i

Abel積分の理論

1986/8/21~22. lectured by Prof. Tsuchiya
at Nagoya Univ.

Contents

§1. 楕円積分の場合

§2. (閉) Riemann面, 位相的性質

§3. Riemann面上の meromorphic 微分

- 有理型微分の存在定理
- 周期関係式

§4. Riemann-Roch の定理

§5. Abel の定理 と Jacobi 多様体

§6. Θ-関数 Jacobi の逆問題

Ref.

Siegel, Topics on complex function theory I. II. III

§1. 楕円積分の場合

相異なる4つの根

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{C}, \quad a_i \neq a_j \ (i \neq j)$$

をもつ4次式

$$P(z) = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)$$

について、積分

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{\sqrt{P(\xi)}}$$

を考える。この時、問題となることがいくつかあるが、これを順に見ていく。

問題 i) $\sqrt{P(z)}$ の根号を開くときの多価性をどうするか？

結果的には方程式

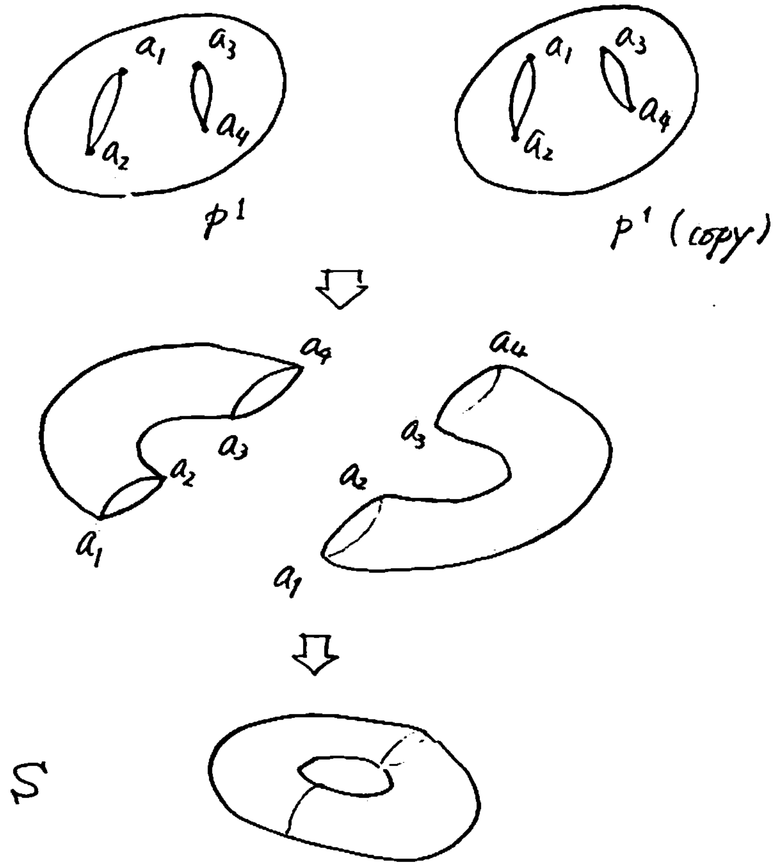
$$y^2 = P(z)$$

に関係した Riemann面* を考えることにより解決できる。今これを具体的に構成しよう。

変数 z に ∞ の値も許して $z \in P^1 = \mathbb{C} \cup (\infty)$ で考える。$z = \infty$ では $t = \frac{1}{z}$ を局所座標* にとればよい。

* これらの用語の数学的定義は §2 で与えられる。

$\sqrt{\ }$ を開くときの $\pm$ のとり方によって $z=a_1, a_2, a_3, a_4$ 以外の点では $\sqrt{p(z)}$ は 2価 になっている。そこで これらの点を2重に考えて次の図のような Riemann面 S をつくる。*



$y=\sqrt{p(z)}$ は S上で一価の関数となる

問題 ii) $\theta = \dfrac{dz}{\sqrt{p(z)}}$ は S上で pole をもつか？

もしも pole があると その周のめぐり方によって 積分に多価性が出る。
しかし 実は今の場合 pole は存在しない。 すなわち

* 一般に $y^2=P(z)$ の Riemann面の種数 g は $g=\left[\dfrac{\deg P+1}{2}\right]$

prop. θ は S 上 解析的微分型式である.

proof 各点 $p_0 \in S$ に対して 局所座標 (U, t), $p_0 \in U \subseteq S$ が とれて $\theta\big|_U = f(t)dt$ としたとき $f(t)$ が 正則になることを示す.

① 点 $p_0 \in S$ が

$z(p_0) \in P^1 - \{a_1, a_2, a_3, a_4, \infty\}$

にある場合 $z(p)$ をそのまま局所座標にすればよい.

② $p_0 \in S$ が $z(p_0) = a_1$ (a_2, a_3, a_4 も同様) となる場合

$$t(p) = \sqrt{z(p) - a_1}$$

とおけば (t が十分小さい範囲で)

$$\theta\big|_U = \frac{2t\,dt}{t\sqrt{(t^2+a_1-a_2)(t^2+a_1-a_3)(t^2+a_1-a_4)}} \quad : \text{正則}.$$

③ $p_0 \in S$ が $z(p_0) = \infty$ となる場合

$$t(p) = \frac{1}{z(p)}$$ とすれば

$$\theta\big|_U = -\frac{dt}{\sqrt{(1-ta_1)(1-ta_2)(1-ta_3)(1-ta_4)}} \quad : \text{正則} \quad \blacksquare$$

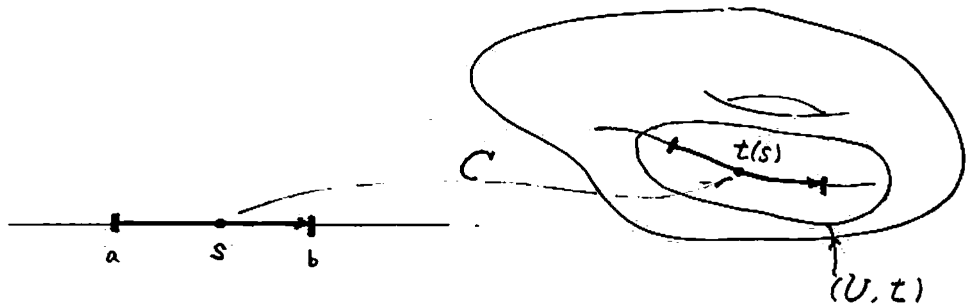
Def C が S 上の path とは, map $C : [a, b] \to S$ をいう.

Def 1-form θ の path C 上の積分 $\int_C \theta$ は

$C([a,b]) \subset U$ （局所座標）においては

$$\int_C \theta = \int_a^b f(t(s))\frac{dt}{ds}ds$$

で定義する。（局所座標に収まらなければ区分的に積分して和をとる）



prop. Cauchyの定理の一般化

C_1とC_2が連続変型でつながる $\Longrightarrow \int_{C_1}\theta = \int_{C_2}\theta$
（θ・正則）

連続変型でつながらないC_1, C_2に対しては異なる積分値があり得る。そこで

問題 (iii) $P_0, P \in S$に対して積分

$$\int_{P_0}^{P}\frac{d\xi}{\sqrt{p(\xi)}}$$

はP_0. Pをつなぐpathのとり方にどのようにdependするか？

を考える。このためにはS上のpathの分類からはじめる。

2つの path γ_1, γ_2 は両端固定のまま S上 deform 可能なとき

$$\gamma_1 \sim \gamma_2$$

とする。もちろんこれは同値関係.

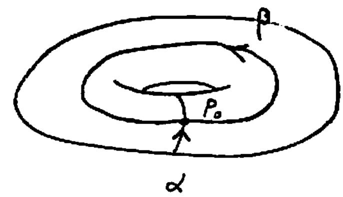
$P_0 \in S$ を fix し. P_0 から P_0 への closed path の同値類全体

$$\pi_1(S, P_0) = \{\gamma : [0,1] \to S \ \text{diffeo} \mid \gamma(0) = \gamma(1) = P_0\}/\sim$$

は (速度を倍にした) 写像の合成で群になる : S の <u>基本群</u> という.

torus 上では

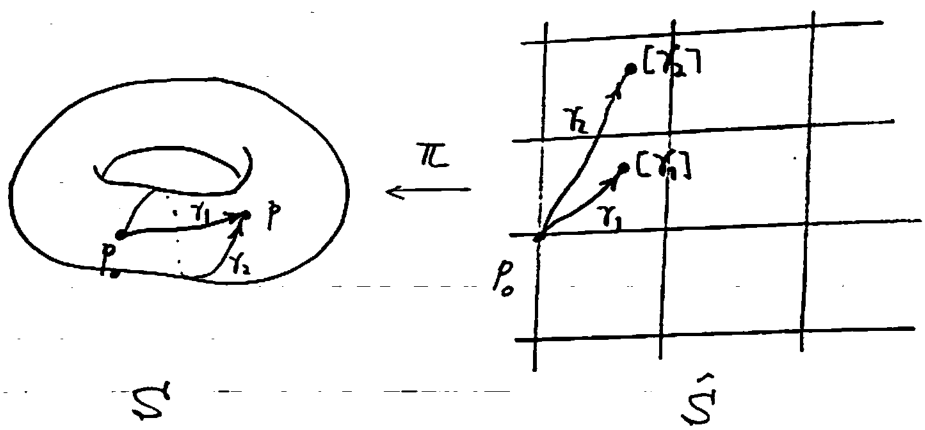
$$\pi_1(S, P_0) \cong \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta$$



である。

S の covering $\hat{S}$ を次のように定義する

$$\hat{S} = \{\gamma : [0,1] \to S \mid \gamma(0) = P_0\}/\sim$$



S が torus ならば $\hat{S} \cong \mathbb{R}^2$

prop. $\displaystyle\int_{p_0}^{p}\frac{dz}{\sqrt{P(z)}}$ は $\hat{S}$ 上の1価関数．（S上では多価）

$$\begin{tikzcd} \hat{S} \arrow[r, "f(p)=\int_{p_0}^{p}\theta", "\text{一価}"'] \arrow[d, "\pi"', "\text{多対1}"] & \mathbb{C} \\ S \arrow[ur, "\text{多価}"'] & \end{tikzcd}$$

S上の関数としての多価性は簡単で 次のように表わせる．

$$f(p+m\alpha+n\beta)=f(p)+m\int_{\alpha}\theta+n\int_{\beta}\theta$$

$$=f(p)+m\omega_1+n\omega_2$$

$$\omega_1=\int_{\alpha}\theta,\quad \omega_2=\int_{\beta}\theta$$ ：基本周期

$\alpha.\beta$ は 1st homology group $H_1(S.\mathbb{Z})$ の basis と見られる。

交点数 $\alpha\cdot\beta=1$ なるような $\alpha.\beta$ を1つ fixしたとすると．

prop. $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1)>1.$

したがって $\omega_1.\omega_2$ は $\mathbb{C}$ 上 1次独立で $L=\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$ は $\mathbb{C}$ 上の lattice となる。

すでに見たように、積分 $\int_{P_0}^{P}\vartheta$ を S 上の関数と見たときの多価性は

$\omega \in L$ でつくされるのであるから、

$$J = \mathbb{C}/L = \{z \simeq z+\omega \in \mathbb{C} \mid \omega \in L\}$$

とおけば $\int_{P_0}^{P_1}\vartheta : S \longrightarrow J$ は 1価関数を与える。この時

Thm 1 $\int_{P_0}^{P_1}\vartheta : S \to J$ は

one to one, onto, (逆も) 正則。

が成立する。

proof $F(p) = \int_{z_0}^{z} \dfrac{d\xi}{\sqrt{p(\xi)}}$ に対して

$\dfrac{dF}{dt} = f(t) \neq 0$ であるから局所的には逆も正則である。

あとは onto が言えればよいが めんどうなので省略する。∎

今まで考えてきた積分

$$u = \int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{\sqrt{P(\xi)}} \quad : z \longmapsto u \quad \text{or} \quad P^1 \longrightarrow J = \mathbb{C}/L$$

の逆関数　$z = G(u)$ を考えると.

i)　$G(u + m\omega_1 + n\omega_2) = G(u)$　　2重周期性

ii)　G : 有理型関数

となることがわかる. このような関数を楕円関数という.

この関数を具体的に構成してみよう.

$\dfrac{dz}{\sqrt{p(z)}}$ の変数 z を1次分数変換 $z = \dfrac{az_1+b}{cz_1+d}$.

$ad - bc \neq 0$ によって変換することにより $\dfrac{dz_1}{\sqrt{Q(z_1)}}$ になったとする.

この時. a, b, c, d を適当に選んで Q を次の形にすることができる.

$$Q(z) = 4z^3 - g_2 z - g_3$$

これを Weierstrass の標準型という。 e_1, e_2, e_3 を $Q(z) = 0$ の根とすれば これらはすべて異なっていて* $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ である.

---

* $Q(z)$ の判別式 $D = g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0$ の場合.

もとめる逆関数は 次のように書かれる.

$$\wp(s) = s^{-2} + \sum_{\omega\in L}{}' \left\{ \frac{1}{(s-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\}$$

また

$$\wp'(s) = -2\sum_{\omega\in L} \frac{1}{(s-\omega)^3}$$

ここに $\sum\limits_{\omega\in L}{}'$ は $\omega(\neq 0)\in L$ にわたる和を表わす。

$$g_2 = 60\sum{}' \frac{1}{\omega^4}$$

$$g_3 = 140\sum{}' \frac{1}{\omega^6}$$

とおけば 微分方程式

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

が成立する.

§2. (閉)Riemann面. 位相的性質

<u>Def</u> 閉Riemann面の定義.

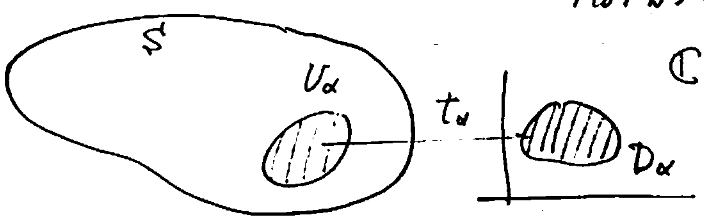
$\{S, (U_\alpha, t_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\}$ が <u>compact Riemann面</u> とは

i) S: compact top. space (簡単のため connected とする)

ii) U_α: open set

iii) $t_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ 局所座標: <u>homeo</u> onto a domain D_α

1 to 1 かつ 逆も連続



- $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha = S$
- $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi \Rightarrow t_\alpha \circ t_\beta^{-1} : t_\beta(U_\alpha\cap U_\beta) \to t_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ は(逆も)正則.

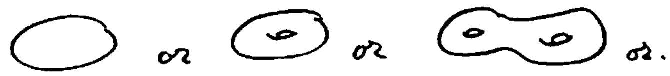
<u>Def</u> (U, z) が <u>局所 parameter</u> とは

U: open set

$z : U \to \mathbb{C}$ homeo onto a domain

$\forall_\alpha\ z\circ t_\alpha^{-1} : t_\alpha(U_\alpha \cap U) \to z(U_\alpha \cap U)$ が(逆も)正則.

<u>prop</u> compact Riemann面 S は 次のどれかに homeo



$g=0$ $\quad$ $g=1$ $\quad$ $g=2$

g: genus (種数).

S: compact Riemann面 について

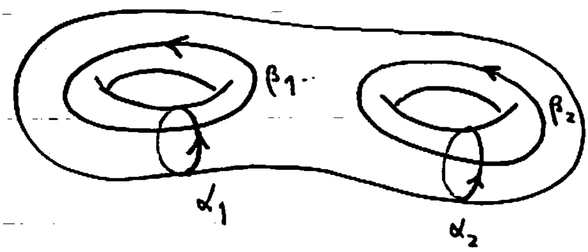
1st homology group $H_1(S,\mathbb{Z})$

1st homotopy group $\pi_1(S,p_0)$

を調べておこう.

① $H_1(S,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g} = \overbrace{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}^{2g}$

H_1 の generator として α_i, β_i $(1\leq i\leq g)$ を次図のようにとる



交点数は
$$\begin{cases} \alpha_i\cdot\alpha_j = \beta_i\cdot\beta_j = 0 \\ \alpha_i\cdot\beta_j = -\beta_i\cdot\alpha_j = \delta_{ij} \end{cases}$$

となる。これを <u>canonical basis</u> という。

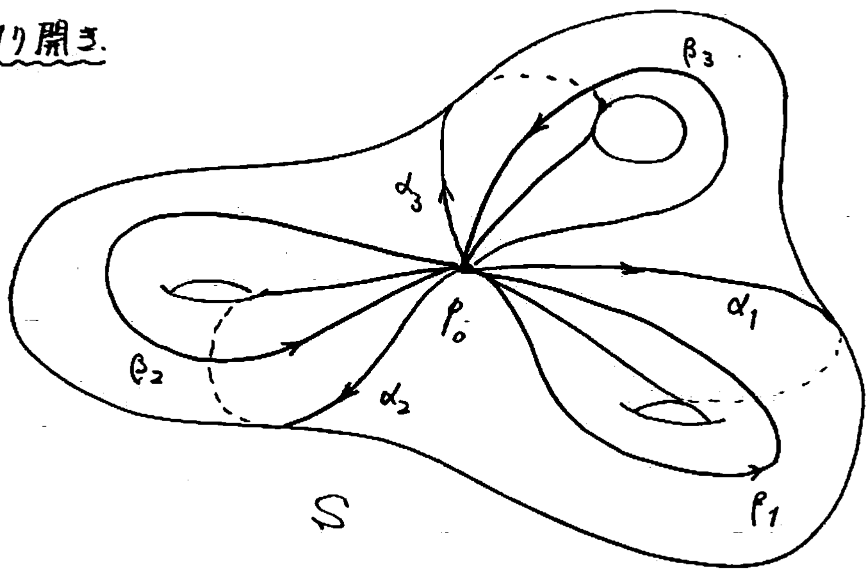
② $\pi_1(S, p_0)$: 基本群

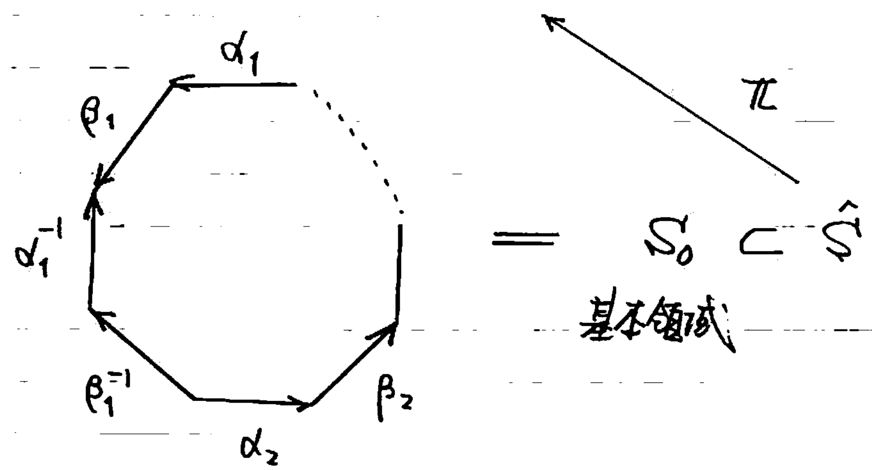
α_i, β_i $(1 \leq i \leq g)$ によって生成される非可換群で 唯一つの relation

$$\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1}\cdots\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}=e$$

をもつ。

切り開き.





§3 Riemann面上の meromorphic 微分.

§1 の議論では θ が Torus 上 の 正則 1-form であったことが本質的であった。
以下では一般の genus において 同様のことを考えてみる.

<u>Def</u> $f : S \longrightarrow P^1$ <u>meromorphic function</u> とは

各 (U, t) について $f\Big|_U = f(t)$ が meromorphic であること.

<u>Def</u> θ : <u>meromorphic form</u> とは

各 (U, t) について $\theta\Big|_U = f(t)dt$, $f(t)$: meromorphic .

θ : 有理型微分.

$\gamma : [a, b] \longrightarrow S$: path

<u>Def</u> $\displaystyle\int_\gamma \theta = \int_a^b f(t)dt.$ (但し $\gamma([a, b]) \subset U$ の場合)

<u>Thm</u> (Cauchy)

$\gamma \sim \gamma'$, $\gamma(a) = \gamma'(a)$. $\gamma(b) = \gamma'(b)$

$$\Longrightarrow \int_\gamma \theta = \int_{\gamma'} \theta + \sum_{pole} \mathrm{Res}.$$

よく知られた Liouville の定理により

prop S 上の正則関数は const. のみ.

である。一方

Thm S: compact Riemann 面. g: S の genus.

Ω : S 上の正則微分全体

$$\dim_{\mathbb{C}} \Omega = g.$$

S が torus ($g=1$) の場合 $\theta = \dfrac{dz}{\sqrt{P}}$ が その例である。

prop. 周期関係式 I.

$\theta, \theta' \in \Omega$

$P_0 \in S$ 及び 切り開き S_0 を固定する.

$$\begin{cases} \varphi(p) = \displaystyle\int_{P_0}^{P} \theta \quad (\text{path は } S_0 \text{ 内にとる}), \ \varphi' \text{も同様} \\ A_i = \displaystyle\int_{\alpha_i} \theta, \quad B_i = \int_{\beta_i} \theta, \quad A_i', B_i' \text{も同様} \end{cases}$$

とすると

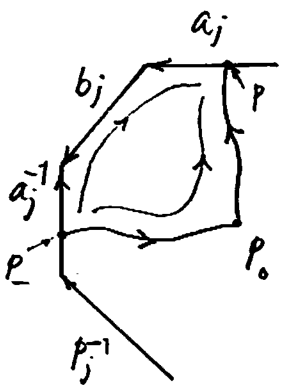
i) $$\int_{\partial S_0} \varphi \theta' = \sum_{j=1}^{g} (A_j B_j' - A_j' B_j) = 0$$

ii) $$\int_{\partial S_0} \varphi \overline{\theta}' = \sum_{j=1}^{g} (A_j \overline{B}_j' - \overline{A}_j' B_j)$$

<u>proof</u>

$$\int_{\partial S_0} \varphi\theta' = \sum_{j=1}^{g} \left\{ \int_{a_j} \varphi\theta' + \int_{b_j} \varphi\theta' + \int_{a_j^{-1}} \varphi\theta' + \int_{b_j^{-1}} \varphi\theta' \right\}$$

ここで $\int_{a_j}$ と $\int_{a_j^{-1}}$ では 被積分関数のうち φ が異なることに注意する.



$$\varphi(p) - \varphi(p_-) = \int_{p_-}^{p} \theta = \int_{b_j^{-1}} \theta = -B_j$$

$$\therefore \left\{ \int_{a_j} + \int_{a_j^{-1}} \right\} (\varphi\theta') = \int_{a_j} (\varphi(p) - \varphi(p_-))\,\theta'$$

$$= -B_j \int_{a_j} \theta' = -B_j A_j'$$

他も同様に積分すると, i) の等式を得る。 i) が 0 になることは

$$\int_{\partial S_0} \varphi\theta' = \int_{S_0} \theta \wedge \theta'$$

の中に vol. form $d\bar{z}dz$ がないことによる。 ∎

Prop. Riemannの不等式

$\theta \in \Omega$

$$i\sum_{j=1}^{g}(A_j\overline{B}_j - \overline{A}_j B_j) \geq 0$$

等号成立 $\Longleftrightarrow$ $\theta = 0$

proof. 左辺は周期関係式 I・ii) より $i\int_{S_0}\theta\overline{\theta}$ となるが

$\theta = (f+ig)(dx+idy)$, $\overline{\theta} = (f-ig)(dx-idy)$ とおくと

$$i\int_{S_0}\theta\overline{\theta} = 2\int(f^2+g^2)\,dx\,dy \geq 0 \qquad \blacksquare$$

Cor. $\theta \in \Omega$

i) $\forall i\,(1\leq i\leq g)$ $A_i = 0$ $\Leftrightarrow$ $\theta = 0$

ii) $\forall i\,(1\leq i\leq g)$ $B_i = 0$ $\Leftrightarrow$ $\theta = 0$

iii) $\forall i\,(1\leq i\leq g)$ A_i, B_i : real $\Leftrightarrow$ $\theta = 0$

$\dim_{\mathbb{C}}\Omega = g$ より g 個の basis $\{\theta_1, \cdots, \theta_g\}$ がとれる.

$$a_{jk} = \int_{\alpha_k}\theta_j$$

とおくと、上に述べたことから $\det(a_{jk}) \neq 0$

そこで適当に $\{\theta_1, \cdots, \theta_h\}$ をとり直して

$$\boxed{\int_{\alpha_k} \theta_j = \delta_{jk}}$$

ととれる。このような $\{\theta_j\}$ は標準基底 (α_i, β_i) から unique に決まる。

$$\boxed{\tau_{jk} = \int_{\beta_k} \theta_j}$$

とおくと、またもや周期関係式Iから

prop

i) $\tau_{jk} = \tau_{kj}$

ii) $\mathrm{Im}\, \tau_{jk}$ is positive def.

がわかる。 $T = (\tau_{jk})$ を Riemann の周期行列という

$$\mathfrak{S}_g = \{ T : g \times g \text{ complex matrix} \mid {}^{t}T = T,\ \mathrm{Im}\, T \gg 0 \}$$
$$\subseteq \mathbb{C}^{\frac{1}{2}g(g+1)}$$

以上は正則微分についての考察であった。次には一般の有理型微分にまで話を進めよう。

Def

θ : 第1種微分 $\iff$ θ : 正則

θ : 第2種微分 $\iff$ $\forall p$: $\mathrm{Res}_p\, \theta = 0$

θ : 第3種微分 $\iff$ 任意の有理型微分

<u>prop</u> 周期関係式 II.

θ, θ' : 有理型微分. (あとの記号は I と同じ)

$$\int_{\partial S_0} \varphi\theta' = \sum_{k=1}^{g} (A_k B_k' - B_k A_k') = 2\pi i \left(\sum_{p \in S_0} \mathrm{Res}_p(\varphi\theta') \right)$$

証明は 前と同様. ただ pole の寄与を考慮に入れればよい。

以下 canonical basis (α_i, β_i), θ_i を fix する.

<u>Thm</u> $\left| \begin{array}{l} p_0 \in S. \quad (U, t) \quad t(p_0) = 0 \\ k \geq 2 \quad \text{Integer} \end{array} \right.$

に対して 次のような $\theta(p_0, k)$ が唯1つ存在する.

i) $\theta(p_0, k)\big|_U = -(k-1) t^{-k} dt + \text{reg.} = d(t^{-(k-1)}) + \text{reg.}$

ii) $\theta(p_0, k)$ の pole は p_0 のみ

iii) $\forall j \ (1 \leq j \leq g) \quad \int_{\alpha_j} \theta(p_0, k) = 0$

<u>Thm</u> $p \neq Q \in S$ に対して次のような $\theta(P, Q)$ が唯1つ存在する.

i) $\mathrm{Res}_p \theta = -\mathrm{Res}_Q \theta = 1$

ii) θ の pole は P, Q のみ

iii) $\forall j \ (1 \leq j \leq g) \quad \int_{\alpha_j} \theta(P, Q) = 0$

上のようにして確定した微分 $\theta(P,k)$, $\theta(P.Q)$ に対して その β_j−積分に対する応答が次で与えられる。

<u>prop</u> 径数と変数の交換法則

i) $$\int_{\beta_j}\theta(P.k) = -2\pi i\frac{1}{(k-2)!}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\varphi_j(t)\Big|_{t=0}$$

但し $\varphi_j(p)=\int^p\theta_j$

ii) $$\int_{\beta_j}\theta(P.Q) = 2\pi i\int_P^Q\theta_j$$

ここで積分はすべて S_0 内で行なう。

§4. Riemann-Rochの定理

前§までの結果を武器にして"Riemann面上に与えられた極や零点を有する有理型関数がどれほどあるか"という問題を考える。

<u>Def</u>　f: 有理型関数　$p \in S$.

$\nu_p(f)$: fのpにおけるorder ($\in \mathbb{Z}$) とは

$t(p)=0$ なる局所座標(U, t)上で

$$f = \sum_{j \geq \nu} a_j t^j, \quad a_\nu \neq 0$$ なるνのこと.

i.e. $\nu_p(f) = n$ のとき　$n > 0$ ならば pはfのn位のzero

$n < 0$ ならば pはfの$-n$位のpoleであることを意味する.

$\nu_p(f)$は有限個の$p \in S$をのぞいて零になる。そこで形式和

$$(f) = \sum_{p \in S} \nu_p(f)\,[p]$$

を考えて (f)をfの<u>因子(divisor)</u>という。

i.e. $(f) = 2[P] - [Q] - [R]$ とは fがPに2位のzeroをもち

Q, Rに1位のpoleをもつことを意味する.

θ: 有理型微分に対しても $\theta = f\,dt$ としたときの f によって同じように θ の divisor (θ) を定義する。

<u>Def</u> D: divisor とは

$$D = \sum_{p \in S} n_p [p] . \quad n_p \in \mathbb{Z} \text{ は有限個をのぞいて } 0$$

<u>Def</u>. divisor の全体を $\mathcal{D}$ とする。$\mathcal{D}$ においては和と $\mathbb{Z}$ 倍が自然に定義できて アーベル群になる。これを <u>divisor 群</u>という。

<u>prop</u>. • $f, g\,(\neq 0) \in M(S)$ (= S 上の meromorphic func.)

$$(fg) = (f) + (g)$$

• $f(\neq 0) \in M(S)$. θ: abel 微分

$$(f\theta) = (f) + (\theta)$$

<u>Def</u> $D = \sum_{p \in S} n_p [p] \in \mathcal{D}$. に対して.

$\deg D = \sum_{p \in S} n_p \in \mathbb{Z}$ を D の <u>degree</u> という。

注) この $\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{Z}$ は abel 群の準同型を与える。

Def i) $D=\sum_{p\in S} n_p[p] \in \mathcal{D}$.

D : positive $\Leftrightarrow$ $\forall p\in S$: $n_p \geq 0$

ii) $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$

$D_1 > D_2$ (D_1がD_2の倍元) $\Leftrightarrow$ $D_1 - D_2 > 0$

以上の準備の下で次のような関数の族を考える.

$D\in\mathcal{D}$を固定する.

Def.

$$L(D) \equiv \{ f\in M(S) \mid (f) > D \text{ or } f=0 \}$$

$$W(D) \equiv \{ \theta : 有理微分 \mid (\theta) > D \text{ or } \theta = 0 \}$$

注). $D=\sum_{p\in S} n_p[p]$のとき $f\in L(D)$とは

$\forall p\in S$ $\nu_p(f) \geq n_p$ を意味する。

$L(D)$. $W(D)$は$\mathbb{C}$上の有限次元vector spaceになるのだが、それらの次元をもとめよ. というのがこの§の主題である. この問題に対する本質的な結果が次の定理である。

Thm (Riemann-Roch)

$$\dim_{\mathbb{C}} L(-D) = \deg D - g + 1 + \dim_{\mathbb{C}} W(D)$$

簡単な場合から見ておこう。

まず $D=0$ の場合

$$\begin{cases} L(-D) = \{const.\} & \therefore \dim L(-D) = 1 \\ W(D) = \Omega & \therefore \dim W(D) = g \\ \deg D = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \dim L(-D) = \deg D + 1 - g + \dim W(D)$$

$$(\quad 1 \quad = \quad 0 \quad + 1 - g + \quad g \quad)$$

次に $-D = \sum_{j=0}^{l} n_j [P_j] > 0 \quad (n_j \geq 1,\ P_j \neq P_k)$ の場合

$$\begin{cases} L(-D) = \{0\} & \therefore \dim L(-D) = 0 \\ W(D) = \Omega \oplus \sum_{j=1}^{l} \mathbb{C}\,\theta(P_j, P_0) \oplus \sum_{j=0}^{l} \sum_{k=2}^{n_j} \mathbb{C}\,\theta(P_j, k) \\ \therefore \dim W(D) = g + l + \sum_{j=0}^{l} (n_j - 1) \\ \qquad = g - 1 + \deg(-D) \end{cases}$$

$$\therefore \dim L(-D) = \deg D + 1 - g + \dim W(D)$$

最後に $D = \sum_{j=1}^{l} n_j [P_j] > 0 \quad (n_j \geq 1,\ P_i \neq P_j)$ の場合

まず $f \in L(-D)$ に対して

$$df \in W\left(-D - \sum_{j=1}^{l} [P_j]\right)$$

(∵ d によって pole の位数が 1つずつ上るから)

そこで $f \in L(-D)$ をもとめるには $W(-D-\sum_{j=1}^{l}[P_j])$ のうちで

積分可能条件 | i) $\forall p \in S$: $\mathrm{Res}_p\,\theta = 0$.
| ii) $\forall i\ (1 \le i \le g)$: $\int_{\alpha_i}\theta = \int_{\beta_i}\theta = 0$

を満たすもの(及び 積分 const 1ヶ をプラスする)をさがすことになる。

i) と ii) の α-条件より、そのような θ は

$$\theta = \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{n_j} C_{j,k}\,\theta(P_j, k+1)$$

と書かれる。β-条件を 留数↔変数の 変換公式で書き直すと、

$$0 = \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{n_j}(-2\pi i)C_{j,k}\ \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^k}{dt_j^k}\left[\varphi_m(t_j)\right]_{t_j=0}$$

となる。 $g \times \deg D$ 行列 $M = (A_{m,(j,k)})$ を

$$A_{m,(j,k)} = \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^k}{dt_j^k}\left[\varphi_m(t_j)\right]_{t_j=0}$$

で定義し、また、$\deg D$ 次元 vector C を $C = (C_{(j,k)})$ と定めれば

上の条件は $0 = M \cdot C$ となり、したがって

$$\boxed{\dim L(-D) = \deg D - \mathrm{rank}\,M + 1}$$

一方 $W(D)$ については

$$W(D) \subseteq W(0) = \Omega = \sum_{m=1}^{g} \mathbb{C}\,\theta_m$$
$$\theta = \sum_{m=1}^{g} d_m \theta_m \in W(D)$$

と書かれるが D の要求する zero 点の条件から

$\forall j\ (1 \leq j \leq l)\quad \forall k\ (1 \leq k \leq n_j)$

$$0 = \sum_{m=1}^{g} d_m \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{n_j} \left[\frac{d^k \varphi_m}{dt_j^{\,k}} \frac{1}{(k-1)!} \right]_{t_j=0}$$

i.e g 次元 vector d を $d = (d_m)$ とすれば

$$0 = d \cdot M$$

したがって

$$\boxed{\dim W(D) = g - \operatorname{rank} M}$$

上記2式より. $\operatorname{rank} M$ を消去して 求める公式

$$\dim L(-D) = \deg D + 1 - g + \dim W(D)$$

を得る。

<u>定理の証明の idea.</u>

$N(D) = \{ f : $ 第二種 abel 積分 $: \quad \int_\alpha df = 0,\ (f) > D$

とする。

すなわち，$N(D)$ は $dL(D)$ のうちで $\int_\beta df=0$ 条件をはずしたものに対応する。

$$D=D_1-D_2,\quad D_1, D_2\geq 0 \text{ とする.}$$

$$\begin{cases} L(-D)\subseteq L(-D_1)\overset{*}{\subseteq} N(-D_1) \\ W(D)\subseteq W(-D_2) \end{cases}$$

内積

$$\begin{array}{ccccc} N(-D_1) & \times & W(-D_2) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ f & & \theta & \longmapsto & \sum_{p\in S} \mathrm{Res}_p(f\theta)\equiv\langle f,\theta\rangle \end{array}$$

を与えると，

$$\begin{cases} N_0\equiv\{f\in N(-D_1)\mid \langle f,\theta\rangle=0,\ \forall\theta\in W(-D_2)\}=L(-D) \\ W_0\equiv\{\theta\in W(-D_2)\mid \langle f,\theta\rangle=0,\ \forall f\in N(-D_1)\}=W(D) \end{cases}$$

が成り立つ。そこで<u>標準同型定理</u>から

$$\dim N(-D_1)-\dim L(-D)=\dim W(-D_2)-\dim W(D)$$

ここで

$$\dim N(-D_1)=\begin{cases}\deg D_1 & (D_2\neq 0)\\ \deg D_1+1 & (D_2=0)\end{cases}$$

$$\dim W(-D_2)=\begin{cases}g-1+\deg D_2 & (D_2\neq 0)\\ g & (D_2=0)\end{cases}$$

及び $\deg D=\deg D_1-\deg D_2$ から求める関係を得る。∎

* $D_2=0$ のとき $df=0$ なる f は 0 と約束する。

Riemann-Rochの定理の応用.

<u>prop.</u> $g=0 \Rightarrow S \cong P^1$ 双正則

proof $p \in S$ fix

$$\dim L(-[p]) = 1+1-g+\dim W([p]) \geq 2$$

∴ pで一位のpoleをもつような関数fがある この

$$f: S \to P^1$$

が実は逆も正則になる ∎

<u>prop.</u> ω : 正則微分 $\Rightarrow \deg(\omega) = 2g-2$

proof. $(\omega) = D_1 + D_2$ $\deg D_1 = m$, $\deg D_2 = n$

$$f \in L(-D_1) \longleftrightarrow \varphi \in W(D_2)$$

$$f = \varphi/\omega \longleftrightarrow \varphi = f\omega$$

は 1 to 1. onto であるから.

$\dim L(-D_1) = \dim W(D_2)$ (同じく $\dim L(-D_2) = \dim W(D_1)$.

$$\therefore \quad \dim L(-D_1) = \deg D_1 + 1 - g + \dim W(D_1)$$

$$+) \quad \dim L(-D_2) = \deg D_2 + 1 - g + \dim W(D_2)$$

$$0 = \deg D + 2 - 2g \qquad ∎$$

§5 Abelの定理とJacobi多様体

<u>Def</u> $\mathcal{D}_p = \{(f) \mid f \in M(S),\ f \neq 0\}$: 主因子

<u>prop</u>

$$L(D) \cong L(D + D_p)$$

$$g \longrightarrow f \cdot g \quad : f \in M(S)$$

<u>Def</u> $D_1 \sim D_2 \iff D_1 - D_2 = D_p$

$\mathcal{D}/\sim$: 因子類群

$$[D] \equiv \bar{D} \equiv D/D_p$$

上記のpropは $L(D)$,($W(D)$も同様)が $\mathcal{D}/\sim$ によって決まることを意味している。

さて. $f \in M(S)$ について $\deg(f) = 0$ であるから.

$$\mathcal{D}_p \subset \mathcal{D}_0 \equiv \{D \in \mathcal{D} \mid \deg D = 0\}$$

では. $D \in \mathcal{D}_0$ はいかなるときに $D = (f)$. $f \in M(S)$ となり得るであろうか? これに答えるのがこの§の主題である。

Def $D \geq 0$ 正因子とする.

$$D: 一般因子 \Leftrightarrow \dim L(-D) = 1$$

$$(\Leftrightarrow \dim W(D) = g - \deg D)$$

特に. $\deg D = g$ なる場合には

$$D: 一般 \Leftrightarrow \dim L(-D) = 1 \Leftrightarrow \dim W(D) = 0$$

Def

$$S^g(S) = \{D \geq 0 \mid \deg D = g\}$$

$$= \{D = P_1 + \cdots + P_g \mid P_j \in S\}$$

$$= \underbrace{S \times S \times \cdots \times S}_{g} / \mathfrak{S}_g$$

この $S^g(S)$ は g-dim complex mfd になる.

prop. $S^g(S) \supseteq \Sigma$: 特殊因子 (一般因子でないもの全体) は $(g-1)$-dim complex mfd. になる.

特別な場合をみてみる.

$P_i \in S \quad (1 \leq i \leq g). \qquad P_i \neq P_j$

P_i の局所座標 (U_i, t_i); $U_i \cap U_j = \phi$, $t_i(P_i) = 0$

$$\theta_i(t_j)\Big|_{U_j} = f_i(t_j)\,dt_j$$

$$\theta = \sum_{j=1}^{g} c_j \theta_j \in W([Q_1]+[Q_2]+\cdots+[Q_g])$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{g} c_j f_j(t_i)\Big|_{t_i = t_i(Q_i)} = 0$$

そこで　$S^g(S) \ni (Q_1, Q_2, \cdots Q_g)$ が特殊

$$\Longleftrightarrow \dim W\Big(\sum_{j=1}^{g}[Q_j]\Big) \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \exists\, \theta (\neq 0) \in W\Big(\sum_j [Q_j]\Big) \Longleftrightarrow \det f_j(t_i) = 0$$

さて、S 上には g ケの正則微分 θ_i があって canonical basis (α_j, β_j) と切り開き S_0 を fix したとき、

$$\int_{\alpha_j} \theta_i = \delta_{ij}, \quad \int_{\beta_j} \theta_i = \tau_{ij}$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad \mathrm{Im}\, \tau_{ij} \gg 0$$

とできるのであった。そこで $P_0 \in S_0$ を固定して積分

$$\varphi_j(p) = \int_{P_0}^{p} \theta_j \quad (1 \leq j \leq g)$$

を考えると、これは $p \in \hat{S}$ (covering) から $\mathbb{C}^g$ への map を与える。

任意の $Q \in \hat{S}$ は　$p \in S_0$ と　$\gamma = \alpha\beta\alpha\alpha\beta \cdots \alpha\beta \in \pi_1(S, P_0)$ により $Q = p \cdot \gamma$ と書けるが、この時

$$\begin{aligned}
\varphi_j(Q) &= \varphi_j(P\cdot\gamma) \\
&= \varphi_j(p) + \sum_{k=1}^{g} m_k \int_{\alpha_k} \theta_j + \sum_{k=1}^{g} n_k \int_{\beta_k} \theta_j \\
&= \varphi_j(p) + \left(m_j + \sum_{k=1}^{g} n_k \tau_{kj} \right)
\end{aligned}$$

となる。ここに m_k, n_k は γ の中の α_k, β_k の数である。そこで

$$\begin{aligned}
L &= \mathbb{Z} e_i \oplus \mathbb{Z} t_i \\
&= \left\{ \left(m_j + \sum_{k=1}^{g} n_k \tau_{kj} \right) \in \mathbb{C}^g \;\middle|\; m_k, n_k \in \mathbb{Z} \right\}
\end{aligned}$$

(但し $(e_i)_j = \delta_{ij}$, $(t_i)_j = \tau_{ij}$)

を identify することにより、<u>Abel-Jacobi map</u> Φ を

$$\begin{tikzcd}
\Phi : & \hat{S} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{C}^g \arrow[d, "\sim"] \\
& S \arrow[r] & J(S) = \mathbb{C}^g / L \\[-20pt]
& \rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} \\[-20pt]
& p \arrow[r, mapsto] & \varphi_j(p) = \int_{p_0}^{p} \theta_j
\end{tikzcd}$$

によって与えることができる。この $J(S)$ を <u>Jacobi 多様体</u>という。

Φ: Abel-Jacobi map.

$$\mathcal{D} = \sum_{j=1}^{l} n_j [p_j] \in \mathfrak{D}$$

<u>Def</u>

$$\begin{array}{ccccc} \Phi : & \mathfrak{D} & \longrightarrow & J(S) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & D & \longmapsto & \Phi(D) = \sum_{j=1}^{l} n_j \Phi(p_j) \end{array}$$

Thm. (Abel)

$$\Phi : \mathfrak{D}_0 / \mathfrak{D}_p = \overline{\mathfrak{D}}_0 \xrightarrow{\cong} J(S)$$

i.e. $D = (f) \iff \Phi(D) = 0$

証明は 周期－留数関係式による.

<u>Jacobiの逆問題</u> $p_0 \in S$. fix

$$\begin{array}{ccc} S^g(S) & \longrightarrow & \overline{\mathfrak{D}}_0 = \mathfrak{D}_0/\mathfrak{D}_p \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (p_1 + \cdots + p_g) & \longmapsto & \sum_{j=1}^{g} ([p_j] - [p_0]) \\ \Phi^* \downarrow & & \downarrow \Phi \end{array}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{g} \int_{p_0}^{p_1} \theta_1 , \sum_{j=1}^{g} \int_{p_0}^{p_2} \theta_2 , \ldots , \sum_{j=1}^{g} \int_{p_0}^{p_g} \theta_g \right) \in J(S)$$

* もともとのΦと同じ記号を使う。

<u>prop</u>　$\Phi : S^g(S) \to J(S)$ (horomorphic) は onto

proof　$S^g(S) \to \overline{\mathfrak{D}}_0$ が onto であればよい。

p 29, 30 と同じ setting において. 局所座標 $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_g$ 上で

$$\Phi : (Q_1 + \cdots + Q_g) \longmapsto \left(\sum_{j=1}^{g}\int_{P_0}^{Q_j}\theta_1, \cdots, \sum_{j=1}^{g}\int_{P_0}^{Q_j}\theta_g\right)$$

を微分すると.

$$(\text{Jacobi matrix}) = \begin{bmatrix} f_1(t_1) & \cdots & f_1(t_g) \\ \vdots & & \vdots \\ f_g(t_1) & \cdots & f_g(t_g) \end{bmatrix}$$

であるが これの det が zero になるのは 特殊因子 Σ 上のみであった。

したがって.

$$\Phi : S^g(S) \setminus \Sigma \longrightarrow J(S) - \Phi(\Sigma)$$

は onto で $d\Phi$ は non vanishing. ∎

<u>prop</u>　Φ は さらに 1 to 1 である.

proof.　$D \in S^g(S)$ に対して $\Phi^{-1}\Phi(D)$ を考えると

$$\Phi^{-1}\Phi(D) = \{D_1 \in S^g \mid D_1 = D + (f)\}$$
$$= PL(-D) = L(-D)/C^*$$

$$\dim \Phi^{-1}\Phi(D) = \dim L(-D) - 1 \quad (= 0 \iff D : \text{一般}) \quad ∎$$

§6 Θ-函数とJacobiの逆問題

Jacobiの逆問題とは もともとの形で言えば

$(C_1, C_2, \cdots, C_g) \in J(S)$ に対して $P_1, \cdots P_g \in S$ を与えて

$$\sum_{j=1}^{g} \int_{P_0}^{P_j} \theta_k = C_k \quad (1 \leq k \leq g)$$

とせよ．というものであった。$g=1$ の場合 $\wp$ 関数はその具体的な解答であったのだが $g \geq 2$ の場合はどうなのであろうか。

Riemann Θ-function.

Def $\quad T = (T_{ij}) \in S_g \quad$ (period matrix)

$\quad u = (u_i) \in \mathbb{C}^g$

$$\Theta(T : u) \equiv \Theta(u) = \sum_{(m_i) \in \mathbb{Z}^g} e\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{jk} T_{jk} m_j m_k + \sum_j m_j u_j\right)\right]$$

但し $e[*] = \exp 2\pi i(*)$

この Θ は $u \in \mathbb{C}^g$ についての整関数であり，

lattice $L = \mathbb{Z} e_i \oplus \mathbb{Z} t_i$

の shift に対して次の擬似周期性を示す.

prop
$$\Theta(u+e_i)=\Theta(u)$$
$$\Theta(u+\tau_i)=e\left[-\left(\frac{1}{2}\tau_{ii}+u_i\right)\right]\Theta(u)$$

$c\in\mathbb{C}^g$ を fix する

Def

Abel-Jacobi map.

$$\begin{array}{ccccl} f: & \hat{S} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\ & p & \longmapsto & f(p)=\Theta(\Phi(p)-c) & \end{array}$$

prop
$$f(p+\alpha_j)=f(p)$$
$$f(p+\beta_j)=e\left[-\left(\frac{1}{2}\tau_{jj}+u_j\right)\right]f(p)$$

以下 $f(p)\not\equiv 0$ とする.

f は S 上多価だが $\nu_p(f)$ は S 上 well-defined

$\Longrightarrow (f)\in\mathcal{D}$ が定まり もちろん $(f)\geq 0$

prop 上で定めた (f) について. $\deg(f)=g$

proof. $\displaystyle\int_{\partial S_0}\frac{df}{f}=g$ より. ∎

Thm.

$\exists K \in \mathbb{C}^g$ (Riemann constants) : unique

$c \in \mathbb{C}^g$ に対して $F_c(p) = \Theta(\Phi(p) - c + K)$ とするとき

$$F_c \not\equiv 0 \iff c \in \underbrace{\mathbb{C}^g \setminus \Phi(\Sigma)}_{\text{一般}}$$

Thm (Riemann による Jacobi 逆問題の解)

$\overline{\Sigma} = \Phi(\Sigma)$

$c \in J(S) \setminus \overline{\Sigma}$

$$\begin{array}{ccc} \Phi : S^g(S) - \Sigma & \longrightarrow & J(S) \setminus \overline{\Sigma} \quad \text{は双正則} \\ \Psi & & \Psi \\ \Phi^{-1}(c) & \longmapsto & c \\ \| & & \\ (F_c) & & \end{array}$$

(F_c) ← これがもとめる逆

Θ : $\mathbb{C}^g$ 上の正則関数 $\Theta \not\equiv 0$

$(\Theta) = \{ c \in \mathbb{C}^g \mid \Theta(c) = 0 \}$: Θ-divisor

prop (Θ) は $(g-1)$ dim complex variety

<u>Def</u> $1 \leq j \leq g$ に対して

$$W_j = \{ \Phi(P_1 + \cdots + P_j) \mid P_i \in S \}$$ とする

<u>prop</u> $W_0 = (0) \subseteq W_1 \subseteq W_2 \subseteq \cdots \subseteq W_g = \mathbb{C}^g$

<u>Thm</u> (Riemann の zero 点定理)

$$(④) = W_{g-1} - K$$