大　域　解　析
シンポジウム報告
(積分幾何に関連する問題)

昭和56年度　科学研究費総合Ａ
(課題番号534002，代表 中井喜和)

1981年12月20―22日
於 山梨県河口湖

目　　次

積分幾何に関連する問題

数理　青本和彦

§1 1°. 今回、大域解析のテーマとして積分幾何を取り上げさせてもらったのは、その重要性を現時点で再認識しようとの意図があった。我国ではすでに20年以上前から、栗田稔氏がその事を強調されていたわけであるが[1]、ともすれば、積分幾何を微分幾何学の一部門と考えていたように私には思われる。しかし、今日、非線型方程式の厳密解の研究、場の量子論を通しての S-行列や Green 関数の構造、種々の図形の定量的研究、Lie 群の無限次元表現論、特殊関数などの研究には、積分の持つ幾何学的構造を明らかにする必要がある。何となれば、多くの場合積分の表示をもって関数が明らかにされていると思われるからである。もし、我々が、Newton-Leibniz の算法を

もって 数学と考えるならば 次のような方法或いは視点の可能性が考えられないだろうか？

微分系 (Differential Calculus) —— 微分幾何学

双対 ↓↑

Micro-local calculus —— Langrangean 幾何学

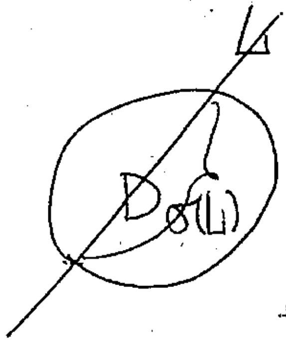
↓↑

積分系 (Integral Calculus) —— 積分幾何学

一方，物理量に 示強変数 (Intensive variables) と示量変数 (extensive variables) とがあるが，前者は主として微分方程式を満たすが，後者は積分方程式を満たす．しかも両者は互いに無関係ではなく，その関連は種々の興味ある研究対象となるはずのものである．これを混ぜた方程式 (Queer Differential Equations) も知られている．

さて　積分幾何の歴史を私なりにながめて，いささか我田引水だが，今日の積分幾何の関連する対象を見てみようと思う。

積分幾何の真のはじまりは，前世紀の M.W.Crofton ([2][3]) によると云ってよいであろう。ここではすでに"積分"が"確率平均"として把えられていた。今 Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ の中の直線 $L_{\alpha,p}$: $\cos\alpha\cdot x+\sin\alpha\cdot y=p$ の全体を $\mathcal{L}$ とするとき，$\mathcal{L}$ には合同変換群が推移的に働らき，その不変測度は $d\alpha\wedge dp$ で与えられる。$\mathbb{R}^2$ 内に凸領域 D をとり，D による L の切片を $\sigma(L)$ とおくとき，積分



$$I_n=\int_{\mathcal{L}}\sigma(L)^n\,d\alpha\wedge dp\qquad n=0,1,2,3,\cdots$$

を考える。同じく，2点 P, Q の距離 $r(P,Q)$ を用いて　積分

$$J_n=\int_{D\times D}r(P,Q)^n\,dPdQ$$

を考える. Crofton は [3] の中で, この
ふたつの積分の関連を示し, 合わせて, Dの
面積, 境界 ∂Dの長さ などとの関係を
明らかにしている. 図形の 長さ, 面積, 体積
などは何故 重要なのであろうか? この事に
対して, 今日, 数学者は 明らかな解答を持
っているだろうか? これに対する最初の
卓抜な疑問は ヒルベルトによって与えら
れた いわゆる“第III の問題”(1900年)で
ある[4]. これは, M. Dehn によって すぐに否定されたが, 体積や面積が 実質的には, 連続な
加法的汎関数として特質づけられる事を
見抜いているのである. この問題はW. Blaschke
によって引き継がれ, 3次元の Euclid 空間
の中では 上記 加法的汎関数は
実質, 体積, 面積, 平均曲率積分,
Euler 指数 に限る事が見出され [6],
ついに 1946年 H. Hadwiger によって, n次元
Euclid 空間内では, 体積, 表面積を含
む (n+1)個の基本量に限る事が証明

されている[7]．又，Euclid空間内に埋蔵された多様体に対して，上記加法的汎関数を考察すると，有名なH. Weylの管状領域での体積の公式（これをWeyl－不変量と呼ぼう）が出て来る[8]．これを複素多様体 ~~や~~ その部分多様体に適用すれば，Chern類を表わす不変微分型式の積分によって表示される事が知られている[9]．又ふたつの多様体間の写像に適用すれば，これは有理型写像の値分布の理論に応用されるし[10]，まつわり数などの位相的不変量の積分公式が得られる[11][9]．このような特性類を表わす不変微分型式の積分の構造の解析的な研究はまだよくわからない部分が多いと思われる．又一方で代数多様体或いは解析多様体上の有理微分型式の積分は多くの構造を持ち，面白い話題を提供して

くれる．代数曲線上での１重積分(Abel 積分)は Abel の加法定理を中心として，ヤコビ多様体の理論を生んだ．これを自然な意味で高次元化する事は興味ある事である．Abel の加法公式は上記の加法的汎関数の１例となっている事は明らかで，この加法性がヤコビ多様体の加法性に結びついている．筆者は高次元化のひとつの１例を[12]の中で示しておいた．しかし，しかるべきヤコビ多様体の構造については，まだ何もわかっていないと云った方がよいかも知れぬ．更に「高次元ヤコビは積分の構造を反映していなくてはならない」と云うのは筆者の信念である．最近の斉藤恭司氏による留数理論(1980)や，交点ホモロジー理論などを積分を通してながめるという野心的問題はいかがなものか？

2°. J. Radon は 1917年の論文において，2次元 Euclid 空間上の関数の平面波

分解の公式をはじめて打ち立てた[13]。
これは次の通り。$\mathbb{R}^2$上の compact support
の関数 $f(x,y)$ に対して，直線 L 上の
積分，

$$J(\alpha,p)=\int_{x\cos\alpha+y\sin\alpha=p} f(x,y)\frac{dx}{\sin\alpha}$$

$$=\int_{\mathbb{R}^2}\delta(x\cos\alpha+y\sin\alpha-p)f(x,y)\,dx\,dy$$

（δ：Dirac の delta 関数）に対して，その
逆転公式

$$-4\pi^2 f(x,y)=\int_0^{2\pi}d\alpha\ \mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dJ(\alpha,p)}{p-(x\cos\alpha+y\sin\alpha)}$$

が成り立つ。これは今日，一般に Radon 変換
と云っているものの原形である。これは線
型偏微分方程式の解の構造を知る上
には重要であるのみならず，基本解の構
成において基本的役割を果した[14]，
[15]。しかし，解析的煩雑さの
故に今日，満足すべき状況に達した
とは云えないであろう。2階双曲型偏微

分方程式の J. Hadamard の解法と共に[16], Radon 変換の有用性は積分幾何の顕著な応用例と云える。ちなみに、 Radon の公式から Crofton の公式

$$\pi \, Vol(D) = I_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \sigma(L)\, d\alpha\, dp$$

が導かれる。実際 $f = \chi_D$ を D の特性関数として、Radon の公式より

$$-4\pi^2 \chi_D(x,y) = \int_0^{2\pi} d\alpha \ \ v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dJ(\alpha,p)}{p-(\cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y)}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\alpha \left\{ \left[\frac{J(\alpha,p)}{p-(x\cos\alpha + y\sin\alpha)} \right]_{-\infty}^{\infty} + v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J(\alpha,p)\,dp}{[p-(x\cos\alpha + y\sin\alpha)]^2} \right.$$

$$= \int_0^{2\pi} d\alpha \left\{ v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J(\alpha,p)\,dp}{[p-(x\cos\alpha + y\sin\alpha)]^2} \right\};$$

$$\therefore \ -4\pi^2 \int \chi_D(x,y)\,dx\,dy = -4\pi^2 \, Vol(D) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} dx\,dy \left[\int_0^{2\pi} d\alpha \ \ v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J(\alpha,p)\,dp}{[p-(x\cos\alpha + y\sin\alpha)]^2} \right]$$

ところで

$$\mathrm{v.p.}\int \frac{dxdy}{[p-x\cos\alpha-y\sin\alpha]^2}=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathrm{v.p.}\int \frac{e^{-\varepsilon(x^2+y^2)}dxdy}{[p-x\cos\alpha-y\sin\alpha]^2}$$

$$=-2\pi \ ;$$

i.e.

$$-4\pi^2 \mathrm{Vol}(D)=-2\pi\int_0^{2\pi}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}J(\alpha,p)dp$$

$$2\pi\,\mathrm{Vol}(D)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}d\alpha\, dp\,\sigma(L)$$

これは $2/_1$ に他ならない.

Radonの公式を2次元非Euclid平面すなわち，2次元球面や2次元双曲面で考察する事が出来る. このとき，直線にあたるものとして，球面のときは Horocycle (ホロサイクル) が使われる. さらにこれを一般に均質空間に拡張し，対応するLie群の表現の既約分解や，調和解析のPoissonの積分公式への応用は周知の通りである [17] [18] [19].

近年 I.M. Gelfand, M.I. Graev 等は "均質性" を取り除いて，もっと一般

な Radon変換を模索しており，位相幾何や微分幾何との関連がより緊密になってゆくものと思われる[20]．これは大へん興味ある話題であるが，今のところ筆者には理解できない．Penrose幾何や非線型微分方程式の解法などに関連するのであろうか？

3°. 境界値問題，Riemann-Hilbert問題や逆散乱問題は，元来解析の問題であるが，Radon変換と同じように，"逆問題"として考えるときに積分幾何と関連している．すなわち，線型作用素とそのスペクトルとの関係においてである．

$$\text{線型作用素} \underset{\text{逆問題}}{\overset{\text{スペクトル分解}}{\rightleftarrows}} \text{スペクトル}$$

1階の差分系においてヤコビ行列と直交多項式，連分展開，又

Sturm-Liouville 作用素の　スペクトル分解
と Gelfand-Levitan-Marchenko 方程式
とは 上記の関係である. スペクトルは
何らかの図形を表わしており, 対応する
作用素はその上の積分を用いて表示
される. 同時可換な作用素のスペクトル
分解はむずかしいとされている.

同時可換な線型作用素

$\updownarrow$

スペクトル（多次元図形）

例えば <u>多次元直交多項式</u> の理論
は？　一般に 線型<u>微分</u>作用素 L
の逆 L^{-1} は 積分作用素（Fourier
積分作用素とよぶべきか）となるから,
その構造の研究は 積分幾何的
な問題とも考えられる. Green 関数
や Neumann 関数が 境界値問
題で考えられるが これらの núcleo関数
としての構造は <u>Hadamard 変分公式</u>
として知られる [22].

これを使ったいくつかの定理も知られている。水の表面の波動方程式などにHadamard変分が使われるが[22]、大域的な考察がさらに可能であろうか？又Riemann多様体の等スペクトル問題と関連したところに積分幾何の重要な問題がひそんでいる事はよく知られている[24]。

§4. 無限次元の汎関数解析はV. VolterraやR. Gateau, P. Levyなどによって始められたが、特にP. Levyは彼の教科書[22]の中で、無限次元幾何学は多くの研究対象を持つ事を強調している。無限次元球面の調和解析がすなわちBrown運動を記述する事はよく知られている。又無限次元超球内のDirichlet問題がBrown運動の言葉で記述されるという長谷川好平氏の面白い研究がある[25]。もっと異なる対象をとって幾何学をやれば統計力学

的な種々のモデルが出て来るはずで，差し当って均質空間の無限次元化（土屋昭博氏の言による）が興味深い*。この場合は次元↦∞にしたとき，そのやり方によって状況が全く異なって来るわけだから，有限次元の現象とは異質であるはずで，有限次元の漸近展開の方法でよいのかどうか？

Ising 模型，Bose Gas の模型，Random matrices などの模型は積分幾何としてはどう位置づけられるのであろうか？[26][27]．

統計力学や揺動散逸などの現象を数学の確固たる理論にするために積分幾何の果す役割は大きい。何故ならば"幾何学"こそは数学者の共有する論理を構築するための原動力なのだから！

* この報告集における江口氏の稿をも参照

§2 1°. n次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の中で凸領域 D を考える. 座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ に対して モーメント

$$F_D(\nu_1, \cdots, \nu_n) = \int_D x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n} \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

を考える. $F(\nu_1, \cdots, \nu_n)$ は D の 連続 関数であるが, 加法的 且つ 共変的 である. すなわち

i) $F_{D \cup D'} + F_{D \cap D'} = F_D + F_{D'}$ (cocycle condition)

特に $\dim D \cap D' < n$ のときは $F_{D \cap D'} = 0$

ii) 任意の合同変換群の元 g に対して $|\nu| = (\nu_1 + \cdots + \nu_n)$ 次多項式表現 $\rho_{|\nu|}$ に対して,

$$F_{gD} = F_D \circ \rho_{|\nu|}(g)$$

ところ , 逆に (i)(ii) をみたすものは, 上記モーメントに限る事が証明される. 実際,

④ (11)をみたす汎関数を Φ_D とすれば、Gを n次元の運動群、Kを n次元の回転群として、Φ_D は n次元相対群コホモロジー $H^n(G, K; \rho_{|\nu|})$ の元を定める。ところが Van Est の定理[27][28]によって、対応するLie環 $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ のコホモロジー

$$H^n(G, K; \rho_{|\nu|}) \cong H^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \rho_{|\nu|})$$

に等しい。すなわち coboundary を除いて Φ は F_D の形に書ける。ところが $\dim D \cap D' < n$ のとき $\Phi_{D \cap D'} = 0$ であるから、coboundary は 0 になってしまい、$\Phi_D = \mathrm{const.} F_D$ となる。

以上より加法的且つ共変なものはモーメントだけとなった。ところでモーメントは Dを決定する。すなわち $\forall \nu_1, \cdots, \nu_n$ に対して

$$F_D(\nu_1, \cdots, \nu_n) = F_{D'}(\nu_1, \cdots, \nu_n)$$

ならば $D = D'$.

では不変な量で Dを特質

づけるものは 適当なものはないか？ 候補として、 一般化された Crofton 積分

$$I(M)=\int_{D\times\cdots\times D}\prod_{1\leqq i<j\leqq s}\left(x^{(i)}-x^{(j)}\right)^{m_{ij}}dx^{(1)}\wedge\cdots\wedge dx^{(s)}$$

なるものを考える. これは $M=((m_{ij}))_{1\leqq i,j\leqq s}$（対称行列）を与えれば決まる. $s=2$ のときには Crofton が考察したものである. これは G に関して不変ではあるが、加法的ではない.

そこで

問題1. $I(M)$ を $F_D(\nu_1,\cdots,\nu_n)$ $\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n\geqq 0$ で表示する公式をつくれ. m_{ij} が偶数 $\geqq 0$ ならば、$I(M)$ は $F_D(\nu_1,\cdots,\nu_n)$ の多項式であるが、一般には有理的或いは代数的ですらない. 従って $I(M)$ の満たすべき微分方程式を求めるという事になる. これは超越関数の不変式論である.

<u>問題2.</u> $I(M)$ は D を特徴づけるか？

<u>問題3.</u> $I(M)$ は D について関数等式を持つか？ それは $I(M)$を特徴づけるか？ 組合わせ論において切開の代数(algebra of dissects)というものがある。これを連続化する事に関係しているように思われるが…… [30].

<u>問題4.</u> $I(M)$ について Weyl の管状領域の公式にあたるものは？

非加法的でない示量数（例えばエントロピーのような）を数学（幾何学）の構造に引き入れてゆく事は興味深い事と思われる。

文　献

[1] 栗田稔, 積分幾何学 (共立) 1956.

[2] L. A. Santaló, Integral geometry and geometric probability, Encyclopedia of Math. 1976.

[3] M. W. Crofton, "Probability" in Encyclopedia Britannica, 9th Ed. Vol.198 (1985), 768-788.

[4] 一松信, ヒルベルト 数学の問題 (共立) 1969.

[5] C-H. Sah, Hilbert's third problem, Pitman (1979).

[6] W. Blaschke, Vorlesungen über Integral-geometrie, Berlin 1955.

[7] H. Hadwiger, Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, Springer 1957.

[8] H. Weyl, On the volume of tubes, Amer. J. Math. Vol. 61 (1939) 461-472.

[9] Ph. A. Griffiths, Complex differential and integral geometry and curvature integrals····, Duke. Math. J. Vol. 45 (1978), 427-512.

[10] S. S. Chern, Complex manifolds without potential theory, van Nostrand 1968.

[11] W. F. Pohl, The self-linking number of a closed space curve, J. Math. Mech. 17 (1968), 975-986.

[12] K. Aomoto, A generalization of Poincaré normal functions on a polarized mfd, Proc. Japan Acad. Vol. 55 (1979), 353-358.

[13] J. Radon, Über die Bestimmung von Funktionen····, Ber Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. 69 (1917), 262-277.

[14] F. John, Plane waves and spherical means applied to partial differential equations, Intersci. Pub. 1955.

[15] J. Leray, Un prolongement de la transformation de Laplace qui····, (Problème de Cauchy IV), Bull. Soc. Math. France t90. 1962, 39-156.

[16] J. Hadamard, Le problème de Cauchy et les équations aux derivées partielle····, Pairs, 1932.

[17] V. G. Romanov, Integral geometry and inverse problems for hyperbolic equations, Springer Vol. 26 (1969).

[18] I. M. Gelfand, M. I. Graev and N. Vilenkin, Integral geometry and its relation to problems in the theory of group representations, Generalized functions, Vol. 5, Moscow 1962.

[19] S. Helgason, The radon transform, Prog, in Math. 5 (1980).

[20] M. Kashiwara, A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Oshima and M. Tanaka, Eigenfunctions of invariant differential····, Ann. of Math. 107 (1978), 1-39.

[21] I. M. Gelfand and M. I. Graev. Admissible n dimensional complex of curves in $\mathbb{R}^n$, Funct. Anal. and its Appli. Vol. 14 (1980), 36-44.

[22] P. Lévy, Problèmes concrets d'analyse fonctionelle.

[23] J. Hadamard, Oeuvres 2.

[24] 日仏セミナー報告(1981).

[25] K. Hasegawa, Lévy's functional analysis in terms of an infinite dimensional Brownian motion, I, II, Proc. Japan Acad. Vol. 56 (1980), 109-113.

[26] M. L. Mehta, Random matrices, Academic Press 1967.

[27] ——————, T. Miwa and M. Jimbo, Studies on holonomic quantum fields, I - , Proc. Japan Acad. Vol. 53 (1977), 6-10.

[28] Van Est, Group cohomology and Lie algebra cohomology in Lie groups, I, II, Inda. Math. 56 (1953).

[29] J. L. Dupont, Simplicial de Rham cohomology and characteristic classes of flat bundles, Topology 15 (1976), 233-245.

[30] M. Henle, Binomial enumeration on dissects, Transact. A. M. S. Vol. 202 (1975), 1-39.

[31] S. Takenaka, I. Kubo and H. Urakawa, Brownian motion parametrized with metric space of constant curvature, Nagoya Math. J. Vol. 82 (1981), 131-140.