1}} \rangle = \delta(\mu_0 \cdots \mu_{m-1})(\nu_0 \cdots \nu_{m-1})$$

を満たす. プリュッカー座標は これによって 次のように与えられる

$$\xi_I = \langle e_I^*, \xi \rangle.$$

Sato方程式の解は Grassman mfd $GM_0(m.N)$ 上の linear 変換

$$\xi(\mathbf{t}) = e^{t_1\Lambda + t_2\Lambda^2 + \cdots}\,\xi(0) = e^{\mathbf{t}\Lambda}$$

で与えられた。そこで一般に次の写像を考える。

$$\Lambda^m V \ni \alpha = \sum_I \alpha_I e_I = \sum_{\{\nu\}} \alpha_{\{\nu\}}\, e_{\nu_0}\wedge e_{\nu_1}\cdots\wedge e_{\nu_{m-1}}$$

$$\downarrow$$

$$\Lambda^m V \ni \alpha(\mathbf{t}) = \sum_I \alpha_I(\mathbf{t})\, e_I = \sum_{\{\nu\}} \alpha_{\{\nu\}}\,(e^{\mathbf{t}\Lambda}e_{\nu_0})\wedge\cdots\wedge(e^{\mathbf{t}\Lambda}e_{\nu_{m-1}})$$

$$\alpha_{\nu_0\cdots\nu_{m-1}}(\mathbf{t}) = \langle e^*_{\nu_{m-1}}\wedge\cdots\wedge e^*_{\nu_0},\ \alpha(\mathbf{t})\rangle$$

こうして得られた写像を τ で表わす。すなわち

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\nu_0\cdots\nu_{m-1}}(\mathbf{t}) : & \Lambda^m V \arrow[r] & \mathbb{C}[[\mathbf{t}]] \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& \alpha \arrow[r, mapsto] & \alpha_{\nu_0\cdots\nu_{m-1}}(\mathbf{t})
\end{tikzcd}$$

特に $\tau_{0,\cdots m-1} = \tau$ とする。

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{GM}(m.N) \arrow[r, hook] & \Lambda^m V \arrow[r, hook, "\tau_{\nu_0\cdots\nu_{m-1}}"'] & \mathbb{C}[[\mathbf{t}]].
\end{tikzcd}$$

となっている。

<u>Prop</u> 1 $\tau = \tau_{0,\cdots m-1} : \Lambda^m V \longrightarrow \mathbb{C}[[\mathbf{t}]]$ は injection

(これは <u>Bosonization</u>)

次の公式は任意の τ_I を τ で表わすものである.

Prop 2.

$$\tau_{\nu_0\cdots\nu_{m-1}}(\mathbf{t},\alpha) = \chi_{\nu_0\cdots\nu_{m-1}}(\tilde{\partial})\,\tau(\mathbf{t},\alpha)$$

here · $\tilde{\partial} = (\partial_1, \frac{1}{2}\partial_2, \frac{1}{3}\partial_3, \cdots)$

· $p_n(\mathbf{t}) \in \mathbb{C}[[\mathbf{t}]]$: $e^{\sum_{n=1}^{\infty} t_n \Lambda^n} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(\mathbf{t})\Lambda^n$

· $$\chi_{\nu_0\cdots\nu_{m-1}}(\mathbf{t}) = \det\begin{pmatrix} P_{\nu_0}(\mathbf{t}) & P_{\nu_1}(\mathbf{t}) & \cdots & P_{\nu_m}(\mathbf{t}) \\ P_{\nu_0-1}(\mathbf{t}) & P_{\nu_1-1}(\mathbf{t}) & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{\nu_0-m+1}(\mathbf{t}) & P_{\nu_1-m+1}(\mathbf{t}) & & \end{pmatrix}$$

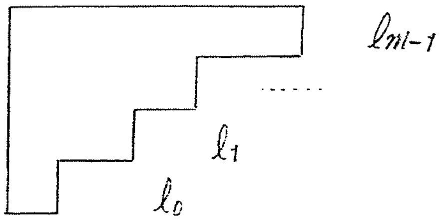
mケの ν の組 $0 \le \nu_0 < \nu_1 < \cdots < \nu_{m-1} \le N-1$ と

mケの l の組 $0 \le l_0 \le l_1 \le \cdots \le l_{m-1} \le n-1$ を

$l_0 = \nu_0,\ l_1 = \nu_1 - 1,\ \cdots,\ l_{m-1} = \nu_{m-1} - (m-1)$

で対応させ. この $(l_0, l_1, \cdots l_{m-1})$ に次の Yang 図形

$Y =$



を対応させる。

また $P_{\nu_0\cdots\nu_{m-1}}$ を χ_Y と書くことにする.

$$\deg t_i = i$$

と数えれば

$$\deg \chi_Y = |Y| \equiv l_0 + l_2 + \cdots + l_{m-1}$$

となっている。この χ_Y の全体は $\mathbb{C}[[t]]$ の basis をなしており,

$$\langle \chi_Y(\partial), \chi_{Y'}(t) \rangle = \delta_{YY'}$$

は selfdual な内積になる。

Plucker relation

我々は一般に $\Lambda^m V \hookrightarrow \mathbb{C}[[t]]$ を考えたが $\alpha \in \Lambda^m V$ がもともと $\widetilde{GM}(m.N)$ に入っていた場合には 出てくる $\tau(\alpha)$ はどんな制限をうけるだろうか?

Prop (Plucker relation)

$\alpha = (\alpha_{\nu_0 \cdots \nu_{m-1}}) \in \Lambda^m V \setminus \{0\}$ に対して

$\alpha \in \widetilde{GM}(m.N) \iff$

$$\forall \left\{ \begin{array}{ll} (m-1)\text{組} & 0 \le \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{m-2} \le N-1 \\ (m+1)\text{組} & 0 \le \mu_0 < \mu_1 < \cdots < \mu_m \le N-1 \end{array} \right.$$

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \alpha_{\lambda_0 \cdots \lambda_{m-1} \mu_i} \alpha_{\mu_0 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_m} = 0$$

この条件を $\tau_I(t, \alpha) = \chi_I(\partial)\tau(t, \alpha)$ で書き直せば τ についての条件が出る.

Baker-Akhiezer functionとK.P. equation

土屋氏 lecture

S: compact Riemann面 $g \geq 0$ (connected)

<u>deta</u>

$S \ni Q$

z: 局所座標 $z(Q) = 0$

k: $k = \frac{1}{z}$. $k(Q) = \infty$

$D = P_1 + \cdot + P_g$ S上のdegree gのdivisor $D \not\ni Q$

$g(k) \in \mathbb{C}[k]$: 多項式

<u>Def</u> 上記のdeta (Q.k). D. g に対応するBaker Akhiezer function $\Psi(P)$ とは

1) $\Psi(P)$. $S \setminus Q$ 上の有理関数

2) $\Psi(P)$ の $S \setminus Q$ 上のpole divisorは D を割る (高々Dにpoleをもつのみ)

3) $\exp(-g(k))\Psi(P)$ は Qの近くで正則.

i.e. $\Psi(P) \sim$ (regular) $\times \exp(g(k))$

を満足するものを言う。このような関数の全体 <u>$\Lambda(D, g)$</u> は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間をなす.

<u>Thm 1.</u> D: nonspecial (i.e. $L(-D) = \mathbb{C}1$) とする.

$g \in \mathbb{C}[k]$ を generic にとる (i.e $g = \sum_{j=0}^{d} a_j k^j$) ならば

$\dim \Lambda(D, g) = 1$

Proof

存在

$\alpha_1 \cdots \alpha_g . \beta_1 \cdots \beta_g$ canonical basis of $H_1(S)$

$\omega_1 \cdots \omega_g$ canonical basis of $\Omega(S)$ (第一種 Abel 微分)

$$\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij} , \quad \int_{b_i} \omega_j = \tau_{ij} \quad T = (\tau_{ij}) \begin{cases} T = T^t \\ \mathrm{Im}\, T \gg 0 \end{cases}$$

Qのみに pole をもつ S上の第二種微分Ωを次のように定義する

$$\Omega \cong dg(k) \qquad k \cong \infty$$

$$\int_{\alpha_j} \Omega = 0 \quad (j = 1 \cdots g) \quad \text{normalization}$$

もとめる BA functionを次の形に構成しよう　$(P_0 \in Q \cup D : \text{fix})$

$$\psi(p) = \exp\left(\int_{P_0}^{p} \Omega \right) \times (\text{correction factor})$$

correction factor は ψを1価にするためのもので θから作られる.

Abel-Jacobi map A は

$$A : S \longrightarrow J(S)$$

$$A(p) = \left(\int_{P_0}^{P} \omega_1 , \cdots \int_{P_0}^{p} \omega_g \right)$$

であった。(pathは Ωの積分と同じものにとる).

$$V = (V_1, \cdots V_g) \qquad V_j \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_j} \Omega$$

とおいて.

$$\Psi(p) = \exp\left(\int_{p_0}^{p} \Omega\right) \frac{\vartheta(A(p)-A(D)-K+U)}{\vartheta(A(p)-A(D)-K)}$$

K: Riemann constant

とすれば これは一価になる

$$∵)\quad \int_{p_0}^{p} \longrightarrow \int_{p_0}^{p} + \sum_k n_k \int_{\alpha_k} + \sum_j m_j \int_{\beta_j} \quad \text{の下で}$$

$$\int_{p_0}^{p} \Omega \longrightarrow \int_{p_0}^{p} \Omega + 2\pi i \sum_j m_j U_j$$

一方 ϑ-function の変換は

$$\vartheta(u+N+TM) = e\left[-\frac{1}{2}\langle TM.M\rangle - \langle M.U\rangle\right] \vartheta(u)$$

であったから.

$$\frac{\vartheta(A(p)-A(D)-K+U)}{\vartheta(A(p)-A(D)-K)} \longrightarrow e^{-2\pi i\langle M.U\rangle} \frac{\vartheta(\;〃\;)}{\vartheta(\;〃\;)}$$

従って $\Psi(p)$ は S上の一価関数として定義された。(また $\zeta(k)$ として係数が充分小さい場合には $\Psi(p) \neq 0$ である.)

<u>一意性</u>

$\Psi, \tilde{\Psi} \in \Lambda(D, \zeta)$ とすれば

$\dfrac{\tilde{\Psi}}{\Psi}$ は S上の meromorphic function で. その pole divisor D_0 は

$D_0 = \{\Psi の zero\}$: positive divisor of degree g

すなわち. D_0 is non special

したがって $L(-D_0)=\mathbb{C}1$ ゆえに $\tilde{\Psi}=\text{const}\,\Psi$ ∎

Def

$$\begin{cases} x=(x_1,x_2,\ \ )\in\mathbb{C}^\infty : \text{有限個を除いて zero} \\ \xi(x,k)=\sum_{j=1}^{\infty} x_j k^j \in \mathbb{C}[k] \end{cases}$$

に対して normalized BA function $\Psi(x,P)$ を 次のように定義する.

$$\begin{cases} \Psi(x,P)\in\Lambda(D,\xi(x,k)) \\ \Psi(x,k)\simeq e^{x_1k+x_2k^2+\ }\left(1+\frac{\omega_1(x)}{k}+\frac{\omega_2(x)}{k^2}+\cdots\right) \quad k\simeq\infty \end{cases}$$

具体的な構成

$\Omega^{(1)},\Omega^{(2)}\cdots$: 第2種微分

$$\begin{cases} \text{i) pole は } Q \text{ のみ} \\ \text{ii) } \Omega^{(n)}\simeq d(k^n) \text{ at } Q \\ \text{iii) } \int_{\alpha_j}\Omega^{(n)}=0 \quad (j=1,\cdots g) \end{cases}$$

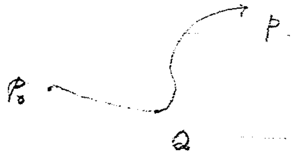
$$U^{(n)}=(U_1^{(n)},\cdots,U_g^{(n)}),\quad U_j^{(n)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_j}\Omega^{(n)}$$

とすると

$$\begin{cases} \Omega=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\Omega^{(n)} \\ U=\sum_{n=1}^{\infty}x_n U^{(n)} \end{cases}$$

と書ける.

$\int_{P_0}^{P}$ の積分路を図のように fix する



$$\int_{P_0}^{P}\Omega^{(n)} = k^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,r}\, k^{-r}$$

$$= k^{n} + b_{n,0} + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

であるから

$$\psi(x,p) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \int_{P_0}^{P}\Omega^{(n)}\right) \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} x_n b_{n,0}\right)$$

$$\cdot \frac{\vartheta\left(A(p) - A(D) - K + \sum_{n=1}^{\infty} x_n U^{(n)}\right)}{\vartheta\left(A(p) - A(D) - K\right)} \times \frac{\vartheta\left(A(Q) - A(D) - K\right)}{\vartheta\left(A(Q) - A(D) - K + \sum_{n=1}^{\infty} x_n U^{(n)}\right)}$$

が求める関数になる　（具体的構成終り）.

とつぜんではあるが　x_1 に関する ΨD.O.

$$W = 1 + w_1(x)\,\partial_1^{-1} + w_2(x)\,\partial_1^{-2} + \cdots$$

を考えると

$$W e^{\sum_{n=1}^{\infty} x_n k^n} = \left(1 + w_1(x) k^{-1} + w_2(x) k^{-2} + \cdots\right) e^{\sum_{n=1}^{\infty} x_n k^n}$$

$$= \Psi(x,P)$$

となる。

$$L \equiv W \frac{\partial}{\partial x_1} W^{-1}$$

$$\left(L = \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{\nu \geq 2} u_\nu(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{1-\nu} \right)$$

とおけば

$$L\Psi(x,p) = W\frac{\partial}{\partial x_1}\left(e^{\sum_{n=1}^{\infty} x_n k^n}\right) = k\left(We^{\sum_{n=1}^{\infty} x_n k^n}\right) = k\Psi(x,p)$$

が得られる。さらに

$$B_m \equiv (L^m)_+$$

$$\left(B_m = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^m + \sum_{\nu=1}^{m} u_{m,\nu}(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{m-\nu} \right)$$

とおけば

$$L^n\psi(x,p) = k^n\Psi(x,p)$$

より

$$B_n\Psi(x,p) - k^n\Psi(x,p) = O\left(\frac{1}{k}\right)\Psi(x,p)$$

がわかる。一方で

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\Psi(x,p) = \frac{\partial}{\partial x_n}\left(1 + w_1(x)k^{-1} + w_2(x)k^{-2} + \cdots\right)e^{\sum_{n=1}^{\infty} x_m k^m}$$

$$= k^n\Psi(x,p) + O\left(\frac{1}{k}\right)\Psi(x,p).$$

であるから

$$\left(B_n - \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\Psi(x,p) = O\left(\frac{1}{k}\right)\Psi(x,p)$$

ところがこの量そのものもBA functionであるからzeroでなくてはならない。

すなわち

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\Psi(x,p) = B_n\Psi(x,p).$$

である。この式はB_nが<u>積分可能条件</u>を満たすことを意味する。

以上のことを次の定理にまとめよう

Thm 2. normalized BA functionの係数

$$\Psi(x,p) = (1 + w_1(x)k^{-1} + w_2(x)k^{-2} + \cdots)e^{\sum_{n=1}^{\infty} x_n k^n}$$

より.

$$\begin{cases} W \equiv 1 + w_1(x)\partial_1^{-1} + w_2(x)\partial_1^{-2} + \cdots \\ L \equiv W\partial_1 W^{-1} \\ B_n \equiv (L^n)_+ \end{cases}$$

とおけば 以下の式が成立する

i) $$\frac{\partial B_n}{\partial x_m} - \frac{\partial B_m}{\partial x_n} + [B_n, B_m] = 0$$

ii) $$\frac{\partial L}{\partial x_n} = [B_n, L]$$

iii) $$\frac{\partial W}{\partial x_n} = B_n W - W\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^n$$

この定理はBA functionが K.P. eq (i)~iii))の解になっており. $P \in S$ はその解空間を parametrize していると見ることができる。

K.P. eq. のSato theoryのように この解の運動を線型化することもできる。

Prop $\Psi(x,p)$. BA function.

$D_0(x) = Q_1(x) + \cdots + Q_g(x)$: zeroのdivisor

$D_\infty(x) = P_1(x) + \cdots + P_g(x)$. poleのdivisor

とすれば

$$A(D_0(x)) - A(D_\infty(x)) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} x_n V^{(n)} \quad \text{in } J(S).$$

proof $d\log\Psi(x.p)$ を考える。この積分の一価性より

i) $\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_j} d\log\Psi \in \mathbb{Z}$ $(j=1\cdots g)$

ii) $\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_j} d\log\Psi \in \mathbb{Z}$ $(j=1\cdots g)$

である。

pole structure などにより

$$d\log\Psi = \sum_{j=1}^{g}\omega_{P_jQ_j} + \sum_{n=1}^{\infty} x_n\Omega^{(n)} + \sum_{j=1}^{g} C_j\omega_j$$

である.

i) より. $\frac{1}{2\pi i}C_j$: integer

ii) より. (周期係数関係式を使って)

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_j} d\log\Psi = \sum_{i=1}^{g}\int_{Q_i}^{P_i}\omega_j + \sum_{n=1}^{\infty} x_n U_j^{(n)} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{g} C_i\tau_{ij}$$

i.e. $0 \equiv A(P_1+\cdots+P_g) - A(Q_1+\cdots+Q_g) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n U^{(n)}$ ∎

$U^{(n)} = (U_1^{(n)},\cdots,U_g^{(n)})$ は各々 g次元ベクトルであるから その中のほんの少しだけが独立でありうる。そのようすを次に見ておく

Prop $U_j^{(n)} \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_j}\Omega_Q^{(n)} = -\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}f_i(0)$

但し. $z(Q)=0$ は Q の local coordinate で

$\Omega_Q^{(n)}$ $(=\Omega^{(n)}$ 上記の$)$ は Q での 第二種微分. $f_j(z)$ は 第一種微分を

$$w_j(z) = f_j(z)dz \quad (\text{near } Q)$$

と書いたときの 係数である。（これは 周期関係に他ならない）

さて $S \ni Q$, $z(Q)=0$ を fix して N の部分集合 N_Q を次で定義する.

$$N_Q = \{ n \geq 0 ; {}^{\exists}\omega \in \Omega(S) : \omega = f(z)dz \; . \; f(z) = (z^n + \text{higher}) \}$$

Riemann-Rochの定理から

$$N - N_Q = \{ n_1, \cdots, n_g \; ; \; 0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_g \leq 2g-1 \}$$

が示される。このことと 上の prop より 次のことがわかる。

Thm 3 $\quad U^{(n)}$ は $U^{(1)}, \cdots, U^{(2g-1)}$ ではられる.

さて 主定理を述べよう.

Thm 4. λ, μ : S上の有理関数で pole は Q にのみあるとする.

i) ${}^{\exists}{}_1 L_\lambda$: diff op w.r.t x_1 （係数 $\in \mathbb{C}[[x_1, x_2, \cdots]]$）

s.t. $\quad L_\lambda \Psi(x, p) = \lambda(p) \Psi(x, p)$.

ii) $\quad [L_\lambda, L_\mu] = 0$

すなわち $p \in S$ は ある operator L_λ の 固有値 $\lambda(p)$ を parametrize するものと見ることができる。

Proof i) 存在　k のまわりで

$$\lambda = g(k) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n k^{-n}$$

$$g(k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n$$

と展開して. さきほど作った B_n により.

$$L_\lambda = \sum_{n=0}^{N} a_n B_n \qquad (B_0 = 1)$$

とおく。

$$L_\lambda \Psi(x.p) = \sum_{n=0}^{N} a_n B_n \Psi(x.p)$$

$$= \sum_{n=0}^{N} a_n k^n \Psi(x.p) + O\left(\frac{1}{k}\right) \Psi(x.p)$$

$$= \lambda(p) \Psi(x.p) + O\left(\frac{1}{k}\right) \Psi(x.p)$$

であるから.

$$L_\lambda \Psi(x.p) - \lambda(p) \Psi(x.p) = O\left(\frac{1}{k}\right) \Psi(x.p)$$

ところが この式自身 BA-function になっているから. zero である.

一意性

$\lambda = 0$ に対する L を $L = \sum_{n=0}^{N} a_n \partial^n$ とすると. a_n は k によらない 定数である.

$\partial \Psi = k \Psi + O\left(\frac{1}{k}\right) \Psi$ から $a_N = a_{N-1} = \cdots = a_0 = 0$ がわかる。

ii) $D = [L_\lambda, L_\mu]$ は $\mathbb{C}[[x_1, \cdots]]$ 係数の (ie. k によらない) 微分作用素

で、$D\underline{\Psi}(x.k)=0$ を満たす、従って 一意性から $D=0$.

DATE '86/11/15
NO. 1

τ-function   土屋氏 lecture

BA-function と τ-function (復習)

ロシア school   BA-function から出発

$$\psi(\mathbf{t},k) \longrightarrow \exists L = \frac{\partial}{\partial t_1} + \sum_{\nu=2}^{\infty} u_\nu(\mathbf{t})\,\partial_1^{1-\nu}$$

$$\text{s.t.} \quad \left\{ \begin{array}{l} L\psi(\mathbf{t},k) = k\psi(\mathbf{t},k) \\ \dfrac{\partial}{\partial t_n}\psi = B_n\psi \\ B_n = (L^n)_+ \quad B_1 = \dfrac{\partial}{\partial t_1} \end{array} \right.$$

Japanese school Hirota-Sato τ-function から出発

$$\psi(\mathbf{t},k) = \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} w_\nu(\mathbf{t})\right) e^{t_1k + t_2k^2 + t_3k^3 + \cdots}$$

$$\longrightarrow \exists\, \tau(\mathbf{t}) = \tau(t_1, t_2, \cdots) \in \mathbb{C}[[t_1, t_2 \cdots]] \quad (\text{unique up to const.})$$

$$\text{s.t.} \quad \psi(\mathbf{t},k) = \frac{1}{\tau(\mathbf{t})}\,\tau\!\left(t_1 - \frac{1}{k},\ t_2 - \frac{1}{2k^2},\ t_3 - \frac{1}{3k^3} \cdots\right) e^{\sum_{n=1}^{\infty} t_n k^n}$$

逆に $\tau(\mathbf{t}) \in \mathbb{C}[[t_1, t_2 \cdots]]$ が

$$P_\alpha(\tilde{D})\,\tau(\mathbf{t})\cdot\tau(\mathbf{t}) = 0 \qquad \alpha \in A$$

をみたすとき 対応する $\psi(\mathbf{t},k)$ は BA-function になる.

*

$$\begin{array}{ccc} \{\tau(\mathbf{t})\} & \subseteq & \mathbb{C}[[t_1, t_2, \cdots]] \ (\text{Boson Fock space}) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ \text{Grassmann} & \subseteq & \text{Fermion Fock space} \end{array}$$

Krichever等の仕事（復習）

setting.
- S: compact Riemann面 $g \geq 1$ (connected)
- (Q, k): local coordinate $Q \in S$. $k(Q) = \infty$
- $D = P_1 + \cdots + P_g$: non special divisor on S, $\deg D = g$. $P_i \neq Q$
- $\alpha_1 \cdots \alpha_g, \beta_1 \cdots \beta_g \in H_1(S, \mathbb{Z})$: canonical basis
- $\omega_1, \cdots \omega_g \in \Omega^1(S)$: canonical (i.e $\int_{\alpha_i} \omega_j = \delta_{ij}$. $\int_{\beta_i} \omega_j = \tau_{ij}$)
- S_0 : S の $\alpha_1 \cdots \alpha_g, \beta_1 \cdots \beta_g$ での切り開き　int $S_0 \ni Q$.

$$\begin{tikzcd}
\pi : & \tilde{S} \arrow[r] \arrow[d] & S \\
& Q \in S_0 \arrow[ur, "\text{canonical lifting}"'] &
\end{tikzcd}$$

- $A(p) = \left(\int_Q^p \omega_1, \cdots \int_Q^p \omega_g \right)$: Abel·Jacobi map.

$$\begin{tikzcd}
A : & \tilde{S} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{C}^g \arrow[d] \\
A : & S \arrow[r] & \mathbb{C}^g/\Lambda
\end{tikzcd}$$

- $\Omega_Q^{(n)} = \Omega^{(n)}$ $(n = 1, 2, \cdots)$: 第3種微分, pole はQのみ

$$\Omega^{(n)} \sim d(k^n) , \quad \int_{\alpha_i} \Omega^{(n)} = 0 \quad (i = 1, \cdots g)$$

- ω_{PQ} $(P \in \mathrm{int}\, S_0)$: 第2種微分. pole は P.Q のみ.

$$\mathrm{Res}_P\, \omega_{PQ} = 1 \quad \mathrm{Res}_Q\, \omega_{PQ} = -1 \quad \int_{\alpha_i} \omega_{PQ} = 0 \quad (i=1 \cdots g).$$

<u>Thm</u>
$\left\{ \begin{array}{l} D : \text{nonspecial} \\ \mathbb{t} = (t_1, t_2, \cdots) \in \mathbb{C}^\infty \text{ (有限個以外は zero)} \end{array} \right.$: $\underbrace{\text{general にとる}}_{\text{codim 1 の subset をのぞいて}}$

この時

$\exists\, \psi(\mathbb{t}, P)$ (unique up to arbitorary function $\psi_0(\mathbb{t})$)

a) $P \in S \backslash Q$ について meromorphic function

generic $\mathbb{t} \in \mathbb{C}^\infty$ について meromorphic function.

b) $\psi(P)$ の $S \backslash Q$ 上の pole divisor は D である.

c) Q の近くで $\left| e^{-\sum_{n=1}^{\infty} t_n k^n} \psi(\mathbb{t}, k) \right| \le M$.

特に normalized BA-function

$$\psi(\mathbb{t}, k) \cong (1 + w_1(\mathbb{t}) k^{-1} + w_2(\mathbb{t}) k^{-2} + \quad) e^{\sum_{n=1}^{\infty} t_n k^n} \qquad (k \to \infty)$$

は unique.

その具体的な construction は次のとおり.

- K : Abel-Jacobi map A に対する Riemann const.

i.e. $\mathrm{div}(\Theta(A(p) - e + K)) = e$. (non special).

- $\xi = -A(D) + K \in \mathbb{C}^g$ ($A(D)$ の path は任意でよい)

・$P_0 \in \mathrm{int}\, S_0$. また path $P_0 \to Q$ は S_0 でむすぶとする

__Thm__.

$$\psi(\underline{t}, p) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n \int_{P_0}^{p} \Omega^{(n)} - \sum_{n=1}^{\infty} t_n\, q_{n,0}\right)$$

$$\times \frac{\Theta\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n U^{n} + A(p) + \xi\right)}{\Theta(A(p) + \xi)} \cdot \frac{\Theta(\xi)}{\Theta\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n U^{(n)} + \xi\right)}$$

here. ・$U^{(n)} = (U_1^{(n)}, \cdots, U_g^{(n)}) \in \mathbb{C}^g$ $\qquad \left(z = \frac{1}{k},\ \omega_j = f_j(z)\,dz\right)$

$$U_j^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_j} \Omega_Q^{(n)} = -\frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1} f_j}{dz^{n-1}}(0)$$

$$\cdot \int_{P_0}^{p} \Omega^{(n)} = k^n + q_{n,0} + \sum_{m \geq 1} q_{n,m} \frac{k^{-m}}{m}$$

$$\cdot A(k) = \left(\int_{\infty}^{k} \omega_1, \cdots \int_{\infty}^{k} \omega_g\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^{-n}}{n} U^{(n)}$$

従って また

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} t_n U^{(n)} + A(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(t_n - \frac{k^{-n}}{n}\right) U^{(n)}$$

さて 上記の BA-function は 次の意味で KP eq. に関係する

$$W = (1 + w_1(\underline{t})\partial_1^{-1} + w_2(\underline{t})\partial_1^{-2} + \cdots) \qquad w_\nu(\underline{t}) \in \mathbb{C}[[t_1 \cdots]]$$

に対する K.P. eq は

$$\frac{\partial W}{\partial t_n} = B_n W - W\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^n \quad , \quad B_1 = \frac{\partial}{\partial t_1} \quad , \quad B_n = \left(W\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^n W^{-1}\right)_+$$

は 初期値

$w_\nu(t,0,0,\cdots)$

から unique に解ける。

BA-functionの展開

$$\psi(\mathbf{t},k) = (1+w_1(\mathbf{t})k^{-1}+w_2(\mathbf{t})k^{-2}+\cdot\ )\,e^{\sum_{n=1}^{\infty} t_n k^n}$$

から 上記の W を作れば これは KP を満足する.

Sato theory

$\exists\ \tau(\mathbf{t})\in\mathbb{C}[[t_1,\ ]]$ (unique up to const.) $\tau(0)\neq 0$.

s.t. $1+w_1(\mathbf{t})k^{-1}+w_2(\mathbf{t})k^{-2}+\cdot = \frac{1}{\tau(\mathbf{t})}\tau(t_1-\frac{1}{k},\ t_2-\frac{1}{2k^2},\ t_3-\frac{1}{3k^3},\ )$

特に $\tau(0)=1$ とすれば unique.

$$\mathcal{W}_0 \equiv \{W = 1+w_1(\mathbf{t})\partial_1^{-1}+\cdots\ :\ \text{KPのsol}\}$$

$$\mathcal{T}_0 \equiv \{\tau(\mathbf{t})\in\mathbb{C}[[t_1,t_2\cdots]]\ :\ \tau(0)=1\ :\ \text{KPのsol}\}$$

(添字 0 は $t=0$ で non singular の意味)

$\mathcal{W}_0 \longleftrightarrow \mathcal{T}_0$ は 1 to 1.

$\mathcal{T}$ の $\mathbb{C}[[t_1\cdots]]$ での特徴づけは？ ⟶ Hirota の双線型形式.

Hirota の bilinear diff operator.

$P(\partial_1, \partial_2, \cdots) \in \mathbb{C}[[\partial_1, \partial_2, \cdots]]$: 定数係数 diff op.

$f, g \in \mathbb{C}[[t_1, t_2, \cdots]] \equiv \mathbb{C}[[\mathbb{t}]]$

$$P(D_1, D_2, \cdots) : \mathbb{C}[[\mathbb{t}]] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[\mathbb{t}]] \longrightarrow \mathbb{C}[[\mathbb{t}]] \quad \text{bilinear}$$

$$P(\mathbb{D})(f \cdot g)(\mathbb{t}) \equiv P\left(\frac{\partial}{\partial \mathbb{y}}\right)\left[f(\mathbb{t}+\mathbb{y})\, g(\mathbb{t}-\mathbb{y})\right]\Big|_{\mathbb{y}=0}$$

Thm (Sato).

$\tau \in \mathbb{C}[[\mathbb{t}]] \qquad \tau(0) = 1$

$$\tau \in \mathcal{T}_0 \Leftrightarrow \Big(\sum_{j=0}^{\infty} p_j(-2\mathbb{y}) P(\widetilde{\mathbb{D}}_{\mathbb{t}})\, e^{\mathbb{y}\cdot \mathbb{D}_{\mathbb{t}}} \quad \tau(\mathbb{t})\cdot\tau(\mathbb{t}) = 0. \qquad (*)$$

here. $\widetilde{\partial}_{\mathbb{t}} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{2\partial t_2}, \frac{\partial}{3\partial t_3}, \cdots\right)$

$\mathbb{y} = (y_1, y_2, \cdots)$

P_n. schur Polynomial : $e^{\sum_{n=1}^{\infty} y_n z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mathbb{y}) z^n$

あるいは

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\infty} dk\, \tau\left(t_1' + \frac{1}{k}, t_2' + \frac{1}{2k^2}, t_3' + \frac{1}{3k^3}, \cdots\right) \tau\left(t_1 - \frac{1}{k}, t_2 - \frac{1}{2k^2}, \cdots\right) \qquad (**)$$

$$\times\, e^{\sum_{n=1}^{\infty}(t_n - t_n')k^n} = 0$$

とも書ける.

$(**) \longrightarrow (*)$.

$$\mathbb{t} = \mathbb{x} - \mathbb{y}. \quad \mathbb{t}' = \mathbb{x} + \mathbb{y}.$$

$$\int_\infty dk\, e^{-2\sum_{n=1}^{\infty} y_n k^n} \tau(x_1+y_1+\frac{1}{k},\, x_1+y_1+\frac{1}{2k^2}, \cdots)\, \tau(x_1-y_1-\frac{1}{k},\, x_2-y_2-\frac{1}{2k^2}, \cdots)$$

$$= \int_\infty dk\; e^{-2\sum_{m=1}^{\infty} y_m k^m}\; e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n k^n} \frac{\partial}{\partial y_n}} \left[\tau(\mathbb{x}+\mathbb{y})\, \tau(\mathbb{x}-\mathbb{y}) \right]$$

$$= \int_\infty dk \sum_{m=1}^{\infty} p_m(-2\mathbb{y})\, k^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\tilde{\partial}_y)\, k^{-n} \left[\tau(\mathbb{x}+\mathbb{y})\, \tau(\mathbb{x}-\mathbb{y}) \right]$$

$$= 2\pi i \sum_{j=0}^{\infty} p_j(-2\mathbb{y})\, p_{j+1}(\tilde{\partial}_y) \left[\tau(\mathbb{x}+\mathbb{y})\, \tau(\mathbb{x}-\mathbb{y}) \right]$$

$\therefore \quad (**)$

$$\Longleftrightarrow \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_j(-2\mathbb{y})\, p_{j+1}(\tilde{\partial}_y) \left[\tau(\mathbb{x}+\mathbb{y})\, \tau(\mathbb{x}-\mathbb{y}) \right] = 0$$

一方 $(*)$ からは

$$0 = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(-2\mathbb{y}) \quad p_{j+1}(\tilde{D}_t) \quad e^{\mathbb{y}\cdot D_t}\, \tau(\mathbb{t})\tau(\mathbb{t})$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} p_j(-2\mathbb{y}) \quad p_{j+1}(\tilde{D}_t) \quad \left. e^{\mathbb{y}\frac{\partial}{\partial \mathbb{u}}}\, \tau(\mathbb{t}+\mathbb{u})\, \tau(\mathbb{t}-\mathbb{u}) \right|_{\mathbb{u}=0}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} p_j(-2\mathbb{y}) \quad p_{j+1}(\widehat{D}_t) \quad \tau(\mathbb{t}+\mathbb{y}) \cdot \tau(\mathbb{t}-\mathbb{y})$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} p_j(-2\mathbb{y})\, p_{j+1}(\tilde{\partial}_t)\, \tau(\mathbb{t}+\mathbb{y})\, \tau(\mathbb{t}-\mathbb{y})$$

従って $(*) \Longleftrightarrow (**)$

$\mathcal{I}_0 \subseteq \mathbb{C}[[\mathbf{t}]]$ の特徴づけその2.

$\mathbb{C}[[\mathbf{t}]] \cong$ Fockspace of charged fermion (zero charge sector).

$\hookrightarrow \psi_n, \psi_n^\dagger \quad (n \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2})$

$$\left(\begin{aligned} &\mathbb{C}^\infty = \sum_{n \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \mathbb{C} e_n \supseteq V_{|vac\rangle} = \sum_{n \geq 0} \mathbb{C} e_n \quad ? \\ &|vac\rangle = e_{\frac{1}{2}} \wedge e_{\frac{3}{2}} \wedge \cdots \end{aligned} \right.$$

BA function ⟷ τ-function.

$$\psi(\mathbf{t}, k)\, e^{-\sum_{n=1}^{\infty} t_n k^n} = \frac{1}{\tau(\mathbf{t})} \tau(\mathbf{t} - [k]).$$

$$[k] = \left(k^{-1}, \frac{k^{-2}}{2}, \frac{k^{-3}}{3}, \cdots \right) \in \mathbb{C}^\infty$$

$$\begin{tikzcd} \underline{S.} \arrow[d] & \underline{(Q, k).} \arrow[d] & \underline{(\alpha, \beta)} \arrow[d] & \omega & \underline{D = P_1 + \cdots + P_g} \arrow[d] & \text{を data とする} \\ \tau_{ij} & \text{Virasoro} & \text{M.C.G} & & \text{Picard Variety (non special)} & \end{tikzcd}$$

$$\psi(\mathbf{t}, P) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n \left(\int_{P_0}^{P} \Omega^{(n)} - q_{n0} \right)\right)$$

$$\times \frac{\Theta(\xi)}{\Theta(-A(p) + \xi)} \times \frac{\Theta\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n V^{(n)} + A(p) + \xi\right)}{\Theta\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n V^{(n)} + \xi\right)}$$

$$\tau(t) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{m,n} g_{nm} t_n t_m}\, \Theta\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n V^{(n)} + \xi\right)$$

$$\frac{\tau(t-[k^{-1}])}{\tau(t)}\, e^{\sum_{n=1}^{\infty} t_n k^n} = \frac{\Theta(A(k)+\xi)}{\Theta(\xi)}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{n,m=1}^{\infty} g_{nm} \frac{k^{-m}}{m}\frac{k^{-n}}{n}}\, \psi(t,k)$$

が答.

Novikov conjecture との関係

data
- $Q[t] = \sum_{m,n} g_{mn} t_n t_m$: $\mathbb{C}[[t]]$ 上2次形式
- $U \cdot t = \sum_{n=1}^{\infty} t_n V^{(n)}$: $\mathbb{C}[[t]]$ 上1次形式
- ξ = const vector.
- $\Omega \in$ Siegel space $= \{\Omega \in M_{2g} \mid \Omega^T = \Omega,\ \mathrm{Im}\,\Omega \gg 0\}$

$$\tau(\Omega, Q, U, \xi\,;\, t) \equiv e^{-\frac{1}{2}Q[t]}\, \Theta(\Omega\,;\, U\cdot t + \xi)$$

が τ-function (bilinear eq をみたす) (Q, U, ξ を適当にとって)

$\Longleftrightarrow$ Ω : curve の Riemann 行列.