物理学者のための実戦トポロジー講座(II)

1987年2月16,17日 名古屋大学理学部にて行なわれた
土屋昭博氏による講義のノートです。(記録 山田)

《目次》

§1. 復習
§2. Poincare の双対性
§3. 交点理論
§4. Lefshetz の不動点定理

今回の目標は 多様体のトポロジー で, Poincare-duality, Intersection theory, Lefshetz の不動点定理 などを扱う。前回 その一般論を示した Homology, Cohomology 論は, 多様体に適用することにより その真価を発揮する。主要な成果は

(I) Poincare duality
(II) 積分理論 (de Rham theory, 調和積分論)
(III) 変分法とトポロジー (Mini-max 原理, Morse theory)
} 今回はやらない。

などである。これらはまた トポロジーの生成と発展の原点でもあった。

念のため

19^{C} : 空間 = 多様体のトポロジー
20^{C} : 空間の族 = 函数空間のトポロジー

example : Atiyah-Singer

§1. 復習

前回の(I)では大急ぎで運転技能のみを教え込んだので、今回は少しゆっくりと、mechaを調べることから始める。

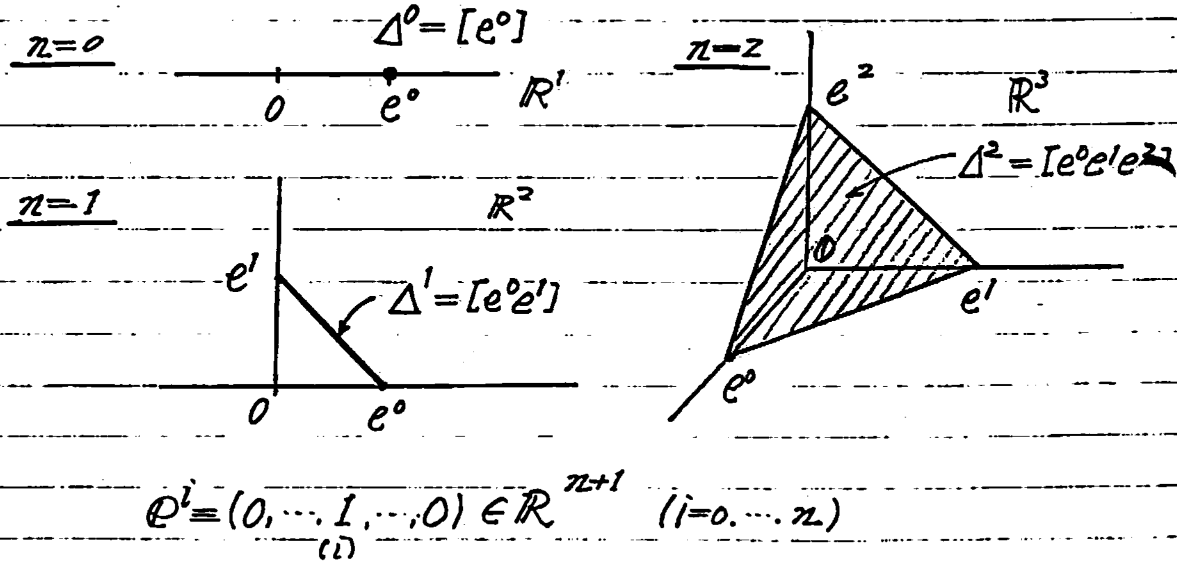
1) Singular homology の定義

Homology, Cohomology の定義にはいろいろあるが、良い性質の空間に対しては同じになることが大切であった。最初の定義は Poincare による単体分割によるものであったが、これは functorial な性質が見にくいので ここでは Singular homology 論を扱う。

$n \geq 0$ integer に対して、

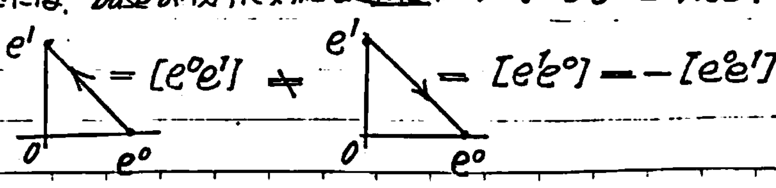
$$\Delta^n = \{ x = (x^0, x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x^i = 1 ; \ x^i \geq 0 \ (i = 0, \cdots, n) \}$$

を n次元標準単体という。



$$e^i = (0, \cdots, \underset{(i)}{1}, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (i = 0, \cdots, n)$$

各標準単体には、base の順序に対応した向きがついているものと考える。

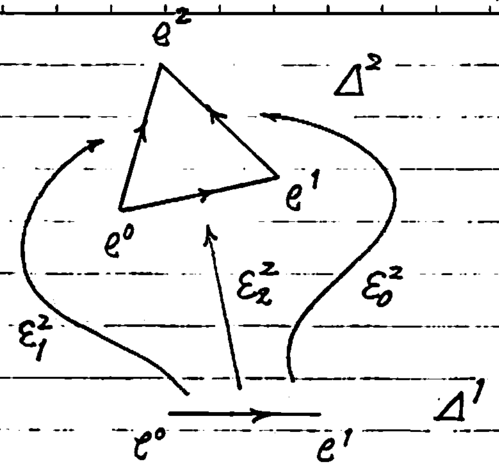


$i=0,1,\cdots,n$ に対して

$$\varepsilon_i^n : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n$$

$$e^j \longmapsto \begin{cases} e^j & 0\leq j< i \\ e^{j+1} & i\leq j\leq n \end{cases}$$

とする。(右図)



Xを位相空間する。Δ^nからXへの連続写像

$$\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$$

を X上の <u>n次元特異 n単体</u>という。

注). 2つの σ_1, σ_2 は 写像として同じ時にのみ同じものとみなす。例えば $x\in X$ を1点として、
$\sigma_1 : \Delta^0 \to \{x\}$, $\sigma_2 : \Delta^n \to \{x\}$ は 像の集合としては同じであるが 異なる単体である。
この σ_2 のように <u>つぶれて</u>しまっていても n単体と呼ぶので注意しよう。

X上の(特異) n単体の全体を $C(\Delta^n; X)$ と書く。これは非常に大きな濃度の集合である。
$C(\Delta^n, X)$の有限個の元から生成された自由Abel群を $S_n(X)$ とする。すなわち

$$c = \sum_{\sigma\in C(\Delta^n; X)} n_\sigma \sigma \quad n_\sigma \in \mathbb{Z}.\ (\text{有限個を除いて zero})$$

の形の形式和の全体のことである。$S_n(X)$を <u>n-chain群</u>、その元 c を <u>n-chain</u> という。

n-chain $c\in S_n(X)$ に対して、その boundary $\partial c \in S_{n-1}(X)$ を対応させる写像 ∂ を次のように定義する。まず $n\geq 0$ $i=0,\cdots,n$ に対して

$$\partial_i : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$$

を、

$$\partial_i(\sigma) = \sigma \circ \varepsilon_i^n \quad \therefore \Delta^{n-1} \xrightarrow[\varepsilon_i^n]{} \Delta^n \xrightarrow[\sigma]{} X$$

$$\partial_i\left(\sum_\sigma n_\sigma \sigma\right) = \sum_\sigma n_\sigma (\partial_i \sigma)$$

で定義する。そこで <u>boundary operator</u> ∂ を

$$\partial = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i \ : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X).$$

で与える。これは Abel群の homomorphism になる。

約束として $S_n(X) = \{0\}$. $n<0$; $\partial = 0$ on $S_n(X)$. $n \leq 0$ とする。

容易に示されるように $\partial \circ \partial = 0$ である。そこで

$$H_n(X) = \frac{\ker \partial : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)}{\operatorname{im} \partial : S_{n+1}(X) \longrightarrow S_n(X)} \ \left(= H_n(X, \mathbb{Z})\right)$$

とおいて X の<u>(特異) n 次元 Homology群</u>という。

<u>functorial な性質</u>

$f : X \longrightarrow Y$. を位相空間 X から Y への連続写像とする。Abel群の map

$$f_\# : S_n(X) \longrightarrow S_n(Y)$$

を次のように定義する。

$$\sigma : \Delta^n \longrightarrow X \ \in S_n(X) \quad \text{に対して}$$

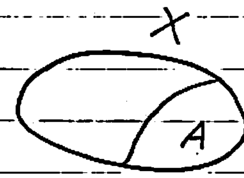
$$f_\# \sigma = f \circ \sigma : \Delta^n \xrightarrow[\sigma]{} X \xrightarrow[f]{} Y \ \in S_n(Y).$$

この時.
$$f_\# \partial_X = \partial_Y f_\#$$

が成り立つので (boundary は boundary に移る) Homology群の map.

$$f_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$$

が定義できる。



relative version

(X, A): 位相空間のpair, $X \supseteq A$.

定義より $S_n(X) \supseteq S_n(A)$.

そこで $S_n(X, A) = S_n(X)/S_n(A)$.

とする。ここで $c \in S_n(X, A)$ とは

$$c = \sum_{\sigma} n_\sigma \sigma \ ; \ \sigma : \Delta^n \longrightarrow X$$

であって、$\sigma(\Delta^n) \subseteq A$ ならば zero と見なされる。

Prop. 次の可換な図式は exact である。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & S_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & S_n(X, A) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_{n+1}(A) \arrow[r] & S_{n+1}(X) \arrow[r] & S_{n+1}(X, A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$(\sum_n S_n(X, A), \partial)$ の Homology群を $H_n(X, A)$ と書く。

$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ を pairのmap とする時 上と同様にして

$$f_\# : S_n(X, A) \longrightarrow S_n(Y, B)$$
$$f_* : H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Y, B)$$

が定まる。

上記の Prop より. 次の homomorphism ∂ が構成できる.

$$\begin{array}{ccc} \partial : H_{n+1}(X.A) & \longrightarrow & H_n(A). \\ \Psi & & \Psi \\ [c] & \longmapsto & [\partial c] \end{array}$$

以上に与えた対応関係をまとめると.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{位相空間の pair } (X.A) & \text{Abel群 } H_n(X.A).\ n \in \mathbb{Z} \\ \text{pair の map } f : (X.A) \to (Y.B) & \text{Abel群の hom. } f_* : H_n(X.A) \to H_n(Y.B). \\ \text{及び Abel群の hom } \partial : H_n(X.A) \to H_{n-1}(A) & \end{array} \right.$$

となっている。この対応を Singular Homology 論という。

Theorem (Singular Homology の性質)

0). $f : (X.A) \to (Y.B)$, $g : (Y.B) \to (Z,C)$ に対して

$$\left\{ \begin{array}{l} (g \circ f)_* = g_* \circ f_* : H_n(X.A) \to H_n(Z.C) \\ (id)_* = id. \end{array} \right.$$

1). $H_p(pt.) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & p = 0 \\ 0 & p \neq 0. \end{array} \right.$

2) $f_0 \simeq f_1 : (X.A) \to (Y.B)$. homotopic

$\Rightarrow f_{0*} = f_{1*} : H_n(X.A) \to H_n(Y.B).$

3) 切除定理 $(X.A).\ A \supseteq U\ (\mathrm{int} A \supseteq \bar{U})$

$$i_* : H_n(X-U, A-U) \xrightarrow{\cong} H_n(X.A).$$

4) pairのexact sequence

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X.A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

はexact.

。naturality (see (I)).

note 証明は3)がやっかいである。(単体分割では2)がむずかしい).

次に2つのことを注意しておく(1つは係数について もう1つはCohomologyについて)

2). 係数の問題

(I)ではde Rham Cohomologyを念頭においてすべて$\mathbb{R}$係数でやったが、今回は$\mathbb{Z}$係数の場合も扱った。それらの関係についてふれておく.

GをAbel群, $\mathbb{Z}.\mathbb{Q}.\mathbb{R}.\mathbb{Z}_2, \cdots$とする。

$$S_n(X.A;G) \equiv S_n(X.A) \otimes_{\mathbb{Z}} G \ni \sum_\sigma n_\sigma \sigma \quad : n_\sigma \in G$$

とおいてそのHomologyを考えることができる。この時 Theoremの中で

$$1) \quad H_p(pt, G) = \begin{cases} G & p=0 \\ 0 & p\neq 0 \end{cases}$$

となる以外すべてのことが成立する。さらに係数のちがうHomology群の関係は次の定理で与えられる。

Theorem (Universal coefficent theorem)

$$H_n(X.A;G) = H_n(X.A) \otimes_{\mathbb{Z}} G + \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X.A), G)$$

$(X.A)$ がよい空間であれば

$$H_n(X.A) = \underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{b_n\text{個}} + (\text{finite Abel群})$$

となるが、係数が $\mathbb{Q}$（一般に標数 0 の体）であれば

$$H_n(X.A;\mathbb{Q}) = \underbrace{\mathbb{Q}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Q}}_{b_n\text{個}}$$

となる。

3) Cohomology

一般に G-係数で考える。

$$S^n(X.A;G) \equiv \{\varphi : S_n(X.A)\to G \;/\; \text{Abel群 の hom.}\}$$

$$= \{\varphi : S_n(X)\to G \;/\; \text{Abel群の hom} \;;\; \varphi(c)=0 \text{ for } {}^{\forall}c\in S_n(A)\}$$

$$\delta : S^n(X.A;G) \longrightarrow S^{n+1}(X.A;G)$$

$$\varphi \longmapsto \delta\varphi \quad : \delta\varphi(c) \equiv \varphi(\partial c)$$

と定義する。

$$\varphi(c) = \int_c \varphi$$

と書けば

$$\int_c \delta\varphi = \int_{\partial c}\varphi$$

となりこれは Stokes の定理に対応する。

$\delta^2=0$ となるので Cohomology $H^n(X.A;G)$ がいつものように定義される。

functorialな性質

$f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ pairのmapに対して

$$f^{\#}:S^n(Y,B)\longrightarrow S^n(X,A)$$
$$\varphi\longmapsto f^{\#}\varphi \quad : (f^{\#}(\varphi))(c)\equiv\varphi(f_{\#}(c))$$

と定義する。$\int$の記号で書けば

$$\int_c f^{\#}\varphi=\int_{f_{\#}c}\varphi$$

である。この時 $f^{\#}\delta=\delta f^{\#}$ が成立し、Abel群のhomomorphism

$$f^{*}:H^n(Y,B;G)\longrightarrow H^n(X,A;G)$$

が導びかれる。

de Rham Cohomology

X : n次元 mfd. (boundary ∂Xをもってもよい).

$\Omega^n(X,\partial X)\equiv\{X$上の$n$-form φ / φは∂Xのnbhでzero$\}$.

$d:\Omega^n(X,\partial X)\longrightarrow\Omega^{n+1}(X,\partial X)$. 外微分

として、$d^2=0$ から de Rham Cohomology $H^n_{DR}(X,\partial X)$ が定まる。

$$\int : H^n_{DR}(X,\partial X)\longrightarrow H^n(X,\partial X;\mathbb{R}).$$
$$\varphi\longmapsto\int\varphi \quad : \int\varphi\,(c)=\int_c\varphi \quad \text{for } c\in S_n(X,\partial X;\mathbb{R})$$

という対応があるが これが同型である というのが de Rham theory である。

$$\langle\ \rangle : H_n(X.A.G) \times H^n(X.A.G) \longrightarrow G$$
$$\quad\ \ \rotatebox{90}{$\in$} \qquad\quad \rotatebox{90}{$\in$} \qquad\qquad\quad \rotatebox{90}{$\in$}$$
$$\quad z \quad \times \quad u \qquad \longmapsto \langle z|u\rangle$$

は. bilinear map.

Homology と Cohomology の関係は. 次のようになっている.

$$\begin{cases} H^n(X.A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X.A);\mathbb{Z}) + \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X.A),\mathbb{Z}) \\ H^n(X.A:\mathbb{R}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H_n(X.A):\mathbb{R}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X,A):\mathbb{R}) \end{cases}$$

§7. Poincaré の双対性

以下では $\mathbb{Z}$ 係数 (de Rham の場合は $\mathbb{R}$ 係数) で考える。

我々は Homology 論を多様体に適用してその帰結をみる。以下では多様体は C^∞, compact, connected と仮定する。以下の結果に本質的なことは、多様体が locally Euclidian であること及び compact 性である。

M を n 次元多様体とする。

Theorem

- $H_p(M) = \{0\}$ 　$p > n$.
- $H_n(M) = \begin{cases} \mathbb{Z} \\ \{0\} \end{cases}$ のどちらか。
- $H_n(M) = \mathbb{Z}$ の時 　$x \in M$ と $j_x : M \longrightarrow (M, M-x)$ に対して

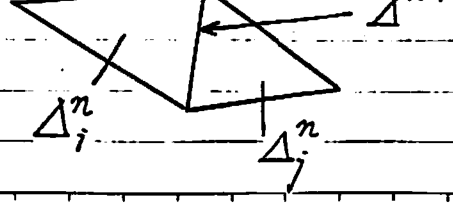
$$(j_x)_* : \underset{\mathbb{Z}}{\overset{}{\underset{\|}{H_n(M)}}} \xrightarrow[\cong]{} H_n(M, M-x) \cong H_n(D^n, D^n - \{0\})$$
$$\cong H_n(D^n, \partial D^n) \cong \mathbb{Z}$$

単体分割の場合について説明しよう。

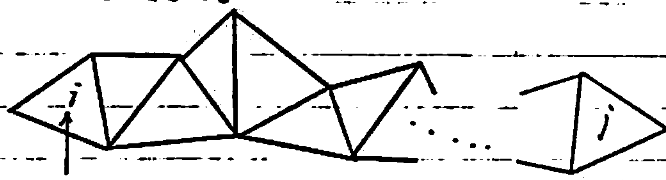
$$M = \bigcup_{i,p} \Delta_i^p \qquad \Delta_i^p : p \text{ 次元単体}$$

$$C_p(M) = \sum_i \mathbb{Z}[\Delta_i^p] \ni C = \sum_i n_i [\Delta_i^p]$$

M の各 $(n-1)$ 単体は丁度 2 つの n 単体の boundary になっている。



$\partial c=0$ の条件から $c=\sum_i n_i[\Delta_i^n]\in H_n(M)$ の係数は
となり合う i, j ごとに $n_i=\pm n_j$ の関係がついて、1つを $n_i=1$ と決めれば
他はすべて決まる。



$n_i=1$

$n_j=\pm 1$.（どちらかに決まる）

これが path によらなければ $H_n(M)=\mathbb{Z}$. path によれば $H_n(M)=\{0\}$ となる。
$H_n(M)=\mathbb{Z}$ の場合には Δ_i^n の向きを適当に合わせれば

$$H_n(M)\ni c=\sum_i[\Delta_i^n]$$

と書ける。$x\in\Delta_i^n$ のとき $[\Delta_i^n]\in H_n(\Delta_i^n,\Delta_i^n-\{x\})$ が対応する。

Def
$$\begin{cases} H_n(M)\cong\mathbb{Z} \Leftrightarrow M: \text{orientable} \\ H_n(M)\cong\{0\} \Leftrightarrow M: \text{non orientable} \end{cases}$$

M が orientable のとき、$H_n(M)$ の generator を基本類という。これには2つあって
一方を μ_M とすれば もう一方は $-\mu_M$ になる。

(M, μ_M) を <u>oriented mfd</u> という。$(M, -\mu_M)$ は逆に向き付けられているという。

以下では M は oriented mfd とする。

我々の以下の目標は oriented mfd M ($\dim M = n$) において 同型

$$
\begin{array}{cccc}
D: & H^p(M) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-p}(M) \\
& \Psi & & \Psi \\
& u & \longmapsto & D(u)
\end{array}
$$

を与えることである。そのために Cap積 とよばれる bi-linear map

$$\cap : H_n(X) \times H^p(X) \longrightarrow H_{n-p}(X).$$

を構成する。

1). Cap積

X, Y : 位相空間

(σ, τ) : $X \times Y$ 上の n 単体. : $\Delta^n \longrightarrow X \times Y$.
$\in S_n(X \times Y)$ $\qquad x \longmapsto (\sigma(x), \tau(x))$

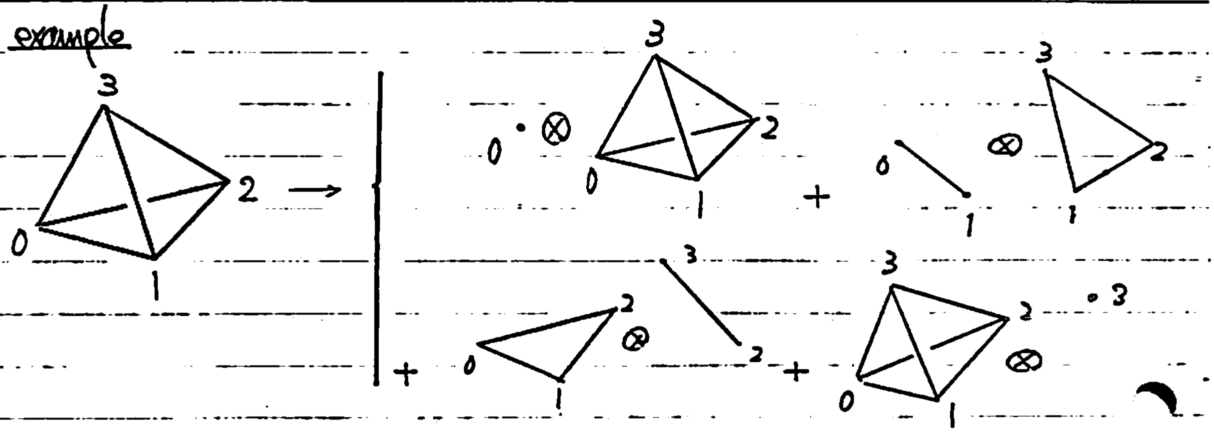
$$
\begin{cases}
\sigma : \Delta^n \longrightarrow X \\
\tau : \Delta^n \longrightarrow Y
\end{cases}
$$

$(\sigma, \tau) \in S_n(X \times Y)$ を X の i 単体 と Y の $(n-i)$ 単体に分けることを考える。
その方法はいろいろあるが. canonical なものとして 次の分解を考えよう.

$$
\begin{array}{cccc}
\rho_n : & S_n(X \times Y) & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{j=0}^{n} S_j(X) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} S_{n-j}(Y) \\
& \Psi & & \Psi \\
& (\sigma, \tau) & \longmapsto & \rho_n(\sigma, \tau) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \partial_{j+1} \partial_{j+2} \cdots \partial_n(\sigma) \otimes \partial_0 \partial_1 \cdots \partial_{j-1}(\tau)
\end{array}
$$

DEPARTMENT OF PHYSICS
NAGOYA UNIVERSITY

example



この ρ を Alexander-Whitney map という。

Prop (ρの性質).

- $\rho : S_*(X\times Y) \longrightarrow S_*(X)\otimes_{\mathbb{Z}} S_*(Y)$

  $\partial(C_1\otimes C_2) = \partial C_1 \otimes C_2 + (-1)^{\deg C_1} C_1\otimes \partial C_2$

- $\rho\partial = \partial\rho$.

- $\rho_* : H_n(S_*(X\times Y)) \xrightarrow{\cong} H_n(S_*(X)\otimes_{\mathbb{Z}} S_*(Y) ; \partial)$ 同型.

- $f : X\to X'$, $g : Y \to Y'$

  $(f_\#\otimes g_\#)\cdot(\rho_{XY}) = \rho_{X'Y'}\cdot(f\times g)_\#$: naturallity.

- $$\begin{tikzcd}
H_p(X)\otimes H_q(Y) \arrow[rr] \arrow[dr, "\times"'] & \circlearrowright & H_{p+q}(S_*(X)\otimes_{\mathbb{Z}} S_*(Y) ; \partial) \\
& H_{p+q}(X\times Y) \arrow[ur, "\rho_*", "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

  クロス積

Def (Cap積)

$$\cap : S_n(X) \otimes S^p(X) \longrightarrow S_{n-p}(X)$$
$$c \otimes \varphi \longmapsto c \cap \varphi$$

$$c \cap \varphi \equiv \langle \partial_{p+1} \partial_{p+2} \cdots \partial_n \sigma, \varphi \rangle \partial_0 \partial_1 \cdots \partial_{p-1}(\sigma)$$

Theorem (bounary formula)

$$\partial(c \cap \varphi) = (-1)^p (\partial c \cap \varphi - c \cap \delta\varphi).$$

これにより、Homology群の bilinear map.

$$\cap : H_n(X) \times H^p(X) \longrightarrow H_{n-p}(X)$$

が定まる。また

$f : X \to Y$ continuous map

に対して、

$$f_*(x \cap f^*(u)) = f_*(x) \cap u, \text{ for } {}^\forall x \in H_n(X), {}^\forall u \in H^p(Y)$$

が成立する。そして

$$\langle x \cap u, v \rangle = \langle x, u \cup v \rangle \text{ for } {}^\forall x \in H_n(X), {}^\forall u \in H^p(X), {}^\forall v \in H^{n-p}(X).$$

relative vision

$$\cap : H_n(X, A \cup B) \times H^p(X, A) \longrightarrow H_{n-p}(X, B) \quad \text{bilinear map}$$

Theorem (Cap積の性質)

① naturality (projection formula)

$X \supseteq A_1, A_2, \cdots$
$Y \supseteq B_1, B_2, \cdots$

$f: X \to Y$: $f(A_i) \subseteq B_i$ $(i=1,2,\cdots)$

$\Rightarrow f_*(x \cap f^*(u)) = f_*(x) \cap u$. for ${}^\forall x \in H_n(X, A_1 \cup A_2)$. ${}^\forall u \in H^p(Y, B_1)$

② $x \in H_n(X, A_1 \cup A_2 \cup A_3)$, $u \in H^p(X, A_1)$. $v \in H^q(X, A_2)$

$(x \cap u) \cap v = x \cap (u \cup v)$

③ $1 \in H^0(X)$, $x \cap 1 = x$

④ $x \in H_n(X)$. $u \in H^n(X)$.

$\varepsilon_*(x \cap u) = \langle x, u \rangle$

$\varepsilon: H_0(X) \to \mathbb{Z} = H_0(p.t.)$

Theorem (Poincaré duality)

M: compact oriented connected n dimensional mfd. とするとき

$D: H^p(M) \xrightarrow{\cong} H_{n-p}(M)$, $D(u) \equiv \mu_M \cap u$ は同型.

D. D^{-1}で移り合う H^p. H_{n-p}の元を互いに Poincaré dual という。

$\mathbb{R}$係数の場合

$\Delta: M \longrightarrow M \times M$.

により.

$$\Delta_* : H_n(M:\mathbb{R}) \longrightarrow H_n(M\times M;\mathbb{R}) = \sum_{p=0}^{n} H_p(M.\mathbb{R})\otimes H_{n-p}(M.\mathbb{R})$$

$$\begin{array}{ccc} \cup & & \cup \\ \mu_M & \longmapsto & \Delta_*(\mu_M) = \sum_i x_i \otimes y_i \end{array}$$

この時.

$$D(\varphi) = \mu_M \cap \varphi = \sum_i \langle x_i, \varphi \rangle y_i$$

となる。

<u>relative virsion</u>

$(M.\partial M)$ に対しても $H_n(M,\partial M) = \mathbb{Z}$ or $\{0\}$ であり. $\mathbb{Z}$ の場合には
基本類 $\mu_M \in H_n(M.\partial M)$ が考えられる。

<u>Theorem</u> (<u>Poincare-Lefshetz duality</u>)

$$D: \quad H^p(M) \xrightarrow{\cong} H_{n-p}(M.\partial M)$$
$$D: \quad H^p(M,\partial M) \xrightarrow{\cong} H_{n-p}(M)$$

$$D(u) \equiv \mu_M \cap u$$

は Abel群の同型を与える。

§3. 交点理論

今までの話は言ってみれば general nonsense、これからが本当の面白みのあるところです。

M: n次元 mfd. μ_M つき.

M の p次元 sub-mfd. S と q次元 sub-mfd T は $p+q=n$ のとき.
generic には有限個の点で交わる。その符号つきの交点数 (詳しい定義は後述).

$$I(S.T) = \sum_{p\in S\cap T} I_p(S.T)$$

は deformation について安定で トポロジー的に意味をもつと考えられる。このことを調べよう。

1). 交点数

$$I : H_p(M) \times H_{n-p}(M) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$x \times y \longmapsto I(x.y)$$

$$I(x.y) \equiv \langle \mu_M . D^{-1}(x) \cup D^{-1}(y) \rangle$$

として x と y の 交点数 という。この時 次のことが成立する

Theorem (交点数の性質)

1) $\begin{cases} I(x_1+x_2. y) = I(x_1.y) + I(x_2.y) \\ I(x.y_1+y_2) = I(x.y_1) + I(x.y_2) \end{cases}$

2) $I(y.x) = (-1)^{pq} I(x.y)$ $\quad x\in H_p(M).\ y\in H_q(M)$

3) $I(\text{torsion}.y) = 0$. $I(x.\text{torsion}) = 0$.

ie $\overline{H}_p(M) \equiv H_p(M)/\text{torsion}$ とおけば $I : \overline{H}_p(M)\times\overline{H}_q(M) \longrightarrow \mathbb{Z}$

は non degenerate かつ unimodular.

幾何学的意味

$M \supseteq S, T$ submfd. $\dim S = p$. $\dim T = q$. $p+q=n$.

仮定　SとTとの交わりは transversal (横断的)

i.e. $\forall q \in S \cap T$　$\exists (U, x)$. q のまわりの local coordinate. s.t.

$$\begin{cases} x(q) = 0. \\ U \cap S = \{x \in U \mid x^{p+1} = x^{p+2} = \cdots = x^n = 0\} \\ U \cap T = \{x \in U \mid x^1 = x^2 = \cdots = x^p = 0\} \end{cases}$$

この時. $S \cap T$は有限個の点から成る。そこで各 $q \in S \cap T$について.

$I_q(S, T) \in \{\pm 1\}$ を次のように定める. すなわち. 上の状況において.

$$\begin{cases} (x^1, \cdots, x^p) : S \cap U \text{ の正の向き.} \\ (x^{p+1}, \cdots, x^n) : T \cap U \text{ の正の向き} \end{cases}$$

にとったとき. $(x^1, \cdots, x^n)$の定めるMの向きと. μ_Mとが同じとき $+1$. 逆のとき -1.
とする。

Theorem (intersection number formula)

$M \supseteq S, T$　横断的　$i_S : S \hookrightarrow M$. $i_T : T \hookrightarrow M$ とするとき.

$$I(i_{S*}(\mu_S), i_{T*}(\mu_T)) = \sum_{q \in S \cap T} I_q(S, T).$$

これは一種の index theorem である。

$M \supseteq S$. submfd. $\dim S = p$. $i_S : S \hookrightarrow M$. とする.

$$\eta_S \equiv D^{-1}(i_{S*}(\mu_S)) \in H^q(M). \quad q = n-p$$

とおいて. <u>Sの表わすCohomology class</u> という。これを用いれば交点数 $I(S,T)$ は

$$I(S,T) = \langle \mu_M, \eta_S \cup \eta_T \rangle = \int_M \eta_S \wedge \eta_T$$

と書くことができる。　(de Rham の場合)

η_S が何者であるのかイメージを得るために de Rham の場合で考える.

$$\langle \mu_M \cap \eta_S, \psi \rangle = \langle \mu_M, \eta_S \cup \psi \rangle$$

において.

$$\mu_M \cap \eta_S = D(\eta_S) = i_{S*}(\mu_S)$$

であるから.

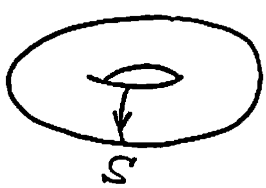
$$\langle i_{S*}(\mu_S), \psi \rangle = \langle \mu_S, i_S^* \psi \rangle = \langle \mu_M, \eta_S \cup \psi \rangle$$

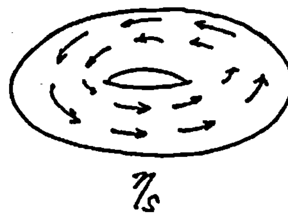
すなわち.

$$\int_S \psi = \int_M \eta_S \wedge \psi \quad \text{for } {}^\forall \psi \in H^p_{DR}(M).$$

となる。η_S は これで characterize される。

<u>example</u> $M = T^2 = S^1 \times S^1$.





2) Thom class

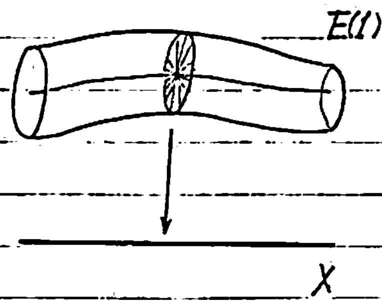
ここでは Thom class を考える。これにより η_s についてもう一つの理解が得られる。

$\pi : E \to X$ を $\mathbb{R}^n$ を fiber とする vector bundle とする。
各 fiber $E_x = \pi^{-1}(x) \cong \mathbb{R}^n$ $(x \in X)$ には内積 $(\ ,\ )_x$ が与えられていて
x について連続であるとする。

$$\begin{cases} E_x(1) \equiv \{ e \in E_x \mid \|e\| \le 1 \}, & E(1) \equiv \bigcup_{x \in X} E_x(1) \\ \partial E_x(1) \equiv \{ e \in E_x \mid \|e\| = 1 \}, & \partial E(1) \equiv \bigcup_{x \in X} \partial E_x(1) \end{cases}$$

とおくと、各々 X 上の fiber bundle になる。

$$\begin{tikzcd} E(1) \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[dr] & \partial E(1) \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}$$



以下 X は arcwise connected とする.

Prop 1) $H^p(E(1), \partial E(1)) = \{0\}$ $p < n$

2) $H^n(E(1), \partial E(1)) = \{0\}$ or $\mathbb{Z}$

3) $H^n(E(1), \partial E(1)) = \mathbb{Z}$ のとき

$\forall x \in X$. $\exists d_x : (E_x(1), \partial E_x(1)) \to (E(1), \partial E(1))$ s.t.

$$d_x^* : H^n(E(1), \partial E(1)) \xrightarrow{\cong} H^n(E_x(1), \partial E_x(1)) \cong \mathbb{Z}$$

$H^n(E(1), \partial E(1)) \cong \mathbb{Z}$ の場合 $\pi: E \to X$ は orientable という。この時 generator を Thom class といい U_E で表わす。U_E の指定されたとき oriented という。

Theorem (Thom 同型)

$\pi: E \to X$. n 次元 oriented vectorbundle とする。

$$\begin{array}{cccc} \Psi_E : & H^p(X) & \xrightarrow{\cong} & H^{p+n}(E(1), \partial E(1)) \\ & \Downarrow & & \Downarrow \\ & x & \longmapsto & \Psi_E(x) \equiv U_E \cdot \pi^*(x) \end{array}$$

は同型

(この π は $\pi: E(1) \to X$).

Def (Euler class)

$\pi: E \to X$. n 次元 oriented vector bundle.

$U_E \in H^n(E(1), \partial E(1) : \mathbb{R})$. : Thom class.

$$\begin{array}{ccc} E(1) & \xrightarrow[j]{} & (E(1), \partial E(1)) \\ \uparrow i & & \\ X & & \end{array}$$

i : zero section.
j : injection

$$e(E) \equiv (j \circ i)^*(U_E) \in H^n(X)$$

を oriented vector bundle E の Euler class という。

Prop (naturality of Thom class)

pull back bundle の Thom class は もとの Thom class の pull back である

$$U_{f^*(F)} = f^* U_F$$

$f: E \to F$ bundle map.
$(E = f^*F)$

compatible

$U_E \xleftarrow{f^*} U_F$

以上の話を．$S \hookrightarrow M$ の場合に適用してみよう．

$\pi: E \to S$. normal bundle.

$(E_x$ の向き$) \times (S$ の向き$) = (M$ の向き$)$

となるように各 fiber E_x に向きをつけると E は oriented fiber bundle になる．

$U_\nu \in H^q(E(1), \partial E(1)) \quad q = n-p$

を $\pi: E \to S$ の Thom class とする．exsision による同型

$$\begin{array}{ccc}
H^q(E(1), \partial E(1)) & \cong & H^q(M, M-\mathrm{int}E) \quad (\text{exsision}) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & \searrow j^* & \downarrow j^* \quad j: M \to (M, M-\mathrm{int}E) \\
U_\nu & & H^q(M) \\
& & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& & j^*(U_\nu)
\end{array}$$

によって $j^*(U_\nu) \in H^q(M)$ が定まる．

Prop $\quad j^*(U_\nu) = \eta_S \in H^q(M). \quad q = n-p.$

これが η_S のもう1つの意味である。これより、S が codim. 1 ならば 対応する $\eta_S \in H^1(M)$ は normal vector field を image すれば良いことになる。

M, N を m次元, n次元 mfd とする. $d=n-m$.

$f: M \to N$. continuous map に対して $f_!$ (オッシマゲーションf) を

$$\begin{tikzcd} f_! : H^p(M) \arrow[r, "f_!"] \arrow[d, "D"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^{p+d}(N) \arrow[d, "D"', "\cong"] \\ H_{m-p}(M) \arrow[r, "f_*"'] & H_{m-p}(N) \end{tikzcd}$$

によって定義する. (Gysin-map).

Remark $i: S \hookrightarrow M$ inclusion

$i_!(1) = \eta_S \in H^q(M)$ $q = \dim M - \dim S$

Prop (projection formula)

$u \in H^p(M)$. $v \in H^q(M)$. について

$f_!(u \cup f^* v) = f_!(u) \cup v$

($\because$) $f_*(x \cap f^*(v)) = f_*(x) \cap v$ より.

ここで例として $\mathbb{C}P^n$ の Cohomology を考えよう. すでに (I) で見たように

$$\left\{ \begin{array}{l} H_p(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p=2j \quad 0 \le j \le n \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \\ H_{2n}(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z} \ni [\mathbb{C}P^n] : \text{canonical orientation.} \\ j: \mathbb{C}P^m \longrightarrow \mathbb{C}P^n \qquad m \le n. \\ j_*: H_p(\mathbb{C}P^m) \xrightarrow{\cong} H_p(\mathbb{C}P^n) \ : \ 0 \le p \le 2m. \end{array} \right.$$

そこで

$$\alpha_n \in H^2(\mathbb{C}P^n) : \alpha_n = D^{-1}(\mathbb{C}P^{n-1})$$

とおくと 次のことが成立する.

<u>Theorem</u>

- $j : \mathbb{C}P^m \longrightarrow \mathbb{C}P^n \quad m \leq n$:

  $j^*(\alpha_n) = \alpha_m$ (以下これを単に α と表わす)

- $H^*(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}[\alpha] / \alpha^{n+1}$

- $\int_{\mathbb{C}P^m} \alpha^m = 1$.

- $D_{\mathbb{C}P^m}(\alpha^q) = \mathbb{C}P^{m-q} \quad ; 0 \leq q \leq m$

(証明). 講義中に証明されたようですが省略します.

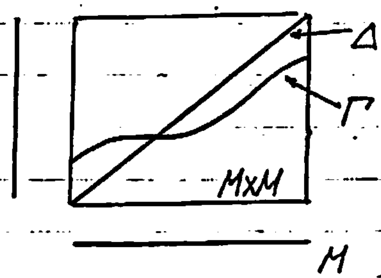
§4. Lefshetzの不動点定理

M : compact oriented connected mfd. $\dim M = n$.

$f : M \to M$: continuous map.

$$\begin{cases} \Gamma \equiv \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subseteq M \times M & : f\text{の graph} \\ \Delta \equiv \{(x, x) \mid x \in M\} \subseteq M \times M & : \text{diagonal i.e. id の graph} \end{cases}$$

とすると, f の fixed point は $\Gamma \cap \Delta$ の元に対応する. そこで f の fixed point の数を符号つきで数えて



$$I(\Gamma, \Delta) \in \mathbb{Z}$$

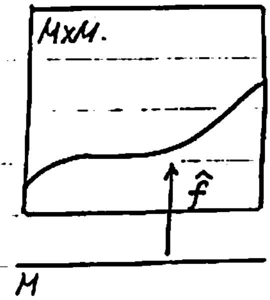
を考えよう. これは f によって定まるトポロジー的な量である.

Theorem 1

$$I(\Gamma, \Delta) = \langle \mu_M, \hat{f}^* \eta_\Delta \rangle = \int_\Gamma \eta_\Delta$$

但し. $\hat{f} : M \to M \times M$ は $\hat{f}(x) = (x, f(x))$ とする.

Proof



$$I(\Gamma, \Delta) = \langle \mu_{M \times M}, \eta_\Gamma \cup \eta_\Delta \rangle$$
$$= \langle \mu_{M \times M} \cap \eta_\Gamma, \eta_\Delta \rangle$$
$$= \langle \mu_\Gamma, \eta_\Delta \rangle$$
$$= \langle \mu_{\hat{f}(M)}, \eta_\Delta \rangle = \langle \mu_M, \hat{f}^* \eta_\Delta \rangle \quad \blacksquare$$

$f: M \to M$ の pull back f^* は

$$f_p^*: H^p(M:\mathbb{R}) \longrightarrow H^p(M:\mathbb{R})$$

という作用を引き起こす。そこで

$$L(f) \equiv \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \operatorname{tr}(f_p^*)$$

とおいて、Lefshetz number という。

Theorem 2 (Lefshetz fixed point theorem)

$$I(\Gamma;\Delta) = L(f).$$

この証明は後にすることにして、特別な場合 $f = id$ を見ておこう。

Theorem 1 より $\quad I(\Delta.\Delta) = \langle \mu_M . \Delta^* \eta_\Delta \rangle \qquad \Delta$: diagonal map.

ところが $\quad \eta_\Delta = \Delta_!(1) = j^*(U_\nu)$ より

$$\Delta^* \eta_\Delta = \Delta^* j^*(U_\nu) = e(TM)$$ tangent bundle の Euler class

$$\therefore\ I(\Delta.\Delta) = \int_M e(TM)$$

Theorem 2 より $\quad (id)^* = id$ だから

$$I(\Delta\Delta) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \dim H^p(M) = \chi(M).$$

従って次のことがわかる。

$$I(\Delta.\Delta) = \int_M e(TM) = \chi(M).$$

Theorem 3 (Hopfの定理)

X : M上のvector field　zero点は有限個.

$$\sum_{q \in \mathrm{zero}(X)} I_q(X) = \chi(M).$$

ここで $I_q(X) = I_q(\Gamma_X . \Delta)$. $\Gamma_X = \{(x, x+X(x)) \mid x \in U \subseteq M\}$

(∵) $f_t(x) = \exp tX \cdot (x)$. に対して 不動点定理を使えばよい。

定理2を証明する上で その基本となるのが 次の公式である

lemma $\quad \eta_\Delta = \Delta_!(1) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p (id^*)_p$

証明　$H^*(M)$のhomogeneous basisを $u_1, \cdots, u_N$: $\deg u_j = |u_j|$ とする.

pairing. $H^p(M) \times H^{n-p}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$u \times v \longmapsto \langle u/v \rangle \equiv \langle \mu_M , u \cup v \rangle$$

に対する u_i のdual basisを u_i^* とする. すなわち.

$$\langle u_i^* / u_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$|u_i^*| = n - |u_i| \quad .$$

$$\Delta_!(1) = \sum_{|u_i| = |u_j|} a_{ij} \, u_i^* \times u_j \in \sum_{p=0}^{n} H^p(M) \times H^{n-p}(M)$$

とおくと. 次の計算が成り立つ.

$$(-1)^{|u_k|^2 - n|u_k|} \delta_{k\ell} = (-1)^{|u_k|(n - |u_k|)} \langle \mu_M , u_k^* \cup u_\ell \rangle$$

$$= \langle \mu_M , u_\ell \cup u_k^* \rangle = \langle \mu_M . \Delta^*(u_\ell \times u_k^*) \rangle$$

$$= \langle \Delta_* \mu_M , u_\ell \times u_k^* \rangle = \langle \mu_{M\times M} \cap \Delta_!(1) \,;\, u_\ell \times u_k^* \rangle$$

$$= \langle \mu_{M\times M} , \Delta_!(1) \cup (u_\ell \times u_k^*) \rangle$$

$$= \sum_{ij} a_{ij} \langle \mu_{M\times M} , (u_i^* \times u_j) \cup (u_\ell \times u_k^*) \rangle \qquad : |u_j| = |u_j|$$

$$= \sum_{ij} a_{ij} (-1)^{|u_j||u_\ell|} \langle \mu_{M\times M} , (u_i^* \cup u_\ell) \times (u_j \cup u_k^*) \rangle$$

$$= \sum_{ij} a_{ij} (-1)^{|u_j||u_\ell|} \delta_{i\ell} \delta_{jk} (-1)^{|u_j||u_k^*|}$$

$$= a_{\ell k} (-1)^{|u_k|(|u_\ell| + |u_k^*|)} \qquad : |u_k| = |u_\ell|.$$

$$= a_{\ell k} (-1)^{|u_k|^2} (-1)^{|u_k|(n - |u_k|)}$$

$$\therefore \quad a_{\ell k} = (-1)^{|u_k|} \delta_{k\ell}.$$

$$\therefore \quad \Delta_!(1) = \sum_i (-1)^{|u_i|} u_i^* \times u_i = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p (id^*)_p \qquad \blacksquare$$

Theorem 2 の証明

$$I(\Gamma.\Delta) = \int_M \hat{f}^* \Delta_!(1) = \int_M \hat{f}^* \Big(\sum_i (-1)^{|u_i|} u_i^* \times u_i \Big)$$

$$\hat{f} : M \xrightarrow{\Delta} M \times M \xrightarrow{id \times f} M \times M \quad \text{だから}$$

$$= \sum_i (-1)^{|u_i|} \int_M \Delta^* (u_i^* \times f^*(u_i)) = \sum_i (-1)^{u_i} \int_M u_i^* \cup f^*(u_i)$$

$$= \sum_{ij} (-1)^{u_i} \int_M u_i^* \cup (f^*)_{ij} u_j = L(f) \qquad \blacksquare$$

<u>example</u> $n \geq 1.$ $q \in \mathbb{Z}.$

$$f : \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{C}P^n$$
$$[z_i] \longmapsto [(z_i)^q]$$

の Lefshetz number をもとめてみる。

$$f^*(\alpha) = c\alpha$$

であるが $c = q$ であることが次のようにしてわかる.（$n=1$でやれば十分）.

$$c = \langle \mathbb{C}P^1, f^*(\alpha) \rangle = \langle f_*(\mathbb{C}P^1), \alpha \rangle = \deg f = q$$

1. 従って. $f^*(\alpha^m) = q^m \alpha^m.$

$$L(f) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m q^m = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

となる.