物理学者のための実戦トポロジー講座 (I)

1986年10月17,18日 名古屋大学 E研にて行なわれた
土屋 昭博氏による講義のノートです。(記録 山田)

《目次》

※ 実戦のための免許証 : Spectral sequence が使えること.

DEPARTMENT OF PHYSICS
NAGOYA UNIVERSITY

今回やらないことで大事なこと（IIで一部をやる予定）

- 多様体のTopology
  - Poincaré-duality
  - Intersection theory
  - Lefshitzの不動点定理
- 多様体上の積分理論
  - de Rhamの定理
  - 調和積分論：多様体上へPotential論
- bundleの理論
  - obstruction theory
  - 特性類と曲率（接続）
- 基本群とCovering space
- 変分法とTopology
  - Morse理論

《参考書》

[服部] —— 服部晶夫，位相幾何学 I. II. III. 岩波基礎数学
[MS] —— Milnor-Stasheff, Characteristic classes
[S] —— Steenrod, Fiber-bundle
[BW] —— Bott-Tu, Differential forms in Algebraic topology.

§1. Homology, Cohomology

空間 X に対して その Homology $H_p(X)$. Cohomology $H^p(X)$ と呼ばれる位相不変量がいろいろなし方で定義されているが

- (a) 性質のよい空間では どの定義も一致する
- (b) 定義をしても 具体的な計算はできない

という2つの理由から ここでは その定義をしない。むしろ どの定義をしても成り立つべき基本的性質を公理として認めるところから出発する。

我々が具体的な計算のために用いるのは次の program である。

(1) 簡単な空間で結果を用意する

(2) 難しい空間で計算する手段を用意する。

- (a) 和に分ける $X = X_1 \cup X_2 \longrightarrow$ §1, 2)
- (b) 積に分ける $X = X_1 \times X_2 \longrightarrow$ §2, 1)

1) 基本的性質

準備：• (X, A) : 位相空間の pair

$\Leftrightarrow$ X : 位相空間, $A \subseteq X$: 部分空間

• $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$: pair の map

$\Leftrightarrow$ $f : X \longrightarrow Y$ 連続写像, $f(A) \subseteq B$

• (X, ϕ) を単に X とも書く。

• $f_0, f_1 : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$: homotopic (記号で $f_0 \simeq f_1$)

$\Leftrightarrow$ ${}^{\exists}F : (X \times I, A \times I) \longrightarrow (Y, B)$, $I = [0, 1]$

st. $F\big|_{X \times 0} = f_0$, $F\big|_{X \times 1} = f_1$

以下 簡単のため係数を実係数 R に限る。

Homology論の基本的性質

・pair $(X.A)$, $p \in \mathbb{Z}$ に対して

$$H_p(X.A) \quad : \text{実ベクトル空間}$$

・map $f:(X.A) \longrightarrow (Y.B)$ に対して

$$f_*: H_p(X.A) \longrightarrow H_p(Y.B)$$

が定義されていて、以下の性質を満たす。

0) ・ $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$, $\quad (id)_* = id$

・ $p<0 \qquad H_p(X,A) = \{0\}$

・ $H_p(pt) = \begin{cases} R & (p=0) \\ 0 & (p \neq 0) \end{cases}$ canonical

1点からなる位相空間

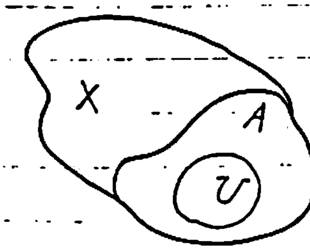
1) ホモトピー不変性

$$f_0 \simeq f_1 : (X.A) \longrightarrow (Y.B) \quad \text{ならば}$$

$$f_{0*} = f_{1*} : H_p(X.A) \longrightarrow H_p(Y.B)$$

2) 切除定理

$(X \supseteq A) \qquad int\, A \supseteq closure\, U$ ならば



$i_*: H_p(X-U, A-U) \longrightarrow H_p(X.A)$ は 同型

($i:(X-U, A-U) \longrightarrow (X.A)$ は inclusion map, $i(x)=x$)

3) pair の exact sequence

各 $(X.A)$, $p \in \mathbb{Z}$ に対して boundary operator ∂ が定義されて

i) $\cdots \xrightarrow{\partial} H_p(A) \xrightarrow{i_*} H_p(X) \xrightarrow{j_*} H_p(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(A) \longrightarrow \cdots$

が exact.

ii) functorial な性質　$f:(X.A) \to (Y,B)$ について

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\xrightarrow{\partial} & H_p(A) & \xrightarrow{i_*} & H_p(X) & \xrightarrow{j_*} & H_p(X.A) & \xrightarrow{\partial} & H_{p-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\
\circlearrowleft & \downarrow f_* & \circlearrowleft & \downarrow f_* & \circlearrowleft & \downarrow f_* & \circlearrowleft & \downarrow f_* & \circlearrowleft & \\
\xrightarrow{\partial} & H_p(B) & \xrightarrow{i_*} & H_p(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_p(Y.B) & \xrightarrow{\partial} & H_{p-1}(B) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

以上が homology の定義であり、重要なことは いい空間に限れば これでもって unique に $H_p(X)$ が決まっていることである。ここで いい空間とは 多様体，三角形分割可能なもの，(orbifold も) 等を念頭においているが どんな空間でも きちんとつかまえて扱えてしまえば いい空間 になり得る。

補足

(1) exact sequence

写像の列 $\to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \cdots$ が exact であるとは 各段において

$\cdots, \operatorname{im} f = \ker g, \operatorname{im} g = \ker h, \cdots$ が成り立つことをいう。特に

i) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ exact $\Longleftrightarrow$ $0 = \ker f$ i.e f: 1 to 1

ii) $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ exact $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{im} f = B$ i.e. f: onto

である。

(2) ∂ の意味

通常の singlar homology 等では $[c] \in H_p(X, A)$ は $\partial c \subset A$ となっていて これが $[\partial c] \in H_{p-1}(A)$ を定める.

(3) Category 論

・ Category $\mathcal{K} = \left| \begin{array}{l} \text{objects} \quad A.\ B.\ C.\ \cdots \\ \text{morphism} \quad f \in Hom(A.B),\ \cdots \end{array} \right.$

(composition is associative. $\exists 1_A \in Hom(A:A)$)

(例) objects : groups
morphism : group homomorphism } → category.

・ $\mathcal{K}.\ \mathcal{L}$: category

$F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ — covariant functor

$\Leftrightarrow$ F : A (object in $\mathcal{K}$) $\longrightarrow F(A)$ (object in $\mathcal{L}$)

F : $f \in Hom(A.B) \longrightarrow F(f) \in Hom(F(A).\ F(B))$

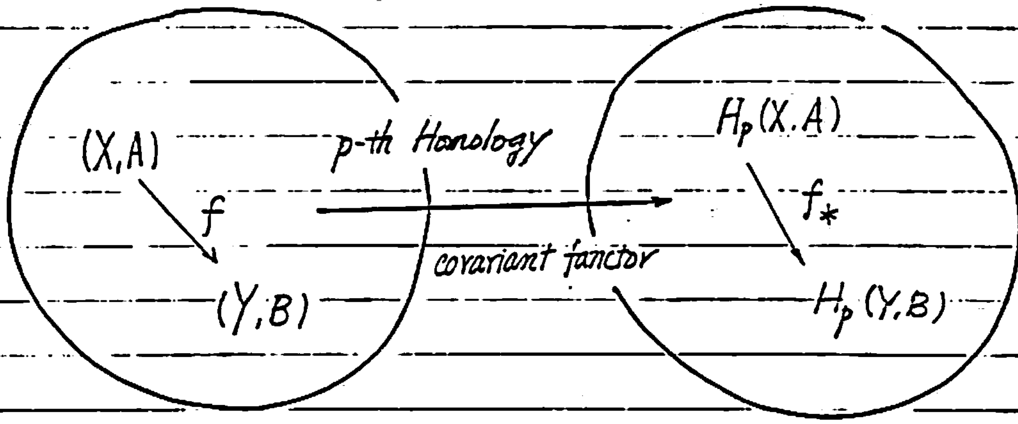
s.t. $F(g \cdot f) = F(g) F(f)$

$F(1_A) = 1_{F(A)}$

contravariant functor は $f \in Hom(A.B) \longrightarrow F(f) \in Hom(F(B).\ F(A))$

以上の category 論の言葉によれば: 位相空間の pair を object とし, その間の map を morphism とする category から, 実ベクトル空間を object とし その間の homomorphism を morphism とする category への functor として Homology を位置づけることができる.

ついでに Cohomology は contravariant functor と見なし得る.



位相空間のcategory　　　　ベクトル空間のcategory

(4) <u>係数のちがい</u>

$k \neq 0 \in \mathbb{Z}$ に対して k 倍するという写像を R の中で考えるとき

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\times k} R \longrightarrow 0$$

は exact である (ie. $\times k$ は R の同型写像) しかしながら $\mathbb{Z}$ の中では

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times k} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

は一般に exact ではない。($\mathbb{Z}$ の中では $\div k$ ということができないから) 実際、

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times k} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

が exact になる。$\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ は $k \cdot x = 0$ なる元から成っており、これは <u>tosion</u> に相当する。したがって実係数 ($\mathbb{Q}$-係数でも同じ (∵ 体だから)) の Homology は <u>tosion less part</u> のみを見ていることになる。

ホモトピー不変性からの重要な帰結

∘ $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$: homotopy 同値 とは

$\Longleftrightarrow \exists g : (Y, B) \longrightarrow (X, A)$.

s.t. $f \circ g \simeq id_{(Y,B)}$, $g \circ f \simeq id_{(X,A)}$

note. 2つの空間が homotopy 同値であることは それらが位相同型であることより弱い
例えば disk D^2 と pt は homotopy 同値であるが 位相同型でない.

Thm (ホモトピー不変性)
$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$: homotopy 同値
$\Rightarrow f_* : H_p(X, A) \xrightarrow{\cong} H_p(Y, B)$: 同型

特に 1点 pt と homotopy 同値であることを contractable というが 上のことから

Cor X : contractable $\Rightarrow H_p(X) \cong H_p(pt) = \begin{cases} R & (p=0) \\ 0 & (p \neq 0) \end{cases}$

がわかる。

簡単な空間の Homology 群

ここでは 上の公理にもとづいて Disc や球面のような簡単な空間の Homology 群を計算する。後に これらのデータをもとに より複雑な場合も計算できることを示す。

$$D^n = \{ (x^1, \cdots, x^n) \in R^n ; \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 \leq 1 \}$$; n次元 disk

$$S^{n-1} = \partial D^n = \{ (x^1, \cdots, x^n) \in R^n ; \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 = 1 \}$$; n-1次元 球面

(但し $S^{-1} = \phi$ とする)

これらの Homology 群を以下に計算するが. 先に結果を書いておけば

Thm

$$H_p(D^n) = \begin{cases} R & p = 0 \\ 0 & p \neq 0 \end{cases} \qquad (n \geq 1)$$

$$H_p(D^n, \partial D^n) = \begin{cases} R & p = n \\ 0 & p \neq n \end{cases} \qquad (n \geq 1)$$

$$H_p(\partial D^n) = \begin{cases} R & p = 0, n-1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \qquad (n \geq 2)$$

(但し, $H_p(\partial D^1) = \begin{cases} R \oplus R & p = 0 \\ 0 & p \neq 0 \end{cases}$)

である.

証明 n についての induction による.

まず. $H_p(S^0) = H_p(\partial D^1)$ から始める.

$S^0 = \partial D^1 = \{2点\} = \{1, -1\} = X_1 \cup X_2$; $X_1 = \{1\}$. $X_2 = \{-1\}$

pair (S^0, X^1) の exact sequence から

$$H_1(S^0, X_1) \xrightarrow{\partial} H_0(X_1) \longrightarrow H_0(S^0) \longrightarrow H_0(S^0, X_1) \xrightarrow{\partial} H_{-1}(X_1)$$

が exact となるが、公理(0)から

$$H_{-1}(X_1) \cong 0$$

また 切除定理 によって

$$H_p(S^0, X_1) \cong H_p(S^0 - X_1, -X_1 - X_1) \cong H_p(X_2)$$

であるから.

$$H_1(S^0, X_1) \cong H_1(X_2) \cong 0$$

$$H_0(S^0, X_1) \cong H_0(X_2) \cong R \quad (\text{canonical})$$

したがって,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H_0(X_1) & \longrightarrow & H_0(S^0) & \longrightarrow & H_0(X_2) & \longrightarrow & 0 \\ & & \wr\!\!\parallel & & & & \wr\!\!\parallel & & \\ & & R & & & & R & & \end{array}$$

という exact sequence が得られ. これより.

$$H_0(S^0) = R + R$$

がわかる。同様にして.

$$H_p(S^0) = \begin{cases} R+R & p=0 \\ 0 & p \neq 0 \end{cases}$$

次に $H_p(D^1, \partial D^1)$ を求めてみる.

$$\to H_p(\partial D^1) \longrightarrow H_p(D^1) \longrightarrow H_p(D^1, \partial D^1) \longrightarrow H_{p-1}(\partial D^1) \longrightarrow \cdots$$

より $p=1$ に対して

$$\begin{array}{ccccccccc} H_1(D^1) & \to & H_1(D^1, \partial D^1) & \to & H_0(\partial D^1) & \to & H_0(D^1) & \to & H_0(D^1, \partial D^1) \\ \wr\!\!\parallel & & & & \wr\!\!\parallel & & \wr\!\!\parallel & & \wr\!\!\parallel \\ 0 & & & & R+R & & R & & 0 \end{array}$$

であるから

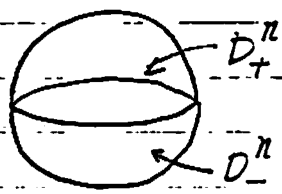
$$H_1(D^1, \partial D^1) = R$$

が示される。generatorの対応は次のようになっている(up to signでしか決まらない)

$$P_0 \xrightarrow{D^1} P_1 \qquad \partial[D^1] = [P_1] - [P_0] \ \left(\text{or } [P_0] - [P_1]\right)$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & H_1(D^1, \partial D^1) & \xrightarrow{\partial} & H_0(\partial D^1) & \longrightarrow & H_0(D^1) & \longrightarrow 0 \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\
& [D^1] & \longmapsto & [P_1] - [P_0] & \longmapsto & 0 &
\end{array}$$

同様にして S^n についても計算できる。



S^n

$$\begin{cases} S^n = D^n_+ \cup D^n_- \\ D^n_+ \cap D^n_- = S^{n-1} \end{cases}$$

pair (S^n, D^n_-) について

$$\begin{array}{c}
\longrightarrow H_p(D^n_-) \longrightarrow H_p(S^n) \longrightarrow H_p(S^n, D^n_-) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(D^n_-) \longrightarrow \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cong \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad H_p(D^n_+, \partial D^n_+)
\end{array}$$

であるから、D^n, $(D^n, \partial D^n)$ の情報から S^n がわかるのである。∎

補足　上の証明の最後のところで　$n \geq 2$ に対して

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(D_-^n) & \longrightarrow & H_n(S^n) & \longrightarrow & H_n(D_+^n, \partial D_+^n) & \longrightarrow & H_{n-1}(D_-^n) \\ \wr\wr & & & & & & \wr\wr \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}$$

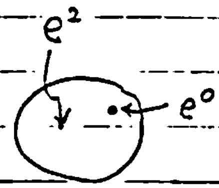
$$\therefore \quad H_n(S^n) \xrightarrow{\cong} H_n(D_+^n, \partial D_+^n) \cong R$$

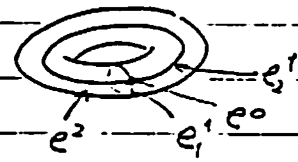
が示されるが，generator の対応のさせ方は sign の分だけ不定である。
（D_- でも同じことができるから）

2) CW複体のHomology

まず例を与える。

$$\begin{cases} S^2 = e^2 \cup e^0 \\ T^2 = e^2 \cup e_1^1 \cup e_2^1 \cup e^0 \end{cases}$$





これらの分割は(三角形分割とくらべて)はるかに経済的である。

<u>Def</u> $X = \bigcup_\alpha e_\alpha^{n_\alpha}$ が有限CW complex

$\Longleftrightarrow$ ・$\forall\alpha\ \exists\varphi_\alpha : D^{n_\alpha} \to e_\alpha^{n_\alpha}$ cont. onto, $\mathrm{int}\, D^{n_\alpha}$ への制限が homeo.

・$X^{(n)} \equiv \bigcup_{n_\alpha \leq n} e_\alpha$ とするとき次の frontier condition を満足する

$$\partial e_\alpha = \mathrm{closure}\, e_\alpha - e_\alpha \subseteq X^{(n_\alpha - 1)}$$

note: CWとは closure finite, week topology といううるさい条件をさすのだが、ここでは有限な分割に限っているので自動的に満たされている。

・ CW複体でのHomology群の計算

有限CW複体 $X = \bigcup_\alpha e_\alpha^{n_\alpha}$ について

$$\phi \equiv X^{(-1)} \subseteq X^{(0)} \subseteq \cdots \subseteq X^{(N)} \equiv X$$

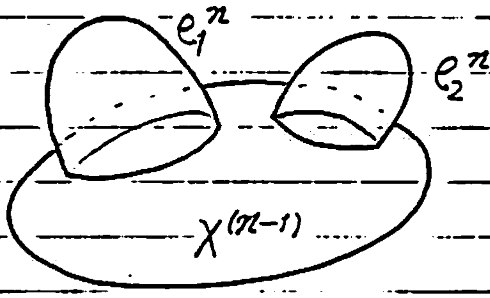
とし、$H_p(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ をもとめてみる。

定義より.

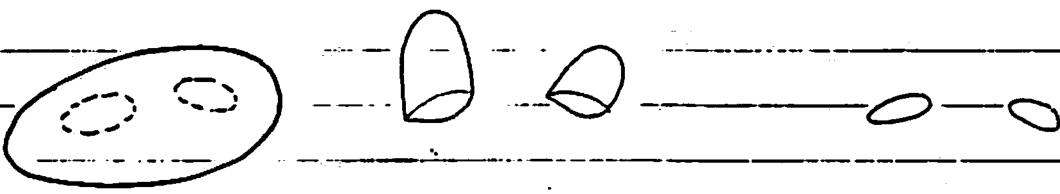
$$X^{(n)} = X^{(n-1)} \cup \left(\bigcup_{n_\alpha = n} e_\alpha^{\,n} \right)$$

であり. また $\partial e_\alpha^{\,n} \subseteq X^{(n-1)}$ を考慮すれば おおよそ次のようになっていることがわかる.

$X^{(n)} =$



切除定理で $\mathrm{int}\, X^{(n-1)}$ を落としてしまえば



$\mathrm{int}\, X^{(n-1)}$ $\qquad$ $X^{(n)} - \mathrm{int}\, X^{(n-1)}$ $\qquad$ $X^{(n-1)} - \mathrm{int}\, X^{(n-1)} = \partial X^{(n-1)}$

$$H_p(X^{(n)}, X^{(n-1)}) = H_p(X^{(n)} - \mathrm{int}\, X^{(n-1)}, X^{(n-1)} - \mathrm{int}\, X^{(n-1)})$$

$$= \bigoplus_{n_\alpha = n} H_p(D_\alpha^{\,n}, \partial D_\alpha^{\,n})$$

がわかる

$$C_n(X) \equiv H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$$

とおけば. pair exact sequence から.

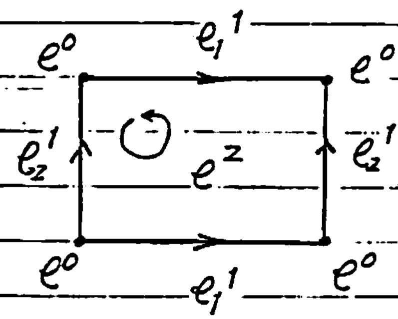
$$\begin{array}{ccccc}
\partial: & C_n(X) & \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad} & & C_{n-1}(X) \\
& \| & \circlearrowright & & \| \\
& H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) & \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X^{(n-1)}) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})
\end{array}$$

によって ∂ を定義すれば $\partial^2=0$ が確かめられて次のことが成立する.

Thm

$$H_n(X) = \frac{\ker\partial\,(C_n(X)\to C_{n-1}(X))}{\mathrm{im}\,\partial\,(C_{n+1}(X)\to C_n(X))}$$

例 $T^2 = e^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1 \cup e^2$



$$\begin{cases} C_2(T^2) = R[e^2] \cong R \\ C_1(T^2) = R[e_1^1] \oplus R[e_2^1] \cong R \oplus R \\ C_0(T^2) = R[e^0] \cong R \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial[e^2] = [e_1^1] + [e_2^1] - [e_1^1] - [e_2^1] = 0 \\ \partial[e_1^1] = \partial[e_2^1] = [e^0] - [e^0] = 0 \\ \partial[e^0] = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} H_2(T^2) = C_2(T^2) = R[e^2] \\ H_1(T^2) = C_1(T^2) = R[e_1^1] + R[e_2^1] \\ H_0(T^2) = C_0(T^2) = R[e^0] \end{cases}$$

例. 同様にして 種数 g の closed Riemann面について 次のことがわかる

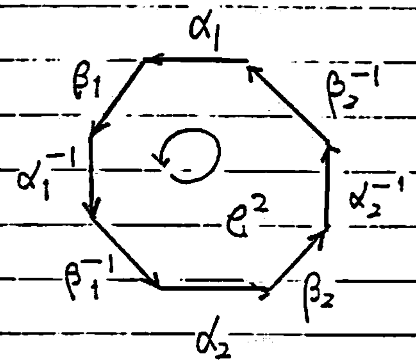
補足　$\partial : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ について $\partial^2=0$ の証明.

$$
\begin{tikzcd}
C_n(X) \arrow[rr, "\partial"] \arrow[d, equal] & & C_{n-1}(X) \arrow[rr, "\partial"] \arrow[d, equal] & & C_{n-2}(X) \arrow[d, equal] \\
H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \arrow[dr, "\partial"'] & & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) \arrow[dr, "\partial"'] & & H_{n-2}(X^{(n-2)}, X^{(n-3)}) \\
& H_{n-1}(X^{(n-1)}) \arrow[ur, "i_*"'] & & X_{n-2}(X^{(n-2)}) \arrow[ur, "i'_*"'] &
\end{tikzcd}
$$

この部分は丁度 pair $(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$ の exact sequence になっている.

$$\therefore \quad \partial \circ \partial = \partial \circ \underbrace{i_* \circ \partial}_{= 0} \circ\, i'_* = 0. \quad \blacksquare$$

$$R_g = e^0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{g} \alpha_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{g} \beta_i\right) \cup e^2$$



$$\begin{cases} H_2(R_g) = R[e^2] \\ H_1(R_g) = \sum_{i=1}^{g} (R[\alpha_i] \oplus R[\beta_i]) \\ H_0(R_g) = R[e^0] \end{cases}$$

例. 複素射影空間 CP^n $n \geq 1$

$CP^n \equiv \{ l : C^{n+1}$内の原点を通る complex line $\}$

$RP^n \equiv \{ l : R^{n+1}$内の原点を通る real line $\}$

直観的に見やすい RP^n からはじめる.

$[x^0, x^1, \cdots, x^n], [y^0, y^1, \cdots, y^n] \in R^{n+1}$ が同一の l 上にのっている

$\Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 \in R \ : \ y^i = \lambda x^i \quad (0 \leq i \leq n)$

$RP^n \supseteq e^n \equiv \{ (x^i) : x^n \neq 0 \} \cong \{ (x^0, \cdots, x^{n-1}, 1) \} \cong R^{n-1}$

$e^{n-1} \equiv \{ (x^i) ; x^n = 0, x^{n-1} \neq 0 \} \cong \{ (x^0, \cdots, x^{n-2}, 1, 0) \} \cong R^{n-2}$

$\cdots$

とすれば

$$RP^n = e^n \cup e^{n-1} \cup e^{n-2} \cup \cdots \cup e^0$$

となってこれで frontier condition をみたす. したがって

$$C(RP^n) = \begin{cases} R & p = 0, 1, \cdots, n \\ 0 & p = n+1 \end{cases}$$

となるが $\partial[e^n] \neq 0$ であるから homology 群々 多々 めんどうである。

CP^n では 同様にして

$$CP^n = e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \cdots \cup e^{2n}$$

$$C_p(CP^n) = \begin{cases} R & p = 2j \quad (j = 0, 1, \cdots, n) \\ 0 & その他 \end{cases}$$

であり、明らかに $\partial[e^n] = 0$ (次元が 1つおきなので ∂ の行き先が ない)。

$$\therefore \quad H_p(CP^n) = C_p(CP^n)$$

以上で Homology 群の話を ひとまず 終る。Cohomology については すでに少し注意したように functor としての性質を 少し修正 (射の向きを逆にする) だけでよい。すなわち

$$\begin{cases} (X.A) \text{ に対して } H^p(X.A) \\ f:(X.A) \Rightarrow (Y.B) \text{ に対して } f^*: H^p(Y.B) \to H^p(X.A) \end{cases}$$

という対応があって

0) $H^p(X.A) = \{0\} \qquad p < 0$

$$H^p(pt) = \begin{cases} R & p = 0 \\ 0 & p \neq 0 \end{cases}$$

1) <u>ホモトピー不変性</u>

$$f_0 \simeq f_1 : (X.A) \longrightarrow (Y.B)$$

$$\Longrightarrow f_0^* = f_1^* : H^p(Y.B) \to H^p(X.A)$$

2) 切除定理

$(X.A)$ ___ $\mathrm{int}A \supseteq \mathrm{closure}\,U$

$$\Rightarrow H^p(X-U, A-U) \xleftarrow[j^*]{\cong} H^p(X.A)$$

3) pairのexact sequence

① $\delta : H^p(A) \longrightarrow H^{p+1}(X.A)$ が定義されて

$$\xrightarrow{\delta} H^p(X.A) \xrightarrow{j^*} H^p(X) \xrightarrow{i^*} H^p(A) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}(X.A) \longrightarrow$$

がexact

② $f : (X,A) \longrightarrow (Y.B)$ に対して

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^p(Y.B) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "f^*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^p(Y) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "f^*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^p(B) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f^*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^{p+1}(Y.B) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & {} \\
{} \arrow[r, "\delta"'] & H^p(X.A) \arrow[r, "j^*"'] & H^p(X) \arrow[r, "i^*"'] & H^p(A) \arrow[r, "\delta"'] & H^{p+1}(X.A) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

が可換

が成立する。(cohomologyの公理).

さらにHomologyとの関係でいえば

$$\langle\ ,\ \rangle : H^p(X.A) \times H_p(X.A) \longrightarrow R$$
$$(\alpha\ ,\ x) \longmapsto \langle \alpha, x \rangle$$

が与えられて. これにより.

$$H^p(X.A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(H_p(X.A) ; R)$$

は同型になっている。

補足　de Rham cohomology でいえば

$$\omega \in H^p_{DR}(X.A)$$

とは　$\omega \in H^p_{DR}(X)$ であって、$\omega = 0$ (on A) なる Dirichlet boundary condition に従うものである。これに対する dual な cycle $C \in H_p(X.A)$ は A 上では boundary をもっていてもよい。(積分する相手が消えているから)。

note　「物理学者のため」のはずが　いきなり「公理論的 Homology 論」となって一同　とまどいのうちに1日目の講義は終ったのであった。
長谷部氏の日く「『ボーゲンできたら急斜面』という説がいわれているが、今日の話はあまりに急斜面すぎた」というのが全員の感想であったかと思う。事実インストラクターの土屋氏自身何度かころびながらそれでもコブをもはねとばす勢いで見る間に谷底へ消えていったのであった。

§2. 積の理論

pair $(X.A)$, $(Y.B)$ の直積を次で与える.

$$(X.A)\times(Y.B) \equiv (X\times Y,\ A\times Y \cup X\times B)$$

1) クロス積

$(X.A).(Y.B)$ が適当な条件(ふつうは OK なので以下これを仮定する)の下で以下の性質をもつ bilinear map.

$$\times:\ H_p(X.A)\times H_p(Y.B) \longrightarrow H_{p+q}((X.A)\times(Y.B))$$

が unique に存在する。これを クロス積という.

$u\in H_p(X.A)$, $v\in H_q(Y.B)$, $w\in H_r(Z.C)$ とする.

1) 結合律. $(x\times y)\times z = x\times(y\times z)$

2) 交換律 $y\times x = (-1)^{pq}\, x\times y$ (以下この意味で可換という)

3) 単位元の存在 $1\in H_0(pt)=R$

$$1\times u = u\times 1 = u$$

4) naturality. $\begin{cases} f: (X.A)\to(X'.A') \\ g: (Y.B)\to(Y'.B') \end{cases}$ に対して

$$(f\times g)_*(u\times v) = f_*(u)\times g_*(v)$$

5) boundary operator との関係

$u\in H_p(X.A)$. $y\in H_q(Y)$: $\partial(u\times v) = \partial(u)\times v$

$u\in H_p(X)$. $y\in H_q(Y.B)$: $\partial(u\times v) = (-1)^p u\times\partial(v)$

クロス積については次のことが成り立つ.

Thm (Kunneth の公式)

$$\sum_{p+q=n} H_p(X.A) \underset{R}{\otimes} H_q(Y,B) \xrightarrow[\cong]{\Sigma\times} H_n((X.A)\times(Y,B))$$

例　n次元トーラス $T^n = (T^1)^n$

$$H_p(T^1) = R \quad (p=0,1) \quad , \quad 0 \quad (その他)$$

であるから.

$$H_p(T^n) = \sum_{p_1+p_2+\cdots+p_n=p} H_{p_1}(T^1) \otimes H_{p_2}(T^1) \otimes \cdots \otimes H_{p_n}(T^1)$$

$$\therefore \quad \dim H_p(T^n) = \binom{n}{p}$$

同様にして

$$H_p(S^m \times S^n) = \begin{cases} R & p=0.\ m.\ n.\ m+n \\ 0 & その他 \end{cases}$$

$$H_p(S^n \times S^n) = \begin{cases} R & p=0,\ 2n \\ R\oplus R & p=n \\ 0 & その他 \end{cases}$$

Cohomology のクロス積 も同様に定義できて.

$$\times : H^p(X.A) \times H^q(Y,B) \longrightarrow H^{p+q}((X.A)\times(Y,B))$$

bilinear

1)〜5) まで (多少の修正を要す) が成り立つ.

Kunnethの公式

$$\sum_{p+q=n} H^p(X,A)\underset{R}{\otimes} H^q(Y,B) \xrightarrow[\cong]{\Sigma\times} H^n((X,A)\times(Y,B))$$

も同様に成立する。

2) cup積, Cohomology ring

pair (X,A) から $(X,A)\times(X,A)=(X\times X, A\times X\cup X\times A)$ への diagonal map Δ を

$$\begin{aligned}\Delta : (X,A) &\longrightarrow (X,A)\times(X,A)\\ x &\longmapsto (x,x)\end{aligned}$$

で定義する。

$$\begin{tikzcd} H^p(X,A)\times H^q(X,A) \arrow[r, "\times"] \arrow[dr, "\cup"'] & H^{p+q}((X\times A)\times(X\times A)) \arrow[d, "\Delta^*"] \\ & H^{p+q}(X,A) \end{tikzcd}$$

が可換なように cup積 $\cup$ を定義する すなわち

$$u\cup v = \Delta^*(u\times v)$$

これは H^*_{DR} での $\wedge$ 積 に相当しており 次の性質をもつ.

1) 結合律 $(u\cup v)\cup w = u\cup(v\cup w)$

2) 交換律 $u\cup v = (-1)^{pq}\, v\cup u$

3) 単位元 $1\in H^0(pt)$ の存在. $1\cup u = u\cup 1 = u$

4) naturality $f : (X, A) \to (Y, B)$

$$f^*(u \cup v) = f^*(u) \cup f^*(v)$$

5) boundary operator との関係 (省略).

Cohomology ring

$$\sum_p H^p(X) = H^*(X)$$

は $\underbrace{\text{commutative, associative ring}}_{\text{graded}}$ で f^* は ring homomorphism になる.

例

$$H^*(T^n) = \Lambda(u_1, u_2, \cdots, u_n) \quad \deg u_i = 1$$

$$H^*(CP^n) = R[u] / u^{n+1} \quad \deg u = 2$$

補足 Homology については Δ_* が逆向きになるので 積らしい 積 が定義できない.
Homology より Cohomology のが あつかい易いのは この ring としての構造による.

§3. Vector bundles の特性類

本題に入る前にいくつかの古典的結果を見ておく.

(1) Gauss-Bonnet

S: 2次元 oriented compact surface.

ω: curvature 2-form

$$\int_S \omega = \chi(S) = 2-2g$$

(2) Poincaré

S: 上と同じ

X: S上の vector field. 零点 $p_1, \cdots, p_n$ (有限個)

$$\sum_{i=1}^{n} \deg_{p_i}(X) = \chi(S)$$

ここで $\deg_p(X)$ は pの周りで unit circle S^1をとり, $\frac{(X^1, X^2)}{\|X\|} : S^1 \to S^1$ を考えたときの回転数のこと.

Vector bundleの特性類の理論には 3つの定義の仕方がある.

i) 曲率を使うもの (上記(1)の発展したもの)
　　Chern-Weil theory　(1930〜1940)

ii) Obstruction theory (上記(2)の発展したもの)　古典的には
　　[S] 第3節 (1940頃).　射影幾何学

iii) Universal example によるもの (Grassmann manifoldの Cohomologyを使う)
　　[S]. [MS]　(もっとも代数的)

ここでは iii) で扱う. 重要なことは これら i) ii) iii) の定義が 同等であることで、これは.

- 特性類の functorial な性質
- Vectorbundle の homotopy 不変性
- Grassmann mfd が vectorbundle の分類空間になっている

という事情から すべてが Grassmann mfd 上の計算に reduce されるからである。

1) Vector Bundle の定義 ホモトピー不変性

簡単のため 複素 vector bundle (以下 VB と略す) を考える。

Def $\xi = (E, \pi, X)$ n次元 VB over X とは

(i) $\pi : E \longrightarrow X$ onto continuous map.

(ii) $\forall x \in X$, $E_x = \pi^{-1}(x)$ (これを x 上の fiber という) は C 上 n次元 vector space. $E = \bigcup_{x \in X} E_x$.

(iii) local triviality.
$\forall x \in X$. $\exists U$: open n.b.d of x.

$$\begin{array}{ccc} \exists \varphi_U : \pi^{-1}(U) & \longrightarrow & U \times C^n \\ \pi \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \pi_1 \\ U & \xrightarrow[id]{} & U \end{array}$$

: homeomorphism で 各 fiber 上では C-linear isomorphism

例 M : mfd. に対して
$TM \otimes_R C$: tangent bundle は M 上の VB

Def local trivialization

$(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ が local trivialization とは

(i) $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ open covering of X.

(ii) $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^n$: homeo.

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & U_\alpha \times \mathbb{C}^n \arrow[d, "\pi_1"] \\
U_\alpha \arrow[r, "id"'] & U_\alpha
\end{tikzcd}$$

fiber上 $\mathbb{C}$-linear iso.

Def transition function

for $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^n \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^n$$

$$\begin{tikzcd}
(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^n \arrow[rr] & & (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^n \\
& \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[ul, "\varphi_\beta"] \arrow[ur, "\varphi_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

$x \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対して

$$g_{\alpha\beta}(x) \equiv \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\Big|_{x\times \mathbb{C}^n} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n : \text{linear iso.}$$

i.e $g_{\alpha\beta}(x) \in GL(n, \mathbb{C})$

この時定義により, cocycle condition

$$g_{\alpha\beta}\, g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma} \quad \text{on } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \phi$$

が成立する。

注 逆に各 open cover $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} = X$ の overlap $U_\alpha \cap U_\beta$ 上に $g_{\alpha\beta}(x) \in GL(n, \mathbb{C})$ が cocycle 条件に従うように与えられれば そのデータから VB が再現できる。

Def Bundle map

$\xi=(E_\xi, \pi_\xi, X)$, $\eta=(E_\eta, \pi_\eta, Y)$ ともに n次元 VBとする。

$$\begin{tikzcd} F: E_\xi \arrow[r] \arrow[d, "\pi_\xi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & E_\eta \arrow[d, "\pi_\eta"] \\ f: X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

: 各 fiber 上で linear iso

を bundle map という。

Def Bundleの同型

$$\begin{tikzcd} {}^\exists F: E_\xi \arrow[r] \arrow[d, "\pi_\xi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & E_\eta \arrow[d, "\pi_\eta"] \\ X \arrow[r, equal, "id"'] & X \end{tikzcd} \iff E_\xi \cong E_\eta$$

Def induced bundle

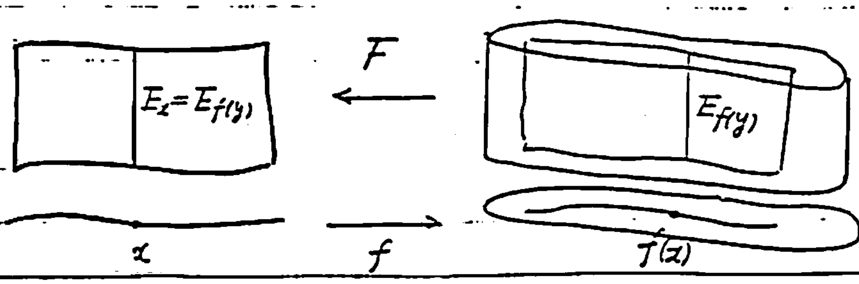
$f: X \to Y$ continuous.

$\eta=(E_\eta, \pi_\eta, Y)$ VB over Y

これにより X 上の induced bundle $\xi = F\eta = f^*\eta$

$\xi = (E_\xi = f^*E_\eta, \pi_\xi, X)$

を次のように定義する。



我々の基本問題は次のことである

X：位相空間

E_1, E_2 : VB over X

とするとき。$E_1 \cong E_2$ となるのはいつか？

あるいは。

$$Vec_n(X) \equiv \{ n\text{次元 VB over } X \} / \cong$$

の構造を調べよ。

このときまず次のことが示される。

Thm induced bundleの homotopy不変性. ([S] Chap 1)

X: paracompact 位相空間 (mfd なら O.K.)

$\eta = (E_\eta, \pi, Y)$. BV over Y

$f_0 \simeq f_1 : X \longrightarrow Y$: homotopic

$$\Longrightarrow f_0^* \eta \cong f_1^* \eta$$

この定理は VBの deformationに対する安定性を示すものといえる。これから。

Cor X : contractable

$\Rightarrow$ X上の VBは $E = X \times C^n$ と同型 (i.e. trivial)

が得られる。このことから。VBの複雑さを base mfdの Cohomologyで測る という idea が生まれる。そのための detector が 特性類 である。

特性類の定義 (再びfunctorialな考えで)

$n \geq 1$. $p \geq 1$ を固定する

C が n次元複素VBの Cohomology次元 p の($\mathbb{R}$-係数)特性類とは

$$\xi = (E, \pi, X) : n\text{次元BV} \longrightarrow C(\xi) \in H^p(X)$$

という対応で次の naturality が満たされていることとする.

naturality

$$\begin{tikzcd} E_\xi \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_\xi"] & E_\eta \arrow[d, "\pi_\eta"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

F : bundle map

$H^p(Y)$ の pull back

に対して

$$C(\xi) = f^* C(\eta) \quad (\text{i.e. } C(f^*\eta) = f^* C(\eta))$$

bundle の pull back

上の定義から: 次のことが示される

Thm C: 特性類 (of dim p)

E_1, E_2 : BV over X

$$E_1 \cong E_2 \Longrightarrow C(E_1) = C(E_2) \in H^p(X)$$

2) Grassmann多様体．分類空間

$m \geq 1$. $n \geq 1$. $N = m + n$ 固定.

Def $GM(m.N) = \{ V : m$次元 複素 linear subspace of $C^N \}$

を Grassmann manifold (GM) という.

例： $CP^n = GM(1. n+1)$

$GM(m.N)$は次のようにして複素多様体の構造が入る.

$V_0 \in GM$ に対して. C^{m+n}のbases $\{e_1, \cdots, e_{m+n}\}$を $V_0 = \langle\langle e_1, \cdots, e_n \rangle\rangle$ となるようにひとつ選んで fix する.

任意の $V \in GM$ に対して. そのbasesを1組選んで $\xi_1, \cdots, \xi_n$ とし. 上のbasesで展開して

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{N} \xi_{ij} e_j .$$

$$(\xi_1, \cdots, \xi_m) = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{1m} & \cdots & \xi_{mm} \\ \hline \xi_{1\,m+1} & \cdots & \xi_{m+1\,m} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{1N} & \cdots & \xi_{N1} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad}^{m} \\ \begin{bmatrix} \Delta(\xi) \\ \hline * \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}\, m \\ \}\, n \end{array}$$

とする. そこで GMにおける点 V_0 の nbh U_0 を次のように定義する.

$$GM \supseteq U_0 = \{ V = \langle\langle \xi_1, \cdots, \xi_m \rangle\rangle \mid \det \Delta(\xi) \neq 0 \}$$

これはもちろん e_iのとり方によらない. また. ξ_iを適当に選び直せば

$$U_0 = \{ V = \langle\langle \xi_1, \cdots, \xi_m \rangle\rangle \mid (\xi_1, \cdots, \xi_m) = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ \hline & * & \end{bmatrix} \} \cong C^{m \cdot n}$$

となるので 結局 $GM(m.N)$ は 複素 $m\cdot n = m(N-m)$ 次元 多様体になる。

ところで $GM(m.V)$ には canonical に vector bundle の 構造を のせることができる。すなわち、$GM(m.V)$ の 各点 V は それ自身 m 次元 vector space であったから、その V を この点の fiber と考えるのである。このような vector bundle を $E(m.N)$ と書く。

$$\begin{array}{ccc} E(m.N) & & E_V = V \\ \pi\downarrow & & \downarrow \\ GM(m.N) & \ni & V \end{array}$$

特に $CP^N = GM(1.N+1)$ では line bundle $E(1) \xrightarrow{\pi} CP^N$ が得られる。

Universality of Grassmann manifold

$\left|\begin{array}{l} M: \text{compact mfd. (or 有限 (CW) complex) fix.} \\ m \geq 1: \text{integer} \end{array}\right.$

Thm $\forall \xi = (F.\pi.M)$ m次元 V.B. $\exists N$: integer s.t.

i) $\exists f_\xi : M \longrightarrow GM(m.N)$: $f_\xi^* E(m.N) = \xi$

ii) このような f_ξ は up to homotopy で unique.

この定理により、M上の m次元BV が $M \longrightarrow GM(m.N)$ の homotopy class によって分類できることがわかる。すなわち、

$$\begin{array}{ccc} Vect_m(M) & \xleftarrow{\cong} & [M, GM(m.N)] \\ \Psi & & \Psi \\ \xi = f^* E(m.N) & \longleftarrow & f \end{array}$$

1 to 1. onto

補足　$[X.Y]$ は $f : X \to Y$ の homotopy class の全体を表わす。

$GM(m.N)$ は C^N の subspace であったが、自然に C^{N+1} の subspace とも見なせるので

$$\cdots \hookrightarrow GM(m.N) \underset{i}{\hookrightarrow} GM(m.N+1) \hookrightarrow \cdots$$

となっているが、bundle として見ても

$$\begin{tikzcd} E(m.N) \arrow[d] & E(m.N+1) \arrow[l, "i_*"'] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ GM(m.N) & GM(m.N+1) \arrow[l, "i"] \end{tikzcd}$$

となっている。$GM(m.N)$ の Cohomology を N について追いかけると次のことがわかる。

Prop　$i^* : H^p(GM(m.N+1)) \longrightarrow H^p(GM(m.N))$

は　$p < N$ では同型

そこで $N \to \infty$ の極限として

$$GM(m.\infty) = GM(m) = \lim_{N\to\infty} GM(m.N)$$

$$E(m.\infty) = E(m) = \lim_{N\to\infty} E(m.N)$$

$$H^*(GM(m))$$

を考えることが意味をもつ。

p 31 定理の証明（らしきもの）

$\xi = (E_\xi, \pi, M)$　m次元BV over M

問題はこれを $f^*E(m,N)$ で表わすような f をさがすことである。すなわち

$$\begin{array}{ccccc} F: & E_\xi & \longrightarrow & E(m,N) & \\ & \downarrow & & \downarrow & \text{なる } f \text{ をどうやってつくるか？} \\ f: & M & \longrightarrow & GM(m,N) & \end{array}$$

である。

X の有限 covering $\{U_\alpha\}$ で各 U_α が contractable. $E/_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times C^m$

なるものがとれる。そのうちの一つ U_α の上で考える。

$A_1^{(\alpha)}, \dots, A_m^{(\alpha)} \in \Gamma(E, M)$ を U_α 上の local section で

$\{A_1^{(\alpha)}(x), \dots, A_m^{(\alpha)}(x)\} = E_x$

なるものとしよう。（covering の総数を l；$\alpha = 1, \dots, l$；とする）

$$\begin{array}{ccccc} Q & \underset{\ker A}{\rightleftarrows} & M \times C^m & \longrightarrow & E \\ & & \Psi & & \Psi \\ & & \left[(x; C_1, \dots, C_m) \right. & \xrightarrow[A]{} & \left. \sum_{j=1}^{m} C_j A_j^{(\alpha)}(x) \right] \\ \downarrow & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi \\ M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M \end{array}$$

ここに $Q = \bigcup_{x \in M} Q_x$ で $Q_x = \ker A_j^{(\alpha)}(x)$　（$lm - m$ 次元 subspace of C^{lm}）

そこで　$P_x = Q_x^{\perp}$（C^{lm} での直交補空間），$P = \bigcup_{x \in M} P_x$ とおく。

$$
\begin{tikzcd}
M \times C^{ml} \supseteq P \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
M \arrow[r, equal] & M
\end{tikzcd}
$$

なる写像が得られる。P_xは$x \in M$でparametrizeされた$GM(m, ml)$の元であり

$x \longmapsto P_x$が求めるfに他ならない。(したがって$N = ml$とすればよい).

uniqueness の方は

$$f_0 \simeq f_1 : M \longrightarrow GM(m, N)$$

に対して.

$$
\begin{tikzcd}
F: E \times I \arrow[r] \arrow[d] & E(m, N) \arrow[d] \\
f: M \times I \arrow[r] & GM(m, N)
\end{tikzcd}
$$

$$\text{s.t.} \quad f\big|_{M \times 0} = f_0 , \quad f\big|_{M \times 1} = f_1$$

があるかどうかにかかっている。

このようなfの存在もさきほどの話をrelativeにやればできるはずらしい。∎

note　この定理から云えることは、Grassmann manifold $GM(m)$はその上にすべてのvector bundleを持っているということで、$GM(m)$はvector bundleの世界の帝王であるといってよい。実は後に見るように$GM(m)$は非常に美しい構造をそなえており、これまた土屋氏の言葉によれば貴公子的存在であり、極めて上品なのである。(我々は失礼ながらあの土屋氏から「上品」という言葉を聞くとは意外であったので一同一斉に顔を上げて土屋氏の方に視線を集めてしまったのであった。)

Cor $m \geq 1$, $p \geq 0$ integer.

c : m次元 vector bundle の (cohomology 次元 p の) 特性類

$$c \xleftrightarrow[1 対 1]{} c(E(m)) \in H^p(GM(m))$$

$\because$) $\forall \xi \in (E, \pi, M)$

$$c(\xi) = c(f_\xi^* E(m)) = f_\xi^* c(E(m)) = f_\xi^*(c)$$

かくして vector bundle の複雑さを base mfd の cohomology でとらえようとするとき、そのための detector はすべて $H^*(GM(m))$ でつくされることがわかった。そこで

基本問題 $H^*(GM(m))$ を計算せよ

が重要になる。答は次で与えられる。

Thm $H^*(GM(m)) = R[C_1, C_2, \cdots, C_m]$ $C_j \in H^{2j}(GM(m))$

この C_j (の一般の VB への pull back) が Chern class に他ならない。

$H^*(GM(m))$ の計算方法には だいたい次の2つの方法がある.

1) cell 分割 (Schubert cycle)

2) fiber bundle technique (spectral sequence)

次の節で この 2) の方法について $H^*(GH(m))$ を調べる.

DEPARTMENT OF PHYSICS
NAGOYA UNIVERSITY

4) Spectral sequence の使い方

Def (E, π, X, F) : fiber bundle とは

1) $\pi : E \longrightarrow X$: onto continuous homeo.

2) $\forall x \in X$, $\exists U$: x の n.b.h. st.

$$\begin{tikzcd} {}^{\exists}\varphi_U : \pi^{-1}(U) \arrow[r] \arrow[d] & U \times F \arrow[d] \\ U \arrow[r, equal] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & U \end{tikzcd} \quad : \text{homeo.}$$

Def G: top. group で F に effective に作用しているとする

$$G \times F \longrightarrow F$$

上記に 2) に加えて $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ の overlap で

$$\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \times F \longrightarrow U_\alpha \cap U_\beta \times F$$
$$(x, f) \longmapsto (x, g_{\alpha\beta}(x) f)$$

として $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$ が continuous

$$x \longmapsto g_{\alpha\beta}(x)$$

であれば 上記 fiber bundle は G を構造群としてもつという。

例 $\xi = (E, \pi, X)$ fiber bundle とする

$$\hat{E} = E \otimes_G C^n$$

は 構造群 $G = GL(n, C)$ の vector bundle になる。

fiber bundleについても induced bundle f^*E、及び その homotopy不変性

$$f_0 \simeq f_1 : Y \to X \implies f_0^*E \cong f_1^*E \text{ -(同型)}$$

が成り立つ.

Grassmann mfd の幾何学

$U(N)$: C^N にact する unitary group. $g \in U(N)$.

この $U(N)$ は C^N の subspace の集合である $GM(m.N)$ に transitive にact

$GM(m.N) \ni V_0 = \{\{e_1, \cdots e_m\}\}$ に対して、これを不変にする sub group を

$$H = \{g : gV_0 = V_0\} \subseteq G \qquad g = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \}m \\ \}n \end{array}$$

とするとき.

$$GM(m.N) \cong G/H = U(m+n)/U(m) \times U(n)$$

となっている.

$$\begin{array}{ccc} U(m) \longrightarrow & F_{n.m} \equiv \dfrac{U(m+n)}{U(n)} = \{\xi_1, \cdots \xi_m \in C^N : (\xi_i . \xi_j) = \delta_{ij}\} \\ & \big\downarrow & \\ & GM(m.N) \ni V = \{\{\xi_1, \cdots, \xi_m\}\} & \end{array}$$

は $G = U(m)$ の fiber bundle になっている.

先にあつかった vectorbundle $E(m.N)$ は $E(m.N) = F_{n.m} \otimes_{U(m)} C^m$

over $GM(m.N)$ なる associated bundle と見なせる.

Spectral sequence :

$(E.\pi.X.F)$: fiber bundle.

簡単のため $\pi_0(X)=\pi_1(X)=0$. $\pi_0(F)=0$ $(\Rightarrow \pi_0(E)=0)$ としておく.

bundle E は base X と fiber F の ひねった積のようなものだから ナイーブには

$$H^*(E) \doteqdot H^*(X)\otimes H^*(F)$$

である. この右辺を最初の近似として 逐次近似で 正確な $H^*(E)$ をもとめる technique が ここでのべる Spectral Sequence である.

Thm 上記の setting において 以下の性質をみたす spectral sequence

$$(E_r^{p.q}, d_r) \quad r=2.3.\cdots \qquad (p.q\in \mathbb{Z})$$

が存在する.

(1) $E_r^{p.q}$: vector space

$$d_r : E_r^{p.q} \longrightarrow E_r^{p+r.\,q-r+1}$$

$$d_r\circ d_r = 0$$

(2) $H^{p.q}(E_r^*, d_r) \cong E_{r+1}^{p.q}$

(3) $E_2^{p.q} = H^p(X)\otimes H^q(F)$

(4) $E_\infty^{p.q} = E_N^{p.q} \quad N>\max(p.q)+1$

$$H^n(E)=D^{0.n}\supseteq D^{1.n-1}\supseteq\cdots\supseteq D^{n.0}\supseteq D^{n+1.-1}=\{0\}$$

$$E_\infty^{p.q}\cong D^{p.q}/D^{p+1.q-1}$$

(5) 積の構造があって.

$$E_r^{p,q} \times E_r^{p',q'} \longrightarrow E_r^{p+p',q+q'}$$
$$(x, y) \longmapsto x\cdot y$$

i) $d_r(x\cdot y) = d_r x\cdot y + (-1)^{\deg x} x\cdot d_r y$, $\deg x = p+q$

ii) E_{r+1} の積は E_r から induce されたもの.

iii) $E_2^{p,q} = H^p(X)\otimes H^q(F)$

$$x = a\otimes b,\ y = c\otimes d \longrightarrow x\cdot y = (-1)^{\deg c \deg b}(ac\otimes bd)$$

iv) $D^{p,q} \times D^{p',q'} \subseteq D^{p+p',q+q'}$

$$\frac{D^{p,q}}{D^{p+1,q-1}} \times \frac{D^{p',q'}}{D^{p'+1,q'-1}} = \frac{D^{p+p',q+q'}}{D^{p+p'+1,q+q'-1}}$$

$E_\infty^{**} \cong GrH^*$ は積を保つ.

例. CP^n

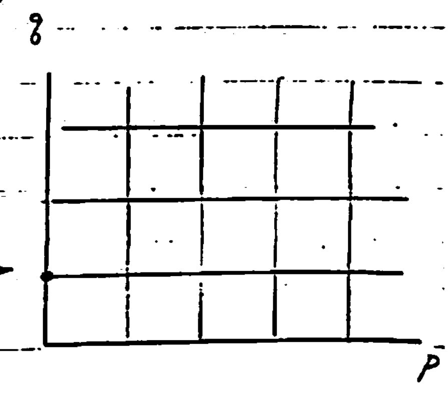
考える fiber bundle は $U(1) \longrightarrow S^{2n+1} = \{(z_j)\in C^{n+1};\ \sum_{j=0}^{n}|z_j|^2 = 1\}$

$$\downarrow$$

$$CP^n = \{[z_0 : z_1 : \cdots : z_n]\}$$

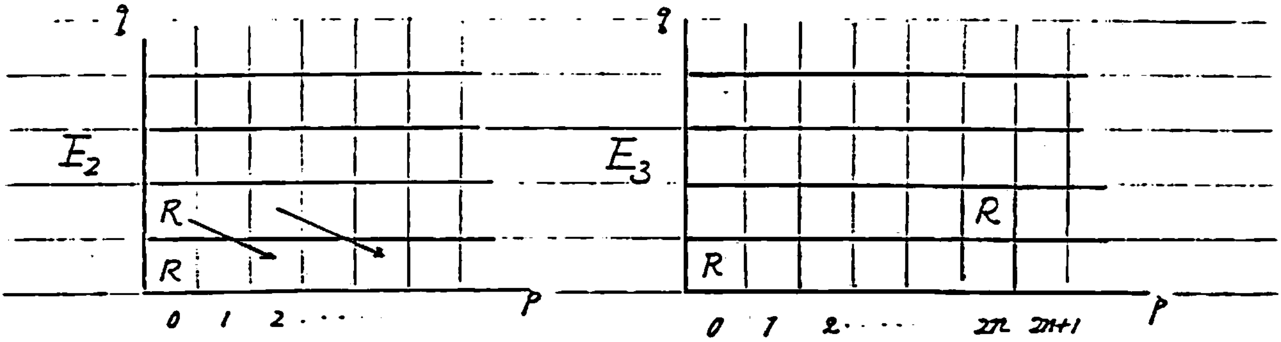
$$\left|\begin{array}{l} E_2^{p,q} = H^p(CP^n)\otimes H^q(S^1) \\ E_\infty^{*,*} = GrH^*(S^{2n+1}) \end{array}\right.$$

$H^1(S^1) \ni A$ $\quad 1\otimes A = A \in E_2^{0,1}$



$d_3 = d_4 = \cdots = 0$ である（下に2段以上落ちるから）

$$\therefore E_3 = E_\infty = H^*(S^{2n+1})$$



$$\begin{cases} d_2(A) = x \neq 0 \\ d_2(xA) = d_2(x)A + x d_2 A = x^2 \neq 0 \\ d_2(x^2A) = x^3 \neq 0 \\ \\ d_2(x^{n-1}A) = x^n \neq 0 \\ d_2(x^nA) = x^{n+1} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore H^*(CP^n) = R[x]/x^{n+1}=0 \qquad \deg x = 2.$$

さて、いよいよ基本定理に入ろう。

Thm $m \geq 1$.

$$H^*(GH(m)) = R[C_1, \cdots, C_m], \quad \deg C_j = 2j$$

以下 これを順に証明していく。

splitting principle

$$T^m \subset U(m) : \begin{pmatrix} * & & & 0 \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} U(m)/T^m & \longrightarrow & U(m+n)/T^m\times U(n) \\ & & \downarrow \\ & & GM(m.m+n) \end{array}$$

ここで $n\to\infty$ として.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} U(m)/T^m & \longrightarrow & BT^m = U(m+\infty)/T^m\times U(\infty) \\ & & \downarrow \\ & & BU(m) = U(m+\infty)/U(m)\times U(\infty) \end{array}}$$

を考える.

$$BT^m = \frac{U(m+\infty)}{T^m\times U(\infty)} = \frac{U(m+m\infty)}{\underbrace{T\times U(\infty)\times T\times U(\infty)\times\cdots\times T\times U(\infty)}_{m}}$$

$$\cong \underbrace{(BT^1)\times\cdots\cdots\times(BT^1)}_{m}$$

$$BT^1 \cong CP^\infty = \frac{S^{2n+1}}{U(1)} = \frac{U(n+1)}{U(n)\times U(1)}$$

Proposition 1

$$H^*(BT^m) = \underbrace{H^*(BT^1)\otimes\cdots\otimes H^*(BT^1)}_{m}$$

$$= R[x_1,\cdots.x_m] .\quad \deg x_j = 2j$$

Proposition 2

$$\pi : BT^m \longrightarrow BU(m)$$

$$\begin{array}{ccc} \pi^* : H^*(BU(m)) & \longrightarrow & H^*(BT^m) \\ \| & & \| \\ R[C_1,\cdots.C_m] & \longrightarrow & R[x_1,\cdots.x_m] \end{array}$$

$c_j \longmapsto j$-th 基本対称式 of $(x_1, \cdots, x_n)$

基本定理の証明

m についての induction.

$m=1$ のとき.

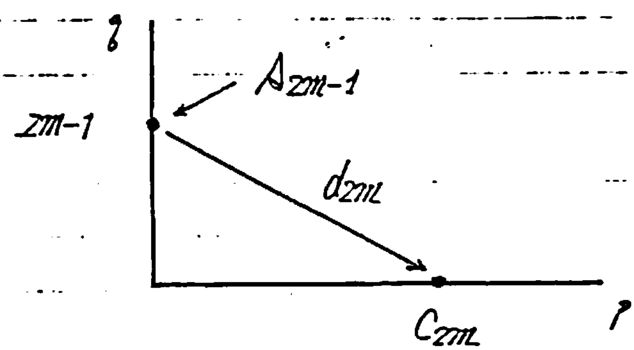
$$H^*(BU(1)) = H^*(CP^\infty) = R[x] \quad \text{で O.K.}$$

$m-1 \geq 1$ まで OK とする.

$$
\begin{array}{ccc}
S^{2m-1} = \dfrac{U(m)}{U(m-1)} & \longrightarrow & BU(m-1) = \dfrac{U(m-1+\infty)}{U(m-1)\times U(\infty)} \\
 & & \downarrow \\
 & & BU(m) = \dfrac{U(m+\infty)}{U(m)\times U(\infty)}
\end{array}
$$

に対して spectral sequence を用いると,

$$
\begin{cases}
E_2^{p,q} = H^*(BU(m)) \otimes H^*(S^{2m-1}) \\
E_\infty^{**} = H^*(BU(m-1)) = R[c_1, \cdots, c_{m-1}]
\end{cases}
$$



$$c_{2m} = d_{2m}(A_{2m-1}) \neq 0$$

となって よくわからないけど $H^*(BU(n)) = R[c_1, \cdots, c_n]$ がいえる ∎

splitting principle の効用

ξ, η を $m. n$ 次元 vector bundle over X とする.

$$\begin{cases} C(\xi) = 1 + C_1(\xi) + C_2(\xi) + \cdots + C_m(\xi) = \prod_{j=1}^{m}(1+x_j) \\ C(\eta) = 1 + C_1(\eta) + C_2(\eta) + \cdots + C_n(\eta) = \prod_{i=1}^{n}(1+y_i) \end{cases}$$

この時 次の公式が成立する.

$$\begin{cases} C(\xi \oplus \eta) = \prod_j (1+x_j) \prod_i (1+y_i) = C(\xi)C(\eta) \\ C(\xi \otimes \eta) = \prod_j \prod_i (1 + (x_i + y_j)) \\ C(\Lambda^p \xi) = \prod_{1 \le j_1 < \cdots < j_p \le m} (1 + (x_{i_1} + \cdots + x_{i_p})) \end{cases}$$

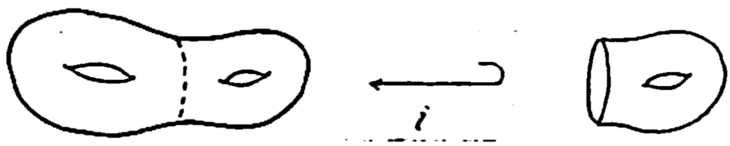
splitting principle のおかげで $m=n=1$ で示せば O.K. である.

追記. 最後の spectral sequence のあたりは 理解して書いておりませんので これを参考に各自勉強して下さい。

appendix.

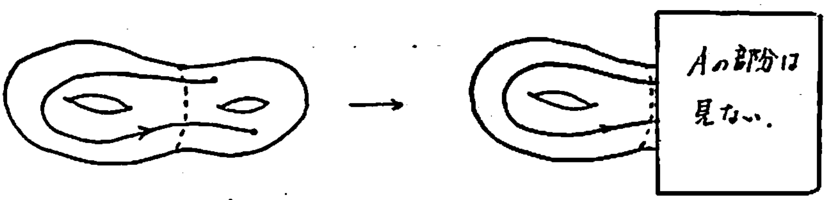
《 relative homology $H_*(X.A)$ の幾何学的直観 》

- pair $(X.A)$. : A は X の部分空間



X A

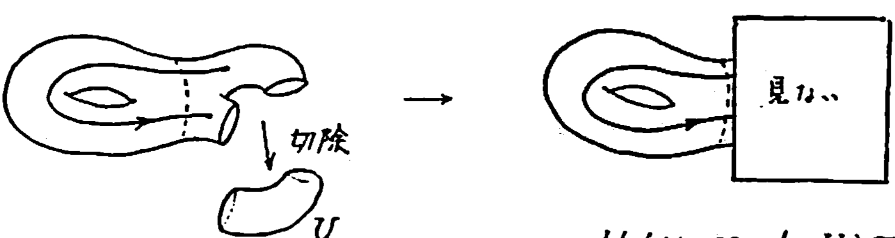
- $c \in H_p(X.A)$ とは X上のp-chainであって、boundary ∂c が A に含まれているもの。
すなわち、Aの部分を隠してしまえば boundary less であるもの（正確にはその同値類）。



$\partial c \subset A$ $\partial c = 0 \quad (\mathrm{mod}.\ A)$

- 切除定理

$H_p(X.A)$ は Aの部分は見ないで考えたときの homology であるから、Aの部分空間 U を、切除してしまっても その内容に変りはない。



$$H_p(X-U,\ A-U) \cong H_p(X.A)$$

これが切除定理の意味である。

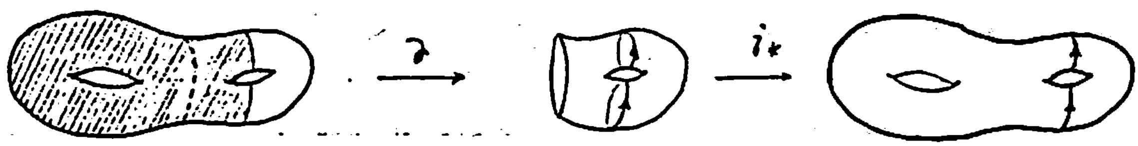
・ pair の exact sequence

$$\longrightarrow H_{p+1}(X.A) \xrightarrow{\partial} H_p(A) \xrightarrow{i_*} H_p(X) \xrightarrow{j_*} H_p(X.A) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(A) \longrightarrow$$

(i) (ii) (iii)

$p=1$ の場合に (i)〜(iii) を絵説する。

(i) $$H_2(X.A) \xrightarrow{\partial} H_1(A) \xrightarrow{i_*} H_1(X)$$



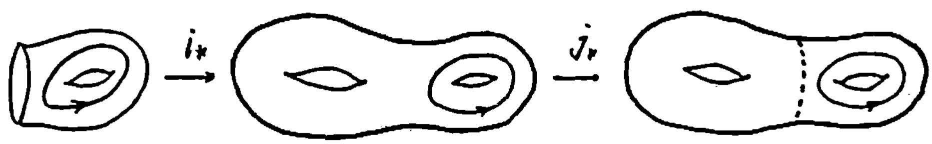
▨ 部分の2次元領域 D は $\partial D \subset A$ であるから $H_2(X.A)$ の元である

$C = \partial D \subset A$ は $H_1(A)$ の元になる.

C は $H_1(X)$ の元として見れば 0 である. (∵ D の boundary だから)

上の例から. $\mathrm{im}\,\partial \subseteq \ker i_*$ がわかる. 逆に $C \notin \ker i_*$ (次の例がこれにあたる) ならば それは $C \notin \mathrm{im}\,\partial$ であることもすぐにわかるであろう. ∴ $\underline{\mathrm{im}\,\partial = \ker i_*}$

(ii) $$H_1(A) \xrightarrow{i_*} H_1(X) \xrightarrow{j_*} H_1(X.A)$$



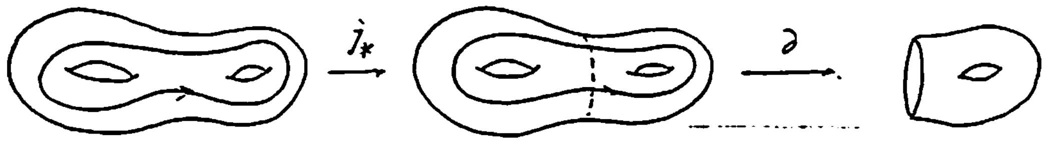
$C \in H_1(A)$ は $C \subset A$ で $\partial C = 0$

C は $H_1(X)$ の元 とも見ることができる

$C \subset A$ は (X,A) の見えない部分にいるから. $H_1(X.A)$ の元としては 0.

この場合も $\underline{\mathrm{im}\, i_* = \ker j_*}$ を納得できる.

(iii) $H_1(X) \xrightarrow{j_*} H_1(X.A) \xrightarrow{\partial} H_0(A)$



$C \in H_1(X)$ は boundary less ie $\partial C = 0$

$\partial C = 0 \subset A$ と見てもよいから $C \in H_1(X.A)$

$\partial C = 0$ だから $H_0(A)$ の元としても 0.

これについても容易に $\underline{im\, j_* = ker\, \partial}$ がわかる.

以上のことから. exact sequence の $im \subseteq ker$ の原因を次のように言うことができる.

(i) $\partial(\text{something}) \equiv 0$ とする homology の定義により　$i_* \cdot \partial = 0$

(ii) $j_* \cdot i_*$ は見えない部分へ map するので　$j_* \cdot i_* = 0$

(iii) $\partial \cdot i_*$ はもともと boundary less のものの boundary を与えるから　$\partial \circ i_* = 0$