2024年度　現代数学基礎BI　　講義ノート

担当：　柳田　伸太郎

ver. 2024.05.19

目次

0 はじめに

0.1 講義の概要

この講義の内容

この講義は二年生を対象として**線形代数**の基本的概念を扱います．具体的な項目は以下の通り．

- 線形空間
- 線形写像
- 商空間と準同型定理
- 双対空間

線形空間と線形写像は現代数学の殆ど全ての分野に現れる基本的な概念で，今後の数理学科の講義の随所で用いられることになります．また，これらの概念は一年生の線形代数で習った数ベクトルと行列の計算に潜んでいる性質を抽象化して得られる代数構造です．この「抽象化」や「代数構造」は現代数学の発展の礎になっていて，それを学ぶこともこの講義の目標です．

講義の形態・進め方

- 2 コマ続きの対面授業です．**1 コマ目は講義中心，2 コマ目は演習中心**で行います．
- **予め講義ノートを読み，演習問題も解いて**おいて下さい．
- 演習では，希望者に講義ノートの演習問題について解答を発表してもらいます．
- 対面講義の板書内容を書いたノートを毎回 TACT に置きますので，必要があればご覧ください．また毎回の講義日を締め切りとした小テストを TACT 上で行います．
- 4/16 の初回講義時に一通り講義・演習を行い，また課題についても説明します．

予定

- 講義日程と各講義の内容を以下のように予定しています．全部で講義 12 日 + 試験 2 日です．

日付	回数	内容	日付	回数	内容
04/16	第 01 回	線形空間と線形写像	04/23	第 02 回	基底と次元
05/07	第 03 回	線形写像の行列表示	05/14	第 04 回	直和と直積
05/21	第 05 回	核と像	05/28	第 06 回	商空間
06/04	第 07 回	準同型定理	06/11	第 08 回	復習
06/18	第 09 回	線形双対	06/25	第 10 回	双線形型式
07/02	第 11 回	テンソル積	07/09	第 12 回	対称双線形型式
07/23	第 13 回	外積	07/30		定期 (期末) 試験

教科書・参考書

- 教科書は

  (1) **佐武一郎「線型代数学(新装版)」裳華房 (2015)**.

  です. これでなくても線形代数の (しっかりした) 本であれば講義に対応できます. 例えば下記のようなものがあります.

  (2) 斎藤毅「線形代数の世界」大学数学の入門 7, 東京大学出版会 (2007).

  (3) 齋藤正彦「線型代数学」東京図書 (2014).

  (4) 足助太郎「線型代数学」 東京大学出版会 (2012).

- 講義ノートに演習問題を載せていますが, 量的には不足しています. 上記の教科書・参考書についている練習問題の他に, 例えば下記の演習書で練習を積んで下さい.
  - 齋藤正彦「線形代数演習」基礎数学 4, 東京大学出版会 (1985). [電子版有り]

小テスト

- 毎回の講義日に, TACT 上で小テストをします. 前回までに扱った範囲から出題します.
- 問題は TACT の「課題」に, 講義日の 0 時に掲載します. 締切は**講義日の 23 時**です. 提出は **TACT** でして下さい.
- 採点した答案は TACT で返却します. 小テストの点数は成績に反映されません.

単位・成績・不可と欠席の基準

- 定期 (期末) 試験を受験し, かつその点数が 60 点以上の方に単位を出す予定です. 定期試験は 110 点満点の予定です.

オフィスアワー・連絡先

対面講義の直後 (火曜日の 12:00 以降), 暫く講義室にいますので, その間に質問・相談をして下さい.

定例のオフィスアワーは設けませんが, 質問・相談は随時設けます. メール (yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp) で相談して下さい.

ウェブページ

この講義用のウェブページを以下のアドレスに作りました. 予定や講義ノートの最新版を載せます.

https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2024B1.html

0.2　受講に関するヒント・この講義ノートの読み方

講義を受ける上でのヒント・アドバイスを箇条書きします.

- この現代数学基礎 BI に限ったことではありませんが, 高校までの数学に比べて, 大学の数学は理解するのに非常に多くの時間がかかります. 講義を一回聞いてその内容を全て理解するのは殆ど不可能です. **教科書と講義ノートを十分に時間をかけて予習・復習して下さい**. 目安ですが, **一週間あたり三時間から四時間くらい**時間をかけましょう.
- 現代的な数学の本・論文は
  定義 1 $\to$ (例 $\to$) 定理 $\to$ 証明 $\to$ 定義 2 $\to \cdots$
  といった順で書かれていますが, 実際の数学研究はこの順番ではなくて, 例えば
  例 $\to$ 例の場合に成り立つ主張を考察する $\to$ 主張の拡張を予想する
  $\to$ 予想が成立するように例の性質を抽象化する $\to$ 定義 $\to$ 予想の証明 (定理にする)
  といった順で議論を進めます. これから推測される様に, **数学概念の定義には, 元になる典型的な例がある**ことが殆どです. そのことを常に念頭に置いて学習・研究を進めて下さい.
- 講義ノートは冗長に書いていますが, 講義は時間節約の為にコンパクトな説明で済ませます.

読み方に関する注意・アドバイスを箇条書きします.

- この講義ノートは高校数学と大学一年生の数学の知識を仮定して書かれています. 特に以下のものを前提知識としています.
  - 有理数, 実数と複素数に関する基本的な知識 (高校数学と一年生の微積分の講義内容で十分).
  - 行列とその演算に関する知識 (一年生の線形代数の講義内容で十分).
  - 微積分の知識 (一年生の微積分の講義内容で十分).

  上記の他に, 集合論に関する基本的な概念・記号を使うことになりまが, それらは現代数学基礎 AI の進度に合わせて説明します.
- この講義ノートの PDF ファイルはテキスト検索できます. 例えば講義ノートを読んでいて分からない用語が出てきたら, その単語をテキスト検索すると定義が見つかるかもしれません.
- 各節や副節の冒頭で教科書の該当部分を説明します. 例えば § 1 の冒頭では：今回の内容は教科書の [佐武 15, §1.1, §1.2] に該当します.
- **定義**, **定理**, **補題**等は副節ごとに通し番号を付けています. 例えば § 1.2 には定義 1.2.1 から定義 1.2.10 まであります.
- **発展**はその名の通り発展的内容を扱います. 初読の際は飛ばして下さい. 代数学や圏論など, 勉強が進んでいる人は読んでも大丈夫だと思います.
- 演習問題は各副節の最後にまとめてあります. 例えば § 1.2 の演習問題は 16 頁にあります. **講義ノートを読む際は演習問題を一通り解いて下さい**. 前副節の「講義の進め方」でも説明しましたが, 講義の二コマ目の演習時間で希望者に説明してもらいます.

0.3　全般的な記号

この講義ノートの全編で用いる記号を説明します．集合論の講義で解説されるものが主ですが，そうでないものも幾つかあるので注意して下さい．

(i) 記号 $:=$ で「左辺を右辺で定義する」ことを表します (例えば下記項目 (vi), (x), (vi)).

(ii) 記号 $:\Longleftrightarrow$ で「左側を右側で定義する」ことを表します．

(iii) 写像を定義・説明するときに $f\colon X \to Y$, $x \mapsto f(x)$ と書いてあったら，「f は集合 X を定義域とし集合 Y を値域とする写像であって，各元 $x \in X$ を $f(x) \in Y$ に写すもの」と読んで下さい．

(iv) 記号 $\emptyset$ は空集合を表します．

(v) 集合 T に対し $S \subset T$ または $S \subseteq T$ と書いたら，S は T の部分集合であることを意味します．特に $S = T$ ならば $S \subset T$ が成立します．$S \subset T$ かつ $S \neq T$ であることを $S \subsetneq T$ と書きます．

(vi) 集合 S と T に対し，以下で定まる S の部分集合 $S \setminus T$ を S と T の集合差と呼びます．

$$S \setminus T := \{s \in S \mid s \notin T\}$$

(vii) 写像の記号 $\to$ に関して，箆が曲がっている $\hookrightarrow$ は単射を，鏃が二つある $\twoheadrightarrow$ は全射を表します．

(viii) $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ は非負整数全体の集合[*1]を表します．

(ix) $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合[*2], $\mathbb{Q}$ は有理数全体の集合[*3], $\mathbb{R}$ は実数全体の集合[*4], $\mathbb{C}$ は複素数全体の集合[*5]を表します．従って，部分集合の記号項目 (v) を使うと，以下の包含関係が成立します．

$$\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}.$$

(x) $\mathbb{R}_{>0}$ は正の実数の集合を，$\mathbb{R}_{\geq 0}$ は非負実数の集合を表します．つまり，

$$\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, \quad \mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

同様に $\mathbb{R}_{<0}$, $\mathbb{Q}_{\leq 0}$, $\mathbb{Z}_{>0}$ 等の記号も用います．

(xi) 集合 S の濃度[*6]を $|S|$ 又は $\#S$ で表します．

(xii) 写像 $f\colon S \to U$ と部分集合 $T \subset S$ に対し，$f|_T : T \to U$ で定義域を T に制限した写像を表します．

(xiii) $\delta_{m,n}$ で Kronecker のデルタを表します．つまり

$$\delta_{m,n} := \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}.$$

(xiv) 文字 x と $m \in \mathbb{N}$ に対して，x の m 次多項式 $\binom{x}{m}$ を

$$\binom{x}{m} := \frac{1}{m!} x(x-1)\cdots(x-(m-1))$$

で定めます．特に $x = n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ なら $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ は二項係数です．

[*1] 「非負整数」の英語 non-negative integers の頭文字．本や論文によっては $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ と正整数 (日本の中学・高校数学の「自然数」) を意味することもあるので注意して下さい．

[*2] 「数」を意味するドイツ語 Zhalen の頭文字．

[*3] 「比」を意味するイタリア語 quoziente の頭文字．

[*4] 「実数」の英語 real numbers の頭文字．

[*5] 「複素数」の英語 complex numbers の頭文字．

[*6] 正確な定義は集合論の講義で扱われます．よく知らない人は，とりあえず「元の個数」だと思って下さい．

1 線形空間と線形写像 (04/16)

この節の内容は教科書の [佐武 15, I §1–§5, Ⅲ §6] に該当します．

この講義のテーマである**線形空間**と**線形写像**の概念を導入するのがこの節の目標です．線形空間は実数成分の n 列の列ベクトル v の集合 $\mathbb{R}^n$ を，線形写像は m 行 n 列の実行列 A を n 列の列ベクトル v に左から掛けることで定まる写像 $l_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $v \mapsto Av$ を雛型として，それぞれの持つ**線形性**を抽出して得られる概念です．そこで，この講義ノートはベクトルと行列の復習から始めることにします．

1.0 数ベクトル空間の復習

この副節では一年生の線形代数の内容のごく一部分を復習します．教科書 [佐武 15, I §1] が該当します．

$\mathbb{R}$ を実数の集合とします．n を正整数として，

$$\mathbb{R}^n := \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \,\middle|\, v_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, 2, \ldots, n) \right\}$$

で n 次元の実ベクトル全体がなすの集合を表します．以降は紙面の節約のため，転置の記号 ^{t} を用いて

$$v = {}^t(v_1\ \cdots\ v_n) \tag{1.0.1}$$

と書きます[*7]．

この集合 $\mathbb{R}^n$ には和とスカラー倍[*8] が次式で定まります．

$$v + w := {}^t(v_1 + w_1\ \cdots\ v_n + w_n), \quad c.v := {}^t(cv_1\ \cdots\ cv_n) \quad (v, w \in \mathbb{R}^n,\ c \in \mathbb{R}).$$

ここで $v_i + w_i$ は $\mathbb{R}$ の和で，cv_i は $\mathbb{R}$ の積です．和とスカラー倍は二項演算，つまり二つの変数から一つの値を定める演算で，写像として書き表すと，それぞれ

$$+\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (v, w) \longmapsto v + w, \quad .\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (c, v) \longmapsto c.v$$

と書けます．ここで $\times$ は集合の直積を表しています[*9]．

また $0 = {}^t(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ を零ベクトル[*10] と呼びました．そして各 $v = {}^t(v_1\ \cdots\ v_n) \in \mathbb{R}^n$ に対してマイナスのベクトル $-v = {}^t(-v_1\ \cdots\ -v_n)$ が定まります．

これらの二項演算と零ベクトル 0 及びマイナスのベクトルは次の主張を満たします．

命題 1.0.1. n 次元ベクトルの集合 $\mathbb{R}^n$ と零ベクトル 0 及び和 $+$ とスカラー倍 . は以下の性質を満たす．

- $(\mathbb{R}^n, +, 0)$ は以下の条件を満たす．

  (1) 任意の $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ に対して $u + (v + w) = (u + v) + w$.

[*7] 転置の記号は他にも色々あります．例えば大文字を使った ${}^T(v_1\ \cdots\ v_n)$ や，t の場所を変えた $(v_1\ \cdots\ v_n)^t$, $(v_1\ \cdots\ v_n)^T$ 等．

[*8] スカラー倍は $c.v$ の他に cv や $c \cdot v$ と書くこともあります．

[*9] 集合 X と Y に対して $X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$ です．つまり $X \times Y$ は X の元 x と Y の元 y の組 (x, y) 全体のなす集合のことです．

[*10] 実数 $0 \in \mathbb{R}$ とベクトル $0 \in \mathbb{R}^n$ を同じ記号で書きます．区別したい場合は，ベクトルの方を $\overrightarrow{0}$ と書いて下さい．

(2) 任意の $v \in \mathbb{R}^n$ に対して $v + 0 = 0 + v = v$.

(3) 任意の $v \in \mathbb{R}^n$ に対して $v + (-v) = (-v) + v = 0$.

(4) 任意の $v, w \in \mathbb{R}^n$ に対して $v + w = w + v$.

- 更に和とスカラー倍について以下が成立する.

(5) 任意の $v, w \in \mathbb{R}^n$ と $c \in \mathbb{R}$ に対して $c.(v + w) = c.v + c.w$.

(6) 任意の $v \in \mathbb{R}^n$ と $c, d \in \mathbb{R}$ に対して $(c + d).v = c.v + d.v$ かつ $(cd).v = c,(d.v)$.

(7) $1 \in \mathbb{R}$ と任意の $v \in \mathbb{R}^n$ に対して $1.v = v$.

これ以降, 次の四つ組を $\mathbb{R}$ **上の** n **次元数ベクトル空間**と呼ぶ:

$$(\mathbb{R}^n, +, 0, .).$$

証明. まず前半の四条件について. $i = 1, \ldots, n$ として,

(1) ベクトル $u+(v+w)$ の第 i 成分は $u_i+(v_i+w_i)$ で, ベクトル $(u+v)+w$ の第 i 成分は $(u_i+v_i)+w_i$. $\mathbb{R}$ の和 $+$ の結合律から $u_i + (v_i + w_i) = (u_i + v_i) + w_i$ なので, どの成分も等しい. つまりベクトルとして $u + (v + w) = (u + v) + w$.

(2) ベクトル $v+0, 0+v, v$ の第 i 成分はそれぞれ v_i+0 と $0+v_i$, v_i. $\mathbb{R}$ の和 $+$ について $v_i+0 = 0+v_i = v_i$ が成立するので $v + 0 = 0 + v = v$.

(3) ベクトル $v + (-v)$, $(-v) + v$, 0 の第 i 成分はそれぞれ $v_i + (-v_i)$, $(-v_i) + v_i$ 及び 0. $\mathbb{R}$ の和 $+$ について $v_i + (-v_i) = (-v_i) + v_i = 0$ が成立するので $v + (-v) = (-v) + v = 0$.

(4) $v + w$ と $w + v$ の第 i 成分はそれぞれ $v_i + w_i$ と $w_i + v_i$ で, $\mathbb{R}$ の和 $+$ は可換だから $v_i + w_i = w_i + v_i$. よって $v + w = w + v$.

後半の三条件も同様に,

(5) $c.(v + w)$ の第 i 成分は $c(v_i + w_i)$, $c.v + c.w$ の第 i 成分は $cv_i + cw_i$ で, $\mathbb{R}$ の分配律より $c(v_i + w_i) = cv_i + cw_i$. よって $c.(v + w) = c.v + c.w$.

(6) 前半について. $(c + d)v$ の第 i 成分は $(c + d)v_i$, $cv + dv$ の第 i 成分は $cv_i + dv_i$. $\mathbb{R}$ の分配律より $(c + d)v_i = cv_i + dv_i$. よって $(c + d)v = c.v + d.v$. 後半も同様で, $(cd).v$ の第 i 成分は $(cd)v_i$, $c.(d.v)$ の第 i 成分は $c(dv_i)$ で, $\mathbb{R}$ の積の結合律から $(cd)v_i = c(dv_i)$ なので $(cd).v = c.(d.v)$.

(7) $1.v$ の第 i 成分は $1 \cdot v_i$. 1 は $\mathbb{R}$ の積 $\cdot$ に関する単位元だから $1 \cdot v_i = v_i$ となって右辺の第 i 成分と等しい. よって $1.v = v$.

□

上の証明を見直すと,

- (1)–(3) では実数集合 $\mathbb{R}$ の和の結合律, 零元 (0 のこと) 及び逆元 (マイナス)
- (4) では $\mathbb{R}$ の和の可換性
- (5)–(7) では $\mathbb{R}$ の積の結合律と単位元 (1 のこと) 及び和と積の分配律

がそれぞれ使われています. 正確に言うと, **$\mathbb{R}$ が実数の集合であることは直接は使われていなくて, 和や積の性質だけが使われています.** そこで, $\mathbb{R}$ の代わりに, やはり和や積が定まっている有理数の集合 $\mathbb{Q}$ や複素数の集合 $\mathbb{C}$ を用いて, 「より一般的な数ベクトル空間」を考えることができそうです. この「より一般的な数ベクトル空間」が副節 §1.2 で説明する**線形空間**です[*11].

[*11] 漢字は「線形」と「線型」のどちらでも構いません. この講義ノートは, 板書時に画数を減らす為の二つの理由で「線形」の方を用います.

演習問題 (解答: 96 ページ)

本文とは直接関係ありませんが, 一年生の線形代数の内容から幾つか問題を出します.

問題 1.0.1 (Vandermonde の行列式). n を正整数とし, $x_1, \dots, x_n$ を (可換な) 文字とする. (i,j) 成分が x_i^{j-1} の n 次正方行列の行列式が

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_i & x_i^2 & \cdots & x_i^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

となることを示せ.

問題 1.0.2 (Schur 多項式). n を正整数, $x_1, \dots, x_n$ を (可換な) 文字, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ を非負整数の列とする. (i,j) 成分が $x_i^{\lambda_j + j - 1}$ の n 次正方行列と x_i^{j-1} の n 次正方行列を考え, それらの行列式の商を s_λ と書く. つまり

$$s_\lambda \coloneqq \frac{\det(x_i^{\lambda_j + j - 1})_{i,j=1}^n}{\det(x_i^{j-1})_{i,j=1}^n}.$$

例えば $n = 2$, $\lambda = (l, m)$, $l \le m$ なら

$$s_{(l,m)} \coloneqq \frac{\begin{vmatrix} x_1^l & x_1^{m+1} \\ x_2^l & x_2^{m+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}} = \frac{x_1^l x_2^{m+1} - x_1^{m+1} x_2^l}{x_2 - x_1} = x_1^l x_2^m + x_1^{l+1} x_2^{m-1} + \cdots + x_1^m x_2^l$$

となって, $m - l + 1$ 項からなる x_1, x_2 の多項式であることが分かる. 一般の n, λ に対して s_λ が x_i 達の多項式になることを示せ.

1.1 体

この副節は教科書 [佐武 15, I §5 (I)] 及び参考書 [斎藤 09, §1.1] に該当します．

線形空間の概念を説明するには，スカラー全体の集合を実数集合 $\mathbb{R}$ に限らず，より一般の**体**[*12]にするのが自然です．

定義 1.1.1. 集合 R とその上の二項演算 $+$ と $\cdot$ が以下の性質を満たすとき，組 $(R,+,\cdot)$ を**単位的結合環** (unital associative ring) 又は単に**環**[*13] (ring) と呼ぶ．演算 $+$ を和または加法，演算 $\cdot$ を積または乗法と呼ぶ．

- $(R,+)$ は**可換群** (commutative group) をなす．つまり
  (1) 和 $+$ は**結合律** (associativity) を満たす．つまり任意の $a,b,c \in R$ に対し $(a+b)+c = a+(b+c)$.
  (2) $0 \in R$ が存在して，任意の $a \in R$ に対し $a+0 = 0+a = a$. この 0 を R の**零元** (zero) と呼ぶ．
  (3) 任意の $a \in R$ に対して $-a \in R$ が存在して $a+(-a) = (-a)+a = 0$. この $-a$ を a の**和に関する逆元** (additive inverse) と呼ぶ[*14].
  (4) 和 $+$ は**可換** (commutative). つまり任意の $a,b \in R$ に対し $a+b = b+a$.
- $(R,\cdot)$ はモノイドをなす．つまり
  (5) 積 $\cdot$ は結合的 (associative). つまり任意の $a,b,c \in R$ に対し $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$.
  (6) $1 \in R\setminus\{0\}$ が存在して，任意の $a \in R$ に対して $a\cdot 1 = 1\cdot a = a$. この 1 を R の**単位元**と呼ぶ．
- 和と積は次の**分配律** (distribution law) を満たす．
  (7) 任意の $a,b,c \in R$ に対し $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ かつ $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$.

積の記号 $\cdot$ は省略して $ab := a\cdot b$ 等と書く．また零元と単位元を含めて組 $(R,+,0,\cdot,1)$ で環を表すこともある．更に，簡単のため組を略して $R = (R,+,0,\cdot,1)$ と書くこともある．

次の定義は直ぐには使いませんが，例 1.1.7 以降で度々用いられます．

定義 1.1.2. 単位的結合環 R の標数 $\mathrm{char}(R)$ とは，単位元 1 について $\overbrace{1+\cdots+1}^{n} = 0$ となるような正整数 n がある場合は，n のうち最小のものとして定め，ない場合は $\mathrm{char}(R) := 0$ で定める．

注意. 可換群を含む群の一般論は三年生春学期の代数学の講義で，環論は三年生秋学期の代数学の講義で扱われます．また群については参考書の [斎藤 09, §6.1] にも説明があります．

環の例を一つ挙げましょう:

例 1.1.3 (n **次行列環**, [佐武 15, 例 1.3.1])**.** 正整数 n に対し，実数成分の n 次正方行列全体のなす集合を $M(n;\mathbb{R})$ と書く[*15]:

$$M(n;\mathbb{R}) := \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \,\middle|\, a_{ij} \in \mathbb{K}\ (i,j = 1,2,\ldots,n) \right\}.$$

---

*12 「たい」と読みます．

*13 「かん」と読みます．

*14 英語の “additive inverse” は良く用いられる用語ですが，日本語の用語はあまり統一されていないと思います．他に「反数」や「加法逆元」という訳語もあるようです．

*15 行列の集合には色々な記号があって，他には例えば $M_n(\mathbb{R})$ も用いられます．詳細は補題 1.3.1 の脚注を参照.

以下 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 又は $A=(a_{ij})_{i,j}$ と略記する．行列の和と積

$$A+B \coloneqq \big(a_{ij}+b_{ij}\big)_{i,j}, \quad A\cdot B \coloneqq \big(\textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\big)_{i,j} \quad (A=(a_{ij})_{i,j}, B=(b_{ij})_{i,j}\in M(n;\mathbb{K}))$$

を考え，そして零行列 $O=(0)_{i,j}\in M(n;\mathbb{R})$ を零元，単位行列 $E_n=(\delta_{i,j})_{i,j}$[*16]を単位元とすることで，組

$$\big(M(n;\mathbb{R}),+,O,\cdot,E_n\big)$$

は環になる (証明は問題 1.1.1)．この環を $\mathbb{R}$ **上の** n **次全行列環**または単に n **次行列環**と呼ぶ．

線形空間のスカラーに使う環は，一般の環ではなく，更に幾つか条件を加えたものです．

定義 1.1.4. 次の条件を満たす環 $(R,+,\cdot)$ を**可換環** (commutative ring) と呼ぶ．

(8) 積 $\cdot$ は可換．つまり任意の $a,b\in R$ に対して $a\cdot b=b\cdot a$．

例 1.1.5. 整数の集合 $\mathbb{Z}$，有理数の集合 $\mathbb{Q}$，実数の集合 $\mathbb{R}$，複素数の集合 $\mathbb{C}$[*17]は通常の意味の和 $+$ と積 $\cdot$ に関して可換環である．一方で，行列環 $M(n;\mathbb{R})$ は $n>1$ なら可換ではない (問題 1.1.2)．

可換環の中でも更に「割り算ができるもの」を考えましょう．それが**体**です:

定義 1.1.6. 次の条件を満たす可換環 $(\mathbb{K},+,\cdot)$ を**体** (field) と呼ぶ[*18]．

(9) $(\mathbb{K}\setminus\{0\},\cdot)$ は可換群．つまり任意の $a\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$ に対して $a^{-1}\in\mathbb{K}$ が存在して $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$．この a^{-1} を a の**逆元** (inverse) と呼ぶ．

注意. 体の定義には定義 1.1.1, 1.1.4, 及び 1.1.6 の合わせて九つの条件が登場しましたが，同じものが参考書の [佐武 15, 定義 1.1.1] に載っています (番号は一部違います)．

例 1.1.7. 整数の集合 $\mathbb{Z}$，有理数の集合 $\mathbb{Q}$，実数の集合 $\mathbb{R}$，複素数の集合 $\mathbb{C}$ は (通常の和と積に関して) どれも標数 0 の可換環である．

- $\mathbb{Z}$ は体ではない．可換環 $\mathbb{Z}$ を**整数環**と呼ぶ．
- $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ は体．それぞれ**有理数体**，**実数体**，**複素数体**と呼ぶ．

また任意の素数 p に対して，

- $\mathbb{F}_p=\{0,1,2,\dots,p-1\}$[*19]に p を法とする剰余で和と積を定めたもの

は標数 p の体である．証明は問題 1.1.4．

とりあえず体については例 1.1.7 前半の $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ だけ分かっていれば十分です．余裕がある人は演習問題の後半 (問題 1.1.4 と 1.1.6) も理解すると良いです．

演習問題 (解答: 96 ページ)

問題 1.1.1. 正整数 n に対し，実数成分の n 次正方行列全体のなす集合を $M(n;\mathbb{R})$ と書く．正方行列の和 $+$ と積 $\cdot$ について，$(M(n;\mathbb{R}),+,\cdot)$ は環 (定義 1.1.1) をなすことを示せ．この環を $\mathbb{R}$ **上の** n **次全行列環**，または単に n 次**行列環**と呼ぶ．

---

*16 記号 $\delta_{i,j}$ は Kronecker デルタ (§ 0.3 (xiii))．

*17 § 0.3 に記号 $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ の由来が説明されています．

*18 記号 $\mathbb{K}$ は体のドイツ語 Kölper の頭文字に由来します．

*19 $\mathbb{F}$ は英語 field の頭文字に由来します．

問題 1.1.2. 全行列環 $M(n;\mathbb{R})$ は可換環 (定義 1.1.4) か否かを論じよ.

問題 1.1.3. $(R,+,0,\cdot,1)$ を環とする. R の元を成分とする n 次正方行列全体のなす集合 $M(n;R)$ に, 例 1.1.3 と同様の方法で行列の和 $+$ と積 $\cdot$ が定まって, $(M(n;R),+,\cdot)$ が環になることを示せ. この環を **R 上の n 次全行列環**と呼ぶ.

問題 1.1.4 ([佐武 15, 例 1.1.2])**.** p を素数として, 集合 $\mathbb{F}_p \coloneqq \{0,1,2,\dots,p-1\}$ を考える. $a,b\in\mathbb{F}_p$ に対して, 整数としての和 $a+b\in\mathbb{Z}$ を p で割った余りを (同じ記号だが) $a+b\in\mathbb{F}_p$ と書き, また整数としての積 $a\cdot b\in\mathbb{Z}$ を p で割った余りを (やはり同じ記号だが) $a\cdot b\in\mathbb{F}_p$ と書く. すると $(\mathbb{F}_p,+,\cdot)$ は標数 p の体であることを示せ.

この体 $\mathbb{F}_p$ のように, 有限集合の体 $\mathbb{F}$ を**有限体** (finite field) と呼ぶ. また有限体 $\mathbb{F}$ の元の個数 $|\mathbb{F}|$ を $\mathbb{F}$ の**位数** (order) と呼ぶ. この用語を用いると, $\mathbb{F}_p$ は位数 p の有限体である.

問題 1.1.5. $\mathbb{K}$ を体とする. 変数 x の $\mathbb{K}$ 係数多項式のなす集合 $\mathbb{K}[x]$ は, 多項式の和と積に関して可換環になることを示せ.

問題 1.1.6 ([佐武 15, 例 1.1.4])**.** $\mathbb{K}$ を体とする. 変数 x の $\mathbb{K}$ 係数有理式全体のなす集合

$$\mathbb{K}(x) \coloneqq \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \;\middle|\; f(x), g(x) \text{ は } x \text{ の } \mathbb{K} \text{ 係数多項式}, \ g(x)\neq 0 \right\}$$

は有理式の和と積とで体をなすことを示せ. 体 $\mathbb{K}(x)$ を $\mathbb{K}$ 上の**有理関数体** (rational function field) と呼ぶ.

問題 1.1.7 (**括弧の付け方の数え上げと Catalan 数**)**.** 集合 S 上の二項演算 $S\times S\to S$, $(a,b)\mapsto ab$ を三つ以上の元に繰り返し施す方法は, 括弧を付けて区別できる. 例えば二つの元 a,b については (ab) の一通りが, 三つの元 a,b,c に対しては $((ab)c)$ と $(a(bc))$ の二通りがある. $n=1,2,3,4$ として, $n+1$ 個の元に対して二項演算を施す場合の数 C_n を列挙すると次の表のようになる.

$n+1$	括弧の付け方	C_n
2	(ab)	1
3	$((ab)c), (a(bc))$	2
4	$(((ab)c)d), ((a(bc))d), ((ab)(cd)), (a((bc)d)), (a(b(cd)))$	5
5	$((((ab)c)d)e), (((a(bc))d)e), (((ab)(cd))e), ((a((bc)d))e), ((a(b(cd)))e),$ $(((ab)c)(de)), ((a(bc))(de)), ((ab)((cd)e)), ((ab)(c(de))),$ $(a(((bc)d)e)), (a((b(cd))e)), (a((bc)(de))), (a(b((cd)e))), (a(b(c(de))))$	14

C_n が **Catalan 数**と一致すること, つまり

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

であることを示せ. 但し $\binom{n}{m} \coloneqq \frac{n!}{m!(n-m)!}$ は二項係数 (§0.3, (xiv) 参照).

1.2　線形空間の定義

この副節は教科書 [佐武 15, Ⅲ §6] に該当します.

体の概念を使って線形空間が定義されます. 体の概念に慣れていない人はとりあえず $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ (それぞれ有理数体, 実数体, 複素数体) だと思って下さい.

定義 1.2.1 (**線形空間**). **体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間** (a linear space over $\mathbb{K}$) とは

- 集合 V
- **和** (sum) または**加法** (addition) と呼ばれる写像ないし演算 $+\colon V \times V \to V$, $(v, w) \mapsto v + w$
- **零元** (zero) または**零ベクトル** (zero vector) と呼ばれる元 $0_V \in V$
- **スカラー倍** (scalar multiplication) と呼ばれる写像 $.\colon \mathbb{K} \times V \to V$, $(c, v) \mapsto c.v$

からなる組

$$(V, +, 0_V, .)$$

であって以下の七条件を満たすもののことを言う.

- $(V, +, 0_V)$ は可換群, つまり以下の四条件を満たす.
  (1) **和 $+$ は結合的**. つまり任意の $u, v, w \in V$ に対して $u + (v + w) = (u + v) + w$ が成立する.
  (2) 任意の $v \in V$ に対して $v + 0_V = 0_V + v = v$ が成立する.
  (3) 任意の $v \in V$ に対して $-v \in V$ が存在して $v + (-v) = (-v) + v = 0_V$ が成立する. この $-v$ を v の**和に関する逆元** (additive inverse) 又は単に**逆元**と呼ぶ.
  (4) **和 $+$ は可換**. 任意の $v, w \in V$ に対して $v + w = w + v$ が成立する.
- 和とスカラー倍について以下の**分配律**が成立する.
  (5) 任意の $v, w \in V$ と $c \in \mathbb{K}$ に対して $c.(v + w) = c.v + c.w$ が成立する.
  (6) 任意の $v \in V$ と $c, d \in \mathbb{K}$ に対して $(c + d).v = c.v + d.v$ かつ $(c \cdot d).v = c.(d.v)$ が成立する.
- そして
  (7) $1 \in \mathbb{K}$ によるスカラー倍は恒等写像. つまり任意の $v \in V$ に対して $1.v = v$ が成立する.

$\mathbb{K}$ 上の線形空間を単に **$\mathbb{K}$ 線形空間** ($\mathbb{K}$-linear space) と呼ぶこともある. また **$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間** (vector space over $\mathbb{K}$) とも呼ぶ.

注意 1.2.2. 線形空間に関する記号・用語の補足です.

(1) 数ベクトル空間の場合と同様に, しばしばスカラー倍 $c.v$ を cv と略記します. また零元 $0_V \in V$ のことを単に 0 と書くこともあります[*20]. そして $\mathbb{K}$ 線形空間 $(V, +, 0_V, .)$ を単に V と略記します.
(2) V が $\mathbb{K}$ 上のものであることが明らかな場合は, V を単に**線形空間**または**ベクトル空間**と呼びます. 逆に強調したいときは $\mathbb{K}$ を線形空間 V **の係数体** (coefficient field of V) と呼びます.
(3) $\mathbb{K}$ の元 $c \in \mathbb{K}$ を**スカラー** (scalar) と呼びます. また, この講義では用いませんが, 線形空間の元 $v \in V$ を**ベクトル** (vector) と呼ぶことがあります.
(4) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合の $\mathbb{K}$ 線形空間 V を**実線形空間**と呼び, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合を**複素線形空間**と呼びます.

[*20] $\mathbb{K}$ の元 0 と区別したいときに 0_V と書きます. 零元の記号は色々あって, 本 [足助 12, 齋藤 66] だと o が使われています.

注意 1.2.3. 上の定義にあるように, 線形空間とは**集合 V だけでなく, 元 0_V と二種類の演算 $+$ 及び $.$ も合わせた組** $(V, +, 0_V, .)$ のことです. 与えられた集合 V に対して, $(V, +, 0_V, .)$ が線形空間になるような組 $(+, 0_V, .)$ を **V 上の線形空間の構造** (structure of a linear space over V) と呼びます. 一つの集合 V に対して異なる線形空間の構造 $(+, 0_V, .)$, $(+', 0'_V, .')$ が存在することもあります (具体例は問題 1.3.8).

発展 1.2.4. 上の定義をよく見ると, 体の定義の九条件のうち, 最後の定義 1.1.6 (9) の積に関する逆元 c^{-1} は使っていません. 実は任意の環 R に対して**左 R 加群** (left R-module) という概念が定義できて, R が体 $\mathbb{K}$ の場合, $\mathbb{K}$ 線形空間は左 $\mathbb{K}$ 加群と同じものです. 環上の加群は三年生秋学期の代数学の講義で扱われます.

線形空間の簡単な例を幾つか挙げます. まず命題 1.0.1 を言い換えると:

例 1.2.5 ($\mathbb{R}$ **上の数ベクトル空間**)**.** 任意の正整数 n に対し, 命題 1.0.1 の n 次元ベクトル空間 $(\mathbb{R}^n, +, 0, .)$ は実線形空間. これを**実数体 $\mathbb{R}$ 上の n 次元数ベクトル空間**と呼ぶ.

命題 1.0.1 の証明を見直すと, 実数体 $\mathbb{R}$ を任意の体 $\mathbb{K}$ に置き換えても議論が成立します. つまり:

例 1.2.6 (**体上の数ベクトル空間**)**.** 任意の体 $\mathbb{K}$ と正整数 n に対し, n 次元数ベクトルの集合

$$\mathbb{K}^n := \{v = {}^t(v_1\, v_2\, \cdots\, v_n)^{*21} \mid v_i \in \mathbb{K}\}$$

に和とスカラー倍を

$$v + w := {}^t(v_1 + w_1\, v_2 + w_2\, \cdots\, v_n + w_n), \quad cv = c.v := {}^t(cv_1\, cv_2\, \cdots\, cv_n) \quad (v, w \in \mathbb{K}^n,\ c \in \mathbb{K})$$

で定め, また零ベクトルを $0 := {}^t(0\, 0\, \cdots\, 0) \in \mathbb{K}^n$ で, 各 $v \in \mathbb{K}^n$ に対して $-v := {}^t(-v_1\, -v_2\, \cdots\, -v_n)$ と定める. すると, 組

$$(\mathbb{K}^n, +, 0, .)$$

は $\mathbb{K}$ 線形空間である (証明は問題 1.2.8). これを **$\mathbb{K}$ 上の n 次元数ベクトル空間**と呼ぶ. これ以降, 注意 1.2.2 (1) に従って, $\mathbb{K}$ 上の n 次元数ベクトル空間を演算や 0 を省略して $\mathbb{K}^n$ と書く.

特に $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合, $\mathbb{R}^n$ は例 1.2.5 に他ならない. また $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合, $\mathbb{C}^n$ は複素数成分の n 次元ベクトルがなす線形空間である.

この例 1.2.6 で特別な場合を考えましょう.

例 1.2.7 (**体はそれ自身の上の線形空間**)**.** 例 1.2.6 で $n = 1$ とすると, 集合として $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$ だから, 体 $\mathbb{K}$ がその和と積によって $\mathbb{K}$ 線形空間と見なせることが従う.

次に, 自明 (trivial) ですが大切な例を挙げます. この例には名前がついているので, 定義として紹介します.

定義 1.2.8 (**零空間**)**.** 一点集合 $\{0\}$ には $0 + 0 := 0$, 零元を 0 自身, $c.0 := 0$ $(c \in \mathbb{K})$ とすることで $\mathbb{K}$ 上の線形空間の構造が定まる (この意味は注意 1.2.3 を参照). 実際, 定義 1.2.1 のどの条件も $0 = 0$ なので成立する. この $\mathbb{K}$ 線形空間

$$(\{0\}, +, 0, .)$$

を**零空間** (zero space) と呼ぶ. しばしば, 零空間を 0 と書く (参考書 [佐武 15, p.7, 余談 7]). また零空間のことを**自明な線形空間**と呼ぶこともある.

---

*21 t は行列転置の記号 (1.0.1) でした.

正整数 n に対して体上の数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ を例 1.2.6 で定めましたが, $n = 0$ の場合も付け加えておくと色々と便利です:

定義 1.2.9. 体 $\mathbb{K}$ と非負整数 n に対し, $\mathbb{K}$ 線形空間 $\mathbb{K}^n$ を次のように定める.

$$\mathbb{K}^n := \begin{cases} \text{例 1.2.6 の } n \text{ 次元数ベクトル空間} & (n > 0) \\ \text{定義 1.2.8 の零空間 } \{0\} & (n = 0) \end{cases}.$$

線形空間の例は他にも色々ありますが, それらは次節で扱います.

最後に, 線形空間の元の表し方について一つ用語を導入します. V を $\mathbb{K}$ 線形空間として, 元 $v_1, v_2, v_3 \in V$ が与えられると, V の和 $+$ の結合律 (定義 1.2.1 (1)) から $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$ です. これを

$$v_1 + v_2 + v_3 := (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3) \in V \tag{1.2.1}$$

と書きます. 同様に有限個の元 $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ が与えられると, V の和の結合律から

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = v_1 + v_2 + \cdots + v_n \in V$$

が一意に定まります[*22]. このこととスカラー倍を組み合わせると, 有限個の元 $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ とスカラー $c_1, c_2. \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ から

$$\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n \in V \tag{1.2.2}$$

が一意に定まります. この (1.2.2) の形の元に名前を付けておきます.

定義 1.2.10. $\mathbb{K}$ 線形空間 V の有限個の元 $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ に対し,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i v_i \quad (c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{K})$$

と書ける V の元を $v_1, v_2, \ldots, v_n$ の**線形結合**または**一次結合** (linear combination) と呼ぶ.

演習問題 (解答: 99 ページ)

これ以降, 単に線形空間と言ったら体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間のことを意味します.

以下の問題 1.2.1–1.2.7 は線形空間の定義を使うだけで導出できる主張です. それらを証明して下さい.

問題 1.2.1. 任意の線形空間 V は空集合ではない.

問題 1.2.2. 線形空間 V の零元は一意. つまり, $0' \in V$ が任意の $v \in V$ に対して $v + 0' = 0' + v = v$ を満たすなら $0' = 0$.

問題 1.2.3. 線形空間 V の各元 $v \in V$ に対して, その逆元 $-v$ は一意. つまり $v' \in V$ が $v + v' = v' + v = 0$ を満たすなら $v' = -v$.

[*22] (1.2.1) で二通りの括弧の付け方 (和を取る順序) があるけれど, 総和は括弧の付け方によらずに唯一つに定まる, ということです. これに関しては発展的な問題 1.1.7 があります.

注意. 上の問題 1.2.2 と問題 1.2.3 から分かるように, 線形空間の零元と逆元は一意に定まります.

問題 1.2.4. 線形空間 V の元 v が $v+v=v$ を満たすなら, v は V の零元 0_V と等しい.

問題 1.2.5. 線形空間 V の任意の元 v について, $0 \in \mathbb{K}$ によるスカラー倍 $0.v$ は V の零元 0_V と等しい.

問題 1.2.6. 線形空間 V の任意の元 v について, $-1 \in \mathbb{K}$ によるスカラー倍 $(-1).v$ は和に関する逆元 $-v$ と等しい.

問題 1.2.7 ([足助 12, 問 3.12.2])**.** V を線形空間とし, その零元を 0_V と書く. 元 $v \in V$ とスカラー $c \in \mathbb{K}$ が $cv = 0_V$ を満たせば, $v = 0_V$ 又は $c = 0$ であることを示せ.

問題 1.2.8. 例 1.2.6 の主張を証明せよ.

次は数学の言葉遣いに慣れる為の問題です.

問題 1.2.9. 線形空間 V の元 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ について, 各 v_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ が $v_1, v_2, \ldots, v_n$ の線形結合であることを示せ.

線形結合に関する問題を二つ挙げます. 但し問題 1.2.11 は本質的には置換群の構造に関する問題です.

問題 1.2.10. 線形空間 V の元 w が $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ の線形結合であり, また各 v_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ が $u_1, u_2, \ldots, u_m \in V$ の線形結合であれば, w も $u_1, u_2, \ldots, u_m$ の線形結合であることを示せ.

問題 1.2.11. n を正整数とする. 番号 $1, 2, \ldots, n$ を任意の順番で並べたもの $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ を n 文字の**置換** (permutation) と呼ぶ. 例えば $(2, 1, 3, \ldots, n)$ や $(n, n-1, \ldots, 1)$, また元の順番の $(1, 2, \ldots, n)$ は置換である.

(1) n 文字の置換は全部で $n!$ 個あることを示せ.

(2) V を線形空間とし, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ とする. 任意の n 文字の置換 $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ について, 次の等式が成立することを示せ.
$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_{i_1} + v_{i_2} + \cdots + v_{i_n}.$$

今までは係数体 $\mathbb{K}$ を一つ取って固定して話を進めてきましたが, 係数体を取り換える議論をします. まずは具体的な状況で考えてみます.

問題 1.2.12. n を正整数とする. $\mathbb{C}$ 上の数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n = \{z = {}^t(z_1 \ \cdots \ z_n) \mid z_i \in \mathbb{C}\}$ はベクトルの和 $+$ と零ベクトル 0 及び複素数によるスカラー倍 . とで $\mathbb{C}$ 上の線形空間になる (例 1.2.6). ここでスカラー倍を実数によるものだけに限定することで, $\mathbb{C}^n$ が $\mathbb{R}$ 上の線形空間にもなることを示せ.

問題 1.2.12 を解くと分かるのですが, $\mathbb{C}$ 上の線形空間 $\mathbb{C}^n$ でなくても同様の主張が成立します.

問題 1.2.13. 任意の $\mathbb{C}$ 線形空間 V は同じ加法と零元, 及びスカラー倍を $\mathbb{R}$ に制限することで $\mathbb{R}$ 線形空間になることを示せ.

問題 1.2.13 では係数体を複素数 $\mathbb{C}$ から実数 $\mathbb{R}$ に「制限」しましたが, その類似は他にも色々あります:

問題 1.2.14. 任意の $\mathbb{C}$ 線形空間 V は, 同じ加法と零元, 及びスカラー倍を有理数 $\mathbb{Q}$ に制限すると, $\mathbb{Q}$ 線形空間になることを示せ. また任意の $\mathbb{R}$ 線形空間 W は, 同じ加法と零元, 及びスカラー倍を有理数 $\mathbb{Q}$ に制限すると, $\mathbb{Q}$ 線形空間になることを示せ.

問題 1.2.14 は更に**体の拡大**の概念を使うと一般化できます:

問題 1.2.15 (**体の拡大と線形空間** [斎藤 09, 例 1.3.6])**.** 二つの体 $\mathbb{K}$ と $\mathbb{K}'$ に包含関係 $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$ があり, $\mathbb{K}'$ の和と積を $\mathbb{K}$ に制限したものが $\mathbb{K}$ の和と積に一致するとき, $\mathbb{K}'$ を $\mathbb{K}$ の**拡大体** (extension field) と呼び, 逆に $\mathbb{K}$ を $\mathbb{K}'$ の**部分体** (subfield) と呼ぶ. このとき, 任意の $\mathbb{K}'$ 線形空間は, スカラー倍を $\mathbb{K}$ の元によるものだけに制限すると, $\mathbb{K}$ 線形空間にもなることを示せ.

1.3　線形空間の例

今までに皆さんが学んできた数学を使って, 線形空間の例を色々作ることができます. その紹介がこの副節の目的です. 以下では一般の体 $\mathbb{K}$ に関して説明しますが, **体の概念に慣れていない人は** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ **または** $\mathbb{C}$ **の場合**だけ理解するようにして下さい.

まずは例 1.2.6 の拡張を紹介します. そこでは数ベクトルの集合を考えましたが, その拡張として, 行列の集合にも線形空間の構造があります.

補題 1.3.1 (**行列空間**)**.** 体 $\mathbb{K}$ と正整数 m, n に対し, サイズ $m \times n$ で $\mathbb{K}$ の元を成分とする行列の集合を $M(m, n; \mathbb{K})$, $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ または $M_{mn}(\mathbb{K})$ と書く[*23]:

$$M(m, n; \mathbb{K}) := \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{K}\ (i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n) \right\}$$

以下 $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} = (a_{ij})_{i,j}$ と略記する. 行列の和とスカラー倍

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}, \quad c.A := (ca_{ij})_{i,j} \quad (A = (a_{ij})_{i,j}, B = (b_{ij})_{i,j} \in M(m, n; \mathbb{K}),\ c \in \mathbb{K})$$

を考え, そして零行列 $O = (0)_{i,j} \in M(m, n; \mathbb{K})$ を零元とすることで, 組

$$\big(M(m, n; \mathbb{K}), +, O, .\big)$$

は $\mathbb{K}$ 線形空間になる (証明は問題 1.3.1). この線形空間を $\mathbb{K}$ **上のサイズ** $m \times n$ **の行列空間** (the linear space of matrices) と呼ぶ. 以降, 注意 1.2.2 (1) に従って, 行列空間を $M(m, n; \mathbb{K})$ と略記する.

特に $m = n$ の場合, つまり正方行列全体の集合を $M(n; \mathbb{K}) := M(n, n; \mathbb{K})$ と書くと, 組

$$\big(M(n; \mathbb{K}), +, O, .\big)$$

は $\mathbb{K}$ 線形空間である. 上と同様に, この線形空間を $M(n; \mathbb{K})$ と略記する. また, 元 $A \in M(n; \mathbb{K})$ を成分表示したいときは $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} = (a_{ij})_{i,j}$ 等と略記する.

次の例は数ベクトル空間とは全く無関係のように見えるものですが, 後で**線形空間の同型**の概念を導入するときに, 実は関係があることを説明します (補題 1.4.9).

[*23] 行列空間の記号はこの他にも $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ や $\mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ 等, 様々なものがあります. 他の本や論文を読むときは柔軟に対処して下さい.

命題 1.3.2 (函数空間). 集合 S から体 $\mathbb{K}$ への写像の集合を $\mathbb{K}^S$ 又は $\mathrm{Map}(S,\mathbb{K})$ で表す．つまり

$$\mathbb{K}^S = \mathrm{Map}(S,\mathbb{K}) \coloneqq \{\text{ 任意の写像 } f\colon S \to \mathbb{K}\}.$$

写像 $f, g \in \mathbb{K}^S$ に対し, $\mathbb{K}$ の和を用いて

$$(f+g)(s) \coloneqq f(s) + g(s) \quad (s \in S) \tag{1.3.1}$$

とすれば $f + g \in \mathbb{K}^S$ が定まる．また写像 f とスカラー $c \in \mathbb{K}$ に対して, $\mathbb{K}$ の積 $\cdot$ を用いて

$$(cf)(s) \coloneqq c \cdot f(s) \quad (s \in S) \tag{1.3.2}$$

とすれば $cf \in \mathbb{K}^S$ が定まる．この和とスカラー倍で $\mathbb{K}^S$ は $\mathbb{K}$ 線形空間になる．これを S 上の $\mathbb{K}$ 値**函数空間**[*24] (the linear space of $\mathbb{K}$-valued functions on S) と呼ぶ.

証明. 定義 1.2.1 の七条件を確認する．$f, g, h \in \mathbb{K}^S$ と $c, d \in \mathbb{K}$ を任意に取る.

(1) $f + (g + h) = (f + g) + h$ を示すには, 任意の $s \in S$ に対して $\big(f + (g + h)\big)(s) = \big((f + g) + h\big)(s)$ を示せばよい．和の定義 (1.3.1) から

$$\begin{aligned}\big(f + (g + h)\big)(s) &= f(s) + (g + h)(s) = f(s) + \big(g(s) + h(s)\big),\\ \big((f + g) + h\big)(s) &= (f + g)(s) + h(s) = \big(f(s) + g(s)\big) + h(s)\end{aligned}$$

となるが, $\mathbb{K}$ の和に関する結合律 (後の定義 1.1.1 (1) 参照) より両者は等しい.

(2) $\mathbb{K}^S$ の零元は恒等写像 0, つまり任意の $s \in S$ を $0 \in \mathbb{K}$ に写す写像である．実際, 任意の $f \in \mathbb{K}^S$ と $s \in S$ に対して, $\mathbb{K}$ の零元に関する性質 (定義 1.1.1 (2) 参照) から

$$(f + 0)(s) = f(s) + 0(s) = f(s) + 0 = f(s), \quad (0 + f)(s) = 0(s) + f(s) = 0 + f(s) = f(s)$$

となるので $f + 0 = 0 + f = f$.

(3) $f \in \mathbb{K}^S$ の和に関する逆元 $-f \in \mathbb{K}^S$ は $(-f)(s) \coloneqq -f(s)$ $(s \in S)$．実際, $\mathbb{K}$ の零元に関する性質 (定義 1.1.1 (3) 参照) から

$$\begin{aligned}\big(f + (-f)\big)(s) &= f(s) + (-f)(s) = f(s) - f(s) = 0,\\ \big((-f) + f\big)(s) &= (-f)(s) + f(s) = -f(s) + f(s) = 0\end{aligned}$$

が成立するので $f + (-f) = (-f) + f = 0$.

(4) $(f + g)(s) = f(s) + g(s)$ と $(g + f)(s) = g(s) + f(s)$ は $\mathbb{K}$ の和に関する可換性 (定義 1.1.1 (4) 参照) から等しい．従って $f + g = g + f$.

(5) スカラー倍の定義 (1.3.2) と和の定義 (1.3.1) から, 任意の $s \in S$ に対して

$$\begin{aligned}\big(c(f + g)\big)(s) &= c \cdot (f + g)(s) = c\big(f(s) + g(s)\big),\\ (cf + cg)(s) &= (cf)(s) + (cg)(s) = c \cdot f(s) + c \cdot g(s)\end{aligned}$$

となって, $\mathbb{K}$ の分配律 (定義 1.1.1 (7) 参照) から両者は等しい．従って $c(f + g) = cf + cg$.

[*24] 「函数」と「関数」は同じ意味ですが, この講義ノートは画数が少ない前者を使います.

(6) $(c+d)f$ と $cf+df$ は, それぞれ $s \in S$ での値が

$$\big((c+d).f\big)(s) = (c+d)\cdot f(s), \quad (cf+df)(s) = (cf)(s) + (df)(s) = c\cdot f(s) + d\cdot f(s)$$

となる. $\mathbb{K}$ の分配律よりこれらは等しいので $(c+d)f = cf+df$. また $(cd)f$ と $c(df)$ の $s \in S$ での値はそれぞれ

$$\big((cd)f\big)(s) = (cd)\cdot f(s), \quad \big(c(df)\big)(s) = c\cdot(df)(s) = c\cdot\big(d\cdot f(s)\big)$$

となる. $\mathbb{K}$ の積に関する結合律 (定義 1.1.1 (5) 参照) からこれらは等しいので $(cd)f = c(df)$.

(7) $\mathbb{K}$ の単位元 1 によるスカラー倍 $1f$ の $s \in S$ での値は $(1f)(s) = 1\cdot f(s)$. 単位元の性質 (定義 1.1.1 (6) 参照) から $1\cdot f(s) = f(s)$. よって $1f = f$.

□

注意 (§1.1 を理解している人向け)**.** 上の証明で (単位的かつ結合的な) 環の定義 1.1.1 の公理 (1)–(7) を全て使っていることに注意して下さい.

この命題 1.3.2 の特別な場合として:

例 1.3.3 (数列空間). 集合 S が非負整数の集合 $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ の場合, 写像 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ は $\mathbb{K}$ 値数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n := f(n) \in \mathbb{K}$ と同一視できる. この場合の和, スカラー倍, 零元はそれぞれ

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} + (g_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_n+g_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad c(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (cf_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad 0 = (0,0,\dots).$$

この線形空間 $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ を $\mathbb{K}$ **値数列空間** (the space of $\mathbb{K}$-valued sequences) と呼ぶ.

函数空間 (命題 1.3.2) の別の場合として:

例 1.3.4. $I \subset \mathbb{R}$ を空でない開区間とする. I 上の実数値関数の集合 $\mathrm{Map}(I,\mathbb{R}) = \{f\colon I \to \mathbb{R}\}$ は, 函数の和とスカラー倍に関して $\mathbb{R}$ 線形空間をなす.

ここで微積分の定理[*25]を思い出しておきます.

事実 1.3.5. $I \subset \mathbb{R}$ を開区間とする. I 上の二つの連続函数 $f,g\colon I \to \mathbb{R}$ の和 $f+g$ と積 fg は連続. また任意の正整数 n について, n 回微分可能な二つの函数 $f,g\colon I \to \mathbb{R}$ の和 $f+g$ と積 fg は n 回微分可能.

これから線形空間の新しい例が作れます.

補題 1.3.6 (連続函数の空間, 滑らかな函数の空間). $I \subset \mathbb{R}$ を空でない開区間とする. 次の二つの $\mathrm{Map}(I,\mathbb{R})$ の部分集合は, 函数の和とスカラー倍に関して $\mathbb{R}$ 線形空間をなす.

(1) I 上の実数値連続函数の集合[*26]

$$C^0(I,\mathbb{R}) := \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid 連続\}.$$

これを I 上の**連続函数の空間** (the space of continuous functions on I) と呼ぶ.

[*25] 連続性については, 例えば [杉浦 80, p.57, 定理 6.6] を参照して下さい. 和の n 回微分可能性は, 微分可能性の定義を繰り返し使えば示せます. 積の n 回微分可能性については, 例えば [杉浦 80, p.88, 命題 1.5 (ライプニッツの公式)] を参照して下さい.

[*26] 参考書 [佐武 15] の様に $C(I,\mathbb{R})$ と書くこともあります.

(2) I 上の滑らかな実数値函数, つまり任意回微分可能な実数値函数の集合

$$C^\infty(I,\mathbb{R}) \coloneqq \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid \text{任意回微分可能}\}.$$

これを I 上の実数値の**滑らかな函数の空間** (the space of smooth functions on I), または C^∞ **級函数の空間** (the space of C^∞-class functions on I) と呼ぶ.

こららの線形空間は, 実数値であることを省略して $C^0(I)$ や $C^\infty(I)$ と書くこともある.

証明. 事実 1.3.5 よりそれぞれの集合は函数の和とスカラー倍に関して閉じているから, 命題 1.3.2 の議論がそのまま適用できる. □

$\mathrm{Map}(I,\mathbb{R})$ の部分集合 $C^0(I,\mathbb{R})$ や $C^\infty(I,\mathbb{R})$ が, $\mathrm{Map}(I,\mathbb{R})$ と同じ和とスカラー倍に関して線形空間であることは, 次節で導入する**線形部分空間**の例になっています.

あと二つ線形空間の例を挙げます.

例 1.3.7 (多項式空間). $\mathbb{K}$ に係数を持つ変数 x の多項式の集合

$$\mathbb{K}[x] \coloneqq \{f(x) = f_0 + f_1x + \cdots + f_dx^d \mid d \in \mathbb{N},\ f_i \in K\}$$

は, 多項式の和とスカラー倍

$$\sum_{i=0}^{d} f_ix^i + \sum_{i=0}^{e} g_ix^i \coloneqq \sum_{i=0}^{\max(d,e)} (f_i+g_i)x^i, \quad c\sum_{i=0}^{d} f_ix^i \coloneqq \sum_{i=0}^{d} cf_ix^i$$

に関して $\mathbb{K}$ 線形空間になる (但し $i > d$ なら $f_i \coloneqq 0$, $i > e$ なら $g_i \coloneqq 0$ とした). 零元は定数 $0 \in \mathbb{K}$ を多項式と見なしたもの. これを $\mathbb{K}$ 係数の一変数**多項式空間** (the polynomial space) と呼ぶ.

例 1.3.8 (形式的冪級数の空間). $\mathbb{K}$ 係数を持つ変数 x の形式的無限和[*27]

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_ix^i = f_0 + f_1x + \cdots + f_nx^n + \cdots \quad (f_i \in \mathbb{K})$$

を $\mathbb{K}$ 係数の一変数**形式的冪級数** (formal power series) と呼ぶ. それら全体がなす集合を次の記号で表す.

$$\mathbb{K}[\![x]\!] \coloneqq \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} f_ix^i \;\middle|\; f_i \in \mathbb{K}\ (i \in \mathbb{N}) \right\}.$$

形式的冪級数の和とスカラー倍を, 次数ごとの演算で

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_ix^i + \sum_{i=0}^{\infty} g_ix^i \coloneqq \sum_{i=0}^{\infty} (f_i+g_i)x^i, \quad c\sum_{i=0}^{\infty} f_ix^i \coloneqq \sum_{i=0}^{\infty} cf_ix^i$$

と定めると, $\mathbb{K}[\![x]\!]$ は $\mathbb{K}$ 線形空間になる (証明は問題 1.3.5). これを $\mathbb{K}$ 上の**形式的冪級数の空間** (the linear space of formal power series) と呼ぶ.

[*27] 「形式的」という言葉は「収束性を考えない」ことを意味しています.

演習問題 (解答: 101 ページ)

問題 1.3.1. 補題 1.3.1 を示せ.

問題 1.3.2. 体 $\mathbb{K}$ に係数を持つ一変数多項式の集合 $\mathbb{K}[x] \coloneqq \{f(x) = f_0 + f_1x + \cdots + f_dx^d \mid d \in \mathbb{N},\ f_i \in \mathbb{K}\}$ が, 多項式の和とスカラー倍に関して $\mathbb{K}$ 線形空間になることを示せ.

問題 1.3.3 (**多変数多項式の空間**)**.** $\mathbb{K}$ を体とし, n を正整数とする. (可換な) n 個の文字 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を変数とする $\mathbb{K}$ 係数の多項式 f は

$$f(x_1, x_2 \ldots, x_n) = \sum_{I \in \mathbb{N}^n} c_I x^I, \quad (c_I \in \mathbb{K},\ \text{有限個の } I \text{ を除いて } c_I = 0)$$

と表せる. ここで総和の記号の $I \in \mathbb{N}^n$ は, 和の添え字が $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, $i_r \in \mathbb{N}$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ の形をしているものを走ることを意味する. また $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して x^I は

$$x^I \coloneqq x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$$

の略記である. “有限個の I を除いて $c_I = 0$” とあるので, 総和は有限和であることに注意する. 以上の記号を使って, n 変数多項式の集合を

$$\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n] \coloneqq \left\{ f(x_1, x_2 \ldots, x_n) = \sum_{I \in \mathbb{N}^n} c_I x^I \;\middle|\; c_I \in \mathbb{K},\ \text{有限個の } I \text{ を除いて } c_I = 0 \right\}$$

と書く. この集合 $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ が n 変数多項式の和とスカラー倍に関して $\mathbb{K}$ 線形空間になることを示せ.

問題 1.3.4 (**Laurent 多項式の空間**)**.** $\mathbb{K}$ を体とする. 負冪を許す $\mathbb{K}$ 係数多項式

$$\sum_{n=-p}^{q} f_n x^n = f_{-p}x^{-p} + f_{-p+1}x^{-p+1} + \cdots + f_{-1}x^{-1} + f_0 + f_1x + \cdots + f_qx^q \quad (p, q \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathbb{K})$$

のことを $\mathbb{K}$ 上の **Laurent 多項式** (Laurent polynomial)[*28] と呼ぶ. 全ての Laurent 多項式の集合[*29]

$$\mathbb{K}[x^{\pm 1}] = \mathbb{K}[x, x^{-1}] \coloneqq \left\{ \sum_{n=-p}^{q} f_n x^n \;\middle|\; p, q \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathbb{K} \right\}$$

に和とスカラー倍を定義して, $\mathbb{K}$ 線形空間になるようにせよ.

問題 1.3.5. 例 1.3.8 の詳細を説明せよ.

問題 1.3.6 (**Laurent 級数の空間**)**.** $\mathbb{K}$ を体とする. 正冪が無限個あり, 負冪が有限個ある $\mathbb{K}$ 係数の形式的級数

$$\sum_{n=-p}^{\infty} f_n x^n = f_{-p}x^{-p} + \cdots + f_{-1}x^{-1} + f_0 + f_1x + \cdots \quad (p \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathbb{K})$$

[*28] Laurent は 19 世紀前半のフランスの数学者で, カタカナではローランと書きます. 二年生の複素解析で有理型函数の Laurent 展開を扱いますが, 「Laurent 多項式」という名前の由来はそれに由来します.

[*29] この講義ノートで今後何度か使いますが, $A = B \coloneqq \cdots$ と書かれていたら, A と B を共に $\cdots$ で定義する, と理解して下さい.

のことを $\mathbb{K}$ 上の **Laurent 級数** (Laurent series) と呼ぶ[*30]. Laurent 級数全体のなす集合

$$\mathbb{K}(\!(x)\!) := \left\{ \sum_{n=-p}^{\infty} f_n x^n \;\middle|\; p \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathbb{K} \right\}$$

に和とスカラー倍を定義して, $\mathbb{K}$ 線形空間になるようにせよ.

問題 1.3.7 (形式的 Laurent 級数の空間)**.** $\mathbb{K}$ を体とする. 正冪と負冪の両方向が無限個ある形式和

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n x^n = \cdots + f_{-1}x^{-1} + f_0 + f_1 x + \cdots \quad (f_n \in \mathbb{K})$$

のことを**形式的 Laurent 級数** (formal Laurent series) と呼ぶ[*31]. それら全体のなす集合

$$\mathbb{K}[\![x^{\pm 1}]\!] = \mathbb{K}[\![x^{-1}, x]\!] := \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n x^n \;\middle|\; f_n \in \mathbb{K} \right\}$$

に和とスカラー倍を定義して, $\mathbb{K}$ 線形空間になるようにせよ.

問題 1.3.8 (**複素線形空間の共役**, [佐武 15, 例 1.3.7])**.** 複素数 c の共役を $\bar{c}$ と書く. 複素線形空間 $(V, +, 0, .)$ に対し, 新しいスカラー倍 $.'$ を $c.'v := \bar{c}.v$ で定義すると, $(V, +, 0, .')$ は複素線形空間になることを示せ. これを

$$V' := (V, +, 0, .')$$

と書いて **V の共役** (conjugate of V) と呼ぶ.

1.4　線形写像

この副節は教科書 [佐武 15, §§2.1–2.2] の一部に該当します.

集合論には, **集合**の概念に付随して**写像**の概念があります. つまり, 二つの集合 S と T が与えられると, S の各元を T の元に写す対応 $s \mapsto f(s)$ を定めることで写像 $f\colon S \to T$ が定義されます. この話で集合を線形空間に置き換え, 写像を線形空間 S, T の線形性を保つものに置き換えて得られる概念が**線形写像**です

より具体的には, 行列の掛算から定まる写像を雛型にした概念が線形写像です. 簡単の為に $\mathbb{R}$ 上で考えると, 一年生の線形代数で習ったように, サイズ $m \times n$ の実行列 A を左から掛けることで写像

$$l_A\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad v \longmapsto Av \tag{1.4.1}$$

が定まります. これは次の性質 (**線形性**と呼びます) を持ちます.

(i) 任意のベクトル $v, v' \in \mathbb{R}^n$ に対して $l_A(v + v') = l_A(v) + l_A(v')$.

(ii) 任意のスカラー $c \in \mathbb{R}$ とベクトル $v \in \mathbb{R}^n$ に対して $l_A(c.v) = c.l_A(v)$.

この性質を抽象化したのが線形写像です.

[*30] 上の脚注の Laurent 展開に現れる級数のことです. 実は, Laurent 展開は Taylor 展開の一般化と見なせます.

[*31] Laurent 級数はよく使われる用語なので説明不要ですが, 形式的 Laurent 級数はあまり使われない用語なので, 使うときは定義を書き下しておいた方が無難です.

定義 1.4.1 (線形写像). $\mathbb{K}$ を体とし, V と W を $\mathbb{K}$ 線形空間とする. 写像 $f\colon V \to W$ は以下の二条件を満たすとき, $\mathbb{K}$ **線形写像** ($\mathbb{K}$-linear map 又は $\mathbb{K}$-linear mapping) と呼ばれる.

(i) 任意の $v, v' \in V$ に対して $f(v+v') = f(v) + f(v')$.

(ii) 任意の $c \in \mathbb{K}$ と $v \in V$ に対して $f(c.v) = c.f(v)$.

$\mathbb{K}$ 線形写像を $\mathbb{K}$ **線形空間の準同型** (homomorphism of $\mathbb{K}$-linear spaces), $\mathbb{K}$ **線形準同型** ($\mathbb{K}$-linear homomorphism), 又は単に $\mathbb{K}$ **準同型** ($\mathbb{K}$-homomorphism) と呼ぶこともある. $\mathbb{K}$ 上のものであることが明らかな場合は, $\mathbb{K}$ を略して線形写像や準同型等と呼ぶ.

また $\mathbb{K}$ 線形写像 $V \to W$ 全体のなす集合を次の記号で表す.

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) := \{f\colon V \to W \mid \mathbb{K} \text{ 線形写像 }\}.$$

$\mathbb{K}$ 上のものであることが明らかな場合は単に $\mathrm{Hom}(V, W)$ と書く.

最後に, $\mathbb{R}$ 線形写像のことを**実線形写像**, $\mathbb{C}$ 線形写像のことを**複素線形写像**と呼ぶ.

注意. 線形写像の定義に関する注意です.

(1) V の和を $\underset{V}{+}$, スカラー倍を $\underset{V}{.}$ と書き, 同様に W について $\underset{W}{+}$, $\underset{W}{.}$ と書くと, 上の二条件は

$$f(v \underset{V}{+} v') = f(v) \underset{W}{+} f(v'), \quad f(c \underset{V}{.} v) = c \underset{W}{.} f(v)$$

となります. 左辺と右辺で使われている演算が違うことに注意して下さい.

(2) 定義の条件 (i), (ii) は次と同値です: 任意の有限和 $\sum_{i=1}^{n} c_i v_i \in V$ ($c_i \in \mathbb{K}$, $v_i \in V$) に対して

$$f\Bigl(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i\Bigr) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(v_i).$$

例 1.4.2 (左掛算写像). 冒頭の説明から, (1.4.1) の写像 $l_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ は線形写像である. つまり

$$l_A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m).$$

これを行列 A による**左掛算写像** (multiplication map) または**左 A 倍写像**と呼ぶ. 後の命題 3.4.7 で, 有限次元線形空間の間の任意の線形写像は適当な行列の左掛算写像と見なせることを説明する.

線形写像の一般的な性質を一つだけ紹介します. もっと詳しいことは §4 で扱います.

補題 1.4.3. 線形写像 $f\colon V \to W$ は零元を零元に写す. つまり

$$f(0_V) = 0_W.$$

証明. 定義 1.4.1 の条件 (ii) を $c = 0$, $v = 0_V$ に適用する. 問題 1.2.5 より $c.v = 0.0_V = 0_V$ 及び $0.f(0_V) = 0_W$ だから,

$$f(0_V) = f(0.0_V) = 0.f(0_V) = 0_W.$$

□

行列による左掛算写像の特殊な場合を幾つか紹介します.

例 1.4.4. $\mathbb{K}$ を体, m と n を正整数とする. 零行列 $O \in M(m, n; \mathbb{K})$ による左掛算写像 $l_O\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ は, 任意の $v \in \mathbb{K}^n$ を零ベクトル $0 \in \mathbb{K}^m$ に写す写像である.

$m = n$ の場合, 単位行列 $E_n \in M(n; \mathbb{K})$ による左掛算写像 $l_{E_n}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ は, 任意の $v \in \mathbb{K}^n$ を自分自身に写す恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ である.

例 1.4.4 前半は線形写像の自明な例ですが, 以下の例 1.4.5 の様に一般化することができます．特に任意の $\mathbb{K}$ 線形空間 V と W に対して $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ が空集合でないことを意味します．

例 1.4.5 (零写像). 線形空間 V と W に対して, 各 $v \in V$ を零元 $0_W \in W$ に写す写像 $0\colon V \to W$ は線形写像．実際, 任意の $v, v' \in V$ と $c \in \mathbb{K}$ に対して $0(v+v') = 0_W = 0_W + 0_W = 0(v) + 0(v')$ 及び $0(c.v) = 0_W = c.0_W = c.0(v)$ が成立する．この線形写像 0 を**零写像** (zero map) と呼ぶ．

実は, 集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ は $\mathbb{K}$ 線形空間の構造を持っていて, その零元は上記の零写像です (命題 3.2.6 参照)．

もっと複雑な線形写像を挙げましょう．線形空間の例として任意回微分可能な函数の空間を扱ったことを思い出して下さい．

例 1.4.6 (微分作用素). 任意回微分可能な実函数 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ に対し, その導函数を対応させる写像

$$\frac{d}{dx}\colon C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}), \quad f(x) \longmapsto f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$$

は $\mathbb{R}$ 線形写像であることを示せ．実際, 任意の $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ と $c \in \mathbb{R}$ に対して $\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$ と $\frac{d}{dx}(cf) = c\frac{df}{dx}$ が成立する．一般に, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して k 階導函数を対応させる写像

$$\frac{d^k}{dx^k}\colon C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}), \quad f(x) \longmapsto f^{(k)}(x) = \frac{d^k f}{dx^k}(x)$$

も $\mathbb{R}$ 線形写像であることが同じ議論で示せる．更に $\frac{d^0 f}{dx^0}(x) = f^{(0)}(x) \coloneqq f(x)$ と書くと, k 階導函数の係数付きの和を対応させる写像

$$D \coloneqq \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k}\colon C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}), \quad f(x) \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)}(x) \quad (a_k \in \mathbb{R})$$

も $\mathbb{R}$ 線形写像である (証明は問題 1.4.6)．D を n **階の定数係数微分作用素** (differential operator of order n with constant coefficients) と呼ぶ．

他にも皆さんが既に学んでいる概念の中に線形写像であるものが色々とあります．そのうちの幾つかを問題 1.4.3–問題 1.4.10 で扱います．

最後に同型写像の概念を導入します．二つの集合の間の全単射 $f\colon S \to T$ で S と T を「同一視」することができますが, 線形空間の場合の「同一視」の概念が同型写像です．

定義 1.4.7 (同型写像)**.** V と W を $\mathbb{K}$ 線形空間とする．可逆な $\mathbb{K}$ 線形写像[*32] $f\colon V \to W$ を $\mathbb{K}$ **線形空間の同型写像** (isomorphism of $\mathbb{K}$-linear spaces), $\mathbb{K}$ **線形同型写像** ($\mathbb{K}$-linear isomorphism), または単に**同型写像**あるいは**同型** (isomorphism) と呼ぶ．f が同型写像であることを強調したいときは $f\colon V \xrightarrow{\sim} W$ と書く．

一年生の線形代数で学んだ内容から同型写像の例を一つ紹介します．

例 1.4.8 (正則行列の掛算写像は同型写像). n を正整数とし, $P \in M(n;\mathbb{R})$ を実正則行列, つまり逆行列 P^{-1} が存在すると仮定する．このとき, P による左掛算写像 $l_P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は同型写像である．実際, 左 P^{-1} 倍写像 $l_{P^{-1}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を考えれば, 任意の $v \in \mathbb{R}^n$ について

$$(l_{P^{-1}} \circ l_P)(v) = l_{P^{-1}}(l_P(v)) = l_{P^{-1}}(Pv) = P^{-1}(Pv) = (P^{-1}P)v = E_n v = v$$

[*32] 可逆な写像とは全単射のことです．つまり, 線形同型写像とは線形写像であってかつ全単射であるもののことです．

となるので $l_{P^{-1}} \circ l_P = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$．同様に $l_P \circ l_{P^{-1}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ が示せるので l_P は可逆．l_P が線形写像であることは既に例 1.4.2 で説明した．以上で l_P が同型写像であることが示せた．

もう少し凝った同型写像の例を挙げます．命題 1.3.2 の直前で「函数空間は数ベクトル空間と無関係のように見える」と書きましたが，実は次のような関係があります．

補題 1.4.9. n を正整数とする．集合 $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ 上の函数空間 $\mathbb{K}^{[n]} = \mathrm{Map}([n], \mathbb{K})$ から数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ への，次の写像は同型写像である．

$$\varphi\colon \mathbb{K}^{[n]} \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad f \longmapsto \varphi(f) := \big(f(1)\ f(2)\ \cdots\ f(n)\big).$$

証明. φ の定義から，$f \in \mathbb{K}^{[n]}$ と $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\varphi(f)_i = f(i)$．写像 $\psi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^{[n]}$ を

$$\mathbb{K}^n \ni v = (v_1\ v_2\ \cdots\ v_n) \longmapsto \psi(v) \in \mathbb{K}^{[n]}, \quad \psi(v)(i) := v_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

で定義すれば，ψ は φ の逆写像であることが分かる (詳細は問題 1.4.10)．よって φ は全単射．

次に任意の $f, g \in \mathbb{K}^{[n]}$ に対して $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$ を示す．$\varphi(f) \in \mathbb{K}^n$ の第 i 成分を $\varphi(f)_i$ で表すと，φ の定義と $\mathbb{K}^n$ の和の定義及び $\mathbb{K}^{[n]}$ の和の定義から，任意の $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\varphi(f+g)_i = (f+g)(i) = f(i) + g(i) = \varphi(f)_i + \varphi(g)_i = \big(\varphi(f) + \varphi(g)\big)_i.$$

よって $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$．

同様の議論でスカラー倍について $\varphi(cf) = c\varphi(f)$ が示せる (詳細は問題 1.4.10)． □

つまり $\mathbb{K}^{[n]}$ と $\mathbb{K}^n$ は全単射 φ によって集合として同一視できて，更にこの同一視の下で線形空間の構造 (和とスカラー倍) も同じものになります．この意味で数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ は函数空間の特別な場合と言えます．

線形写像や同型写像に関しては §4 以降で詳しく扱います．

発展. 体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間の概念の一般化として可換環 R 上の加群の概念があることを発展 1.2.4 で説明しましたが，同様に線形写像も一般化できます．R 加群の M から N への写像 $f\colon M \to N$ が以下の二条件を満たすとき，f を R **加群準同型** (homomorphism of R-modules) と呼びます．

(i) 任意の $m, m' \in M$ に対して $f(m+m') = f(m) + f(m')$.

(ii) 任意の $m \in M$ と $r \in R$ に対して $f(r.m) = r.f(m)$.

R 加群 M から N への準同型全体のなす集合を $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ と書きます．また $N = M$ の場合，R 加群準同型 $M \to M$ のことを M の**自己準同型**と呼び，それらのなす集合を $\mathrm{End}_R(M)$ と書きます．

演習問題 (解答: 102 ページ)

問題 1.4.1. 線形写像 $f\colon V \to W$ について，f が単射であることと，$v \in V$ が $f(v) = 0_W$ を満たすなら $v = 0_V$ であることは同値である．これを示せ．

問題 1.4.2 ([足助 12, 問 3.12.4])**.** V を実線形空間とし，$f\colon \mathbb{R}^3 \to V$ を実線形写像とする．$x := f\big({}^t(-3\ 2\ 2)\big)$, $y := f\big({}^t(-2\ 1\ 2)\big)$, $z := f\big({}^t(211)\big)$ とするとき，$f\big({}^t(1\ 0\ 0)\big)$, $f\big({}^t(0\ 1\ 0)\big)$, $f\big({}^t(0\ 0\ 1)\big)$ を x, y, z を用いて表せ．

問題 1.4.3 (**左掛算写像と右掛算写像**, [佐武 15, 例 2.2.6])**.** $\mathbb{K}$ を体とする．列ベクトルが行列の特殊な場合であることに注意すると，例 1.4.2 で導入した左 A 倍写像は以下の様に拡張できる．

(1) $A \in M(m,n;\mathbb{K})$ とする．サイズ $n \times p$ の行列に左から A を掛けることで定まる写像

$$l_A\colon M(n,p;\mathbb{K}) \longrightarrow M(m,p;\mathbb{K}), \quad X \longmapsto AX$$

は線形写像であることを示せ．この l_A も左 A 倍行列と呼ぶ．

(2) サイズ $l \times m$ の行列に右から A を掛けることで写像

$$r_A\colon M(l,m;\mathbb{K}) \longrightarrow M(l,n;\mathbb{K}), \quad Y \longmapsto YA$$

が得られるが，これも線形写像であることを示せ．この r_A を**右 A 倍行列**と呼ぶ．

問題 1.4.4 (**スカラー倍写像は線形写像**, [斎藤 09, p.48])**.** 体 $\mathbb{K}$ 上の n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ を考える．

(1) $c \in \mathbb{K}$ によるスカラー倍写像 $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $v \mapsto c.v$ が $\mathbb{K}^n$ の自己準同型であることを示せ．

(2) $E_n = (\delta_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{K})$ を n 次単位行列とする (例 1.4.4)．スカラー行列

$$cE_n = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & c & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c \end{pmatrix}$$

による左掛算写像 l_{cE_n} は前項 (1) の自己準同型と一致することを示せ．

問題 1.4.5 ([斎藤 09, 例 2.2.6])**.** $\mathbb{K}$ を体とする．行列の転置を取る操作が定める写像

$$M(m,n;\mathbb{K}) \longrightarrow M(n,m;\mathbb{K}), \quad X \longmapsto {}^t X$$

が線形写像であることを示せ．

問題 1.4.6. 例 1.4.6 の微分作用素 $D := \sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n}{dx^n}$ が $C^\infty(\mathbb{R})$ 上の自己準同型を定めることを示せ．

問題 1.4.7 (**定積分は線形写像**, [斎藤 09, 例 2.2.7])**.** $I \subset \mathbb{R}$ を開区間, $J \subset I$ を閉区間とする．I 上の実数値連続函数 f は J 上積分可能である[*33]．f に積分値 $\int_J f(x)\,dx$ を対応させることで写像

$$C^0(I,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \int_J f(x)\,dx$$

が得られる．この写像が $\mathbb{R}$ 線形写像であることを示せ．

問題 1.4.8. n 次正方行列のトレースを取る写像

$$M(n;\mathbb{K}) = M(n,n;\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad X \longmapsto \mathrm{tr}\, X$$

が線形写像か否かを論じよ．

問題 1.4.9. 複素行列 $A = (a_{ij}) \in M(m,n;\mathbb{C})$ に対して，各成分 a_{ij} の複素共役 $\overline{a_{ij}}$ を取った行列を $\overline{A} := (\overline{a_{ij}}) \in M(m,n;\mathbb{C})$ と表す．A に $\overline{A}$ を対応させる写像

$$M(m,n;\mathbb{C}) \longrightarrow M(m,n;\mathbb{C}), \quad A \longmapsto \overline{A}$$

が $\mathbb{C}$ 線形写像か否か論じよ．また，それが $\mathbb{R}$ 線形写像か否かを論じよ．

[*33] 微積分の講義・教科書を参照して下さい．例えば [杉浦 80, p.227, 定理 4.1, 連続函数の可積分性]．分からない人は $I := \mathbb{R}$ (実数全体), $J := [0,1]$ (閉区間 $0 \le x \le 1$) として，$[0,1]$ 上の定積分を対応させる写像 $f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$ を考えて下さい

問題 1.4.10. 補題 1.4.9 の証明中の「ψ は φ の逆写像」及び後半のスカラー倍に関する主張を示せ.

次は線形代数の問題ではなくて, 函数の連続性を理解しているかを確認する問題です.

問題 1.4.11. 開集合 $I \subset \mathbb{R}$ に対して, 補題 1.3.6 で I 上の実数値連続函数の空間 $C^0(I, \mathbb{R})$ を導入したが, その定義をそのまま真似して

任意の体 $\mathbb{K}$ に対して, I 上の $\mathbb{K}$ 値連続函数全体の集合を $C^0(I, \mathbb{K}) \coloneqq \{f\colon I \to \mathbb{K} \mid 連続\ \}$ と定義する

ことはできない. その理由を説明せよ.

例 1.4.6 では $\mathbb{R}$ 上の微分作用素を考えましたが, 作用させる函数を多項式に限定すれば, 微分作用素は一般の体上で定義できます (問題 1.4.11 のような障害はありません).

問題 1.4.12 (一般の体上の定数係数微分作用素). 体 $\mathbb{K}$ 係数の多項式空間 $\mathbb{K}[x]$ を考える. 変数 x の単項式に対して

$$\frac{d^n}{dx^n}x^i \coloneqq i(i-1)\cdots(i-n+1)x^{i-n}$$

と定め, $\mathbb{K}$ 上の多項式 $p(x) = \sum_{i=0}^m p_i x^i$, $p_i \in \mathbb{K}$ に対して

$$\frac{d^n}{dx^n}p(x) = p^{(n)}(x) \coloneqq \sum_{i=0}^m p_i \frac{d^n}{dx^n}x^i = \sum_{i=n}^m i(i-1)\cdots(i-n+1)p_i x^{i-n} \in \mathbb{K}[x]$$

と定める. 対応 $p \mapsto p^{(n)}$ から定まる写像 $\frac{d^n}{dx^n}\colon \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ が $\mathbb{K}[x]$ の自己準同型であることを示せ. 更に $\frac{d^0 p}{dx^0} = p^{(0)} \coloneqq p$ と約束して, 係数付きの和を取った

$$D \coloneqq \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dx^k}\colon \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x], \quad p(x) \longmapsto \sum_{k=0}^n a_k p^{(k)}(x) \quad (a_k \in \mathbb{K})$$

も $\mathbb{K}[x]$ の自己準同型であることを示せ. 例 1.4.6 に倣って, この D も n **階の定数係数微分作用素**と呼ぶ.

2　基底と次元 (04/23)

今回の内容は教科書の [佐武 15, Ⅲ, §1, §2] に該当します. $\mathbb{K}$ を体とし, 断らない限り, 線形空間と言ったら $\mathbb{K}$ 上のものを指すことにします. 体の概念に慣れていない人は $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (実数体) または $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (複素数体) の場合だけ理解して下さい.

n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ には n 個の単位ベクトル

$$e_1 := {}^t(1\ 0\ \cdots\ 0),\ e_2 := {}^t(0\ 1\ 0\ \cdots\ 0),\ \ldots,\ e_n := {}^t(0\ \cdots\ 0\ 1) \tag{2.0.1}$$

がありますが, これらは特別な性質を持っています. 定義 1.2.10 で導入した線形結合の概念を思い出しておいて下さい.

補題 2.0.1. 任意の $v \in \mathbb{K}^n$ は単位ベクトル $e_1, \ldots, e_n$ の線形結合として**一意に**表せる. 特に $v = \sum_{i=1}^n c_i e_i$ で $c_1 = \cdots = c_n = 0$ なら v は零ベクトル ${}^t(0\ \cdots\ 0)$ である.

証明. 任意のベクトル $v = {}^t(v_1\ \cdots\ v_n) \in \mathbb{K}^n$ は e_i 達の線形結合で

$$v = \sum_{i=1}^n v_i e_i \tag{2.0.2}$$

と書ける. また $v = \sum_{i=1}^n c_i e_i$, $c_i \in \mathbb{K}$ と書けるなら, 右辺は数ベクトル ${}^t(c_1\ \cdots\ c_n)$ だから, 各成分を比較して, 全ての i に対して $v_i = c_i$. よって e_i 達の線形結合として v を表す方法は (2.0.2) の一通りしかない. □

一方, 多項式空間 $\mathbb{K}[x]$ (例 1.3.7) や開区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の連続関数全体の空間 $C^0(\mathbb{R})$ (補題 1.3.6) は, 数ベクトル空間より「非常に大きい線形空間」で, (2.0.1) のような有限個の元を見出すことはできません. 線形空間の大きさを計るのが**次元**の概念で, それを導入するのに必要なのが**基底**の概念です. $\mathbb{K}^n$ の場合, 単位ベクトル $e_1, \ldots, e_n$ が $\mathbb{K}^n$ の基底で (例 2.4.2), $\mathbb{K}^n$ の次元は n になります (例 2.5.5).

2.1　線形部分空間

命題 1.3.2 や補題 1.3.6 で扱った $\mathbb{R}$ 上の函数空間 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C^0(\mathbb{R}), C^\infty(\mathbb{R})$ の間には集合としての包含関係 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \supset C^0(\mathbb{R}) \supset C^\infty(\mathbb{R})$ があります. また例 1.3.7 の一変数多項式空間で $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合の $\mathbb{R}[x]$ は, 補題 1.3.6 の C^∞ 級函数の空間の部分集合です (多項式は任意回微分可能なので). これらの包含関係をまとめて書くと:

$$\mathbb{R}[x] \subset C^\infty(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}). \tag{2.1.1}$$

これらは部分集合であるだけでなく, 和やスカラー倍が包含されている線形空間のものを制限したものになっています. この状況を抽象化した概念が**線形部分空間**です.

定義 2.1.1 (線形部分空間). $\mathbb{K}$ 線形空間 V の部分集合 W は, 以下の条件を満たす時, **V の $\mathbb{K}$ 線形部分空間** (a $\mathbb{K}$-linear subspace of V)[*34] または $\mathbb{K}$ **部分空間** ($\mathbb{K}$-subspace) と呼ばれる.

(i) V の零元 0 は W の元.

[*34] 本 [足助 12, §3.2] のように**部分線形空間**と呼ぶこともあります.

(ii) W は V の和で閉じている．つまり任意の $v, w \in W$ に対して $v + w \in W$.

(iii) W は V のスカラー倍で閉じている．つまり任意の $w \in W$ と $c \in \mathbb{K}$ に対して $cw \in W$.

W が V の $\mathbb{K}$ 部分空間であることを, 集合の包含記号 $\subset$ を[*35]使って次の様に表す[*36].

$$W \subset V \quad \text{または} \quad W \underset{\text{lin}}{\subset} V.$$

また W が V の $\mathbb{K}$ 部分空間であり, かつ $W \neq V$ であることを $W \subsetneq V$ または $W \underset{\text{lin}}{\subsetneq} V$ と表す．$\mathbb{K}$ 上のものであることが明らかな場合は, 単に線形部分空間または部分空間[*37]と呼ぶ.

注意. 線形空間 $(V, +, 0, .)$ の部分空間 $W \subset V$ について, 和とスカラー倍を制限して得られる写像を $+_W : W \times W \to W$, $._W : \mathbb{K} \times W \to W$ と書けば, $(W, +_W, 0, .)$ は線形空間になります.

注意 2.1.2. 条件 (ii) と (iii) は一つにまとめて

$$\text{(ii) かつ (iii)} \iff \text{任意の } c, d \in \mathbb{K} \text{ と } v, w \in W \text{ に対して } cv + dw \in W$$

と書けます．また (i) は次の (i)' と置き換えられます (証明は問題 2.1.1).

(i)'　W は空集合ではない.

まずは部分空間の簡単な例を挙げます.

定義 2.1.3. $\mathbb{K}$ 線形空間 V に対して, V の零元のみからなる一点集合 $\{0\}$ 及び V 自身は V の部分空間である．この二つを V の**自明な部分空間** (trivial subspaces) と呼び, $\{0\}$ と V 以外の部分空間を V の**真の部分空間** (proper subspace) と呼ぶ.

例 2.1.4. $\mathbb{K}$ 線形空間 V とその元 $v \in V$ に対して, V の部分集合

$$\mathbb{K}v := \{cv \mid c \in \mathbb{K}\}$$

は V の部分空間. 実際, 定義 2.1.1 の三条件が以下の様に確認できる.

(i) V の零元を 0_V と書き, $\mathbb{K}$ の零元を 0 と書くと問題 1.2.5 から $0_V = 0v \in \mathbb{K}v$.

(ii) $\mathbb{K}v$ の任意の二元は $c, c' \in \mathbb{K}$ を用いて cv 及び $c'v$ と書けて, 線形空間 V の分配律 (定義 1.2.1 (5)) から $cv + c'v = (c + c')v$. $c + c' \in \mathbb{K}$ だから $cv + c'v \in \mathbb{K}v$.

(iii) 任意の $cv \in \mathbb{K}v$ と $c' \in \mathbb{K}$ に対し, 定義 1.2.1 (6) から $c'(cv) = (c'c)v$. $c'c \in \mathbb{K}$ だから $c'(cv) \in \mathbb{K}v$.

面白い部分空間を挙げる前に, 一つ主張を示しておきます.

補題 2.1.5. 線形空間の任意の部分空間はまた線形空間である.

より正確に述べると, $\mathbb{K}$ 線形空間 $(V, +, 0_V, .)$ の任意の部分空間 W は, 和 $+$ とスカラー倍 $.$ を W に制限すると $+ : W \times W \to W$, $. : \mathbb{K} \times W \to W$ となり, 組 $(W, +, 0_V, .)$ は $\mathbb{K}$ 線形空間になる.

[*35] $W = V$ の場合も $W \subset V$ と書きます．§0.3 項目 (v) を参照して下さい.

[*36] $W \underset{\text{lin}}{\subset} V$ の方は集合としての包含 $\subset$ と区別する為に導入したこの講義ノート特有の記号で, 一般に使われるものではありません.

[*37] 二年生の秋学期に学ぶ位相空間論にも, 位相空間 (topological space) の部分空間 (subspace) という概念がありますが, 文脈を考慮すれば混乱することはないでしょう．但し, 三年生以降に学ぶ函数解析では線形位相空間 (topological linear space) という線形空間と位相空間の構造を併せ持った集合の概念が現れますが, ここでは線形部分空間と位相部分空間を区別する必要があります.

証明. 線形空間の定義 1.2.1 の七条件を W が満たすことを示せばよいが, W が和とスカラー倍で閉じていることから (1), (4)–(7) は直ちに従う. また (2) は仮定 $0_V \in W$ から従い, (3) は問題 1.2.3 から $-v = (-1)v$ であることと W がスカラー倍で閉じていることから従う. □

この補題を使って定義 2.1.3 を言い換えると:

系 2.1.6. 線形空間 V の任意の部分空間 W について, 部分空間の列 $\{0\} \subset W \subset V$ がある. 更に W が真の部分空間であれば $\{0\} \subsetneq W \subsetneq V$.

では部分空間の例を挙げていきます.

例 2.1.7 (数ベクトル空間の部分空間). $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ とする, n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の部分集合

$$W_m := \{{}^t(v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_m \ 0 \ \cdots \ 0) \in \mathbb{K}^n \mid v_i \in \mathbb{K} \ (i = 1, 2, \ldots, m)\}$$

は部分空間で, $\mathbb{K}^m$ との間に全単射がある. 特に, 次の様な $\mathbb{K}^n$ の部分空間の列[*38]がある.

$$W_0 = \{0\} \subset W_1 \subset \cdots \subset W_n = \mathbb{K}^n.$$

次の例は行列空間 (補題 1.3.1) の部分空間です.

例 2.1.8 (正方行列の空間の部分空間). $\mathbb{K}$ 上の行列空間 $M(m, n; \mathbb{K})$ で $m = n$ の場合, つまり n 次正方行列の空間を

$$M(n; \mathbb{K}) := M(n, n; \mathbb{K}) = \{A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \mid a_{ij} \in \mathbb{K}\}$$

と書く. この部分空間として以下のものがある[*39].

$$\begin{aligned}
S(n; \mathbb{K}) &:= \{S \in M(n; \mathbb{K}) \mid S \text{ は対称行列: } {}^tS = S\},\\
A(n; \mathbb{K}) &:= \{A \in M(n; \mathbb{K}) \mid A \text{ は反対称行列: } {}^tA = -A\},\\
U(n; \mathbb{K}) &:= \{U \in M(n; \mathbb{K}) \mid U = (u_{ij})_{i,j} \text{ は上三角行列: } i > j \text{ なら } u_{ij} = 0\},\\
L(n; \mathbb{K}) &:= \{L \in M(n; \mathbb{K}) \mid L = (l_{ij})_{i,j} \text{ は下三角行列: } i < j \text{ なら } l_{ij} = 0\},\\
D(n; \mathbb{K}) &:= \{D \in M(n; \mathbb{K}) \mid D = (d_{ij})_{i,j} \text{ は対角行列: } i \neq j \text{ なら } d_{ij} = 0\}.
\end{aligned}$$

これらが部分空間であるを示すには, 零行列が含まれていることと和とスカラー倍で閉じていることを確認すれば良いが, どの場合も明らか. 更に以下の部分空間の列がある.

$$D(n; \mathbb{K}) \subset S(n; \mathbb{K}) \subset M(n; \mathbb{K}), \quad D(n; \mathbb{K}) \subset U(n; \mathbb{K}) \subset M(n; \mathbb{K}), \quad D(n; \mathbb{K}) \subset L(n; \mathbb{K}) \subset M(n; \mathbb{K}).$$

一年生で連立一次方程式が行列と数ベクトルを使って $Ax = v$ ($A \in M(m, n; \mathbb{K})$ が係数行列, $v \in \mathbb{K}^m$ が与えられた数ベクトル, $x \in \mathbb{K}^n$ が未知ベクトル) と表されることを学びました. 実はここにも線形空間とその部分空間の例が潜んでいます.

例 2.1.9 (連立一次方程式の解空間). 係数行列を $A \in M(m, n; \mathbb{K})$ とする未知ベクトル $x \in \mathbb{K}^n$ に対する斉次連立一次方程式 $Ax = 0$ を考える. 解の集合

$$K := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$$

[*38] $\mathbb{K}^n$ の完全旗 (complete flag) と呼ばれます.

[*39] これらの部分空間の記号は, 対応する英語の頭文字から取っています: 対称行列 symmetric matrix, 反対称行列 anti-symmetric matrix, 上三角行列 upper triangular matrix, 下三角行列 lower triangular matrix, 対角行列 diagonal matrix.

は数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の部分集合だが, これは部分空間である. 実際, 零ベクトルは解だから $0 \in K$ であり, 条件 (i) が成立する. また任意の $c, d \in \mathbb{K}$ と任意の解 $x, y \in K$ に対して, A による左掛算写像 l_A が線形写像であったこと (例 1.4.2) を思い出すと

$$A(cx + dy) = cAx + dAy = c0 + d0 = 0 + 0 = 0.$$

よって定義 2.1.1 の条件 (ii) と (iii) が成立する (注意 2.1.2 参照).

注意. 連立一次方程式の解空間は, §6 で扱う**線形写像の核**の例になっています.

上の例 2.1.9 で左掛算写像 l_A が登場しましたが, これに関連してもう一つ部分空間の例を挙げます.

例 2.1.10. 行列 $A \in M(m, n; \mathbb{K})$ に対して $\mathbb{K}^n$ の部分集合

$$I \coloneqq \{Ax \mid x \in \mathbb{K}^m\} \subset \mathbb{K}^n$$

を考えると, これは部分空間である. 実際, $0_{\mathbb{K}^n} = A0_{\mathbb{K}^m} \in I$ である. また任意の $w, w' \in I$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ について, 適当な $x, x' \in \mathbb{K}^m$ を用いて $w = Ax$, $w' = Ax'$ と書けるから, l_A の線形性から

$$cw + c'w' = cAx + cAx' = A(cx + cx')$$

となり, $cw + c'w' \in I$ が示せた. よって I は部分空間である.

この副節の冒頭で述べた実函数空間の集合列 (2.1.1) も部分空間の列です.

例 2.1.11. 函数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 全体のなす空間 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (命題 1.3.2), 連続函数の空間 $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ と C^∞ 級函数の空間 $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (補題 1.3.6) 及び実数係数多項式の空間 $\mathbb{R}[x]$ (補題 1.3.6) の包含関係 (2.1.1) は実線形空間の部分空間の列である (証明は問題 2.1.2).

$$\mathbb{R}[x] \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

部分空間の一般的性質を一つだけ挙げます.

命題 2.1.12. $\mathbb{K}$ 線形空間 V の二つの部分空間 W_1, W_2 に対して, 共通集合 $W_1 \cap W_2$ は V の部分空間である. より一般に, 集合 I で添え字付けられる V の部分空間 W_i $(i \in I)$ が与えられた時, 共通集合 $\bigcap_{i \in I} W_i$ も V の部分空間である,

証明. 前半の主張は後半で $I = \{1, 2\}$ とすれば従うので, 後半だけ示せばよい. 任意の $v, w \in \bigcap_{i \in I} W_i$ と $c \in \mathbb{K}$, 及び零元 $0 \in V$ に対して, W_i が部分空間であることから $v + w, cv, 0 \in W_i$ が任意の $i \in I$ で成り立つ. よって $v + w, cv, 0 \in \bigcap_{i \in I} W_i$. □

命題 2.1.12 の自明な例は前半で $W_2 = V$ とした場合で, この時は $W_1 \cap V = W_1$ なので当然部分空間です. 非自明な例は正方行列の空間の部分空間を使うと説明できます.

例 2.1.13. $n \in \mathbb{N}$ とする. 例 2.1.8 で説明した, n 次正方行列の空間 $M_n(\mathbb{K})$ とその部分空間の記号を用いる. 上三角行列の部分空間 $U_n(\mathbb{K})$ と下三角行列の部分空間 $L_n(\mathbb{K})$ の共通集合は

$$U_n(\mathbb{K}) \cap L_n(\mathbb{K}) = D_n(\mathbb{K}) \coloneqq \{\text{ 任意の対角行列 }\}$$

なので, 確かに $M_n(\mathbb{K})$ の部分空間である．また対称行列の部分空間 $S_n(\mathbb{K})$ と交代行列の部分空間 $A_n(\mathbb{K})$ の共通集合は零行列 O のみからなる一点集合

$$S_n(\mathbb{K}) \cap A_n(\mathbb{K}) = \{O\}$$

なので零空間であり, これもまた部分空間である．

命題 2.1.12 は添字集合 I が無限集合の場合も含んでいます．例は問題 2.1.8 や問題 2.1.9 で扱います．

演習問題 (解答: 105 ページ)

問題 2.1.1. 注意 2.1.2 で説明した, 部分空間の定義の言い換えを証明せよ．

問題 2.1.2. 例 2.1.11 を証明せよ．

問題 2.1.3. 線形空間 V とその部分空間 W について, 集合としての包含写像 $W \to V$, $w \mapsto w$ は単射準同型, つまり単射な写像かつ線形写像であることを示せ．

問題 2.1.4. $\mathbb{R}$ 上の線形空間 $\mathbb{R}^3$ について, 以下の部分集合が線形部分空間か否かを論じよ．

(1) $V_0 \coloneqq \{{}^t(x\ y\ 0) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y = 0\}$.

(2) $V_1 \coloneqq \{{}^t(x\ y\ 0) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y = 1\}$.

(3) $W_0 \coloneqq \{{}^t(x\ y\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + z = 0\}$.

(4) $W_1 \coloneqq \{{}^t(x\ y\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + z = 1\}$.

これらを参考に定義を見直すと,「$\mathbb{R}^3$ の真部分空間とは原点を通る直線または平面のこと」と言い換えられる．

問題 2.1.5. 以下の $\mathbb{C}$ 上の線形空間 $\mathbb{C}^n$ の部分集合が線形部分空間か否かを論じよ．

(1) $V_1 \coloneqq \{{}^t(v_1\ \cdots\ v_n) \in \mathbb{C}^n \mid v_1 + \cdots + v_n = 0\}$.

(2) $V_2 \coloneqq \{{}^t(v_1\ \cdots\ v_n) \in \mathbb{C}^n \mid v_1^2 + \cdots + v_n^2 = 1\}$.

(3) p を素数として, $V_3 \coloneqq \{{}^t(v_1\ \cdots\ v_n) \in \mathbb{C}^n \mid v_1^p + v_2 + \cdots + v_n = 1\}$.

問題 2.1.6. $n \in \mathbb{N}$ に対し, 一変数の $\mathbb{K}$ 係数多項式で n 次以下のもの全体がなす集合

$$\mathbb{K}[x]_{\leq n} \coloneqq \{f(x) = f_0 + f_1 x + \cdots + f_n x^n \mid f_i \in \mathbb{K}\ (i = 0, 1, \ldots, n)\}$$

が多項式空間 $\mathbb{K}[x]$ の部分空間であることを示せ．また n を動かすことで, 次の部分空間の列が得られることを示せ．

$$\mathbb{K}[x]_{\leq 0} = \mathbb{K} \subset \mathbb{K}[x]_{\leq 1} \subset \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \subset \cdots \subset \mathbb{K}[x]_{\leq n-1} \subset \mathbb{K}[x]_{\leq n} \subset \cdots \subset \mathbb{K}[x]$$

問題 2.1.7 (単項イデアル). 多項式 $f \in \mathbb{K}[x]$ に対して, $\mathbb{K}[x]$ の部分集合 (f) を

$$(f) \coloneqq \{fg \mid g \in \mathbb{K}[x]\}$$

で定義する．(f) が $\mathbb{K}[x]$ の部分空間であることを示せ．(f) を f が生成する $\mathbb{K}[x]$ の**イデアル** (ideal) と呼ぶ[*40]．

[*40] 一般の (可換) 環に対してイデアルという概念が定義されます．三年生秋学期の代数学の講義で扱う内容です．

問題 2.1.8. 線形空間 V の部分空間の上昇列[*41]

$$V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n \subset V_{n+1} \subset \cdots \subset V$$

が与えられた時, $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} V_i$ が V の部分空間であることを示せ. また, 線形空間 V の部分空間の下降列

$$V \supset V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_n \supset V_{n+1} \supset \cdots$$

が与えられた時, $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} V_i$ が V の部分空間であることを示せ.

問題 2.1.9. 数列空間 $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid a_i \in \mathbb{N}\}$ を考える (例 1.3.3). 各素数 $p \in \mathbb{Z}_{>1}$ に対して

$$V_p := \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid i \text{ が } p \text{ で割り切れれば } a_i = 0\}$$

で部分集合 $V_p \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ を定める. V_p が $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ の部分空間であることを示せ. また $\bigcap_{p:\text{ 素数}} V_p$ がどの様な集合であるかを記述し, それが部分空間であることを確認せよ.

問題 2.1.10. 虚数単位を $\sqrt{-1}$ と書くことにして, 複素数全体の集合を $\mathbb{C} = \{a + \sqrt{-1}b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ と表す. 二つの部分集合 $R := \{a \mid a \in \mathbb{R}\}, I := \{\sqrt{-1}b \mid b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ について, これらが $\mathbb{R}$ 上の線形空間として部分空間であるか否か, また $\mathbb{C}$ 上の線形空間として部分空間であるか否か論じよ.

2.2 部分空間の和と生成系

補題 2.2.1. 線形空間 V とその部分空間 V_1, V_2 に対して, V の部分集合

$$V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 \mid V_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2\}$$

は V の部分空間. より一般に, 有限個の部分空間 $V_1, \ldots, V_n$ に対して V の部分集合 $\sum_{i=1}^n V_i$ を

$$\sum_{i=1}^n V_i = V_1 + \cdots + V_n := \{w_1 + \cdots + w_n \mid v_i \in V_i\ (i = 1, \ldots, n)\} \subset V \tag{2.2.1}$$

で定めると, これは V の部分空間である.

証明. 後半だけ示せば良い. 部分空間の定義 2.1.1 の三条件を示せばよい.

(i) $\sum_{i=1}^n V_i$ の二元 $w = \sum_{i=1}^n v_i = v_1 + \cdots + v_n$ と $v' = \sum_{i=1}^n v_i'$ について, V の和の結合性と可換性から $v + v' = \sum_{i=1}^n (v_i + v_i')$. V_i は部分空間なので $v_i + v_i' \in V_i$. よって $v + v' \in \sum_{i=1}^n V_i$.

(ii) V の係数体を $\mathbb{K}$ とする. $v = \sum_{i=1}^n v_i$, $v_i \in V_i$ と $c \in \mathbb{K}$ に対して, V の和とスカラー倍の分配律から $cv = \sum_{i=1}^n cv_i$. V_i は部分空間なので $cv_i \in V_i$. よって $cv \in \sum_{i=1}^n V_i$.

(iii) V の零元 0 について, 任意の $i = 1, \ldots, n$ について $0 \in V_i$ なので $0 = \sum_{i=1}^n 0 \in \sum_{i=1}^n V_i$.

□

補題 2.2.1 では有限個の部分空間 $V_i \subset V$ が与えられている状況を考えましたが, 無限個の部分空間が与えられている場合はどうすれば良いでしょうか? 安直に (2.2.1) を真似することはできません (問題 2.2.1). 正しい類似は以下の通りです.

[*41] 番号が増えると集合として大きくなる, という意味で上昇という言葉を使います. 下降列も同様の意味です.

命題 2.2.2. 線形空間 V と, 集合 I で添え字付けられている V の部分空間の族 $(V_i)_{i\in I}$, $V_i \subset V$ が与えられているとする．この時, V の部分集合 $\sum_{i\in I} V_i$ が

$$\sum_{i\in I} V_i := \left\{ \sum_{i\in I} v_i \;\middle|\; v_i \in V_i \ (i \in I),\ \text{有限個の } i \text{ を除いて } v_i = 0 \right\} \tag{2.2.2}$$

で定まり, 更に V の部分空間になる．

証明． 有限個の $i \in I$ を除いて $v_i = 0$ である $v_i \in V_i$ の族 $(v_i)_{i\in I}$ が与えられたとする．$J := \{i \in I \mid v_i \neq 0\}$ は有限集合だから, その濃度[*42]を $n := |J|$ と書けば $n \in \mathbb{N}$ であり, また全単射 $f\colon J \to \{1, \dots, n\}$ が存在する．これを用いて $\tilde{v}_k := v_{f^{-1}(k)}$ $(k = 1, \dots, n)$ と番号を付けて,

$$\sum_{i\in I} v_i := \sum_{k=1}^{n} \tilde{v}_k \in V \tag{2.2.3}$$

と定義する．右辺は V の元の有限和だから確かに V の元を定めていることに注意する．また, この定義は全単射 f を一つ取って与えられているが, 和の結合性と可換性から右辺の和は足し上げの順序によらないので, V の元としては f の取り方によらない．つまり $\sum_{i\in I} v_i \in V$ は well-defined[*43]．よって (2.2.2) で V の部分集合が定まる．

次に部分空間であることを示す為, 定義 2.1.1 の三条件を確認する．

(i) $\sum_{i\in I} V_i$ の二元 $v = \sum_{i\in I} v_i, v' = \sum_{i\in I} v'_i$ について, $J := \{i \in I \mid v_i \neq 0\}$ と $J' := \{i \in I \mid v'_i \neq 0\}$ は共に有限集合だから $J \cup J'$ も有限集合．よって $\{i \in I \mid v_i + v'_i \neq 0\} \subset J \cup J'$ も有限集合．すると V の和の結合性と可換性から $v + v' = \sum_{i\in I}(v_i + v'_i)$ であり, V_i は部分空間なので $v_i + v'_i \in V_i$．よって $v + v' \in \sum_{i\in I} V_i$．

(ii) $v = \sum_{i\in I} v_i \in \sum_{i\in I} V_i$ と $c \in \mathbb{K}$ に対して, $J := \{i \in I \mid v_i \neq 0\}$ は有限集合だから $\{i \in I \mid cv_i \neq 0\} \subset J$ も有限集合．すると V の和とスカラー倍の分配律から $cv = \sum_{i\in I} cv_i$ であり, V_i は部分空間なので $cv_i \in V_i$ だから $cv \in \sum_{i\in I} V_i$．

(iii) $v = \sum_{i\in I} v_i$ で全ての i について $v_i = 0$ の場合を考えると, $J := \{i \in I \mid v_i \neq 0\} = \emptyset$ は有限集合 ((2.2.3) で $n = 0$ の場合)．一方 V_i は部分空間なので $0 \in V_i$．よって $0 = \sum_{i\in I} 0 \in \sum_{i\in I} V_i$．

□

定義 2.2.3 (和空間). 命題 2.2.2 の部分空間 $\sum_{i\in I} V_i \subset V$ を V_i 達の**和** (sum) もしくは**和空間**と呼ぶ．

注意. 部分空間 $V_1, V_2 \subset V$ の**和空間** $V_1 + V_2$ と**和集合** $V_1 \cup V_2$ (集合としての合併) **は異なる**ことに注意して下さい．前者は線形空間ですが, 後者は線形空間であるとは限りません (例は問題 2.2.2 参照)．

例 2.2.4. $n \in \mathbb{N}$ として, 数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ を考える．$l \in \mathbb{N}$, $l \leq n$ として, 例 2.1.7 で部分空間

$$W_l := \{{}^t(v_1 \ \cdots \ v_l \ 0 \ \cdots \ 0) \mid v_i \in \mathbb{K} \ (i = 1, \dots, l)\}$$

を導入した．それとは別に, $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ に対して $\mathbb{K}^n$ の部分集合

$$W'_m := \{{}^t(0 \ \cdots \ 0 \ v_{n-m+1} \ \cdots \ v_n) \mid v_i \in \mathbb{K} \ (i = n-m+1, \dots, n)\}$$

[*42] 有限集合 J の元の数のことです．項目 (xi) 参照．

[*43] 定義 (2.2.2) の右辺は全単射 f を取って定めているけれど, その値は f の取り方によらないので, 左辺には f を明記しなくて良い, ということです．

を考えると, これも $\mathbb{K}^n$ の部分空間である. 和空間 $W_l + W'_m$ を考えると

(1) $l+m<n$ の場合

$$W_l + W'_m = \{{}^t(v_1\ \cdots\ v_l\ \overbrace{0\ \cdots\ 0}^{n-m-l\ \text{個}}\ v_{n-m+1}\ \cdots\ v_n) \mid v_i \in \mathbb{K}\}.$$

(2) $l+m \geq n$ の場合

$$W_l + W'_m = \mathbb{K}^n.$$

前副節の例 2.1.4 で, $\mathbb{K}$ 線形空間 V の元 v から部分空間 $\mathbb{K}v \subset V$ が定まることを説明しました. それらの和空間を考えると, 次の概念が得られます.

定義 2.2.5. V を $\mathbb{K}$ 線形空間とする.

(1) 部分集合 $S \subset V$ に対し, V の部分空間 $\sum_{v \in S} \mathbb{K}v$ を S **が生成する部分空間** (the subspace generated by S) 又は S **が張る部分空間** (the subspace spanned by S) と呼び, 次の様に表す.

$$\langle S \rangle_{\mathbb{K}\text{-lin}}\ \ \text{又は}\ \ \mathrm{span}_{\mathbb{K}} S.$$

混乱が無ければ単に $\langle S \rangle$ で表す[*44]. S が有限集合 $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ の場合は次の様に表す.

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle.$$

(2) 部分集合 $S \subset V$ が生成する部分空間 $\langle S \rangle$ の任意の元は次の形の有限和で書ける.

$$c_1 v_i + \cdots + c_n v_n, \quad v_j \in S,\ c_j \in \mathbb{K}\ (j = 1, \ldots, n).$$

この形の元のことを S の $\mathbb{K}$ 上の**線形結合**または**一次結合** (linear combination) と呼ぶ.

(3) V の部分空間 W に対して,

$$W = \langle S \rangle$$

を満たす部分集合 $S \subset V$ を W の**生成系** (system of generators 又は spanning set) と呼び, S の各元を W の**生成元** (generators) と呼ぶ. そして W は S で**生成される**又は**張られる**と言う.

注意. 線形結合の定義 (2) で S が有限部分集合の場合, $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ とすると, S の線形結合とは定義 1.2.10 で説明した $v_1, \ldots, v_n$ の線形結合に他なりません.

注意 2.2.6. 上の定義を言い換えると, 線形空間 V の部分集合 S について,

$$S\ \text{が}\ V\ \text{を生成する} \iff V\ \text{の任意の元は}\ S\ \text{の線形結合で書ける}. \tag{2.2.4}$$

生成系の例は二つだけ挙げます. どちらも既に扱っているものです.

例 2.2.7. (1) n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の単位ベクトル

$$e_1 := {}^t(1\ 0\ \cdots\ 0),\ e_2 := {}^t(0\ 1\ 0\ \cdots\ 0),\ \ldots,\ e_i := {}^t(0\ \cdots\ 0\ \overset{i\ \text{番目}}{1}\ 0\ \cdots\ 0),\ \ldots,\ e_n := {}^t(0\ \cdots\ 0\ 1)$$

[*44] 部分集合が生成する部分空間については非常に多くの記号があり, 数学の本・論文を読む際の混乱の一因になっています. 代数系の勉強が進んでいる人には, 群や環の生成元と関係式による記述, 及びイデアルの生成と区別する為に, $\langle S \rangle_{\mathbb{K}\text{-lin}}$ という記号を使うことをお勧めします.

は $\mathbb{K}^n$ の生成系である．つまり

$$\mathbb{K}^n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle .$$

実際, 直接定義を確かめてみると, $\mathbb{K}^n$ の任意の元 $v = {}^t(v_1\ \cdots\ v_n)$ は $v = v_1e_1 + \cdots + v_ne_n$ と書けるから, (2.2.4) より S は $\mathbb{K}^n$ の生成系．

(2) 一変数多項式空間 $\mathbb{K}[x]$ は単項式*45の集合 $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を生成系に持つ． 実際, 任意の多項式は $f(x) = f_0 + f_1x + \cdots + f_dx^d$ と書けるから, (2.2.4) より $\mathbb{K}[x]$ の生成系である．これを次の様に表す*46.

$$\mathbb{K}[x] = \left\langle 1, x, x^2, \ldots \right\rangle = \langle x^n\ (n \in \mathbb{N}) \rangle .$$

次の主張が示すように, 生成系には「無駄がある」ものもあります.

補題 2.2.8. 線形空間 V の任意の生成系 S と任意の部分集合 $T \subset V$ について, 合併 $S \cup T$ も V の生成系である．特に $v \in V$ について, $S \cup \{v\}$ も生成系である.

これらの補題の証明は問題 2.2.3 にします.

演習問題 (解答: 106 ページ)

問題 2.2.1. 線形空間 V とその無限個の部分空間 $V_0, V_1, V_2, \ldots$ が与えられているとする．補題 2.2.1 をそのまま真似て

$$\{v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \mid v_i \in V_i\ (i \in \mathbb{N})\}$$

で V の部分集合を**定義することはできない**. その理由を説明せよ.

問題 2.2.2. 2 次元実ベクトルのなす線形空間 $\mathbb{R}^2 = \{{}^t(x\ y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ を考え, $e_1 := {}^t(1\ 0)$, $e_2 := {}^t(0\ 1) \in \mathbb{R}^2$ とする．部分空間 $\mathbb{R}e_1$ と $\mathbb{R}e_2$ の和空間と和集合が異なることを示せ:

$$\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2 \neq \mathbb{R}e_1 \cup \mathbb{R}e_2.$$

問題 2.2.3. 補題 2.2.8 を示せ.

問題 2.2.4 ([斎藤 09, 問題 1.4.1.2])**.** $\mathbb{C}^3$ の部分空間 W と W' を次で定める.

$$W := \{{}^t(a\ b\ c) \mid a + b + c = 0\}, \quad W' := \{{}^t(a\ b\ c) \mid a = b = c\}.$$

この時, $W \cap W'$ と $W + W'$ を求め, それらが $\mathbb{C}^3$ の部分空間であることを確かめよ.

問題 2.2.5 (c.f. [斎藤 09, 問題 1.4.1.1])**.** $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ とする．$\mathbb{C}^n$ の部分空間 V を次で定める.

$$V := \{{}^t(v_1\ v_2\ \ \cdots\ \ v_n) \mid v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0\},$$

また $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $e_i := {}^t(0\ \ \cdots\ \ 0\ \ \overset{i\,\text{番目}}{1}\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0) \in \mathbb{C}^n$ と書く．この時, 部分集合

$$S := \{e_i - e_{i+1} \mid i = 1, 2, \ldots, n-1\} = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n\}$$

が V の生成系であることを示せ.

*45 単項式 (monomial) は少し不定性がある用語で, ここでは係数が 1 の冪積の意味で使いました．本によっては任意の係数を付けた冪積も単項式と呼びます．最高次係数が 1 の多項式はモニック多項式 (monic polynomial) と呼ばれますが, 恐らく, 形容詞 monic は係数 1 の冪積の意味での monomial を指しているのだと思います.

*46 他にも色々な記法があって, 例えば $\langle x^n \mid n \in \mathbb{Z} \rangle$ と書くことがあります.

問題 2.2.6 ([斎藤 09, 問題 1.4.2.1])**.** n を正整数とする．例 2.1.8 で説明した正方行列の空間 $M(n;\mathbb{K})$ の部分空間である，対称行列の空間 $S(n;\mathbb{K})$ と上三角行列の空間 $U(n;\mathbb{K})$ 及び対角行列の空間 $D(n;\mathbb{K})$ について，以下の等式が成立することを示せ．

$$S(n;\mathbb{K}) \cap U(n;\mathbb{K}) = D(n;\mathbb{K}), \quad S(n;\mathbb{K}) + U(n;\mathbb{K}) = M(n;\mathbb{K}).$$

問題 2.2.7 ([斎藤 09, 問題 1.4.4])**.** V を線形空間とし，W と W' を V の部分空間とする．合併集合 $W \cup W'$ が V の部分空間ならば，$W \subset W'$ 又は $W' \subset W$ となることを示せ．

問題 2.2.8 ([斎藤 09, 問題 1.4.5])**.** V を線形空間とし，V' と W 及び W' を V の部分空間とする．$W' \subset W$ ならば $(V' \cap W) + W' = (V' + W') \cap W$ となることを示せ．

問題 2.2.9. 例 1.3.7 で扱った多項式空間 $\mathbb{K}[x]$，例 1.3.8 で扱った形式的冪級数の空間 $\mathbb{K}[\![x]\!]$，問題 1.3.4 で扱った Laurent 多項式の空間 $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$，問題 1.3.6 で扱った Laurent 級数の空間 $\mathbb{K}[x^{-1}, x]\!]$，問題 1.3.7 で扱った形式的 Laurent 級数の空間 $\mathbb{K}[\![x^{\pm 1}]\!]$ を思い出す．

(1) 以下の部分空間の列があることを示せ．

$$\mathbb{K}[x] \subset \mathbb{K}[\![x]\!] \subset \mathbb{K}[x^{-1}, x]\!] \subset \mathbb{K}[\![x^{\pm 1}]\!], \quad \mathbb{K}[x] \subset \mathbb{K}[x^{\pm 1}] \subset \mathbb{K}[x^{-1}, x]\!] \subset \mathbb{K}[\![x^{\pm 1}]\!].$$

(2) $\mathbb{K}[\![x]\!] \cap \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ と $\mathbb{K}[\![x]\!] + \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ を求め，それぞれが $\mathbb{K}[\![x^{\pm 1}]\!]$ の部分空間であることを確かめよ．

(3) 合併集合 $\mathbb{K}[\![x]\!] \cup \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ が $\mathbb{K}[\![x^{\pm 1}]\!]$ の部分空間か否かを論じよ．

2.3 線形独立性

冒頭の数ベクトル空間の補題 2.0.1 について，任意の数ベクトル $v \in \mathbb{K}^n$ は単位ベクトルの線形結合として (2.0.2) と一意に表せました．この表示の一意性を抽象化して得られる概念が**線形独立性**です．

以下，線形空間の無限個の元を上手く扱うための準備をします．

補題 2.3.1. V を線形空間とし，$(v_i)_{i \in I}$, $v_i \in V$ を集合 I で添字付けられた V の元の族とする．また $(c_i)_{i \in I}$, $c_i \in \mathbb{K}$ を集合 I で添字付けられた $\mathbb{K}$ の元の族であって有限個を除いて 0 であるものとする．この時，和 $\sum_{i \in I} c_i v_i \in V$ は well-defined.

証明. 仮定より有限部分集合 $J \subset I$ が存在して $i \notin J$ なら $c_i = 0$. J は有限集合だから，その濃度を $n := |J|$ と書けば $n \in \mathbb{N}$ で，また全単射 $f\colon J \to \{1, \ldots, n\}$ が存在する．これを使って $j \in J$ に対して $c'_{f(i)} := c_j$ と定めれば $\sum_{i \in I} c_i v_i = \sum_{j \in J} c_j v_i = \sum_{k=1}^{n} c'_k v_{f^{-1}(k)}$ となり，有限和なので確かに V の元が定まっている．また，この値は f の取り方によらない．従って well-defined. □

定義 2.3.2. V を線形空間とし，$(v_i)_{i \in I}$ を集合 I で添字付けられた V の元の族とする．

(1) 次の二条件が成立する時，$(v_i)_{i \in I}$ は**線形独立**または**一次独立** (linearly independent) であると言う．

- 有限個を除いて 0 である任意の $(c_i)_{i \in I}$, $c_i \in \mathbb{K}$ に対して，$\sum_{i \in I} c_i v_i = 0_V$ なら全ての $i \in I$ について $c_i = 0$.

$I = \{1, \ldots, n\}$ で上記の条件が満たされる時は，**元** $v_1, \ldots, v_n \in V$ **は線形独立**であるとも言う．

(2) 線形独立ではない $(v_i)_{i \in I}$ は**線形従属**または**一次従属** (linearly dependent) であると言う．

注意. 元の族 $(v_i)_{i \in I}$ の代わりに部分集合 $B = \{v_i \mid i \in I\} \subset V$ を用いることで，B が線形独立/線形従属で

あることを定義することができます．この講義ノートでは主に元の族を用いた定義を用いますが, 時折, 部分集合を用いた定義も使います.

線形独立な部分集合の例を幾つか挙げます.

例 2.3.3. 線形空間 V の零元 0_V ではない元 v だけからなる族 (v) は線形独立．実際, スカラー $c \in \mathbb{K}$ が $cv = 0_V$ を満たすなら $c = 0$ であることを示せば良いが, $c \neq 0$ なら逆元 c^{-1} を両辺に掛けて $v = 0_V$ となる.

注意 (§ 1.1 を理解している人向け)**.** ここで $\mathbb{K}$ が体であることを用いました.

例 2.3.4. n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の単位ベクトル $e_1, \dots, e_n$ は補題 2.0.1 より線形独立.
同じ議論から, より一般に $l, m \in \mathbb{Z}$, $1 \leq l \leq m \leq n$ として, $e_l, e_{l+1}, \dots, e_m$ は線形独立だと分かる.

例 2.3.5. 多項式空間 $\mathbb{K}[x]$ について, 係数 1 の単項式の列

$$(x^i)_{i \in \mathbb{N}} = (1, x, x^2, \dots, x^n, \dots)$$

は線形独立．実際, 相違なる有限個の単項式を任意に取ってそれらを $x^{d_1}, \dots, x^{d_n}$ とすると, $i \neq j$ なら $d_i \neq d_j$ だから, $\sum_{i=1}^{n} c_i x^{d_i} = 0$ なら各次数の係数を比較して $c_1 = \cdots = c_n = 0$ である.

線形従属性の定義を言い換えると次の主張が得られます.

補題 2.3.6. 線形空間 V の線形従属な有限個の元 $v_1, \dots, v_n \in V$ に対して, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$, $(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$ が存在して $c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0_V$.

次の用語も便利なので導入しておきます.

定義 2.3.7. 線形空間 V の有限個の元 $v_1, \dots, v_n$ が与えられたとする.

(1) 等式 $c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0_V$ $(c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K})$ が成立する時, それを**線形関係式**または**線形関係** (linear relation) と呼ぶ.

(2) 恒等式 $0 v_1 + \cdots + 0 v_n = 0_V$ を**自明な線形関係** (trivial linear relation) と呼ぶ.

(3) 自明でない線形関係, つまり $(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$ である線形関係 $c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0_V$ を**非自明な線形関係** (non-trivial linear relation) と呼ぶ.

与えられた $v_1, \dots, v_n$ に対して, 自明な線形関係は必ず成立しますが, 非自明な線形関係は存在するとは限らないことに注意して下さい.
定義 2.3.7 を使って線形独立性・線形従属性の定義 2.3.2 を言い換えると次のようになります.

補題 2.3.8. 線形空間 V の有限個の元 $v_1, \dots, v_n \in V$ について

(1) $v_1, \dots, v_n$ が線形従属 $\Leftrightarrow$ 非自明な線形関係が存在する.

(2) $v_1, \dots, v_n$ が線形独立 $\Leftrightarrow$ 非自明な線形関係が存在しない.

数ベクトル空間の場合に補題 2.3.8 を言い換えると, 一年生で学んだ数ベクトルの線形独立性の判定法が得られます．行列 A の階数を $\operatorname{rank} A$ と書きます.

命題 2.3.9. $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする．n 個の m 次元数ベクトル

$$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^m, \quad a_i = {}^t(a_{1i} \ \cdots \ a_{mi})$$

が与えられているとし, m 行 n 列の行列 A を

$$A \coloneqq (a_1 \ \cdots \ a_n) = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$$

で定める. また $\mathbb{K}^m$ の零ベクトルを $0_{\mathbb{K}^m} = {}^t\!(0 \ \cdots \ 0) \in \mathbb{K}^m$ と書く.

(1) $a_1, \ldots, a_n$ の線形関係 $c_1a_1 + \cdots + c_na_n = 0_{\mathbb{K}^m}$ は, n 個の未知数 $x_1, \ldots, x_n$ に対する m 個の斉次連立一次方程式系
$$Ax = 0_{\mathbb{K}^m} \quad x \coloneqq {}^t\!(x_1 \ \cdots \ x_n)$$
について, $x = {}^t\!(c_1 \ \cdots \ c_n)$ が解であることと同値である.

(2) $a_1, \ldots, a_n$ が線形独立であることと $\operatorname{rank} A = n$ は同値. 特に $a_1, \ldots, a_n$ が線形独立ならば $n \leq m$.

証明. (1) 次の同値から従う: $c_1a_1 + \cdots + c_na_n = 0_{\mathbb{K}^m} \Leftrightarrow$ 任意の $i = 1, \ldots, m$ について $\sum_{j=1}^{n} v_{ij}a_j = 0 \Leftrightarrow A\,{}^t\!(c_1 \ \cdots \ c_n) = 0_{\mathbb{K}^n}$.

(2) 補題 2.3.8 と (1) より, a_i 達の線形独立性と方程式 $Ax = 0$, $A = (a_{ij})$, $x = {}^t\!(x_1 \ \cdots \ x_n)$ が自明な解しか持たないことが同値で, それは係数行列 A の階数が未知数の数と等しいことと同値. 後半の主張については, 前半から a_i 達が線形独立なら $\operatorname{rank} A = n$ だが, 行列の階数は行の数と列の数のどちらも超えないから $\operatorname{rank} A \leq \min\{m, n\}$. よって $n \leq m$.

□

線形独立性・線形従属性に関する主張を幾つか紹介します. これ以降この副節の終わりまで, V は $\mathbb{K}$ 上の線形空間だとします. またスカラー $0 \in \mathbb{K}$ と区別するために V の零元を $0_V \in V$ と書きます.

補題 2.3.10. 線形空間 V の有限個の元 $v_1, \ldots, v_n \in V$ に対し, 次の二条件は同値.

(i) $v_1, \ldots, v_n$ は線形従属.

(ii) ある $i \in \{1, \ldots, n\}$ が存在して, v_i は他の $n-1$ 個の元 $v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n$ の[*47] 線形結合で表せる.

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii): 補題 2.3.6 より $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$, $(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$ が存在して $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0_V$. 特に $c_i \neq 0$ なる i が存在して

$$c_iv_i = -(c_1v_1 + \cdots + c_{i-1}v_i + c_{i+1}v_{i+1} + \cdots + c_nv_n).$$

$c_i \neq 0$ だから辺々 c_i^{-1} を掛けることができて

$$v_i = \frac{-c_1}{c_i}v_1 + \cdots + \frac{-c_{i-1}}{c_i}v_i + \frac{-c_{i+1}}{c_i}v_{i+1} + \cdots + \frac{-c_n}{c_i}v_n.$$

よって v_i は他の $n-1$ 個の元の線形結合で書ける.

(ii) $\Rightarrow$ (i): 仮定より $c_j \in \mathbb{K}$ $(j = 1, \ldots, \widehat{i}, \ldots, n)$ が存在して $v_i = c_1v_1 + \cdots + c_{i-1}v_{i-1} + c_{i+1}v_{i+1} + \cdots + c_nv_n$. すると

$$c_1v_1 + \cdots + c_{i-1}v_{i-1} + (-1)v_i + c_{i+1}v_{i+1} + \cdots + c_nv_n = 0_V.$$

$-1 \neq 0$ より $(c_1, \ldots, c_{i-1}, -1, c_{i+1}, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$. よって補題 2.3.6 より $v_1, \ldots, v_n$ は線形従属. □

注意 (§ 1.1 を理解している人向け). 「辺々 c_i^{-1} を掛けることができて」の所で $\mathbb{K}$ が体であることを用いました.

[*47] 記号 $\widehat{v_i}$ は「v_i を除く」ことを意味します.

補題 2.3.11. 線形空間 V の n 個の元 $v_1, \dots, v_n$ が線形独立であり, $v \in V$ が $v_1, \dots, v_n$ の線形結合で表せないならば, $n+1$ 個の元 $v_1, \dots, v_n, v$ は線形独立.

証明. 線形関係 $c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n + cv = 0_V$ $(c_1, \dots, c_n, c \in \mathbb{K})$ があると仮定する．$c \neq 0$ なら補題 2.3.10 の証明前半の議論と同様にして $v = \sum_{i=1}^{n} \frac{-c_i}{c} v_i$ となり, v が v_i 達の線形結合で表せて仮定に反する．よって $c = 0$ であり, 元の線形関係は $c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0_V$. v_i 達は線形独立と仮定しているから, この線形関係は自明, つまり $c_1 = \cdots = c_n = 0$. 以上より $c_1 = \cdots = c_n = c = 0$, つまり $v_1, \dots, v_n, v \in V$ は線形独立. □

命題 2.3.12. 線形空間 V の有限個の元 $v_1, \dots, v_n \in V$ に対し, 次の二条件は同値.

(i) $v_1, \dots, v_n$ は線形独立.

(ii) $v_1, \dots, v_{n-1}$ は線形独立であり, v_n は $v_1, \dots, v_{n-1}$ の線形結合で書けない.

(iii) $v_1, \dots, v_{n-1}$ は線形独立であり, $v_n \notin \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$.

証明. (i) ⇒ (ii): 補題 2.3.10 の対偶を取ると, $v_1, \dots, v_n$ は線形独立 ⇔ 任意の $i = 1, \dots, n$ について, v_i は他の $n-1$ 個の元 $v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n$ の線形結合で表せない．後半で $i = n$ とすれば良い．

(ii) ⇒ (i): 補題 2.3.11 の対偶を取れば良い．

(ii) ⇔ (iii): $v \in V$ が v_i 達の線形結合で書けることと, v_i 達が張る部分空間に v が属することは同値. □

演習問題 (解答: 107 ページ)

問題 2.3.1. 線形空間 V の部分集合 S が線形独立なら, S の部分集合 T もまた線形独立であることを示せ.

問題 2.3.2. 線形空間 V の部分集合 B が零元 0_V を含むなら, B は線形独立ではないことを示せ.

問題 2.3.3. n を 3 以上の整数とする．以下の数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の元 $v_1, v_2, \dots$ が線形独立か否か論じよ．

(1) $v_1 := {}^t(1\ 0\ \cdots\ 0)$, $v_2 := (1\ 1\ 0\ \cdots\ 0)$, $\dots$, $v_i := (\overbrace{1\ \cdots\ 1}^{i\ 個}\ 0\ \cdots\ 0)$, $\dots$, $v_n := (1\ 1\ \cdots\ 1)$.

(2) $v_1 := (1\ 1\ \cdots\ 1)$, $v_2 := (2\ 1\ \cdots\ 1)$, $\dots$, $v_i := (i\ 1\ \cdots\ 1)$, $\dots$, $v_n := (n\ 1\ \cdots\ 1)$.

(3) $e_1, \dots, e_n$ を単位ベクトルとして, $v_1 := e_1 + e_2$, $v_2 := e_1 + e_3$, $\dots$, $v_{n-1} := e_1 + e_n$.

問題 2.3.4 (有限体 (問題 1.1.4) を理解している人向け, [斎藤 09, 例題 1.5.3]). 係数体 $\mathbb{K}$ が位数 p の有限体 $\mathbb{F}_p$ の場合を考える．n を正整数とする．

(1) 数ベクトル空間 $\mathbb{F}_p^n$*48の零元以外の元の個数が $p^n - 1$ であることを説明せよ.

(2) $m, n \in \mathbb{Z}$, $0 < m \leq n$ として, 集合 $\{(v_1, \dots, v_m) \mid v_1, \dots, v_m \in \mathbb{F}_p^n$ は線形独立 $\}$ の元の個数は $(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \cdots (p^n - p^{m-1})$ であることを示せ.

2.4　基底

冒頭の数ベクトル空間の補題 2.0.1 を思い出すと, 任意の数ベクトル $v \in \mathbb{K}^n$ が単位ベクトル $e_1, \dots, e_n$ の線形結合として (2.0.2) と一意に表示できました．このことを抽象化して得られる概念が線形空間の基底です．

*48 n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ で $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ の場合なので, 厳密には ${\mathbb{F}_p}^n$ と冪の n を横にずらして書くべき所ですが, 数学業界の習慣で n は p の真上に置いて $\mathbb{F}_p^n$ と書きます.

定義 2.4.1. V を線形空間, $B=(v_i)_{i\in I}$, $v_i\in V$ を集合 I で添字付けられた V の元の族とする．二条件

(i) B は線形独立である

(ii) 任意の元 $v\in V$ は B の有限個の元の線形結合で表せる

が成立する時, B を V の**基底** (basis) と呼ぶ．

注意. 以下では添字集合が $I=\{1,\dots,n\}$ の場合を良く用います．この場合, V の元 $v_1,\dots,v_n$ が

(i) 線形独立

(ii) 任意の $v\in V$ は v_i 達の線形結合で表せる

の二条件を満たす時, 列 $(v_1,\dots,v_n)$ のことを V の基底と呼びます．また,「$v_1,\dots,v_n$ は V の基底である」と言うこともあります．

基底の例を幾つか挙げます．

例 2.4.2. n を正整数とする．数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ について, 単位ベクトルの列

$$B_{\mathrm{std}}\coloneqq(e_1,\dots,e_n),\quad e_i\coloneqq{}^t(0\ \cdots\ 0\ \overset{i\text{ 番目}}{1}\ 0\ \cdots\ 0)$$

は[*49]補題 2.0.1 より $\mathbb{K}^n$ の基底である．これを $\mathbb{K}^n$ の**標準基底** (standard basis 又は canonical basis) と呼ぶ．

注意. $\mathbb{K}^n$ の単位ベクトルを並び替えて, 例えば $B'\coloneqq(e_2,e_1,e_3,\dots,e_n)$ とすると, これもまた $\mathbb{K}^n$ の基底です．実際, 集合としては B_{std} も B' も $\{e_1,\dots,e_n\}$ なので, 補題 2.0.1 の議論が B' にも適用できます．しかし列としては異なるので, 基底の定義 2.4.1 によると $B\neq B'$, つまり別の基底です．$e_1,\dots,e_n$ の順列は $n!$ 個あるので, B_{std} の並び替えによって $n!$ 個の基底が得られます．

この節で説明する議論の多くは, 基底 $(v_i)_{i\in I}$ の集合 I による添字付けを忘れて, 単に集合 $\{v_i\mid i\in I\}$ を考えれば十分です．しかし, § 5 で線形写像の行列表示を考える際には, 基底に順番を付けてそれに基づいて行列を作る為, 定義 2.4.1 の様に添字付けを指定しておく必要があります．このように基底が $I=\{1,\dots,n\}$ で添字付けされていることを強調したい場合は, **順序付き基底** (ordered basis) という用語を用います．

例 2.4.3 (単項式は多項式空間の基底). 一変数多項式空間 $\mathbb{K}[x]$ について, 係数 1 の単項式の列

$$(x^i)_{i\in\mathbb{N}}=(1,x,x^2,\dots)$$

は基底である．実際, 任意の元 $p(x)\in\mathbb{K}[x]$ は多項式だから $p(x)=p_0+p_1x+\cdots+p_nx^n$, $p_i\in\mathbb{K}$ と単項式の有限和で書ける．また多項式 $p(x)$ が 0 なら, その係数 p_i は全て 0 なので, $\{x^i\mid i\in\mathbb{N}\}$ は一次独立である．

注意 2.4.4. 例外的な場合ですが, 零空間 $\{0\}$ は基底を持たない, と見なします[*50],

例 2.4.5 (行列単位は行列空間の基底). 行列空間 $M(m,n;\mathbb{K})$ の元

$$E_{kl}\coloneqq\big((k,l)\text{ 成分が 1 で, 他の成分は 0 である行列}\big)=(\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{1\le i\le m,1\le j\le n}\quad(1\le k\le m,\ 1\le l\le n)$$

を (k,l) 成分の**行列単位** (matrix unit)[*51] と呼ぶ．これらは $M(m,n;\mathbb{K})$ の基底をなす．実際, 任意の行列

---

*49 B_{std} の添字 std は standard を短縮したもの．B_{std} はこの講義ノート特有の記号で, 他の本や論文で広く用いられているものではありません．

*50 後で直和を用いた基底の定義を説明しますが, それに合わせています．

*51 単位行列 $E_n=(\delta_{ij})_{i,j=1}^n$ と紛らわしい名前が付いていますが, しっかり区別して下さい．単位行列は正方行列ですが, 行列単位は正方とは限らないことにも注意して下さい．

$A = (a_{ij})_{i,j} \in M(m,n;\mathbb{K})$ は

$$A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$$

と書けるので，E_{ij} 達は $M(m,n;\mathbb{K})$ を生成する． また，$c_{ij} \in \mathbb{K}$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$ 達が $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}E_{ij} = O$ を満たすなら，任意の i,j について，この等式の両辺の (i,j) 成分を比較して $c_{ij} = 0$．従って E_{ij} 達は線形独立である．

例 2.4.6 (漸化式の解空間の基底)． m を正整数とし，$p_1,\dots,p_m \in \mathbb{K}$ とする．p_i 達を係数とする m 階漸化式

$$a_{n+m} = p_1a_{n+m-1} + \cdots + p_{m-1}a_{n+1} + p_ma_n \tag{2.4.1}$$

を考える．この漸化式の解集合

$$S := \{(a_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+m} = p_1a_{n+m-1} + p_2a_{n+m-2} + \cdots + p_ma_n\},$$

は数列空間 $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ の部分空間である (問題 2.4.1)．その基底を一つ求めよう．

漸化式 (2.4.1) を満たす m 個の数列 $b(0), b(1), \dots, b(m-1)$ が条件

$$b(i)_n = \begin{cases} 1 & (n = i) \\ 0 & (0 \le n < m,\ n \ne i) \end{cases} \tag{2.4.2}$$

から一意に定まる (証明は問題 2.4.1)．この $b(i)$ 達が S の基底になることを示そう．

まず，漸化式の解だから $b(i) \in S$ が従う．すると S は線形空間だから，$\langle b(0), b(1), \dots, b(m-1)\rangle \subset S$ は部分空間である．次に S の生成系であること，つまり $\langle b(0), b(1), \dots, b(m-1)\rangle = S$ を示したい．任意の $a = (a_n)_n \in S$ に対して数列 $c \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ を

$$c := \sum_{i=0}^{m-1} a_ib(i)$$

で定めると，その形から $c \in \langle b(0), b(1), \dots, b(m-1)\rangle$ である．このことから $c = a$ が言えるので (証明は問題 2.4.1)，$\langle b(0), b(1), \dots, b(m-1)\rangle = S$ が従う．

後は $b(i)$ 達が線形独立であることを示せば，S の基底であることが従う．$\sum_{i=0}^{m-1} c_ib(i) = 0 \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $c_i \in \mathbb{K}$ だとすると，各 $i = 0, 1, \dots, m-1$ について両辺の第 i 成分を比較して $c_i = 0$．よって線形独立である．

基底の定義 2.4.1 は次のように言い換えることができます．

補題 2.4.7. 線形空間 V の元の族 $(v_i)_{i\in I}$ が基底であることと，任意の元 $v \in V$ が有限和

$$v = c_1v_{i_1} + \cdots + c_nv_{i_n}, \quad \{i_1, \dots, i_n\} \subset I,\ c_j \in \mathbb{K}\ (j = 1, \dots, n)$$

の形で一意に書けることは同値．

証明． B が基底なら，任意の $v \in V$ は有限個の元 $v_i \in B$ の線形結合で $v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$ $(c_i \in \mathbb{K})$ と書ける．別の表示 $v = c'_1v'_1 + \cdots + c'_mv'_m$ $(c'_i \in \mathbb{K},\ v'_i \in B)$ があったとすると，

$$\{v_1, \dots, v_n\} \cup \{v'_1, \dots, v'_m\} = \{w_1, \dots, w_l\}$$

と名前を付け直して $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = \sum_{j=1}^{l} a_jw_j$, $c'_1v'_1 + \cdots + c'_mv'_m = \sum_{j=1}^{l} b_jw_j$ $(a_j, b_j \in \mathbb{K})$ と書き直せる．すると $v = \sum_{j=1}^{l} a_jw_j = \sum_{j=1}^{l} b_jw_j$ から $\sum_{i=1}^{l}(a_j - b_j)w_j = 0$ となり，$w_j \in B$ 達の線形独立性から $a_j = b_j$，つまり v の表示の仕方が一意であることが従う． □

これから次の言いかえができます (証明は問題 2.4.2).

補題 2.4.8. 線形空間 V の元の族 $(v_i)_{i\in I}$ について

$$(v_i)_{i\in I} \text{ は線形独立} \iff (v_i)_{i\in I} \text{ は部分空間 } \operatorname{span}\{v_i \mid i\in I\}\subset V \text{ の基底.}$$

特に同値

$$(v_i)_{i\in I} \text{ が } V \text{ の基底} \iff (v_i)_{i\in I} \text{ は線形独立かつ } \{v_i \mid i\in I\} \text{ は } V \text{ を生成する}$$

が成立し, V の任意の基底は V の生成系である.

また次の主張が示すように, 基底とは無駄のない生成系と言えます (証明は問題 2.4.3).

補題 2.4.9. V を線形空間, $S\subset V$ を V の生成系とする. この時, 次の同値が成立する.

$$S \text{ が } V \text{ の基底をなす} \iff S \text{ の任意の真部分集合 } T \subsetneq S \text{ は } V \text{ の生成系ではない.}$$

一つの線形空間に対して, その基底は一意ではありません.

例 2.4.10. 数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ には例 2.4.2 の標準基底の他に

$$e'_1 := {}^t(1\ 0\ \cdots\ 0),\ e'_2 := {}^t(1\ 1\ 0\ \cdots\ 0),\ e'_i := {}^t(1\ \cdots\ 1\ \overset{i\text{ 番目}}{1}\ 0\ \cdots\ 0),\ \ldots,\ e'_n := {}^t(1\ \cdots\ 1\ 1)$$

からなる基底 $(e'_1,\ldots,e'_n)$ がある. 実際, 任意の $v={}^t(v_1\ \cdots\ v_n)\in\mathbb{K}^n$ は

$$\begin{aligned} v &= v_1e'_1 + v_2(e'_2-e'_1) + v_3(e'_3-e'_2) + \cdots + v_n(e'_n - e'_{n-1}) \\ &= (v_1-v_2)e'_1 + (v_2-v_3)e'_2 + \cdots + (v_{n-1}-v_n)e'_{n-1} + v_ne'_n \end{aligned}$$

と一意に表示できる.

基底に関する基本定理として, 次の存在定理を紹介します.

定理 2.4.11 (基底の存在定理). 任意の線形空間は基底を持つ.

一般の線形空間に対する証明には, 集合論の講義で扱われる **Zorn の補題**が必要になるので, 発展的な §2.6 で説明します. ここでは次の**有限次元性**の仮定の下で基底の存在を証明します.

定義 2.4.12. 線形空間 V に有限個の元が存在して, 任意の元 $v\in V$ がそれらの線形結合で表される時, V を**有限次元** (finite dimensional) であると言う. また零空間は有限次元線形空間であると約束する.

有限次元でない時, V は**無限次元** (infinite dimensional) であると言う.

有限次元線形空間と無限次元線形空間の例を一つずつ挙げます:

例 2.4.13. n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ は有限次元線形空間. 実際, 例 2.4.2 の標準基底 $(e_1,\ldots,e_n)$ は n 個の元からなる.

例 2.4.14. 一変数多項式空間 $\mathbb{K}[x]$ は無限次元線形空間. 実際, 有限個の多項式からなる基底 $(p_1,\ldots,p_n)$ が存在すると仮定すると, 多項式の次数 deg に注目して $d:=\max\{\deg p_i \mid i=1,\ldots,n\}$ を考えれば, 単項式 $x^{d+1}\in\mathbb{K}[x]$ は p_i 達の線形結合では書けないので矛盾する.

さて, 有限次元の場合に定理 2.4.11 を証明しましょう.

定理 2.4.15 (有限次元の場合の基底の延長)**.** 零空間ではない有限次元線形空間 V について, $v_1, \ldots, v_m \in V$ が線形独立なら, 有限個の元 $v_{m+1}, \ldots, v_n \in V$ を付け加えることで V の基底 $(v_1, \ldots, v_n)$ が得られる.

証明. V は有限次元なので, 有限部分集合 $B = \{w_1, \ldots, w_l\} \subset V$ が存在して任意の $v \in V$ は B の元の線形結合で書ける. もし V の任意の元が $S \coloneqq \{v_1, \ldots, v_m\}$ の線形結合で書けるなら, S は V の基底であり, $n = m$ として (元を付け加えることなく) 主張が成立する.

そこで S の線形結合で書けない V の元が存在すると仮定する. この時, B の元であって S の線形結合で書けないものが存在する. 実際, そのようなものが存在しなければ B の任意の元は S の線形結合で書けるが, B は V の基底だから, 問題 1.2.10 より V の任意の元が S の線形結合で書けることになり矛盾する.

$w_i \in B$ が S の線形結合で表せないと仮定する. すると補題 2.3.11 より $S' \coloneqq \{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1} \coloneqq w_i\}$ は線形独立. S' が基底であれば, $n = m+1$ として主張が成立する. S' が基底でなければ, 上と同様の議論より $B \setminus \{w_i\}$ のうちで S' の線形結合で書けないものが存在するから, その一つを選んで v_{m+2} として議論を繰り返せば, 高々 l 回目に V の基底が得られる. $\square$

系 2.4.16 (**有限次元の場合の基底存在定理**)**.** 零空間ではない有限次元線形空間 V には, 有限個の元からなる基底が存在する.

証明. 零元ではない元 $v \in V \setminus \{0\}$ が取れるが, 一元集合 $\{v\}$ は線形独立だから, それに定理 2.4.15 を適用すれば良い. $\square$

演習問題 (解答: 108 ページ)

問題 2.4.1. 例 2.4.6 の議論の詳細を補え.

問題 2.4.2. 補題 2.4.8 を示せ.

問題 2.4.3. 補題 2.4.9 を示せ.

以下の問題 2.4.4–2.4.7 は次副節 §2.5 の内容, 特に命題 2.5.9 を使うと解きやすいです.

問題 2.4.4 ([齋藤 85, p.119, 第 4 章 §4, 問題 1, 1)])**.** $\mathbb{K}^4$ の部分集合 W_1 と W_2 を

$$\begin{aligned} W_1 &\coloneqq \{{}^t(x_1\ x_2\ x_3\ x_4) \in \mathbb{K}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0,\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}, \\ W_2 &\coloneqq \{{}^t(x_1\ x_2\ x_3\ x_4) \in \mathbb{K}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0,\ -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0\} \end{aligned}$$

で定める. これらが $\mathbb{K}^4$ の部分空間であることを示し, $W_1 + W_2$ の基底を一組与えよ.

問題 2.4.5 ([齋藤 85, p.119, 第 4 章 §4, 問題 1, 2)])**.** $\mathbb{K}^4$ の部分集合 W_1 と W_2 を

$$\begin{aligned} W_1 &\coloneqq \{{}^t(x_1\ x_2\ x_3\ x_4) \in \mathbb{K}^4 \mid x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0,\ 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0\}, \\ W_2 &\coloneqq \{{}^t(x_1\ x_2\ x_3\ x_4) \in \mathbb{K}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0,\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0\} \end{aligned}$$

で定める. これらが $\mathbb{K}^4$ の部分空間であることを示し, $W_1 + W_2$ の基底を一組与えよ.

問題 2.4.6 ([齋藤 85, p.119, 第 4 章 §4, 問題 2, 1)])**.** $\mathbb{K}^4$ の元 a, b, c, d, e, f を

$$a \coloneqq {}^t(0\ 1\ -1\ 1),\quad b \coloneqq {}^t(2\ 1\ 0\ 1),\quad c \coloneqq {}^t(1\ 3\ 0\ 4),\quad d \coloneqq {}^t(1\ 2\ 1\ 1),\quad e \coloneqq {}^t(0\ 3\ 2\ 3),\quad f \coloneqq {}^t(-3\ 0\ 1\ 3)$$

で定め, 部分空間 W_1, W_2 を $W_1 := \langle a, b, c\rangle$, $W_2 := \langle d, e, f\rangle$ で定める. $W_1 \cap W_2$ の基底を一組与えよ.

問題 2.4.7 ([齋藤 85, p.119, 第 4 章 §4, 問題 2, 2)]). $\mathbb{K}^4$ の元 a, b, c, d, e, f を

$$a := {}^t(1\ 0\ {-1}\ 1),\quad b := {}^t(2\ 2\ {-1}\ 2),\quad c := {}^t(1\ 2\ 1\ 3),\quad d := {}^t(0\ 0\ 2\ 1),\quad e := {}^t(1\ 2\ 2\ 2),\quad f := {}^t(2\ 2\ 0\ 1)$$

で定め, 部分空間 W_1, W_2 を $W_1 := \langle a, b, c\rangle$, $W_2 := \langle d, e, f\rangle$ で定める. $W_1 \cap W_2$ の基底を一組与えよ.

問題 2.4.8 ([斎藤 09, 問題 1.4.2.1]). 例 2.1.8 で扱った正方行列の空間 $M(n; \mathbb{K})$ の $\mathbb{K}$ 部分空間

$$\begin{aligned}
S(n; \mathbb{K}) &:= \{S \in M(n; \mathbb{K}) \mid S \text{ は対称行列: } {}^tS = S\},\\
A(n; \mathbb{K}) &:= \{A \in M(n; \mathbb{K}) \mid A \text{ は反対称行列: } {}^tA = -A\},\\
U(n; \mathbb{K}) &:= \{U \in M(n; \mathbb{K}) \mid U = (u_{ij})_{i,j=1}^n \text{ は上三角行列: } i > j \text{ なら } u_{ij} = 0\},\\
L(n; \mathbb{K}) &:= \{T \in M(n; \mathbb{K}) \mid L = (l_{ij})_{i,j=1}^n \text{ は下三角行列: } i < j \text{ なら } l_{ij} = 0\},\\
D(n; \mathbb{K}) &:= \{D \in M(n; \mathbb{K}) \mid D = (d_{ij})_{i,j=1}^n \text{ は対角行列: } i \neq j \text{ なら } d_{ij} = 0\}
\end{aligned}$$

の基底を一組ずつ与えよ.

問題 2.4.9. n 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ を $\mathbb{R}$ 上の線形空間と見なすと,

$$x_{2k-1} := {}^t(0\ \cdots\ 0\ \overset{k\ \text{番目}}{1}\ 0\ \cdots\ 0),\quad x_{2k} := {}^t(0\ \cdots\ 0\ \overset{k\ \text{番目}}{\sqrt{-1}}\ 0\ \cdots\ 0)\quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

からなる $\{x_k \mid k = 1, 2, \ldots, 2n\}$ が基底になることを示せ.

2.5　次元

系 2.4.16 で任意の有限次元線形空間には基底が存在することを示しましたが, 数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の例 2.4.10 で見たように, 基底は一意ではありません. しかしその例の基底の濃度 (元の個数) は標準基底と同じ n 個です. 実は任意の線形空間 V について, 基底の濃度は基底の取り方によりません. これが V の**次元** $\dim V$ の定義です.

以上では抽象的に線形空間の次元を説明しましたが, 次元にはより「幾何学的な」意味があります. 係数体が $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合, n 次元実ベクトルのなす線形空間 $\mathbb{R}^n$ は「n 次元の平坦な空間に座標を入れたもの」という幾何学的な意味がありました. この「n 次元の平坦な空間」という部分を任意の線形空間 V に対して拡張したのが $\dim V$ です.

定理 2.5.1. 有限次元線形空間 V が n 個の元からなる基底を持つなら, n 個より多くの元からなる任意の部分集合 $S \subset V$ は線形従属. 特に V の任意の基底は n 個の元からなり, その個数 n は基底の取り方によらない.

この定理の証明は後回しにして, その帰結を先に説明します. 系 2.4.16 より任意の有限次元線形空間 $V \neq \{0\}$ は有限個の元からなる基底を持ちますが, 定理 2.5.1 より V の他の基底を考えても元の個数は同じです. そこで次の定義が意味を持ちます.

定義 2.5.2 (**有限次元線形空間の次元**). 零空間ではない有限次元線形空間 V の基底の元の個数を V **の次元** (the dimension of V) と呼び, $\dim V$ で表す. 零空間の次元は $\dim\{0\} := 0$ と定める. また $\mathbb{K}$ 上の線形空間の次元であることを強調したい場合は $\dim_{\mathbb{K}} V$ と表す.

定理 2.5.1 の証明の準備として, 次の概念を導入しておきます.

定義 2.5.3. 線形空間 V の部分集合 S に対し, S の部分集合 M であって次の二条件を満たすものを S の極大線形独立系と呼ぶ.

(i) M は線形独立.

(ii) S の任意の元は有限個の元 $v_1, \ldots, v_m \in M$ の線形結合で表せる.

一つ補助命題を示しておきます.

命題 2.5.4. 線形空間 V の有限部分集合 S が n 個の元からなる極大線形独立系を持つなら, n 個より多くの S の元は線形従属. 特に S の任意の極大線形独立系は n 個の元からなる.

証明. S の元の数 k に関する帰納法で示す. $k = 1$ の場合, S の極大線形独立系は S 自身に他ならないので, 主張は成立する. 以下 $k > 1$ とし, $k - 1$ 以下の場合に主張が正しいと仮定する.

$M = \{v_1, \ldots, v_n\}$ を S の極大線形独立系とし, $L = \{w_1, \ldots, w_l\} \subset S$ が線形独立だと仮定する. 証明するべきことは $l \leq n$ である.

$L \subset M$ なら $l \leq M$ だから主張が成立する. そこで $L \not\subset M$ と仮定して, $w_i \in L \setminus M$ とする. $S' := S \setminus \{w_i\}$ と置くと M は S' の極大線形独立系. 一方で $L' := L \setminus \{w_i\} = \{w_1, \ldots, \widehat{w_i}, \ldots, w_l\}$ と置くと, $L' \subset S'$ かつ線形独立. S' の元の個数は $k - 1$ だから, 帰納法の仮定が有限部分集合 $S' \subset V$ と極大線形独立系 $M \subset S'$ 及び部分集合 $L' \subset S'$ に適用できて, $l - 1 \leq n$ が得られる.

$n = l - 1$ と仮定しよう. 再び帰納法の仮定から, M のどの元も L' の線形結合で書けることが従う. 実際, $M' \subset M$ を L' の線形結合で書ける元全体のなす部分集合とし, $S'' \subset S'$ を M' の線形結合で書ける元全体のなす部分集合とすると, L' と M' は共に S'' の極大線形独立系である. S'' の元の個数は $k - 1$ 個以下だから, 帰納法の仮定より L' と M' の元の個数は等しく, 特に $M' = M$ である.

M は S の極大線形独立系だから, $w_j \in L \subset S$ は M の線形結合で書ける. 上の議論から M は $L' = L \setminus \{w_j\}$ の線形結合で書けるので, w_j は L' の線形結合で書けることになる. これは L の線形独立性と矛盾する. よって $n \neq l - 1$ であり, 示したかった $n = l$ が得られた. □

それでは定理 2.5.1 を証明します.

定理 2.5.1 の証明. $B = (v_1, \ldots, v_n)$ を有限次元線形空間 V の基底とし, $L = (w_1, \ldots, w_l)$, $w_i \in V$ は線形独立だとする. $S := B \cup L$ に命題 2.5.4 を適用して $n \geq l$ が得られる. これで前半の主張が得られる. 更に L も基底だと仮定すると, 同様に命題 2.5.4 から $l \geq n$ が従う. よって $n = l$ となり, 後半の主張が得られる. □

有限次元線形空間 V の次元を求めるには, その定義 2.5.2 から, V の基底を一つ見つけてその元の個数を求めれば良いです. 例えば:

例 2.5.5. 数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ には例 2.4.2 の標準基底 $e_1, \ldots, e_n$ があるから, $\dim \mathbb{K}^n = n$.

他の例は演習問題で扱います.

部分空間の次元について幾つか主張を紹介します.

補題 2.5.6 (有限次元線形空間の部分空間は有限次元). 有限次元線形空間 V の任意の部分空間 W は有限次元である. 特に $\dim W \in \mathbb{N}$ が定まるが, 更に $\dim W \leq \dim V$ となる.

証明. V は有限次元だから有限個の元からなる基底 B を持つ．以下 B を (添え字付けを忘れて) 集合と見なす．$B \cap W$ を考えると，これは線形独立な B の部分集合だからやはり線形独立で，また W の任意の元は $B \cap W$ の線形結合で書ける．従って $B \cap W$ は有限個の元からなる W の基底であり，W は有限次元である．また $\dim V = \#B$, $\dim W = \#(B \cap W)$ なので，$B \cap W \subset B$ より $\dim W \leq \dim V$. □

命題 2.5.7. W_1 と W_2 を有限次元線形空間 V の部分空間とする．

(1) $W_1 \subset W_2$ ならば $\dim W_1 \leq \dim W_2$.

(2) $W_1 \subset W_2$ かつ $\dim W_1 = \dim W_2$ ならば $W_1 = W_2$.

証明. W_1 が W_2 の部分集合であれば部分空間であり，$W_1 \subset W_2$ と $W_1 \underset{\text{lin}}{\subset} W_2$ は同値なことに注意しておく．$W_1 \subset W_2$ ならば，W_2 の基底 B に対して $W_1 \cap B$ は W_1 の基底．$\#(W_1 \cap B) \leq \#B$ だから $\dim W_1 \leq \dim W_2$ である．また等号成立は $W_1 \cap B = B$，つまり $B \subset W_1$ の時に限って成立するので，$\dim W_1 = \dim W_2$ と $W_1 = W_2$ は同値である． □

有限次元線形空間の部分空間の次元については演習問題で例を幾つか扱います．

最後に有限次元の場合の線形空間の和と次元に関する公式を紹介します．

定理 2.5.8 (和空間の次元公式). W_1 と W_2 が有限次元線形空間 V の部分空間である時，

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2).$$

特に $\dim W_1 + \dim W_2 \geq \dim(W_1 + W_2)$ が成立する．

証明. $W_1 \cap W_2, W_1, W_2$ は全て V の部分空間で，$W_1 \cap W_2 \subset W_1$ 及び $W_1 \cap W_2 \subset W_2$ だから，命題 2.5.7 より適当な $r, s, t \in \mathbb{N}$ を用いて $\dim W_1 \cap W_2 = r$, $\dim W_2 = r + s$, $\dim W_2 = r + t$ と置ける．和空間の次元が $\dim(W_1 + W_2) = r + s + t$ となることを示せば良い．

$W_1 \cap W_2$ の基底を一つ取ってそれを $B_{12} = \{u_1, \dots, u_r\}$ と置く．定理 2.4.15 より，B を延長して W_1 の基底 $B_1 = \{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$ 及び W_2 の基底 $B_2 = \{u_1, \dots, u_r, v'_1, \dots, v'_t\}$ が得られる．これらの合併 $B_1 \cup B_2 = \{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s, v'_1, \dots, v'_t\}$ が和空間 $W_1 + W_2$ の基底であることを示せば十分．

まず生成系であることについて．$W_1 + W_2$ の任意の元 w は適当な $w_1 \in W_1$ と $w_2 \in W_2$ を用いて $w = w_1 + w_2$ と書ける．w_1 は B_1 の線形結合で，w_2 は B_2 の線形結合で書けるから，w は $B_1 \cup B_2$ の線形結合で書ける．

次に線形独立性について．線形関係

$$\sum_{i=1}^{r} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i + \sum_{i=1}^{t} c_i v'_i = 0 \quad (a_i, b_i, c_i \in \mathbb{K}$$

があったとすると，移項して

$$\sum_{i=1}^{r} a_i u_i + \sum_{i=1}^{s} b_i v_i = \sum_{i=1}^{t} (-c_i) v'_i.$$

左辺は W_1 の元で，右辺は W_2 の元だから，両辺ともに $W_1 \cap W_2$ の元である．$B_{12} = \{u_i \mid i = 1, \dots, r\}$ が $W_1 \cap W_2$ の基底だから，左辺について $b_1 = \cdots = b_s = 0$，右辺について $c_1 = \ldots = c_t = 0$ が得られる．これらを元の式に代入して $a_1 = \cdots = a_r = 0$. よって線形関係は自明なものしかない． □

命題 2.5.9. 線形空間 V の二つの部分空間 W_1 と W_2 について，以下の二条件は同値．

(i) W_1+W_2 の元を W_1 の元と W_2 の元の和として表す仕方は一意的.

(ii) $W_1\cap W_2=\{0\}$.

更に V が有限次元なら, 次の条件とも同値である.

(iii) $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2$.

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii): $w\in(W_1\cap W_2)\setminus\{0\}$ が存在すれば, 零元が $0=0+0=w+(-w)$ の二通りで表せる.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $w\in W_1+W_2$ が二通りに

$$w=w_1+w_2=w_1'+w_2',\quad w_1,w_1'\in W_1,\ w_2,w_2'\in W_2$$

と表されれば, 移項して

$$w_1-w_1'=w_2-w_2'$$

となるが, 左辺は W_1 の元で右辺は W_2 の元だから, 両辺とも $W_1\cap W_2$ の元である. よって $W_1\cap W_2=\{0\}$ ならば $(w_1,w_2)=(w_1',w_2')$ である.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) は和空間の次元公式 (定理 2.5.8) から従う. □

演習問題 (解答: 110 ページ)

問題 2.5.1. m 行 n 列の行列空間 $M(m,n;\mathbb{K})$ の次元を求めよ.

問題 2.5.2 (下降冪は多項式空間の基底, [斎藤 09, 問題 1.5.5]**).** (引き続き $\mathbb{K}=\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ とする.) $n\in\mathbb{N}$ とし, $\mathbb{K}[x]_{\le n}\subset\mathbb{K}[x]$ を n 次以下の多項式全体のなす部分空間 (問題 2.1.6) とする. $k\in\mathbb{N}$ に対して

$$(x)_k=x^{\underline{k}}:=x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)$$

と定め, x を底とする**下降 k 乗冪** (falling k-factorial) と呼ぶ[*52]. 但し $(x)_0=1$ と約束する. この時,

$$\bigl((x)_k\bigr)_{k=0}^n=\bigl(1,x,x(x-1),\dots,x(x-1)\cdots(x-n+1)\bigr)$$

が $\mathbb{K}[x]_{\le n}$ の基底であることを示せ.

問題 2.5.3. 問題 2.4.8 で扱った正方行列の空間 $M(n;\mathbb{K})$ の $\mathbb{K}$ 部分空間 $S(n;\mathbb{K})$, $A(n;\mathbb{K})$, $U(n;\mathbb{K})$, $L(n;\mathbb{K})$, $D(n;\mathbb{K})$ の次元をそれぞれ求めよ.

問題 2.5.4. 有限次元線形空間 V の部分空間 $W_1,W_2,\dots,W_k$ に対して

$$\dim(W_1+W_2+\cdots+W_k)\le\dim W_1+\dim W_2+\cdots+\dim W_k$$

が成立することを示せ.

問題 2.5.5. $\mathbb{R}$ 上の滑らかな実数値函数のなす線形空間 $C^\infty(\mathbb{R})$ を思い出す (補題 1.3.6). $n\in\mathbb{N}$ とし, $2n+1$ 個の実函数 1, $\cos kx$, $\sin kx$ $(k=1,\dots,n)$ が張る $C^\infty(\mathbb{R})$ の部分空間を V_n と書く. 次式を示せ.

$$\dim_{\mathbb{R}}V_n=2n+1.$$

[*52] かつて $(x)_k$ は Pochhammer 記号と呼ばれていましたが, Knuth が
D.E. Knuth, *Two Notes on Notation*, Amer. Math. Monthly, **99** (1992), no. 5, 403–422; arXiv:math/9205211
で指摘して以来, 使われない名称になりました. 記号 $x^{\underline{k}}$ も Knuth が導入したもので, 他に $x^{\downarrow k}$ と書いたりします.

問題 2.5.6 ([齋藤 85, p.120, 第 4 章 §4, 問題 4, 1)]). 三次正方行列の空間 $M(3;\mathbb{K})$ を考える. $a,b,c \in \mathbb{K}$ は互いに異なるものとして, 対角行列 $A \in M(3;\mathbb{K})$ を

$$A := \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$$

で定める. $M(3;\mathbb{K})$ の部分集合

$$V_A := \{X \in M(3;\mathbb{K}) \mid AX = XA\}$$

が部分空間であることを示し, $\dim_{\mathbb{K}} V_A$ を求めよ.

問題 2.5.7 ([齋藤 85, p.120, 第 4 章 §4, 問題 4, 2)]). 前の問題 2.5.6 において, 対角行列 A の代わりに

$$A_0 := \begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix}, \quad A_1 := \begin{pmatrix} b & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & a \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & b \end{pmatrix}$$

(但し $a,b \in \mathbb{K}$, $a \neq b$) を取った場合でも, 各 $i = 0,\ldots,3$ について部分集合

$$V_i := \{X \in M(3;\mathbb{K}) \mid A_i X = XA_i\}$$

が $M(3;\mathbb{K})$ の部分空間であることを示し, $\dim_{\mathbb{K}} V_i$ を求めよ.

問題 2.5.8 ([斎藤 09, 問題 1.6.1]). 多項式空間 $\mathbb{K}[x]$ の部分集合

$$W := \{P \in \mathbb{K}[x] \mid P \text{ の奇数次項は全て } 0 \text{ であり, かつ } P(1) = 0\}$$

が部分空間であることを示し, その基底を一組与えよ.

問題 2.5.9 ([斎藤 09, 例題 1.5.3]). $\mathbb{F}_q$ を位数 q の有限体とする. $\mathbb{F}_q$ 上の n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{F}_q^n$ の次元 $\dim_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q$ を求めよ.

問題 2.5.10. $n \in \mathbb{N}$ とする. $\mathbb{C}^n$ を $\mathbb{R}$ 上の線形空間と見なした時の次元 $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n$ を求めよ.

2.6　発展: 無限次元の場合の基底存在定理

この副節では, 参考書 [佐武 15, §1.6] に書いてある, 有限次元だとは限らない任意の線形空間が基底を持つこと (定理 2.4.11) の証明を紹介します. まず次の主張を示します.

定義 2.6.1. X と S を集合とし, S の任意の元は X の部分集合だとする.

(1) 元 $A \in S$ は次の条件を満たす時, S の**極大元**と呼ばれる: 任意の $B \in S$ に対し, $A \subset B$ ならば $B = A$.

(2) T を S の部分集合とする. 任意の二元 $A,B \in T$ について $A \subset B$ または $B \subset A$ が成立する時, T は包含関係に関して**全順序集合** (totally ordered set) だという.

公理 2.6.2 (**Zorn の補題**, [斎藤 09, p.35]). X と S を集合とし, S の任意の元は X の部分集合だとする. 更に S は次の条件 (Z) を満たすものとする.

(Z) S の空でない部分集合 T が包含関係に関し全順序集合だとすると, $B \in S$ であって, 任意の $A \in T$ に対して $A \subset B$ となるものが存在する.

この時, 任意の元 $A \in S$ に対し, S の極大元 B であって $A \subset B$ を満たすものが存在する.

これは「補題」と名付けられていますが, 実際には集合論の公理の一つです[*53].

定理 2.4.11 を示すのに, まず次の主張を示します. 証明に Zorn の補題 (公理 2.6.2) を使いますが, その詳細は [斎藤 09, 定理 1.6.7] をご覧下さい.

定理 2.6.3 ([斎藤 09, 定理 1.6.7]). V を線形空間とし, $(x_i)_{i\in I}$ を V の生成系とする. J を I の部分集合であって $(x_j)_{j\in J}$ が一次独立なものとする. この時 J を含む I の部分集合 H であって $(x_h)_{h\in H}$ が V の基底になるものが存在する.

では基底の存在定理 2.4.11 を示します.

定理 2.4.11 の証明. 注意 2.4.4 より $V \neq \{0\}$ と仮定してよい. V の生成系として添字集合を V 自身とする $(v)_{v\in V}$ が取れる. また仮定より零元 0 と異なる元 $v_0 \in V \setminus \{0\}$ が存在するが, それだけからなる一点集合 $\{v_0\}$ は V の部分集合であって一次独立である. よって定理 2.6.3 を $I = V$ と $J = \{v_0\}$ に適用して, V の基底が得られる. □

定理 2.6.3 を言い換えると次の主張が得られます.

系 2.6.4 (**基底の延長**). V を線形空間, W を V の部分空間とし, $(v_j)_{j\in J}$ を W の基底とする. この時 V の基底 $(v_i)_{i\in I}$ であって $J \subset I$ となるものが存在する.

次に無限次元の場合も含む線形空間の次元の定義を与えましょう. 有限次元の場合の次元の定義 2.5.2 は, 基底をなす元の個数が基底の取り方によらないこと (定理 2.5.1) に基づいていました. 一般の場合も同様で, まず次の主張を示す必要があります.

定理 2.6.5 ([斎藤 09, 系 1.6.5]). V を線形空間とする. $(x_i)_{i\in I}$ と $(y_j)_{j\in J}$ が V の基底ならば, 全単射 $I \to J$ が存在する.

証明は後回しにして, 一般の場合の線形空間の次元を定義します. 集合の濃度の概念[*54]を用います.

定義 2.6.6. 線形空間 V について, $(x_i)_{i\in I}$ を V の基底とする. この時 I の濃度を V の**次元** (dimension) と呼び $\dim V$ と書く. 係数体 $\mathbb{K}$ を強調したい時は $\mathbb{K}$ **上の次元**と呼んで $\dim_{\mathbb{K}} V$ と書く.

定理 2.6.5 より線形空間の次元は基底の取り方によらないので well-defined です.

定義 2.6.7. 次元が有限である線形空間を**有限次元線形空間** (a finite dimensional linear space), そうでない線形空間を**無限次元線形空間** (an infinite dimensional linear space) と呼ぶ.

例 2.6.8. $\mathbb{K}$ を体とする. 数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ は $\mathbb{K}$ 上 n 次元, つまり

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$$

となり, 特に有限次元. 多項式空間 $\mathbb{K}[x]$ や形式的冪級数の空間 $\mathbb{K}[\![x]\!]$ は無限次元.

では定理 2.6.5 の証明を始めます. まず有限次元の場合を議論します. 補題を一つ用意します.

[*53] 詳しくは集合論の教科書, 例えば [斎藤 09, §7.3] を参照して下さい.

[*54] 例えば [斎藤 09, §7.2] を参照して下さい.

補題 2.6.9 ([斎藤 09, 補題 1.5.5])**.** V を体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間とし, W を V の部分空間とする. この時, 二元 $x, y \in V$ に対して以下の二条件は同値.

(i) $x \notin W$ かつ $x \in W + \mathbb{K}y$.

(ii) $y \notin W$ かつ $y \in W + \mathbb{K}x$.

証明. 教科書 [斎藤 09] の証明と本質的に同じですが, 文言を少し変えて説明します.

(i) $\Rightarrow$ (ii): $x \in W + \mathbb{K}y$ より, $w \in W$ と $a \in \mathbb{K}$ が存在して $x = w + az$. $x \notin W$ だから $a \neq 0$ であり, $\mathbb{K}$ は体だから $a^{-1} \in \mathbb{K}$ が存在して, $y = a^{-1}(x - z) \in W + \mathbb{K}x$ となる. また, $y \in W$ なら $x \in W + \mathbb{K}y = W$ となって仮定と矛盾するので $y \notin W$ である.

(ii) $\Rightarrow$ (i): 上の議論で x と y を置換すれば良い. □

定理 2.6.5 の証明, 第一段, [斎藤 09, 定理 1.5.4]. I と J が共に有限集合の場合を示す. 記号を変えて, 有限個の元の族 $(x_i)_{i=1}^m$ と $(y_j)_{j=1}^n$ が共に V の基底ならば $m = n$ であることを示す.

まず $f\colon \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ を定義する. $V_i \coloneqq \langle x_1, \ldots, x_i \rangle \subset V$ と定めることで部分空間の列

$$0 = V_0 \subset V_1 = \langle x_1 \rangle \subset \cdots \subset V_i = \langle x_1, \ldots, x_i \rangle \subset \cdots \subset V_m = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle = V$$

が得られる. 同様に $W_j \coloneqq \langle y_1, \ldots, y_j \rangle$ と定める. すると各 $i = 1, \ldots, m$ に対し, 部分空間の列

$$V_{i-1} = V_{i-1} + W_0 \subset V_{i-1} + W_1 \subset \cdots \subset V_{i-1} + W_j \subset \cdots \subset V_{i-1} + W_n = V$$

が得られる. 命題 2.3.12 より $x_i \notin V_{i-1} = V_{i-1} + W_0$. 一方で $x_i \in V = V_{i-1} + W_n$ だから, $x_i \in V_{i-1} + W_j$ となる最小の $j = 1, \ldots, n$ が定まる. この j を $f(i)$ と置く. これで写像 f が定まった.

同様に, $(x_i)_{i=1}^m$ と $(y_j)_{j=1}^n$ の役割を入れ替えて議論することで, 写像 $g\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ が定まる. あとは f と g が互いに逆写像であることを示せばよい. ここで $f(i) = j$ であることは補題 2.6.9 の条件 (i) で $W = V_{i-1} + W_{j-1}$, $x = x_i$, $y = y_j$ としたものであり, $g(j) = i$ であることは補題 2.6.9 の条件 (ii) で同じ置き方をしたものである. よって $f(i) = j \iff g(j) = i$, つまり f と g は互いに逆写像である. □

無限次元の場合の証明には, 次の**選択公理** (axiom of choice) が必要です. 実は選択公理は Zorn の補題 (公理 2.6.2) と同値です[*55].

公理 2.6.10 (**選択公理**)**.** 任意の全射 $f\colon X \to Y$ に対し, 単射 $g\colon Y \to X$ であって $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ を満たすものが存在する. 但し $\mathrm{id}_Y\colon Y \to Y$ は恒等写像.

発展 2.6.11. 結局, 基底存在定理 (定理 2.4.11) は「体 $\mathbb{K}$ 上の任意の線形空間 V に対して, ある集合 I が存在して V と $\mathbb{K}^I = \mathrm{Map}(I, \mathbb{K})$ (命題 1.3.2 参照) は同型である」ということを主張しています.

環上の加群という線形空間の概念の一般化があることを発展 1.2.4 で触れましたが, 一般の環 R についても R 自身は左 R 加群であり, それから左 R 加群 R^I が定義できます. この形をしている左 R 加群のことを**自由左 R 加群** (free left R-module) と呼びます.

つまり, 基底存在定理は「体上の任意の (左) 加群は自由である」と言い換えられます.

---

*55 詳しくは [斎藤 09, §7.3] を参照して下さい.

3 線形写像の行列表示 (05/07)

今回の内容は教科書の [佐武 15, Ⅲ §7] に該当します．引き続き, 断らない限り線形空間といったら体 $\mathbb{K}$ 上のものを考えます．

3.1 線形写像と自己準同型

線形写像の概念は § 1.4 で既に導入しましたが, 復習のため定義を再掲します．

定義 (定義 1.4.1)**.** 線形空間 V から W への写像 $f\colon V \to W$ であって二条件

(i) 任意の $v, v' \in V$ に対して $f(v+v') = f(v) + f(v')$

(ii) 任意の $c \in \mathbb{K}$ と $v \in V$ に対して $f(cv) = cf(v)$

を満たすものを V **から** W **への線形写像**または **(線形) 準同型**と呼ぶ．線形写像 $V \to W$ 全体のなす集合を

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \coloneqq \{ f\colon V \to W \mid \text{線形写像} \}.$$

と表す[*56]．$\mathbb{K}$ 上で考えていることが明らかな場合は $\mathrm{Hom}(V, W) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ と略記する．

例を二つだけ復習します．例 1.4.2 では代表的な線形写像として, m 行 n 列の行列 $A \in M(m, n; \mathbb{K})$ に対し数ベクトル空間の間の左 A 倍写像 l_A を説明しました．

$$l_A\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m, \quad v \longmapsto Av. \tag{3.1.1}$$

また無限次元線形空間の間の線形写像として, 例 1.4.6 で定数係数微分作用素を説明しました．

$$D = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k}\colon C^\infty(I, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(I, \mathbb{R}), \quad f(x) \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)}(x). \tag{3.1.2}$$

ここで $C^\infty(I, \mathbb{R})$ は開区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の滑らかな実数値函数の空間であり, また $a_k \in \mathbb{R}$ です．

線形写像 $V \to W$ であって $V = W$ であるものは別の名前がついています．

定義 3.1.1 (**自己準同型**)**.** $\mathbb{K}$ 線形空間 V から自分自身への $\mathbb{K}$ 線形写像 $V \to V$ を V の $\mathbb{K}$ **自己準同型** ($\mathbb{K}$-endomorphism) または単に**自己準同型** (endomorphism) と呼ぶ．V の自己準同型全体のなす集合を次の様に書く[*57]．

$$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V) = \{ f\colon V \to V \mid \text{線形写像} \}.$$

$\mathbb{K}$ 上のものである事が明らかな場合は $\mathrm{End}(V)$ と書く．

例えば (3.1.1) で $m = n$ の場合, つまり n 次正方行列 A から定まる左掛算写像 l_A は $\mathbb{K}^n$ の自己準同型です．また (3.1.2) の微分作用素は $C^\infty(I, \mathbb{R})$ の自己準同型です．

例 1.4.5 の零写像 $0\colon V \to V$ も $\mathrm{End}(V)$ の元ですが, $V \neq \{0\}$ なら $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ には別の元があります．

例 3.1.2. V の恒等写像

$$\mathrm{id} = \mathrm{id}_V\colon V \longrightarrow V, \quad v \longmapsto v$$

[*56] 準同型の英語 homomorphism の最初 3 文字が由来です．

[*57] 自己準同型の英語 endomorphism の最初 3 文字が由来です．

は線形写像, つまり $\mathrm{id} \in \mathrm{End}(V)$ である．実際, 任意の $v, v' \in V$ 及び $c \in \mathbb{K}$ に対して $\mathrm{id}(v+v') = v+v' = \mathrm{id}(v) + \mathrm{id}(v')$ 及び $\mathrm{id}(c.v) = c.v = c.\mathrm{id}(v)$ が成立する．

線形写像と基底の関係を一つ述べます．これは後で度々使うことになります (定理 3.3.9 や命題 3.4.1 等).

命題 3.1.3. V, W を線形空間とし, V は有限次元だとする．また $v_1, \dots, v_n \in V$ が V の基底を成し, n 個の元 $w_1, \dots, w_n \in W$ が与えられたとする．この時, 線形写像 $f\colon V \to W$ であって任意の $i = 1, \dots, n$ に対して $f(v_i) = w_i$ となるものが唯一存在する．

証明. まず存在することを示す．$v_1, \dots, v_n$ は V の基底だから, 任意の $v \in V$ に対して $c_i \in \mathbb{K}$ $(i = 1, \dots, n)$ が一意に存在して $v = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ と書ける．そこで与えられた $w := (w_i)_{i=1}^n$ に対し, 写像 $f_w\colon V \to W$ を

$$f_w(v) := \sum_{i=1}^n c_i w_i \in W \tag{3.1.3}$$

で定める．これは $f_w(v_i) = w_i$ を満たすから, 後は f_w が線形写像である事を示せば存在性が従う．

(i) $v, v' \in V$ を任意に取る．$v_1, \dots, v_n$ は V の基底だから, $c_i, c'_i \in \mathbb{K}$ $(i = 1, \dots, n)$ が一意に存在して $v = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ 及び $v' = \sum_{i=1}^n c'_i v_i$ が成立する．この時 $v + v' = \sum_{i=1}^n (c_i + c'_i) v_i$ と書けるので,

$$f_w(v+v') = \sum_{i=1}^n (c_i + c'_i) w_i = \sum_{i=1}^n c_i w_i + \sum_{i=1}^n c'_i w_i = f_w(v) + f_w(v').$$

ここで最初と三番目の等式は f_w の定義を, 二番目の等式は W の和の結合性を用いた．

(ii) 任意の $v \in V$ と $c \in \mathbb{K}$ を取る．$v = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ と一意に書けて, 上の議論と同様に

$$f_w(cv) = \sum_{i=1}^n c c_i w_i = c \sum_{i=1}^n c_i w_i = c.f_w(v) = (cf_w)(v).$$

次に一意性を示す．f が $f(v_i) = w_i$ を満たす線形写像であれば $f = f_w$ が成立することを示せば良い．それには任意の $v \in V$ に対して $f(v) = f_w(v)$ となることを示せば良い．$c_i \in \mathbb{K}$ $(i = 1, \dots, n)$ が一意に存在して $v = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ と書けるから, f の線形性より

$$f(v) = f\Bigl(\sum_{i=1}^n c_i v_i\Bigr) = \sum_{i=1}^n c_i f(v_i)$$

となって, 確かに $f_w(v)$ の値 (3.1.3) と一致する． □

注意 3.1.4. 命題 3.1.3 の線形写像 f を, **対応 $v_i \mapsto w_i$ を線形に拡張して得られる線形写像**と呼びます．

演習問題　(解答: 112 ページ)

問題 3.1.1. $n \in \mathbb{N}$ とする．問題 1.4.6 で説明した n 階の定数係数微分作用素

$$D = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dk^k} : p(x) \longmapsto \sum_{k=0}^n a_k p^{(k)}(x) \quad (a_k \in \mathbb{R})$$

は一変数多項式空間 $\mathbb{R}[x]$ の自己準同型である事を示せ．また任意の $m \in \mathbb{N}$ について, D は m 次以下の多項式空間 $\mathbb{R}[x]_{\le m}$ の自己準同型を定めることを示せ．

問題 3.1.2 (**シフト作用素**)**.** $n \in \mathbb{N}$ とし, n 次以下の多項式の空間を $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ と書く. $h \in \mathbb{K}$ として, 多項式 $p(x)$ の変数 x を $x+h$ に置き換える写像

$$T_h\bigl(p(x)\bigr) \longmapsto p(x+h)$$

が多項式空間 $\mathbb{K}[x]$ 及び $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ の自己準同型である事を示せ. T_h を**シフト作用素** (shift operator) と呼ぶ.

問題 3.1.3 (**差分作用素**)**.** 前の問題 3.1.2 と同様の記号を使って, $h \in \mathbb{K}$ に対して写像 Δ_h を次で定める.

$$\Delta_h\bigl(p(x)\bigr) \coloneqq p(x+h) - p(x).$$

これが $\mathbb{K}[x]$ 及び $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ の自己準同型である事を示せ. Δ_h を**差分作用素** (difference operator) と呼ぶ[*58].

問題 3.1.4 ([斎藤 09, 命題 2.1.10])**.** V と W を次元が等しい有限次元線形空間とする. 線形写像 $f\colon V \to W$ について, 以下の三条件は同値である事を示せ.

(i) f は同型写像. (ii) f は単射. (iii) f は全射.

問題 3.1.5 (**三角函数の空間上のシフト作用素**)**.** $n \in \mathbb{N}$ とする. $2n+1$ 個の実函数 1, $\cos kx$, $\sin kx$ $(k = 1, \ldots, n)$ が張る $C^\infty(\mathbb{R})$ の部分空間 V と書くと, $\dim_{\mathbb{R}} = 2n+1$ である (問題 2.5.5). $a \in \mathbb{K}$ として, $f \in V$ に対するシフト作用素 $T_a\colon f(x) \mapsto f(x+a)$ が V の自己準同型である事を示せ.

問題 3.1.6 ([斎藤 09, 例 2.2.12])**.** $\mathbb{C}$ は複素線形空間かつ実線形空間である事に注意して, 以下の主張を示せ.

(1) 複素共役 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$ は実線形写像であるが, 複素線形写像ではない.

(2) $c \in \mathbb{C}$ に対して, c 倍写像 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto cz$ は複素線形写像であり, かつ実線形写像でもある.

問題 3.1.7 (**複素線形写像の共役**. [斎藤 09, 例 2.2.13])**.** V, W を複素線形空間とし, V', W' をそれぞれの共役 (問題 1.3.8) とする. また $f\colon V' \to W$ を写像とする.

(1) 集合としては $V = V'$ である事に注意して, 次の同値を示せ.
写像 $f\colon V' \to W$ が複素線形写像 $\Leftrightarrow$ 写像 $f\colon V \to W$ が以下の二条件を満たす.
(i) 任意の $v_1, v_2 \in V$ に対して $f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2)$.
(ii) 任意の $c \in \mathbb{C}$ と $v \in V$ に対して $f(cv) = \overline{c}f(v)$.

(2) 写像 $f\colon V \to W$ が複素線形写像ならば, 写像 $V' \to W'$, $v \mapsto f(v)$ も複素線形写像である事を示せ. これを同じ記号で $f\colon V' \to W'$ と書いて**複素線形写像 f の共役**と呼ぶ.

問題 3.1.8 ([斎藤 09, 問題.2.2.1])**.** $a_1, \ldots, a_n$ を $\mathbb{K}^n$ の基底とし, また $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}^n$ とする. そして $A, B \in M(n; \mathbb{K})$ を $A \coloneqq (a_1 \ \cdots \ a_n)$, $B \coloneqq (b_1 \ \cdots \ b_n)$ と列ベクトルを並べて得られる正方行列とする.

(1) A が正則行列である事を示せ.

(2) 命題 3.1.3 より, 線形写像 $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ であって任意の $i = 1, \ldots, n$ に対して $f(a_i) = b_i$ となるものが一意に存在する. この f が左 BA^{-1} 倍写像 $l_{BA^{-1}}$ と一致する事を示せ.

[*58] 教科書 [佐武 15, 例 2.2.8] では少し違った意味の差分作用素 Δ が扱われています. この講義ノートの差分作用素 Δ_h の定義を少し拡張して, $h = 1$ と置くと教科書の Δ になります. 興味がある人は考えてみて下さい.

3.2 線形写像の空間

線形写像の集合 $\mathrm{Hom}(V,W)$ の一般的な性質を幾つか紹介します．抽象度の高い内容ですが，議論自体は難しくないです．参考書の [斎藤 09, §4.4] が該当箇所です．

補題 3.2.1. 線形写像の合成は線形写像である．特に線形空間 U,V,W について，写像の合成 $\circ$ を使って

$$\mathrm{Hom}(V,W)\times\mathrm{Hom}(U,V)\longrightarrow\mathrm{Hom}(U,W),\quad (g,f)\longmapsto g\circ f$$

によって写像 $\circ\colon \mathrm{Hom}(V,W)\times\mathrm{Hom}(U,V)\to\mathrm{Hom}(U,W)$ が定まる．

証明． $f\in\mathrm{Hom}(U,V)$ と $g\in\mathrm{Hom}(V,W)$ の合成写像 $g\circ f\colon U\to W$ が線形写像である事を示せばよい．任意の $u,u'\in U$ 及び $c\in\mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned}(g\circ f)(u+u')&=g\big(f(u+u')\big) && [\text{合成写像の定義}]\\ &=g\big(f(u)+f(u')\big) && [f\text{ の線形性}]\\ &=g\big(f(u)\big)+g\big(f(u')\big) && [g\text{ の線形性}]\\ &=(g\circ f)(u)+(g\circ f)(u') && [\text{合成写像の定義}]\end{aligned}$$

となるので定義 1.4.1 (i) は成立する．同様に，(ii) も以下のように成立する．

$$(g\circ f)(cu)=g\big(f(cu)\big)=g\big(c.f(u)\big)=c.g\big(f(u)\big)=c.(g\circ f)(u).$$

□

系 3.2.2. 補題 3.2.1 の写像 $\circ$ は結合的．つまり，任意の線形空間 V_1,V_2,V_3,V_4 とそれらの間の線形写像 $f_i\in\mathrm{Hom}(V_i,V_{i+1})$ $(i=1,2,3)$ について

$$(f_3\circ f_2)\circ f_1=f_3\circ(f_2\circ f_1)\in\mathrm{Hom}(V_1,V_3).$$

また線形空間 V の恒等写像 $\mathrm{id}_V\in\mathrm{Hom}(V,V)$ は $\circ$ に関する単位元．つまり，任意の線形空間 V,W と線形写像 $f\in\mathrm{Hom}(V,W)$ について

$$f\circ\mathrm{id}_V=f=\mathrm{id}_W\circ f\in\mathrm{Hom}(V,W).$$

証明． 写像の合成の結合性から，写像 $V_1\to V_3$ として $(f_3\circ f_2)\circ f_1=f_3\circ(f_2\circ f_1)$．補題 3.2.1 より両辺とも線形写像だから，これは $\mathrm{Hom}(V_1,V_3)$ の元の等式である．後半も同様で，恒等写像の定義から写像 $V\to W$ として $f\circ\mathrm{id}_V=f=\mathrm{id}_W\circ f$ であり，補題 3.2.1 より $\mathrm{Hom}(V,W)$ における等式である． □

発展 3.2.3 ([斎藤 09, p.147, 余談 59])**.** 系 3.2.2 は，線形空間全体とそれらの間の線形写像の集合が**圏** (category) をなす，ということを意味します．

例 3.2.4. $l,m,n\in\mathbb{Z}_{>0}$ として，行列 $A\in M(l,m;\mathbb{K})$ と $B\in M(m,n;\mathbb{K})$ による左掛算写像 $l_A\colon\mathbb{K}^m\to\mathbb{K}^l$ と $l_B\colon\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m$ を考えると，その合成 $l_A\circ l_B\colon\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^l$ は補題 3.2.1 より線形写像である．実は

$$l_A\circ l_B=l_{AB},$$

つまり合成写像は行列の積 AB の左掛算写像と一致する．実際，任意の $v\in\mathbb{K}^n$ に対して

$$(l_A\circ l_B)(v)=l_A(l_B(v)) \qquad [\text{写像の合成}\circ\text{の定義}]$$

$$
\begin{aligned}
&= l_A(Bv) = A(Bv) && [\text{左掛算写像の定義}]\\
&= (AB)v && [\text{行列の積の結合律}]\\
&= l_{AB}(v) && [\text{左掛算写像の定義}]
\end{aligned}
$$

なので, $l_A \circ l_B = l_{AB}$ である.

線形写像の集合に関して, 零空間 $\{0\}$ (定義 1.2.8) は特別な振る舞いをします.

補題 3.2.5 ([斎藤 09, p.39]). 任意の線形空間 V に対して, $\mathrm{Hom}(V,\{0\})$ と $\mathrm{Hom}(\{0\},V)$ は零写像 0 からなる一点集合である. つまり,

$$\mathrm{Hom}(V,\{0\}) = \{0\colon V \to \{0\}\}, \quad \mathrm{Hom}(\{0\},V) = \{0\colon \{0\} \to V\}.$$

証明. 前半については, 零空間は一点集合だから写像 $V \to \{0\}$ は任意の v を 0 に写すもの, つまり零写像しかない. 零写像は線形写像だから $\mathrm{Hom}(V,\{0\}) = \{0\}$. 後半は, 補題 1.4.3 より任意の $f \in \mathrm{Hom}(\{0\},V)$ は $f(0) = 0_V$ を満たすので $f = 0$. □

実は $\mathbb{K}$ 線形写像全体の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ は $\mathbb{K}$ 線形空間になります.

命題 3.2.6 ([斎藤 09, 命題 2.1.2]). $\mathbb{K}$ 線形空間 V から W への準同型全体のなす集合 $\mathrm{Hom}(V,W)$ について,

(1) $f,g \in \mathrm{Hom}(V,W)$ に対して $f+g \in \mathrm{Hom}(V,W)$ が次で定まる.

$$(f+g)(v) \coloneqq f(v) + g(v). \tag{3.2.1}$$

(2) $c \in \mathbb{K}$ と $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ に対して $c.f = cf \in \mathrm{Hom}(V,W)$ が次で定まる.

$$(c.f)(v) \coloneqq c.f(v). \tag{3.2.2}$$

(3) $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W),+,0,.)$ は $\mathbb{K}$ 線形空間である. ここで零元は例 1.4.5 の零写像 $0\colon V \to W$.

証明. (1) 式 (3.2.1) で定まる写像 $f+g\colon V \to W$ が線形写像である事を示す. 定義 1.4.1 の条件 (i) は

$$
\begin{aligned}
(f+g)(v+v') &= f(v+v') + g(v+v') = \bigl(f(v)+f(v')\bigr) + \bigl(g(v)+g(v')\bigr)\\
&= \bigl(f(v)+g(v)\bigr) + \bigl(f(v')+g(v')\bigr) = (f+g)(v) + (f+g)(v')
\end{aligned}
$$

より成立する. (ii) も次のように成立する.

$$(f+g)(cv) = f(cv) + g(cv) = cf(v) + cg(v) = c\bigl(f(v)+g(v)\bigr) = c.(f+g)(v).$$

(2) 式 (3.2.2) で定まる写像 $cf\colon V \to W$ が線形写像である事を示す. 定義 1.4.1 の条件 (i) は

$$(cf)(v+v') = c.f(v+v') = c\bigl(f(v)+f(v')\bigr) = c.f(v) + c.f(v') = (cf)(v) + (cf)(v').$$

より成立する. (ii) も次のように成立する.

$$(cf)(c'v) = c.f(c'v) = c\bigl(c'.f(v)\bigr) = cc'.f(v) = c'\bigl(c.f(v)\bigr) = c'.(cf)(v).$$

(3) 線形空間の定義 1.2.1 の各条件を確認すれば良い. 詳細は問題 3.2.1.

□

定義 3.2.7. 線形空間 V と W に対して, 線形写像全体の集合 $\mathrm{Hom}(V, W)$ に命題 3.2.6 で線形空間の構造を入れたものを V **から** W **への線形写像の空間** (the linear space of linear maps) 又は**準同型の空間** (the linear space of homomorphisms) と呼ぶ.

発展 3.2.8. 発展 3.2.3 の続きの話をすると, 命題 3.2.6 (と問題 3.2.3) は $\mathbb{K}$ 線形空間の圏 $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ が $\mathbb{K}$ **線形圏** ($\mathbb{K}$-linear category) である事を意味します.

与えられている線形写像から新たな線形写像を構成する方法を考えましょう. まず, 補題 3.2.1 で扱った二つの線形写像の合成があります. それと部分空間に関する考察を合わせると, 次のような線形写像の構成が得られます.

補題 3.2.9 ([斎藤 09, p.39])**.** V と W を線形空間, $U \subset V$ を部分空間とする. また $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ とする.
(1) 包含写像 $\iota_U : U \to V,\ u \mapsto u$ は線形写像.
(2) f と包含写像 ι_U との合成 $f \circ \iota_U : U \to W$ は線形写像. これを

$$f|_U := f \circ \iota_U \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U, W), \quad f|_U(u) := f(u)$$

と書き, 線形写像 f の部分空間 U への**制限** (restriction) と言う.

証明. (1) 任意の $u, u' \in U$ と $c \in \mathbb{K}$ に対して, U が部分空間であることから $u + u', cu \in U$ となるので $\iota_U(u + u') = u + u' = \iota_U(u) + \iota_U(u')$ 及び $\iota_U(cu) = cu = c\iota_U(u)$ が成立する.
(2) 補題 3.2.1 と (1) から $f \circ \iota_U$ は線形写像である.

□

演習問題 (解答: 113 ページ)

問題 3.2.1. 命題 3.2.6 (3) を示せ.

問題 3.2.2. 行列 $A \in M(m, n; \mathbb{K})$ の左掛算写像 l_A は $\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ の元である. 従って, 対応 $A \mapsto l_A$ から写像

$$\varphi : M(m, n; \mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m), \quad A \longmapsto l_A$$

が定まる. この φ は線形写像か否か, また全単射か否かを論じよ.

問題 3.2.3. U, V, W を線形空間とする. 線形写像の合成写像

$$\mathrm{Hom}(V, W) \times \mathrm{Hom}(U, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U, W), \quad (g, f) \longmapsto g \circ f$$

について, 以下の主張を示せ.
(1) $g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ を一つ取って固定すると, g との合成で定まる写像

$$\mathrm{Hom}(U, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U, W), \quad f \longmapsto g \circ f$$

は線形写像である.
(2) $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ を一つ取って固定すると, f との合成で定まる写像

$$\mathrm{Hom}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U, W), \quad g \longmapsto g \circ f$$

は線形写像である.

問題 3.2.4. V と W を線形空間とする．写像

$$\mathrm{ev}\colon V \times \mathrm{Hom}(V, W) \longrightarrow W, \quad (v, f) \longmapsto f(v)$$

について，$\mathrm{ev}(v, -)\colon \mathrm{Hom}(V, W) \to W$ と $\mathrm{ev}(-, f)\colon V \to W$ が共に線形写像である事を示せ．この写像 ev を**評価写像** (evaluation map) と呼ぶ[*59]．

問題 3.2.5. 例 1.4.6 と問題 3.1.1 で n 階の定数係数微分作用素

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dk^k} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[x], \mathbb{R}[x]), \quad p(x) \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k p^{(k)}(x) \quad (a_k \in \mathbb{R})$$

が $\mathbb{R}[x]$ の自己準同型，つまり $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[x])$ の元を定める事を扱った．係数 $a_k \in \mathbb{R}$ 達を動かして得られる部分集合

$$\left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dk^k} \;\middle|\; a_k \in \mathbb{R}\ (k = 0, \ldots, n) \right\} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[x])$$

が部分空間であることを示せ．

問題 3.2.6 ([足助 12, 問 3.12.11])**.** V と W を線形空間とし，$f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ とする．

$$U := \{v \in V \mid f(v) = g(v)\}, \quad X := \{w \in W \mid \exists v_1, v_2 \in V,\ w = f(v_1) = g(v_2)\}$$

と置くと U は V の部分空間であり，また X は W の部分空間である事を示せ．

3.3　線形同型

定義 1.4.7 で同型写像の概念を導入しましたが，この副節で改めて説明します．

集合論では，二つの集合 S と T の間に全単射 (ないし可逆な写像) $f\colon V \to W$ がある場合，V と W を同一視することができました．線形空間の場合の「同一視」の概念が今から導入する (**線形**) **同型**です．

定義 3.3.1 ([佐武 15, Ⅲ §7, p.125])**.** V と W を $\mathbb{K}$ 線形空間とする．

(1) 可逆な線形写像 $f\colon V \to W$ を $\mathbb{K}$ **線形空間の同型写像** (isomorphism of $\mathbb{K}$-linear spaces)，$\mathbb{K}$ 線形同型写像 ($\mathbb{K}$-linear isomorphism)，または単に**同型写像**あるいは**同型** (isomorphism) と呼ぶ．f が同型写像であることを強調したい時は $f\colon V \xrightarrow{\sim} W$ と書く．

(2) V から自分自身への同型写像 $V \xrightarrow{\sim} V$ のことを V の**自己同型** (automorphism) と呼ぶ．

実は今まで扱ってきた線形写像の中で同型写像であるものが数多くあります．とりあえずここでは簡単な例を三つだけ挙げます．

例 3.3.2. 線形空間 V の恒等写像 $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ は同型写像．実際，例 3.1.2 より id_V は線形写像で，また全単射だから同型．

注意. 恒等写像は同型写像の例ですが，同型写像は恒等写像だとは限りません．以下で恒等写像ではない同型写像を二つ挙げます．

[*59] 線形写像に限らず，任意の写像に対しても評価写像を定義する事ができます．正確に述べると，集合 S, T に対して $\mathrm{Map}(S, T) := \{f\colon S \to T\}$ として，写像 $\mathrm{ev}\colon S \times \mathrm{Map}(S, T) \to T$, $(s, f) \mapsto f(s)$ を評価写像と呼びます．当然ですが，この場合の ev は線形写像ではありません．

例 3.3.3. $m, n \in \mathbb{N}$, $m \le n$ とする．例 2.2.4 で導入した数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の二つの部分空間 $W_m := \{{}^t(v_1 \ldots, v_m\ 0 \cdots 0) \mid v_i \in \mathbb{K}\}$ と $W'_m := \{{}^t(0 \cdots 0\ v_{n-m+1} \cdots v_n) \mid v_i \in \mathbb{K}\}$ を思い出す．写像

$$W_m \longrightarrow W'_m, \quad {}^t(v_1 \cdots v_m\ 0 \cdots 0) \longmapsto {}^t(0 \cdots 0\ v_1 \cdots v_m)$$

は線形かつ全単射だから同型写像．これは $m \ge 1$ かつ $n - m \ge 1$ なら恒等写像ではない．(詳細は問題 3.3.1.)

例 3.3.4. $n \in \mathbb{N}$ として, n 次以下の一変数多項式の空間 $\mathbb{K}[x]_{\le n}$ (問題 2.1.6) から $n+1$ 次元数ベクトル空間 $\mathbb{K}^{n+1}$ への写像

$$\mathbb{K}[x]_{\le n} \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}, \quad \sum_{i=0}^{n} f_i x^i \longmapsto (f_0 \cdots f_n).$$

は同型写像 (詳細は問題 3.3.2).

同型写像の性質を幾つか挙げます．

補題 3.3.5. 同型写像について以下の主張が成立する．

(1) 同型写像 $f\colon V \xrightarrow{\sim} W$ の逆写像 $f^{-1}\colon W \to V$ は同型写像.

(2) 二つの同型写像 $f\colon U \xrightarrow{\sim} V$ と $g\colon V \xrightarrow{\sim} W$ の合成 $g \circ f\colon U \to W$ は同型写像.

証明. (1) f は全単射だからその逆写像 f^{-1} も全単射である．よって f^{-1} が線形写像であることを示せば十分．$w, w' \in W$ と $c \in \mathbb{K}$ を任意に取る．$v := f^{-1}(w)$, $v' := f^{-1}(w') \in V$ と置くと, f の線形性から $f(v + v') = w + w'$, $f(cv) = cw$ となるので $f^{-1}(w + w') = v + v' = f^{-1}(w) + f^{-1}(w')$ 及び $f^{-1}(cw) = cv = cf^{-1}(w)$ が成立する．

(2) f と g は共に線形写像なので補題 3.2.1 より $g \circ f$ も線形写像．また f と g は共に全単射なので, $g \circ f$ は $f^{-1} \circ g^{-1}$ を逆写像として持つ全単射．よって $g \circ f$ は同型．

□

補題 3.3.5 を言い換えると, 次の概念と主張が得られます．

定義 3.3.6. 同型 $V \xrightarrow{\sim} W$ が存在する時, V と W は $\mathbb{K}$ **線形同型** ($\mathbb{K}$-linear isomorphic) である, あるいは単に**同型** (isomorphic) であると言い, 記号 $V \simeq W$ で表す．

系 3.3.7. 同型であること $V \simeq W$ は線形空間全体の上に**同値関係** (equivalence relation) を定める．つまり任意の線形空間 U, V, W に対して次の三条件が成立する．

(i) $V \simeq V$ [反射律].

(ii) $V \simeq W$ ならば $W \simeq V$ [対称律].

(iii) $U \simeq V$ かつ $V \simeq W$ ならば $U \simeq W$ [遷移律].

証明. 補題 3.3.5 (1) より id_V が同型写像 $V \xrightarrow{\sim} V$ を与え, (2) より同型写像 $f\colon V \xrightarrow{\sim} W$ が存在すればその逆写像が同型写像 $f^{-1}\colon W \xrightarrow{\sim} V$ を与え，また (3) より同型写像 $f\colon U \xrightarrow{\sim} V$ と $g\colon V \xrightarrow{\sim} W$ が存在すれば合成が同型写像 $g \circ f\colon U \xrightarrow{\sim} W$ を与える． □

命題 3.3.8 (線形写像が同型 ⇔ 基底を基底に写す). V と W を有限次元線形空間とし，また $(v_1, \ldots, v_n)$ を V の基底とする．この時, 線形写像 $f\colon V \to W$ について以下の二条件は同値.

(i) f は同型写像.

(ii) $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ は W の基底を成す.

証明. $w_i := f(v_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ と置く.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): w_i 達の線形関係 $\sum_{i=1}^n c_i w_i = 0$ $(c_i \in \mathbb{K})$ があれば, f の逆写像 $f^{-1}\colon W \to V$ の線形性 (補題 3.3.5 (1)) から $0 = \sum_{i=1}^n c_i f^{-1}(w_i) = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ となり, v_i 達の線形独立性から $c_1 = \cdots = c_n = 0$ となる. よって w_i 達は線形独立. また任意の $w \in W$ に対し, $f^{-1}(w) \in V$ は v_i 達の線形結合で $f^{-1}(w) = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ と書けるが, f の線形性から $w = f(\sum_{i=1}^n c_i v_i) = \sum_{i=1}^n c_i w_i$ となる. よって w_i 達は W を生成する.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): w_i 達と v_i 達に命題 3.1.3 を適用して, $g(w_i) = v_i$ を満たす線形写像 $g\colon V \to \mathbb{K}^n$ が一意に定まる. $g(f(v_i)) = v_i$ と任意の $v \in V$ が $v = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ と一意に書ける事から $g(f(v)) = v$ が従う. 同様に $f(g(w_i)) = w_i$ から任意の $w \in W$ に対して $f(g(w)) = w$. よって g は f の逆写像になるので, f は同型写像である. □

この命題の帰結として, 有限次元線形空間は数ベクトル空間と同型であることを示しましょう.

定理 3.3.9. V を次元 n の線形空間とし, $B = (v_1, \ldots, v_n)$ をその基底とする. この時, 写像

$$\phi_B\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow V, \quad {}^t(c_1 \ \cdots \ c_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n c_i v_i \tag{3.3.1}$$

は同型写像. 特に次の同型が成立する.

$$V \simeq \mathbb{K}^n.$$

証明. $\mathbb{K}^n$ の標準基底 $e_1 \ldots, e_n$ を使うと $\phi_B(e_i) = v_i$. よって ϕ_B は $\mathbb{K}^n$ の標準基底を V の基底に写すので, 命題 3.3.8 より ϕ_B は同型. 後半は基底の存在定理 (定理 2.4.11 又は系 2.4.16) と前半から従う (詳細は問題 3.3.3). □

注意. 定理 3.3.9 の同型写像 ϕ は $\phi(e_i) = v_i$ となるように取りましたが, 別の同型写像を取ることもできます. 例えば $n \geq 2$ として, $v'_1, v'_2 \ldots, v_n \in V$ を

$$v'_1 := v_2, \quad v'_2 := v_1, \quad v'_i := v_i \ (i \geq 3)$$

で定めると, 集合としては $\{v'_1, \ldots, v'_n\} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ なので, $B' := (v'_1, \ldots, v'_n)$ は V の基底になります. (3.3.1) と同様に写像を作ると

$$\phi_{B'}\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow V, \quad {}^t(c_1 \ \cdots \ c_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n c_i v'_i = c_2 v_1 + c_1 v_2 + \sum_{i=3}^n c_n v_n$$

となって, これも同型写像になります. しかし, 比べてみれば分かるように $\phi_B \neq \phi_{B'}$ です. つまり **ϕ の定義 (3.3.1) は集合としての $\{v_1, \ldots, v_n\}$ の取り方だけではなくその元の並べ方に依存しています**.

例 3.3.10 (数ベクトル空間の標準基底). 三次元数ベクトル空間 $\mathbb{K}^3$ には集合としての基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ があるが, それらを並べて列を作ることで, 6 つの基底 (e_1, e_2, e_3), (e_1, e_3, e_2), $\ldots$, (e_3, e_2, e_1) が得られる. 同様に, n 次元数ベクトル空間の集合としての基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ から $n!$ 個の基底が得られる.

次の命題が主張するように, 有限次元の場合, 二つの線形空間が同型か否かは次元を見れば分かります.

命題 3.3.11. 有限次元線形空間 V と W に対して

$$V \simeq W \iff \dim V = \dim W.$$

証明. $n := \dim V$ として, V の基底 $v_1, \dots, v_n$ を一組取る. $\Rightarrow$: 同型 $f \colon V \xrightarrow{\sim} W$ が存在するが, 命題 3.3.8 の (i) $\Rightarrow$ (ii) より $f(v_1), \dots, f(v_n)$ は W の基底. よって $\dim W = n$. $\Leftarrow$: 定理 3.3.9 より V と W は共に $\mathbb{K}^n$ と同型なので, 同型の遷移律 (系 3.3.7 (iii)) から V と W も同型. □

残りの部分で補足説明をします. まず, 命題 3.1.3 は有限次元の線形空間に関する主張でしたが, 実は無限次元の場合にも成立する事を紹介します.

命題 3.3.12. V, W を線形空間とし, $(v_i)_{i\in I}$ を V の基底とする. $(w_i)_{i\in I}$ を W の元の族とすると, 線形写像 $f \colon V \to W$ であって任意の $i \in I$ に対して $f(v_i) = w_i$ となるものが唯一存在する.

証明. [存在性] $(v_i)_{i\in I}$ は V の基底だから, 任意の $v \in V$ に対して, 有限個を除いて 0 である $c_i \in \mathbb{K}$ $(i \in I)$ が一意に存在して $v = \sum_{i\in I} c_i v_i$. そこで与えられた元の族 $w = (w_i)_{i\in I}$ に対し写像 $f_w \colon V \to W$ を

$$f_w(v) := \sum_{i\in I} c_i w_i \in W \tag{3.3.2}$$

で定める. c_i は有限個の $i \in I$ を除いて 0 なので, この和は有限和であり, 確かに W の元 $f_w(v)$ が定まっていることに注意する. 後は f_w が線形写像であることを示せば存在性が証明できたことになる.

(i) 任意の $v, v' \in V$ を取る. $(v_i)_{i\in I}$ は V の基底だから, 有限個を除いて 0 である $\mathbb{K}$ の元の族 $(c_i)_{i\in I}$ と $(c_i')_{i\in I}$ が一意に存在して, $v = \sum_{i\in I} c_i v_i$ 及び $v' = \sum_{i\in I} c_i' v_i$ が成立する. この時 $v + v' = \sum_{i\in I}(c_i + c_i')v_i$ と有限和で書けるので,

$$\begin{aligned} f_w(v+v') &= \sum_{i\in I}(c_i + c_i')w_i && [f_w \text{ の定義}] \\ &= \sum_{i\in I} c_i w_i + \sum_{i\in I} c_i' w_i && [\textstyle\sum_{i\in I} \text{ は有限和}] \\ &= f_w(v) + f_w(v') && [f_w \text{ の定義}]. \end{aligned}$$

(ii) 任意の $v \in V$ と $c \in \mathbb{K}$ を取る. $v = \sum_{i\in I} c_i v_i$ と一意に書けるので, $cv \in V$ も $cv = \sum_{i\in I} cc_i v_i$ と一意に書ける. f_w の定義から

$$f_w(cv) = \sum_{i\in I} cc_i w_i = c\sum_{i\in I} c_i w_i = c.f_w(v) = (cf_w)(v).$$

[一意性] f が $f(v_i) = w_i$ を満たす任意の線形写像だとして, $f = f_W$ であることを示せばよい. それには任意の $v \in V$ に対して $f(v) = f_w(v)$ となることを示せばよい. $c_i \in \mathbb{K}$ $(i \in I)$ が一意に存在して $v = \sum_{i\in I} c_i v_i$ と有限和で書けるから, f の線形性より

$$f(v) = f\Bigl(\sum_{i\in I} c_i v_i\Bigr) = \sum_{i\in I} c_i f(v_i)$$

となって, 確かに $f_w(v)$ の値 (3.3.2) と一致する. □

命題 3.3.12 から以下のような主張も得られます.

系 3.3.13. V を線形空間, $(x_i)_{i\in I}$ を V の基底とし, また元の族 $y_i \in V$ $(i \in I)$ が与えられているとする. 自己準同型 $f \colon V \to V$ を $f(v_i) = w_i$ で定める. このとき

$$(y_i)_{i\in I} \text{ は } V \text{ の基底} \iff f \text{ は同型}.$$

証明. $(y_i)_{i\in I}$ が V の基底なら，命題 3.3.12 より $g(y_i) = x_i$ となる自己準同型 $g\colon V \to V$ が存在する．すると，f と g の定め方から $f\circ g = g\circ f = \mathrm{id}_V$ となるので f は可逆．

逆に f が可逆なら，その逆写像 f^{-1} を用いて $x_i = f^{-1}(y_i)$ と書ける．すると $(y_i)_{i\in I}$ は V を生成することが分かる．実際，V の任意の元 v は $(x_i)_{i\in I}$ の線形結合で書けて，各 x_i も $(y_i)_{i\in I}$ の線形結合で書けるから，v も $(x_i)_{i\in I}$ の線形結合で書ける (問題 1.2.10)．また $(y_i)_{i\in I}$ が線形独立であることも示せる (問題 3.3.8)．以上より $(y_i)_{i\in I}$ は基底である． □

演習問題 (解答: 114 ページ)

問題 3.3.1. 例 3.3.3 の詳細を説明せよ．

問題 3.3.2. 例 3.3.4 の詳細を説明せよ．

問題 3.3.3. 定理 3.3.9 の証明を補完せよ．

問題 3.3.4. 正方行列 $A \in M(n;\mathbb{K})$ の左掛算写像 $l_A \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ が同型写像である為の A の条件を求めよ．

問題 3.3.5. 任意の線形空間 V に対して，線形写像 $\mathbb{K} \to V$ 全体のなす空間 $\mathrm{Hom}(\mathbb{K}, V)$ から V への写像を

$$\varphi\colon \mathrm{Hom}(\mathbb{K}, V) \longrightarrow V, \quad f \longmapsto f(1)$$

で定める．φ が同型写像ある事を示せ．これから以下の同型が従う．

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{K}, V) \simeq V.$$

問題 3.3.6 ([佐武 15, 系 2.1.8])**.** V を n 次元線形空間とし，$B_{\mathrm{std}} = (e_1, \dots, e_n)$ を $\mathbb{K}^n$ の標準基底とする．同型 $\phi\colon \mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} V$ に V の基底 $\phi(B_{\mathrm{std}}) := \bigl(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)\bigr)$ を対応させる次の写像 f が全単射である事を示せ．

$$f\colon \{\phi\colon \mathbb{K}^n \to V \mid \text{同型}\} \longrightarrow \{V \text{ の基底}\}.$$

問題 3.3.7 ([足助 12, 問 3.12.5])**.** 写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ を $f\bigl(\binom{x}{y}\bigr) := x + \sqrt{-1}y$ で定める．

(1) f が実線形空間の間の同型写像である事を示し，$f^{-1}(z)$ を $z \in \mathbb{C}$ とその複素共役 $\overline{z}$ で表せ．

(2) $v = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ と $\lambda = a + \sqrt{-1}b \in \mathbb{C}^2$ に対して $\lambda.v := f^{-1}\bigl(\lambda \cdot f(v)\bigr)$ と定める．但し右辺の $\cdot$ は複素数 λ と $f(v)$ の (通常の意味での) 積を表す．$\lambda.v$ を a, b, x, y で表せ．

問題 3.3.8. 系 3.3.13 の証明の最後の部分を補え．

3.4　線形写像の行列表示

有限次元線形空間の間の線形写像は, 基底を使うと行列で表すことができます. 従って, 線形空間と線形写像についての問題は, 数ベクトルと行列についての問題に帰着することができます.

命題 3.4.1. $f\colon V \to W$ を有限次元線形空間の間の線形写像とする. 次元を $n \coloneqq \dim V$, $m \coloneqq \dim W$ と置き, $B_V = (v_j)_{j=1}^n$ と $B_W = (w_i)_{i=1}^m$ をそれぞれ V と W の基底として,

$$\begin{aligned} g_V &\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow V, & e_j &\longmapsto v_j & (j &= 1, \ldots, n), \\ g_W &\colon \mathbb{K}^m \longrightarrow W, & e_i &\longmapsto w_i & (i &= 1, \ldots, m) \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

をそれぞれ基底 B_V, B_W が定める同型写像とする (定理 3.3.9). 特に g_W には逆写像 g_W^{-1} がある事に注意する. この時, 行列 $A \in M(m, n; \mathbb{K})$ であって合成

$$g_W^{-1} \circ f \circ g_V \colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

が左 A 倍写像 $l_A\colon v \mapsto Av$ (例 1.4.2) と一致するものが一意に存在する.

証明. 各 $j = 1, \ldots, n$ に対し $f(v_j) \in W$ を B' で展開して $f(v_j) = w_1 a_{1j} + \cdots + w_m a_{mj}$ とし, $a_j \coloneqq {}^t(a_{1j} \ \cdots \ a_{mj}) \in \mathbb{K}^m$ と定めると $f(v_j) = g_W(a_j)$. よって

$$(g_W^{-1} \circ f \circ g_V)(e_j) \overset{*}{=} g_W^{-1}\bigl(f(v_j)\bigr) = g_W^{-1}\bigl(g_W(a_j)\bigr) = a_j.$$

但し $*$ では g_W の定義 (3.4.1) を用いた. そこで列ベクトル a_j 達を並べてできる行列

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を考えると $Ae_j = a_j$ となる. 従って $l_A = g_W^{-1} \circ f \circ g_V$. □

定義 3.4.2. 命題 3.4.1 の行列 A を**基底 B_V, B_W に関する線形写像 $f\colon V \to W$ の行列表示** (matrix presentation) [*60] と呼ぶ. $V = W$ の場合, つまり f が V の自己準同型の場合は, 基底 B_V, B_V に関する f の行列表示を単に**基底 B_V に関する f の行列表示**と呼ぶ.

注意 3.4.3 (c.f. [佐武 15, p.126, (24)])**.** 命題 3.4.1 の証明から分かるように, f の行列表示 $A = (a_{ij})_{i,j}$ は

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} w_i a_{ij}$$

を満たします. これは次のように並べて書いて行列の積の規則を使うと覚えやすいです.

$$\begin{pmatrix} f(v_1) & f(v_2) & \cdots & f(v_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

[*60] **表現行列**と呼ぶこともあります.

略して次のように書いて覚えるのも良いでしょう．

$$f\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_m \end{pmatrix} A.$$

例 3.4.4 (**左 A 倍写像の標準基底に関する行列表示は A 自身**)**.** 行列 $A \in M(m,n;\mathbb{K})$ に対して数ベクトル空間の間の左 A 倍写像 $l_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ が定まる (例 1.4.2). $\mathbb{K}^n$ と $\mathbb{K}^m$ の標準基底に関する l_A の行列表示を求めよう．区別の為に $\mathbb{K}^n$ の標準基底を $B^n_{\mathrm{std}} = (e^n_1, \ldots, e^n_n)$, $\mathbb{K}^m$ の標準基底を $B^m_{\mathrm{std}} = (e^m_1, \ldots, e^m_m)$ と書くと,

$$l_A(e^n_j) = A\,{}^t(0 \cdots 0 \overset{j\,番目}{1} 0 \cdots 0) = {}^t(a_{1j}\ a_{2j}\ \cdots\ a_{mj}) = \sum_{i=1}^{m} e^m_i a_{ij}$$

となるから, 行列表示は $(a_{ij})_{i,j} = A$ そのものである．

注意 3.4.5 ([斎藤 09, p.58, 余談 35])**.** A が f の表現行列であるための条件 $l_A = g_W^{-1} \circ f \circ g_V$ は

$$g_W \circ l_A = f \circ g_V$$

と同値です．後者の条件を, **図式** (diagram)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "l_A"] \arrow[d, "g_V"'] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "g_W"] \\ V \arrow[r, "f"'] & W \end{tikzcd}$$

が**可換** (commutative) である, とも言います．

注意 3.4.6. 命題 3.4.1 は次の主張を意味します: $(v_j)_{j=1}^n$ と $(w_i)_{i=1}^m$ をそれぞれ V と W の基底とする．任意の行列 $A = (a_{ij})_{i,j} \in M(m,n;\mathbb{K})$ に対し, $f(v_j) = \sum_{i=1}^m w_i a_{ij}$ を満たす線形写像 $f\colon V \to W$ が一意に存在する．そして f の $(v_j)_{j=1}^n, (w_i)_{i=1}^m$ に関する行列表示は A である．

命題 3.4.1 の帰結として, 数ベクトル空間の間の線形写像 $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ 全体がなす線形空間 $\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ は次の様に記述できます．

命題 3.4.7. m と n を正整数とする．行列 $A \in M(m,n;\mathbb{K})$ に左掛算写像 $l_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ を対応させる写像

$$\varphi\colon M(m,n;\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m), \quad \varphi(A) \coloneqq l_A$$

は同型写像である．特に, 定理 3.3.9 と合わせると, 有限次元線形空間の間の任意の線形写像は, その行列表示による左掛算写像とみなせる．

証明. 例 1.4.2 より左掛算写像 l_A は線形写像, つまり $l_A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ なので, 確かに対応 $A \mapsto l_A$ が写像 $M(m,n;\mathbb{K}) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ を定める事に注意する．

線形写像である事を示すには, 任意の $A, B \in M(m,n;\mathbb{K})$ と $c \in \mathbb{K}$ に対して,

$$l_{A+B} = l_A + l_B, \quad l_{cA} = c\,l_A$$

である事を示せば良い．前者は, 任意の $v \in \mathbb{K}^n$ に対して $l_{A+B}(v) = (A+B)v = Av + Bv = l_A(v) + l_B(v)$ となるから成立する．後者は $l_{cA}(v) = (cA)v = c(Av) = (c\,l_A)(v)$ より成立する．

あとは全単射である事を示せば良い．逆写像 $\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \to M(m,n;\mathbb{K})$ を構成する為に, 任意の線形写像 $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ を取る．すると命題 3.4.1 を $V = \mathbb{K}^n$, $W = \mathbb{K}^m$, B_V と B_W がそれぞれの標準基底に

適用すると, $f = l_A$ となる $A \in M(m, n; \mathbb{K})$ が一意に定まる. つまり, 対応 $A \mapsto l_A$ が全射かつ単射である事が分かる. $\square$

補題 3.4.8. U, V, W を有限次元線形空間とし, B_U, B_V, B_W をそれらの基底とする.

(1) B_V, B_W に関する線形写像 $f \colon V \to W$ の行列表示が A, $f' \colon V \to W$ の行列表示が A' なら, $f + f'$ の行列表示は $A + A'$. また $c \in \mathbb{F}$ として, cf の行列表示は cA.

(2) 線形写像 $f' \colon U \to V$ の B_U, B_V に関する行列表示を A', $f \colon V \to W$ の B_V, B_W に関する行列表示を A とする. この時, 合成 $f \circ f' \colon U \to W$ の B_U, B_W に関する行列表示は行列の積 AA'.

(3) 恒等写像 $\mathrm{id}_V \colon V \to V$ の B_V に関する行列表示は単位行列 E.

(4) 自己準同型 $f \colon V \to V$ の B_V に関する行列表示を A とすると

$$f \text{ は自己同型} \iff A \text{ は正則行列 (可逆行列)}.$$

証明. (1) $B_V = (v_1, \ldots, v_m)$, $B_W = (w_1, \ldots, w_l)$, $A = (a_{ij})_{i,j}$, $A' = (a'_{ij})_{i,j}$ とすると, 命題 3.4.1 の証明から $f(v_j) = \sum_{j=i}^{l} w_i a_{ij}$, $f'(v_j) = \sum_{j=i}^{l} w_i a'_{ij}$. よって $(f + f')(v_j) = \sum_{j=1}^{l} w_i (a_{ij} + a'_{ij})$ なので, 再び命題 3.4.1 から $f + f'$ の行列表示は $(a_{ij} + a'_{ij})_{i,j} = A + A'$. また $(cf)(v_i) = \sum_{j=1}^{l} w_i (c\, a_{ij})$ なので, cf の行列表示は $(c\, a_{ij})_{i,j} = cA$.

(2) $\dim U = n$ と置いて注意 3.4.5 の言いかえを使うと, 仮定から図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "l_{A'}"] \arrow[d, "g_U"'] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "l_A"] \arrow[d, "g_V"] & \mathbb{K}^l \arrow[d, "g_W"] \\
U \arrow[r, "f'"'] & V \arrow[r, "f"'] & W
\end{tikzcd}$$

の左側の正方形と右側の正方形がそれぞれ可換. すると外側の長方形も可換. このことと $l_A \circ l_{A'} = l_{AA'}$ を合わせて, 再び注意 3.4.5 を使うと, $f \circ f'$ の行列表示が AA' である事が分かる.

(3) $\mathrm{id}_V(v_j) = v_j = \sum_{i=1}^{m} v_i \delta_{i,j}$ より行列表示は $(\delta_{i,j})_{i,j=1}^{m} = E$.

(4) 線形写像 f が同型であれば, 逆写像 f^{-1} は線形写像で $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V$. f^{-1} の B_V に関する行列表示を A' とすると, (2) と (3) より $AA' = A'A = E$. よって A は可逆.
逆に A が正則だと仮定すると, A の逆行列 A^{-1} があって $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. 注意 3.4.6 より, A, A^{-1}, E に対応する自己準同型が存在するが, 一意性から A には f が, また (3) より E には id_V が対応する. すると, A^{-1} に対応する自己準同型を g と書けば $fg = gf = \mathrm{id}_V$. よって f は可逆な線形写像, つまり同型である.

$\square$

演習問題 (解答: 116 ページ)

問題 3.4.1 ([斎藤 09, 例 2.3.2.1]). 行列 $A \in M(m, n; \mathbb{K})$ に対し, 左 A 倍写像 $l_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $v \mapsto Av$ の標準基底に関する行列表示が A になる事を示せ.

問題 3.4.2 ([斎藤 09, 例 2.3.2.2]). x_1, x_2 を基底とする 2 次元の線形空間 $V = \mathbb{K}x_1 + \mathbb{K}x_2$ を考える. V の自己準同型 $f \in \mathrm{End}(V)$ が

$$f(x_1) = ax_1 + bx_2, \quad f(x_2) = cx_1 + dx_2$$

を満たす時, f の x_1, x_2 に関する行列表示を求めよ.

問題 3.4.3 ([齋藤 85, p.121, 第 4 章 §5, 4.5.3 例題])**.** $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M(2;\mathbb{K})$ を正則行列として, 次の写像を考える.

$$T_A\colon M(2;\mathbb{K}) \longrightarrow M(2;\mathbb{K}), \quad X \longmapsto AXA^{-1}.$$

(1) T_A が線形写像である事を示せ.

(2) E_{ij} を行列単位とすると $E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}$ は $M(2;\mathbb{K})$ の基底である (例 2.4.5). この基底に関する T_A の行列表示を求めよ.

問題 3.4.4 ([齋藤 85, p.126, 第 4 章 §5, 問題 1])**.** $V \coloneqq \{X \in M(2;\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr} X = 0\}$ とする. 前の問題 3.4.3 と同様に, 正則行列 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ から定まる写像 $T_A\colon X \mapsto AXA^{-1}$ を考える.

(1) V が線形空間である事, 及び T_A が V の自己準同型を定める事を示せ.

(2) E_{ij} を行列単位とする. $B \coloneqq (E_{12}, E_{11} - E_{22}, E_{21})$ が V の基底である事を示せ.

(3) 基底 B に関する $T_A \in \operatorname{End}(V)$ の行列表示を求めよ.

問題 3.4.5 ([斎藤 09, 問題 2.3.1])**.** 複素 2 次正方行列の空間 $M(2;\mathbb{C})$ の部分集合 V を次で定める.

$$V \coloneqq \{X \in M(2;\mathbb{C}) \mid \exists c \in \mathbb{C},\ X\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} c \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}.$$

(1) V が $M(2;\mathbb{C})$ の部分空間である事を示せ.

(2) $E_{ij} \in M(2;\mathbb{C})$ を行列単位として, E_{11}, E_{12}, E_{22} が V の基底である事を示せ.

(3) $A \coloneqq \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B \coloneqq \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ と置き, $X \in V$ に対して $f(X) \coloneqq AXB$ とすると $f \in \operatorname{End}(V)$ が定まる事を示せ.

(4) 前項の $f \in \operatorname{End}(V)$ の, 基底 E_{11}, E_{12}, E_{22} に関する行列表示を求めよ.

問題 3.4.6 ([足助 12, 問 3.12.9])**.** 行列 $A \in M(m,n;\mathbb{K})$ の左掛算写像によって零ベクトルに写る数ベクトル $v \in \mathbb{K}^n$ の集合を K_A と書く. つまり $K_A \coloneqq \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = 0\}$. また $\varphi\colon \mathbb{K}^l \to \mathbb{K}^n$ を線形写像とし, $\mathbb{K}^l$ と $\mathbb{K}^n$ それぞれの標準基底に関する φ の行列表示を $B \in M(n,l;\mathbb{K})$ と書く. 次の等式が成立する事を示せ.

$$\varphi^{-1}(K_A) = \{u \in \mathbb{K}^l \mid ABu = 0\}.$$

問題 3.4.7 ([足助 12, 問 4.6.6])**.** 命題 3.4.7 の同型写像を $\varphi\colon M(m,n;\mathbb{K}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ と書く. また, 例 2.4.5 の行列単位 $E_{ij} \in M(m,n;\mathbb{K})$ に対して $f_{ij} \coloneqq \varphi(E_{ij})$ と書く.

(1) f_{ij} $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ が $\operatorname{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ の基底をなす事を示せ.

(2) $\mathbb{K}^n$ の標準基底 $e_1, \ldots, e_n$ について, $f_{ij}(e_k)$ を求めよ.

問題 3.4.8 ([斎藤 09, 例 2.3.3, 前半])**.** V と W を有限次元線形空間とし, $V' \subset V$ と $W' \subset W$ を部分空間とする. $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$ を V の基底, $B_W = (w_1, \ldots, w_m)$ を W の基底であって, $B_{V'} = (v_1, \ldots, v_l)$, $l \leq n$ が V' の基底, $B_{W'} = (w_1, \ldots, w_k)$ が W' の基底になっているものとする. また $f\colon V \to W$ を線形写像とし, 基底 B_V, B_W に関する f の行列表示をブロック分けして

$$\begin{aligned}
&A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in M(m,n;\mathbb{K}), \\
&A_{11} \in M(k,l;\mathbb{K}),\ A_{12} \in M(k,n-l;\mathbb{K}),\ A_{21} \in M(m-k,l;\mathbb{K}),\ A_{12} \in M(m-k,n-l;\mathbb{K})
\end{aligned}$$

とする. この時, 以下の主張を示せ.

(1) $f(V') \subset W' \iff A_{21} = 0.$

(2) $f(V') \subset W'$ の時, 制限 $f|_{V'}: V' \to W'$ の基底 $B_{V'}, B_{W'}$ に関する行列表示は A_{11} である.

問題 3.4.9 ([斎藤 09, p.60, 例 2.3.4 後半]). V, W を有限次元複素線形空間とし, $f: V \to W$ を複素線形写像とする. V', W' を V, W の共役 (問題 1.3.8) とすると, $f: V' \to W'$ は複素線形写像である (問題 3.1.7). V の基底 $v_1, \ldots, v_n$ と W の基底 $w_1, \ldots, w_m$ に関する f の行列表示を $A \in M(m, n; \mathbb{C})$ とすると, V' の基底 $v_1, \ldots, v_n$ と W' の基底 $w_1, \ldots, w_m$ に関する f の行列表示は, A を成分ごとに複素共役を取って得られる行列 $\overline{A} \in M(m, n; \mathbb{C})$ である事を示せ.

問題 3.4.10 ([斎藤 09, 問題 2.3.4]). $c \in \mathbb{C}$ として, (左)c 倍写像 $l_c: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を考える. $\mathbb{C}$ を実線形空間と見なすと, $1, i = \sqrt{-1}$ は $\mathbb{C}$ の基底である. この基底に関する l_c の行列表示を求めよ.

問題 3.4.11 ([足助 12, 問 3.12.27]). $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ を複素線形写像とし, $\mathbb{C}^n$ と $\mathbb{C}^m$ それぞれの標準基底に関する f の行列表示を $A \in M(m, n; \mathbb{C})$ とする. また写像 $\varphi_n: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ を各成分の複素共役を取る事で定める. つまり

$$\varphi_n\left({}^t(v_1 \ \cdots \ v_n)\right) := {}^t(\overline{v_1} \ \cdots \ \overline{v_n}).$$

この時, 写像 $g := \varphi_m \circ f \circ \varphi_n: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ が複素線形写像である事を示せ. また g の標準基底に関する行列表示を求めよ.

問題 3.4.12. $m, n \in \mathbb{N}$ とする. n 階微分作用素 $D := \frac{d^n}{dx^n}$ は n 次以下の一変数多項式空間 $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ からそれ自身への線形写像である. $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ の基底 $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ に関する D の行列表示を求めよ.

問題 3.4.13 (c.f. [斎藤 09, 問題 2.3.6]). $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{K}$ とする. 差分作用素 $T_a: f(x) \mapsto f(x+a)$ は n 次以下の多項式空間 $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ の自己準同型である (問題 3.1.2).

(1) $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ の基底 $1, x, x^2, \ldots, x^n$ に関する T_a の行列表示を求めよ.

(2) $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ の基底 $1, x, (x)_2 = x(x-1), \ldots, (x)_n = x(x-1)\ldots(x-(n-1))$ (問題 2.5.2) に関する T_1 の行列表示を求めよ.

3.5　基底変換行列

線形空間の異なる二つの基底の関係を行列を用いて調べます. 教科書の該当箇所は [佐武 15, Ⅲ, §7] です.

補題 3.5.1 (基底と正則行列). V を有限次元線形空間とし, $(x_i)_{i=1}^n$ を V の基底とする. また $y_1, \ldots, y_n \in V$ が与えられているとして, $p: V \to V$ を $p(x_i) := y_i$ で定まる自己準同型とする. この時

$$(y_i)_{i=1}^n \text{ が } V \text{ の基底} \iff p \text{ の } (x_i)_{i=1}^n \text{ に関する行列表示 } P \in M(n; \mathbb{K}) \text{ は正則行列.}$$

証明. 命題 3.1.3 より, 条件 $x_i \mapsto y_i$ から線形写像 p が一意に定まることに注意する. 系 3.3.13 より $(y_i)_{i=1}^n$ が V の基底である事と p が可逆である事は同値. 補題 3.4.8 (4) より, これは P が正則である事と同値. □

定義 3.5.2 (基底変換行列). V を有限次元線形空間とし, $(x_i)_{i=1}^n$ と $(y_i)_{i=1}^n$ を V の基底とする. $p(x_i) = y_i$ で定まる自己同型 $p: V \to V$ の $(x_i)_{i=1}^n$ に関する行列表示 P を **$(x_i)_{i=1}^n$ から $(y_i)_{i=1}^n$ への基底変換行列** (transformation matrix) [*61] と呼ぶ.

---

*61 基底を底と呼ぶのに合わせて, P を**底の変換行列**と呼ぶ事もあって, 教科書 [佐武 15, p.127] ではこちらが用いられています,

注意 3.5.3. 注意 3.4.5 の可換図式を思い出すと, 基底変換行列 P による左掛算写像 $l_P\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ から次の可換図式が得られます. 但し $x, y\colon \mathbb{K}^n \to V$ はそれぞれ基底 $(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n$ が定める同型です.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{l_P} & \mathbb{K}^n \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle y} \\ V & \xrightarrow[p]{} & V \end{array}$$

また定義を紐解くと, $P = (p_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{K})$ と成分を置けば $y_j = \sum_{i=1}^n x_i p_{ij}$, つまり次式が成立します.

$$(y_1 \ \cdots \ y_n) = (x_1 \ \cdots \ x_n)P.$$

これ以降よく使うので, 正則行列の集合の記号を導入しておきます.

定義 3.5.4. n 次正則行列全体のなす集合を次の記号で表す.

$$\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \coloneqq \{P \in M(n;\mathbb{K}) \mid P \text{ は正則行列 } \} = \{P \in M(n;\mathbb{K}) \mid \det P \neq 0\}.$$

注意. 集合 $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ と行列の積 $\cdot$, 及び単位行列 E_n の組 $(\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}), \cdot, E_n)$ は**群** (group) です. つまり

- 積は結合的. つまり, 任意の $A, B, C \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ について $(AB)C = A(BC)$.
- E_n は積に関する単位元. つまり, 任意の $A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ について $AE_n = E_nA = A$.
- 任意の元は逆元を持つ. つまり, 任意の $A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ について, その逆行列 A^{-1} は $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ に属す.

$\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ は**一般線形群** (general linear group) と呼ばれています.

既に体の定義 (§ 1.1) や線形空間の定義 1.2.1 で可換群の概念が登場しましたが, 可換群は群であって積が可換なものの事です. 一般線形群 $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ は $n > 1$ なら可換ではありません $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ は**非可換群** (non-commutative group) である, と言います. 尚, $n = 1$ の時は $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ なので可換群です.

群論の詳しい話は三年生春学期の代数学の講義で扱います.

補題 3.5.5 ([斎藤 09, 例 2.3.5])**.** $P \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ とする. $\mathbb{K}^n$ の標準基底 $B_{\mathrm{std}} = (e_1, \ldots, e_n)$ に対し, $B' \coloneqq (Pe_1, \ldots, Pe_n)$ は $\mathbb{K}^n$ の基底であり, B_{std} から B' への基底変換行列は P である.

証明. 問題 3.5.1 にします. □

補題 3.5.6 ([斎藤 09, 命題 2.3.7.1])**.** V を有限次元線形空間とし, B と B' を V の基底とする, B から B' への基底変換行列 $P \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ は, V の恒等写像 id_V の基底 B', B に関する行列表示と等しい.

証明. 基底 B を B' に写す同型 $f\colon V \to V$ の, 基底 B, B' に関する行列表示は単位行列 E である. id_V の基底 B', B に関する行列表示を Q とすると, $f = \mathrm{id}_V \circ f$ の基底 B に関する行列表示 P は補題 3.4.8 (2) から $QE = Q$. □

定理 3.5.7 (基底変換による行列表示の変換, [佐武 15, Ⅲ §7, p.127, (28)])**.** V と W をそれぞれ次元 n, m の線形空間とし, $f\colon V \to W$ を線形写像とする. また B_V, B'_V と B_W, B'_W をそれぞれ V と W の二組の基底として,

- $P \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ を B_V から B'_V への基底変換行列
- $Q \in \mathrm{GL}(m;\mathbb{K})$ を B_V から B'_V への基底変換行列
- f の B_V, B_W に関する行列表示を $A \in M(m, n;\mathbb{K})$

と置く．この時, f の B'_V, B'_W に関する行列表示 $A' \in M(m,n;\mathbb{K})$ は

$$A' = Q^{-1}AP.$$

証明. 補題 3.5.6 より id_V の基底 B_V, B'_V に関する行列表示は P である．よって $f \circ \mathrm{id}_V : V \to W$ の基底 B'_V, B_W に関する行列表示は行列の積 AP である．同様に, id_V の基底 B_W, B'_W に関する行列表示が Q だから, $\mathrm{id}_V \circ f$ の基底 B'_V, B_W に関する行列表示は QA' になる．すると $f \circ \mathrm{id}_V = f = \mathrm{id}_V \circ f$ より $AP = QA'$. 従って $A' = Q^{-1}AP$. □

定理 3.5.7 で $W = V$, $B_W = B_V$, $B'_W = B'_V$ とすれば, 次の系が得られます.

系 3.5.8. V を n 次元線形空間とし, $f \in \mathrm{End}(V)$ とする．また B_V, B'_V を V の二組の基底として,

- $P \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ を B_V から B'_V への基底変換行列
- f の B_V に関する行列表示を $A \in M(n;\mathbb{K})$

と置く．この時, f の B'_V に関する行列表示 $A' \in M(n;\mathbb{K})$ は

$$A' = P^{-1}AP.$$

例 3.5.9 ([齋藤 85, p.122, 第 4 章 §5, 4.5.6 例題]). $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$ による左掛算写像 $l_A : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, $x \mapsto Ax$ を考える．$\mathbb{K}^3$ の元 $u := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $w := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ について, $B := (u, v, w)$ は $\mathbb{K}^3$ の基底である (証明は問題 3.5.2). l_A の B に関する表現行列 A' を求めよう．まず, $\mathbb{K}^3$ の標準基底 $B_{\mathrm{std}} = (e_1, e_2, e_3)$ から B への基底変換行列 P は補題 3.5.5 より $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ である．一方 B_{std} に関する l_A の行列表示は A である (問題 3.4.1). 従って系 3.5.8 から

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.5.1}$$

二つ目の等号は直接計算による (詳細は問題 3.5.2).

命題 3.5.10. V と W を有限次元線形空間とし, $n := \dim V$, $m := \dim W$ と置くと

$$\mathrm{Hom}(V, W) \simeq \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K}). \quad 特に \ \dim \mathrm{Hom}(V, W) = mn.$$

証明. 問題 3.5.5 にします. □

演習問題 (解答: 118 ページ)

問題 3.5.1. 補題 3.5.5 を示せ.

問題 3.5.2. 例 3.5.9 の詳細を補え．また, 行列表示の定義 3.4.2 から結論 (3.5.1) を直接導出せよ.

問題 3.5.3 ([斎藤 09, 問題 2.3.2]). 複素 4 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(4;\mathbb{C})$ と $\mathbb{C}^4$ の元 $x_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$, $x_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $x_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}$ 及び次式で定まる部分集合 $W \subset \mathbb{C}^4$ を考える.

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \,\middle|\, a + b + c + d = 0 \right\}.$$

(1) $B := (x_1, x_2, x_3, x_4)$ が $\mathbb{C}^4$ の基底である事を示せ.

(2) 左掛算写像 $l_A \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ の B に関する行列表示を求めよ.

(3) $W \subset \mathbb{C}^4$ が部分空間である事を示せ.

(4) $y_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ として, $B' := (y_1, y_2, y_3)$ が W の基底である事を示せ.

(5) $l_A(W) \subset W$ を示し, 制限 $l_A|_W \in \mathrm{End}(W)$ の B' に関する行列表示 B を求めよ.

(6) $B'' := (x_2, x_3, x_4)$ も W の基底である事を示し, B' から B'' への基底変換行列 P を求めよ.

(7) 制限 $l_A|_W$ の B'' に関する行列表示 C を求め, それが $P^{-1}BP$ と一致する事を確かめよ.

問題 3.5.4 ([斎藤 09, 例 2.2.8, 問題 2.3.5])**.** 漸化式 $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$ の解集合を次で表す.

$$W := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n\}.$$

(1) W が実線形空間である事を示せ.

(2) 三つの数列 $(1)_n, (n)_n, \big((-1)^n\big)_n$ が W の基底をなす事を示せ.

数列の番号を 1 ずらす事で得られる写像を次の様に表す.

$$T\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto Ta = \big((Ta)_n\big)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (Ta)_n := a_{n+1}.$$

(3) 制限写像 $T_W := T|_W$ が W の自己準同型である事を示せ.

(4) 基底 $(1)_n, (n)_n, \big((-1)^n\big)_n$ に関する T_W の行列表示 A を求めよ.

写像 $\phi\colon W \to \mathbb{R}^3$ を次で定める.

$$\phi\colon W \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto {}^t(a_0\ a_1\ a_2).$$

(5) ϕ が同型写像である事を示せ.

(6) e_1, e_2, e_3 を $\mathbb{R}^3$ の標準基底とし, $b_0 := \phi^{-1}(e_1)$, $b_1 := \phi^{-1}(e_2)$, $b_2 := \phi^{-1}(e_3)$ とする. b_0, b_1, b_2 が W の基底である事を示し, それに関する T_W の行列表示 B を求めよ.

(7) W の基底 b_0, b_1, b_2 から $(1)_n, (n)_n, \big((-1)^n\big)_n$ への基底変換行列 P を求めよ.

(8) $A = P^{-1}BP$ を確かめよ.

問題 3.5.5. 命題 3.5.10 を示せ.

4　直積と直和 (05/14)

4.1　線形空間の直積と直和

この副節の内容は参考書の [斎藤 09, §1.3 冒頭, §1.6 冒頭] に該当します.

複数の線形空間から新しい線形空間を作る操作を扱います. まずは**集合の直積**の概念を用いた構成を紹介します.

補題 4.1.1 ([斎藤 09, p.32]). V_i $(i \in I)$ を集合 I で添え字付けられた線形空間の族とする. 直積集合

$$\prod_{i \in I} V_i = \{(v_i)_{i \in I} \mid v_i \in V_i\}$$

は, 成分ごとの和とスカラー倍

$$(v_i)_{i \in I} + (w_i)_{i \in I} \coloneqq (v_i + w_i)_{i \in I}, \quad c.(v_i)_{i \in I} \coloneqq (c.v_i)_{i \in I}$$

によって線形空間をなす.

以下, 直積の元 $(v_i)_{i \in I}$ のことを省略して (v_i) と書きます.

証明. 直積集合の二つの元 (v_i) と (v'_i) について次の同値が成立する事に注意する.

$$(v_i) = (v'_i) \iff \text{全ての } i \in I \text{ に対して } v_i = v'_i.$$

線形空間の定義 1.2.1 の条件 (i) は, 任意の $(u_i), (v_i), (w_i) \in \prod_{i \in I} V_i$ に対して $\big((u_i) + (v_i)\big) + (w_i) = (u_i) + \big((v_i) + (w_i)\big)$ となる事だが, 上の注意よりそれは任意の $i \in I$ に対して $(u_i + v_i) + w_i = u_i + (v_i + w_i)$ となる事と同値. 各 $i \in I$ に対して V_i が線形空間である事から, この条件は成立する. 定義 1.2.1 の他の条件も同様で, 上の注意を使うと各 V_i が線形空間である事から直ちに従う. □

定義 4.1.2 (**線形空間の直積**, [斎藤 09, p.32]). 線形空間 $\prod_{i \in I} V_i$ を V_i $(i \in I)$ の**直積** (direct product) 又は**直積線形空間**[*62]と呼ぶ. 添字集合が $I = \{1, \ldots, n\}$ の場合は, 集合論における記号にならって, 直積 $\prod_{i \in \{1,\ldots,n\}} V_i = \prod_{i=1}^n V_i$ を次の様に書く.

$$V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \coloneqq \prod_{i=1}^n V_i.$$

実は, 既に直積の特殊な場合を扱っています.

例 4.1.3. 直積の定義で全ての $i \in I$ について $V_i = \mathbb{K}$ の場合 $\prod_{i \in I} \mathbb{K}$ を考える. 命題 1.3.2 の函数空間 $\mathbb{K}^I = \mathrm{Map}(I, \mathbb{K})$ を思い出す. これらの間には同型写像 (定義 1.4.7)

$$\varphi \colon \prod_{i \in I} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}^I, \quad (a_i)_{i \in I} \longmapsto (a \colon i \mapsto a_i)$$

*62 直積空間と呼ぶ事もありますが, 位相空間論にも直積位相空間 (direct topological space) という用語があって, そちらを直積空間と呼ぶことも多いので注意して下さい.

がある．つまり，φ は全単射であって，かつ

$$\varphi\bigl((a_i)_{i\in I}+(b_i)_{i\in I}\bigr)=\varphi\bigl((a_i)_{i\in I}\bigr)+\varphi\bigl((b_i)_{i\in I}\bigr),\quad \varphi\bigl(c.(a_i)_{i\in I}\bigr)=c.\varphi\bigl((a_i)_{i\in I}\bigr) \tag{4.1.1}$$

を満たす (証明は問題 4.1.1)．この同型写像によって直積 $\prod_{i\in I}\mathbb{K}$ と函数空間 $\mathbb{K}^I$ を同一視できる．

特に $n\in\mathbb{N}$ として，添字集合が有限集合 $I=\{1,2,\ldots,n\}$ の場合，直積 $\prod_{i=1}^n\mathbb{K}$ は n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ と同じ線形空間とみなせる．

そこで，少し記号を濫用しますが，次の様な記号を使う事にします．

定義 4.1.4. 直積 $\prod_{i\in I}V_i$ において，全ての $i\in I$ について $V_i=V$ の場合は次のように書く．

$$V^I:=\prod_{i\in I}V_i.$$

また $I=\{1,\ldots,n\}$ の場合は次の記号を用いる．

$$V^n=\overbrace{V\times V\times\cdots\times V}^{n\text{ 個}}=\prod_{i=1}^n V:=\prod_{i\in\{1,\ldots,n\}}V.$$

特に数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ と直積 $\prod_{i=1}^n\mathbb{K}$ を線形空間として同一視して，$\mathbb{K}^n=\prod_{i=1}^n\mathbb{K}$ と書く．

直積と同一視できる線形空間の例をもう一つ挙げます．

例 4.1.5. 形式的冪級数の空間 $\mathbb{K}[\![x]\!]$ (例 1.3.8) から $I=\mathbb{N}$ を添字集合とする直積 $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}=\prod_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{K}$ への写像

$$\psi\colon\mathbb{K}[\![x]\!]\longrightarrow\mathbb{K}^{\mathbb{N}},\quad \sum_{i=0}^{\infty}f_ix^i\longmapsto(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

は同型写像 (証明は問題 4.1.2)．例 1.3.3 より $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ は数列空間だから，形式的冪級数の空間 $\mathbb{K}[\![x]\!]$ と数列空間 $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ は同じ線形空間と見なせる事が分かる．

直積には次の様な部分空間があります．

補題 4.1.6 ([斎藤 09, p.33])**.** 集合 I で添え字付けられた線形空間の族 V_i $(i\in I)$ に対し，直積 $\prod_{i\in I}V_i$ の部分集合

$$\bigoplus_{i\in I}V_i:=\left\{(v_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}V_i\;\middle|\;\text{有限個の } i \text{ を除いて } v_i=0\right\}$$

は部分空間である．

証明. $(v_i),(w_i)\in\bigoplus_{i\in I}V_i$ に対して $J:=\{i\in I\mid v_i\neq0\}$ 及び $K:=\{i\in I\mid w_i\neq0\}$ と書くと，J と K は有限集合．よって $J\cup K$ も有限集合．すると $\{i\in I\mid v_i+w_i\neq0\}\subset J\cup K$ も有限集合だから $(v_i)+(w_i)=(v_i+w_i)\in\bigoplus_{i\in I}V_i$ である．また $(v_i)\in\bigoplus_{i\in I}V_i$ と $c\in\mathbb{K}$ に対して $\{i\in I\mid cv_i\neq0\}\subset J$ となり，これも有限集合．よって $c(v_i)=(cv_i)\in\bigoplus_{i\in I}V_i$. □

定義 4.1.7 (**線形空間の直和**, [斎藤 09, p.33]). 部分空間 $\bigoplus_{i\in I} V_i \subset \prod_{i\in I} V_i$ を V_i $(i \in I)$ の**直和** (direct sum) 又は**直和線形空間**と呼ぶ. 全ての $i \in I$ に対して $V_i = V$ の場合は次のように書く[*63]:

$$V^{\oplus I} := \bigoplus_{i\in I} V.$$

また $I = \{1, \ldots, n\}$ の場合は次の記号を用いる.

$$V^{\oplus n} = \overbrace{V \oplus V \oplus \cdots \oplus V}^{n\text{ 個}} = \bigoplus_{i=1}^{n} V := \bigoplus_{i\in\{1,\ldots,n\}} V.$$

定義から直ぐに分かるように, 添字集合 I が有限集合だと直積と直和に違いはありません:

補題 4.1.8. 有限集合 I で添え字付けられた線形空間の族 V_i $(i \in I)$ については $\bigoplus_{i\in I} V_i = \prod_{i\in I} V_i$. 特に $I = \{1, \ldots, n\}$ かつ $V_i = V$ の場合は

$$V^{\oplus n} = V^n.$$

証明. I が有限集合なので, 直和の定義 4.1.7 の条件「有限個の $i \in I$ を除いて $v_i = 0$」は常に成立する. □

逆に添字集合 I が有限でなければ直積と直和は違います. 具体的には次の様な例があります.

例 4.1.9. 一変数多項式空間 (例 1.3.7) $\mathbb{K}[x] = \{\sum_{i=0}^{d} f_i x^i \mid d \in \mathbb{N},\ f_i \in \mathbb{K}\}$ から直和 $\mathbb{K}^{\oplus\mathbb{N}}$ への同型写像

$$\mathbb{K}[x] \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{\oplus\mathbb{N}} = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{K}$$

がある事を説明する. まず, $\mathbb{K}[x]$ は形式的冪級数の空間 $\mathbb{K}[\![x]\!]$ の部分集合と見なせる. 実際, 写像 $\mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[\![x]\!]$ を

$$\sum_{i=0}^{d} f_i x^i \longmapsto \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i, \quad f_i := 0\ (i > d)$$

で定義すれば, これは単射だから, その像と $\mathbb{K}[x]$ が同一視できる. 更に $\mathbb{K}[x] \subset \mathbb{K}[\![x]\!]$ は $\mathbb{K}$ 部分空間である (証明は問題 4.1.3). 次に例 4.1.5 の同型写像 ψ を思い出す.

$$\psi\colon \mathbb{K}[\![x]\!] \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{K}, \quad \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \longmapsto (f_i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

部分空間 $\mathbb{K}[x] \subset \mathbb{K}[\![x]\!]$ を ψ で写すと, その像は直和 $\mathbb{K}^{\oplus\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ である (次の図式参照).

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\![x]\!] & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ \cup & & \cup \\ \mathbb{K}[x] & \xrightarrow[\psi|_{\mathbb{K}[x]}]{} & \mathbb{K}^{\oplus\mathbb{N}} \end{array}$$

実際, ψ によって $\sum_{i=0}^{d} f_i x^i \in \mathbb{K}[x]$ は $(f_i)_{i=0}^{\infty}$, $f_i = 0$ $(i > d)$ に写るので,

$$\begin{aligned} \psi\big(\mathbb{K}[x]\big) &= \big\{(f_i)_{i=0}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid f_i \in \mathbb{K},\ \exists d \in \mathbb{N},\ f_i = 0\ (i > d)\big\} \\ &= \big\{(f_i)_{i=0}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \text{有限個の } i \text{ を除いて } f_i = 0\big\} = \mathbb{K}^{\oplus\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

[*63] [斎藤 09, p.33] では $\mathbb{K}$ の直和を $\mathbb{K}^{(I)}$ と表しています. これは Bourbaki (ブルバキ, フランスの数学者集団) の
N. Bourbaki, *Elements de Mathematique, Algebre*, Chaptres II, §1.6
で (加群の直和に関して) 使われている記号を踏襲したものです.

命題 3.3.12 で任意の線形写像は定義域の基底の行き先から一意に定まることを示しました．そのことと直和の概念を合わせると, 次の主張が得られます．

定理 4.1.10. 線形空間 V に基底 $B = (v_i)_{i \in I}$ がある時, 写像

$$\mathbb{K}^{\oplus I} \longrightarrow V, \quad (c_i)_{i \in I} \longmapsto \sum_{i \in I} c_i v_i$$

は同型．特に次の同型が成立する．

$$V \simeq \mathbb{K}^{\oplus I}. \tag{4.1.2}$$

また I が有限集合の場合, $|I| = n$ として, V は n 次元数ベクトル空間と同型である:

$$V \simeq \mathbb{K}^n.$$

証明. 基底の定義 2.4.1 より, 主張中の写像は全単射．その逆写像を $f\colon V \to \mathbb{K}^{\oplus I}$ と書くと, 任意の $i \in I$ に対して $f(v_i) = (\delta_{i,j})_{j \in I} \in \mathbb{K}^{\oplus I}$. 従って任意の $v = \sum_{i \in I} c_i v_i \in V$ に対して $f(v) = \sum_{i \in I} c_i f(v_i)$ となっているので, 命題 3.3.12 より f は線形写像．よって f は同型．

後半は $V \simeq K^{\oplus I} = K^{\oplus n}$ と補題 4.1.8 の $\mathbb{K}^{\oplus n} = \mathbb{K}^n$ から従う． □

この議論の変奏として:

命題 4.1.11 ([斎藤 09, 命題 2.1.7])**.** V と W を線形空間, $(v_i)_{i \in I}$ を V の基底とする．線形写像 $f\colon V \to W$ について, 以下の二条件は同値.

(i) f は同型.

(ii) $\bigl(f(v_i)\bigr)_{i \in I}$ は W の基底.

証明. 定理 4.1.10 の同型を $g\colon \mathbb{K}^{\oplus I} \xrightarrow{\sim} V$ と書くと, (i) は $f \circ g\colon \mathbb{K}^{\oplus I} \to W$ が同型であることと同値で, つまり $\mathbb{K}^{\oplus I} \simeq W$ と同値．一方で定理 4.1.10 の (4.1.2) より, (ii) は $W \simeq \mathbb{K}^{\oplus I}$ と同値．よって (i) と (ii) は同値. □

直積 $\prod_{i \in I} V_i$ には, 各 $j \in I$ に対して**射影**と呼ばれる標準的な全射線形写像 $\pi_j\colon \prod_{i \in I} V_i \twoheadrightarrow V_j$, $(v_i)_{i \in I} \mapsto v_j$ が定まり, 直和 $\bigoplus_{i \in I} V_i$ には**包含**と呼ばれる標準的な単射線形写像 $\iota_j\colon V_j \hookrightarrow \bigoplus_{i \in I} V_i$, $v_j \mapsto (\delta_{i,j} v_j)_{i \in I}$ が定まります．これらについては §4.3 で詳しく扱います．

最後に線形写像の直積及び直和を紹介します．

命題 4.1.12 (c.f. [斎藤 09, pp.51–52])**.** I を添字集合とする線形写像の族 $\{f_i\colon V_i \to W_i \mid i \in I\}$ が与えられているとする．この時, 直積の間の写像

$$\prod_{i \in I} f_i\colon \prod_{i \in I} V_i \longrightarrow \prod_{i \in I} W_i, \quad (v_i)_{i \in I} \longmapsto \bigl(f(v_i)\bigr)_{i \in I}$$

は線形写像である．これを**線形写像 f_i 達の直積**と呼ぶ．また, 直和空間への制限 $\bigoplus_{i \in I} f_i := \prod_{i \in I} f_i\big|_{\bigoplus_{i \in I} V_i}$ は線形写像

$$\bigoplus_{i \in I} f_i\colon \bigoplus_{i \in I} V_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} W_i$$

を定める．これを**線形写像 f_i 達の直和**と呼ぶ．特に $I = \{1, \ldots, n\}$ の場合は $f_1 \times \cdots \times f_n := \prod_{i=1}^n f_i$, $f_1 \oplus \cdots \oplus f_n := \bigoplus_{i=1}^n f_i$ と書く．

証明. $v = (v_i)_{i\in I}, v' = (v'_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$ を任意に取ると

$$\begin{aligned}
\Big(\prod_{i\in I} f_i\Big)(v+v') &= \Big(\prod_{i\in I} f_i\Big)\big((v_i+v'_i)_{i\in I}\big) && [\textstyle\prod_{i\in I} V_i \text{ における和の定義}]\\
&= \big(f_i(v_i+v'_i)\big)_{i\in I} && [\textstyle\prod_{i\in I} f_i \text{ の定義}]\\
&= \big(f_i(v_i)+f(v'_i)\big)_{i\in I} && [\text{各 } f_i \text{ の線形性}]\\
&= \big(f_i(v_i)\big)_{i\in I} + \big(f_i(v'_i)\big)_{i\in I} && [\textstyle\prod_{i\in I} W_i \text{ における和の定義}]\\
&= \Big(\prod_{i\in I} f_i\Big)(v) + \Big(\prod_{i\in I} f_i\Big)(v') && [\textstyle\prod_{i\in I} f_i \text{ の定義}].
\end{aligned}$$

また $v = (v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$ と $c \in \mathbb{K}$ を任意に取ると

$$\begin{aligned}
\Big(\prod_{i\in I} f_i\Big)(cv) &= \Big(\prod_{i\in I} f_i\Big)\big((cv_i)_{i\in I}\big) && [\textstyle\prod_{i\in I} V_i \text{ におけるスカラー倍の定義}]\\
&= \big(f_i(cv_i)\big)_{i\in I} && [\textstyle\prod_{i\in I} f_i \text{ の定義}]\\
&= \big(c.f_i(v_i)\big)_{i\in I} && [\text{各 } f_i \text{ の線形性}]\\
&= c\big(f_i(v_i)\big)_{i\in I} && [\textstyle\prod_{i\in I} W_i \text{ におけるスカラー倍の定義}]\\
&= c\Big(\prod_{i\in I} f_i\Big)(v) && [\textstyle\prod_{i\in I} f_i \text{ の定義}].
\end{aligned}$$

よって $\prod_{i\in I} f_i$ は線形写像である．

次に $\bigoplus_{i\in I} f_i$ について，まず像が $\bigoplus_{i\in I} W_i$ に含まれている事を示す．$v = (v_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} V_i$ を任意に取ると，直和空間の定義から有限個の i を除いて $v_i = 0$ だから，線形写像が零元を零元に写す事 (補題 1.4.3) と合わせると，$(\bigoplus_{i\in I} f_i)(v) = \big(f_i(v_i)\big)_{i\in I}$ についても有限個の i を除いて $f_i(v_i) = 0$ である．よって $(\bigoplus_{i\in I} f_i)(v) \in \bigoplus_{i\in I} W_i$ である．$\prod_{i\in I} f_i$ の線形性は既に示しているから，その制限である $\bigoplus_{i\in I} f_i$ も線形写像である． □

演習問題 (解答: 121 ページ)

問題 4.1.1. 例 4.1.3 の写像 ϕ が全単射であり，(4.1.1) を満たす事を示せ．

問題 4.1.2. 例 4.1.5 で議論を省略した部分を証明せよ．

問題 4.1.3. 例 4.1.9 で議論を省略した部分を証明せよ．

問題 4.1.4. $m, n \in \mathbb{N}$ とする．次の同型写像を具体的に構成せよ．

$$\mathbb{K}^m \oplus \mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{m+n}.$$

問題 4.1.5. 複素数を実部と虚部に分ける事で得られる写像 $\mathbb{C} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $z \mapsto (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ が，実線形空間の同型写像

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$$

を与えることを示せ．

問題 4.1.6. 問題 2.2.9 と同様に，多項式空間 $\mathbb{K}[x]$，形式的冪級数の空間 $\mathbb{K}[\![x]\!]$，Laurent 多項式の空間 $\mathbb{K}[x^{\pm1}]$，Laurent 級数の空間 $\mathbb{K}[x^{-1}, x]\!]$，形式的 Laurent 級数の空間 $\mathbb{K}[\![x^{\pm1}]\!]$ を考える．

(1) 形式的 Laurent 級数の空間 $\mathbb{K}[\![x^{\pm 1}]\!]$ から直積 $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ への同型写像を具体的に構成せよ.

(2) 前項の同型写像を各部分空間に制限することで, 以下の様な同型写像と単射準同型 (問題 2.1.3) の可換図式 (注意 3.4.5 参照) が得られる事を説明せよ.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[x] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{K}[x^{\pm 1}] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{K}[x^{-1}, x]\!] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{K}[\![x^{\pm 1}]\!] \arrow[d, "\sim"'] \\
\mathbb{K}^{\oplus \mathbb{N}} \arrow[r, hook] & \mathbb{K}^{\oplus \mathbb{Z}} \arrow[r, hook] & \mathbb{K}^{\oplus \mathbb{Z}_{<0}} \oplus \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \arrow[r, hook] & \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[x] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{K}[\![x]\!] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{K}[x^{-1}, x]\!] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{K}[\![x^{\pm 1}]\!] \arrow[d, "\sim"'] \\
\mathbb{K}^{\oplus \mathbb{N}} \arrow[r, hook] & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \arrow[r, hook] & \mathbb{K}^{\oplus \mathbb{Z}_{<0}} \oplus \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \arrow[r, hook] & \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}
\end{tikzcd}$$

但し $\mathbb{K}^{\oplus \mathbb{Z}_{<0}}$ の $\mathbb{Z}_{<0}$ は負の整数の集合 $\{-1, -2, \ldots\}$ を表す.

今までは係数体 $\mathbb{K}$ を固定して議論して来ましたが, 係数体を変える話を一つ紹介します.

問題 4.1.7 ([斎藤 09, 例 1.3.8])**.** V を実線形空間とする. 直和 $V \oplus V$ に, 複素数によるスカラー倍を

$$(a + b\sqrt{-1}).(v, w) := (av - bw, bv + aw) \quad (a, b \in \mathbb{R},\ v, w \in V)$$

で定義し, 和 $+$ と零元 0 は実線形空間としての $V \oplus V$ のものを用いることで, $(V \oplus V, +, 0, .)$ は複素線形空間になることを示せ. これを

$$V_{\mathbb{C}} := (V \oplus V, +, 0, .)$$

と書いて V **の複素化** (complexification) と呼ぶ.

問題 4.1.8 ([斎藤 09, 例 1.3.8])**.** V を実線形空間とし, $V_{\mathbb{C}} = V \oplus V$ を V の複素化 (問題 4.1.7) とする. V が基底 $(v_i)_{i \in I}$ を持つ時, $(v_i, 0) \in V_{\mathbb{C}}$ 達からなる $\big((v_i, 0)\big)_{i \in I}$ が $V_{\mathbb{C}}$ の複素線形空間としての基底である事を示せ.

問題 4.1.9 ([斎藤 09, 例 1.3.8])**.** V を有限次元実線形空間とし, $V_{\mathbb{C}} = V \oplus V$ を V の複素化 (問題 4.1.7) とする. 次式を示せ.

$$\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V.$$

次の問題は, 実質は集合論の問題であって, 線形代数の問題ではありません.

問題 4.1.10. V_1, V_2, V_3 を線形空間とする. 以下の様な同型写像を具体的に構成せよ.

(1) $V_1 \oplus V_2 \xrightarrow{\sim} V_2 \oplus V_1$.

(2) $(V_1 \oplus V_2) \oplus V_3 \xrightarrow{\sim} V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$.

(3) $(V_1 \oplus V_2) \oplus V_3 \xrightarrow{\sim} V_1 \oplus (V_2 \oplus V_3)$.

問題 4.1.11 (**実線形写像の複素化.** [斎藤 09, 例 2.2.13])**.** $f\colon V \to W$ を実線形写像とする. 直和 $f \oplus f\colon V \oplus V \to W \oplus W$ が複素化 (問題 4.1.7) の間の複素線形写像 $V_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}$ を定めることを示せ. これを $f_{\mathbb{C}}\colon V_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}$ と書いて**実線形写像** f **の複素化**と呼ぶ.

問題 4.1.12. 二つの同型写像 $f_1\colon V_1 \to W_1$ と $f_2\colon V_2 \to W_2$ に対して, それらの直積 (命題 4.1.12)

$$f_1 \times f_2\colon V_1 \times V_2 \longrightarrow W_1 \times W_2$$

もまた同型写像である事を示せ．この事から次の主張が従う．

$$V_1 \simeq W_1 \text{ かつ } V_2 \simeq W_2 \Longrightarrow V_1 \times V_2 \simeq W_1 \times W_2.$$

4.2　部分空間の直和

この副節の内容は参考書 [斎藤 09, pp.21–24, §1.4 後半] に該当します．

線形空間 V の部分空間 W_1, W_2 に対して, 和空間 $W_1 + W_2$ (集合としては $W_1 + W_2 \subset V$) と直和 $W_1 \oplus W_2$ (集合としては $W_1 \oplus W_2 = W_1 \times W_2$) の二つの線形空間が構成できる事を説明しました．これらは以下の様に関係します．

命題 4.2.1 (c.f. [斎藤 09, 命題 1.4.9])**.** 線形空間 V の部分空間 W_1 と W_2 について, 次の二条件は同値.

(i) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

(ii) $(w_1, w_2) \in W_1 \oplus W_2$ を $w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$ に写す写像 $\varphi \colon W_1 \oplus W_2 \to W_1 + W_2$ は同型写像.

証明. まず (ii) の φ が全射準同型である事を示しておく．$w = (w_1, w_2), w' = (w_1', w_2') \in W_1 \oplus W_2$ と $c \in \mathbb{K}$ に対して $\varphi(w+w') = \varphi\big((w_1+w_1', w_2+w_2')\big) = (w_1+w_1')+(w_2+w_2') = (w_1+w_2)+(w_1'+w_2') = \varphi(w)+\varphi(w')$ 及び $\varphi(c.w) = \varphi\big((c.w_1, cw_2)\big) = c.w_1 + c.w_2 = c.(w_1 + w_2) = c.\varphi(w)$ となる．よって φ は線形写像である．また任意の $w \in W_1 + W_2$ は適当な $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ を用いて $w = w_1 + w_2$ と書けるから, $\varphi\big((w_1, w_2)\big) = w_1 + w_2 = w$. よって φ は全射である．

(i) $\Rightarrow$ (ii): 既に φ が全射準同型である事は示したから, あとは φ が単射である事を示せば良い.

$(w_1, w_2), (w_1', w_2') \in W_1 \oplus W_2$ が $\varphi\big((w_1, w_2)\big) = \varphi\big((w_1', w_2')\big)$ を満たすと仮定する．$w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$ だから $w_1 - w_1' = w_2' - w_2$. この左辺は W_1 の元で, 右辺は W_2 の元だから, $w_1 - w_1' = w_2 - w_2' \in W_1 \cap W_2$. よって仮定から $w_1 - w_1' = w_2 - w_2' = 0$. つまり $(w_1, w_2) = (w_1', w_2')$ となり, φ は単射である．

(ii) $\Rightarrow$ (i): 任意に $w \in W_1 \cap W_2$ を取ると $(w, 0), (0, w) \in W_1 \oplus W_2$ である．この二元を φ で写すと $\varphi\big((w, 0)\big) = w = \varphi\big((0, w)\big)$ となり, 仮定より φ は単射だから $(w, 0) = (0, w)$. よって $w = 0$ である． □

命題 4.2.1 の結果を鑑みて, 用語・記号の濫用になりますが, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ の場合は以下の様に直和と和空間を同一視する事にします．

定義 4.2.2. V を線形空間, W_1 と W_2 をその部分空間とする．

(1) $W_1 \cap W_2 = 0$ を満たす時, 和空間 $W_1 + W_2 \subset V$ を**部分空間の直和** (direct sum of subspaces) あるいは単に**直和**と呼んで, 以下の様に表す[*64].

$$W_1 \oplus W_2 := W_1 + W_2$$

(2) $V = W_1 \oplus W_2$ の時, これを V の**直和分解** (direct sum decomposition) という．

命題 4.2.1 及びその証明を言い換えると, 部分空間の直和には次の様な意味がある事が分かります．

命題 4.2.3. 線形空間 V の二つの部分空間 W_1 と W_2 について, 以下の二条件は同値.

[*64] [斎藤 66] では部分空間の直和を記号 $W_1 \dot{+} W_2$ で表して, $W_1 \oplus W_2$ と区別しています．また [斎藤 09, p.22, 余談 22] で説明されている様に, $W_1 \oplus W_2$ を**抽象的な直和** (abstract direct sum) と呼ぶ事があります．そして $W_1 \dot{+} W_2$ を**内部直和** (internal direct sum) と呼ぶ事もあります．

(i) W_1+W_2 の元を W_1 の元と W_2 の元の和として表す仕方は一意的.

(ii) $W_1\cap W_2=\{0\}$.

証明. (ii) $\Rightarrow$ (i): $w\in W_1+W_2$ が二通りに

$$w=w_1+w_2=w_1'+w_2',\quad w_1,w_1'\in W_1,\ w_2,w_2'\in W_2$$

と表されれば, 移項して

$$w_1-w_1'=w_2-w_2'$$

となるが, 左辺は W_1 の元で右辺は W_2 の元だから, 両辺とも $W_1\cap W_2$ の元である. よって $W_1\cap W_2=\{0\}$ ならば $(w_1,w_2)=(w_1',w_2')$ である.

(i) $\Rightarrow$ (ii): $w\in(W_1\cap W_2)\setminus\{0\}$ が存在すれば, 零元が $0=0+0=w+(-w)$ の二通りで表せる. □

注意. すぐ後で, 任意の部分空間 $W\subset V$ に対して, 直和分解 $V=W\oplus W'$ を与える部分空間 $W'\subset V$ が存在することを示します (命題 4.2.8).

系 4.2.4. 有限次元線形空間 V の直和分解 $V=W_1\oplus W_2$ が与えられた時, $\dim V=\dim W_1+\dim W_2$.

証明. 部分空間の和の次元公式 (定理 2.5.8) より $\dim V=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$. 仮定と命題 4.2.3 (1) $\Rightarrow$ (ii) から $\dim(W_1\cap W_2)=\dim\{0\}=0$. これらから主張が従う. □

直和分解の例を一つだけ挙げます. 他の例は演習問題を参照して下さい.

例 4.2.5. 例 2.2.4 で導入した数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の部分空間 W_m,W_l' で $l=n-m$ の場合を考える. つまり

$$W_m:=\{{}^t(v_1\ \cdots\ v_m\ 0\ \cdots\ 0)\mid v_i\in\mathbb{K}\ (i=1,\dots,m)\},$$
$$W_{n-m}':=\{{}^t(0\ \cdots\ 0\ v_{m+1}\ \cdots\ v_n)\mid v_i\in\mathbb{K}\ (i=m+1,\dots,n)\}.$$

$W_m+W_{n-m}'=W$ かつ $W_m\cap W_{n-m}'=\{0\}$ だから, $\mathbb{K}^n$ は次の直和分解を持つ.

$$\mathbb{K}^n=W_m\oplus W_{n-m}'.$$

部分空間の直和は二つ以上の部分空間に対しても定義できます.

命題 4.2.6. 線形空間 V の部分空間の族 W_i $(i\in I)$ に対して, 以下の二条件は同値.

(i) $\sum_{i\in I}W_i$ の元を W_i 達の元の和として表す仕方は一意的.

(ii) 任意の $i\in I$ に対して $W_i\cap\sum_{j\in I\setminus\{i\}}W_j=\{0\}$.

これらの条件が満たされる時, W_i 達の直和から和空間への写像

$$\bigoplus_{i\in I}W_i\longrightarrow\sum_{i\in I}W_i,\quad (w_i)_{i\in I}\longmapsto\sum_{i\in I}w_i$$

は同型写像である.

証明. 問題 4.2.1 にします. □

定義 4.2.7. 線形空間 V の部分空間の族 W_i $(i\in I)$ を考える.

(1) 命題 4.2.6 の条件が成立する時, 部分空間の直和 $\bigoplus_{i\in I}W_i$ と和空間 $\sum_{i\in I}W_i$ を同一視して, 次の様に直和の記号で表す.

$$\bigoplus_{i\in I}W_i:=\sum_{i\in I}W_i$$

(2) $V=\bigoplus_{i\in I}W_i$ の時, これを V の**直和分解**と呼ぶ.

定理 2.4.15 の系として, 次の主張が得られます.

命題 4.2.8 ([斎藤 09, 系 1.6.8])**.** 線形空間 V とその部分空間 W に対して, W の補空間 W', つまり V の部分空間 W' であって $V=W\oplus W'$ となるものが存在する.

定義 4.2.9. 命題 4.2.8 の W' を部分空間 $W\subset V$ の**補空間** (complementary subspace) と呼ぶ.

今までに扱ってきた概念を組み合わせて, 定義 2.4.1 とは別の基底の定義を与えましょう.

補題 4.2.10 ([斎藤 09, 定義 1.6.1])**.** V を線形空間, $(v_i)_{i\in I}$, $v_i\in V$ を集合 I で添字付けられた V の元の族とする. この時, $(v_i)_{i\in I}$ が V の基底である事と, 直和 $\mathbb{K}^{\oplus I}$ から V への写像

$$\mathbb{K}^{\oplus I}\longrightarrow V,\quad (c_i)_{i\in I}\longmapsto \textstyle\sum_{i\in I}c_iv_i$$

が全単射である事は同値ある.

演習問題 (解答: 123 ページ)

問題 4.2.1. 命題 4.2.6 を示せ.

問題 4.2.2 ([斎藤 09, 問題 1.4.2])**.** 例 2.1.8 で扱った正方行列空間 $M(n;\mathbb{K})$ の部分空間を考える.

$$\begin{aligned}
S(n;\mathbb{K}) &:= \{S\in M(n;\mathbb{K}) \mid S\text{ は対称行列: }{}^tS=S\},\\
A(n;\mathbb{K}) &:= \{A\in M(n;\mathbb{K}) \mid A\text{ は反対称行列: }{}^tA=-A\},\\
U(n;\mathbb{K}) &:= \{U\in M(n;\mathbb{K}) \mid U=(u_{ij})\text{ は上三角行列: }i>j\text{ なら }u_{ij}=0\},\\
L(n;\mathbb{K}) &:= \{L\in M(n;\mathbb{K}) \mid L=(l_{ij})\text{ は下三角行列: }i<j\text{ なら }l_{ij}=0\},\\
D(n;\mathbb{K}) &:= \{D\in M(n;\mathbb{K}) \mid D=(d_{ij})\text{ は対角行列: }i\neq j\text{ なら }d_{ij}=0\}.
\end{aligned}$$

(1) $S(n;\mathbb{K})\cap U(n;\mathbb{K})=D(n;\mathbb{K})$ と $S(n;\mathbb{K})+U(n;\mathbb{K})=M(n;\mathbb{K})$ を示せ.
(2) $M(n;\mathbb{K})=A(n;\mathbb{K})\oplus U(n;\mathbb{K})$ を示せ.
(3) ($\mathbb{K}=\mathbb{Q},\mathbb{C},\mathbb{R}$ の場合に) $M(n;\mathbb{K})=A(n;\mathbb{K})\oplus S(n;\mathbb{K})$ を示せ.

問題 4.2.3 (**正方行列の三角分解**)**.** 正方行列の空間 $\mathfrak{g}:=M(n;\mathbb{K})$ について, 以下の部分集合を考える.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{n}^+ &:= \{U\in\mathfrak{g} \mid U=(u_{ij})\text{ は狭義上三角行列: }i\geq j\text{ なら }u_{ij}=0\},\\
\mathfrak{n}^- &:= \{L\in\mathfrak{g} \mid L=(l_{ij})\text{ は狭義下三角行列: }i\leq j\text{ なら }l_{ij}=0\},\\
\mathfrak{h} &:= \{D\in\mathfrak{g} \mid D=(d_{ij})\text{ は対角行列: }i\neq j\text{ なら }d_{ij}=0\}
\end{aligned}$$

(1) $\mathfrak{n}^+,\mathfrak{n}^-,\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ が部分空間である事を示せ.
(2) 直和分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}^+\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}^-$ がある事を示せ.

問題 4.2.4 ([斎藤 09, 例 7.2.6])**.** $f\in\mathbb{K}[x]$ を n 次多項式とする. 問題 2.1.6 の部分空間 $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ と問題 2.1.7 の部分空間 $(f):=\{fg\mid g\in\mathbb{K}[x]\}\subset\mathbb{K}[x]$ について, 次の直和分解がある事を示せ.

$$\mathbb{K}[x]=(f)\oplus\mathbb{K}[x]_{\leq n-1}.$$

問題 4.2.5 ([足助 12, 問 3.12.22])**.** V と W を線形空間とし, 直和 $V \oplus W$ の部分集合 $\{(v,0) \in V \oplus W \mid v \in V\}$ を V と, 部分集合 $\{(0,w) \in V \oplus W \mid w \in W\}$ を W と同一視する.

(1) 上のように $V, W \subset V \oplus W$ を部分集合と見なすと, V と W はそれぞれ $V \oplus W$ の部分空間である事を示せ.

(2) 前項のように $V, W \subset V \oplus W$ を部分空間と見なした時, $V \cap W = \{0\}$, $V + W = V \oplus W$ となる事を示せ.

問題 4.2.6 ([斎藤 09, 問題 1.4.3])**.** 線形空間 V とその部分空間 W_1, W_2, W_3 であって, $W_1 \cap W_2 = W_2 \cap W_3 = W_3 \cap W_1 = \{0\}$ であるが, $W_1 + W_2 + W_3$ が直和 $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ と同型ではないものを挙げよ.

4.3　直積と直和の普遍性

この副節では直積と直和の**普遍性** (universality) を紹介します. まず直積について議論しますが, その定義 4.1.2 を思い出しておいて下さい.

補題 4.3.1. $\prod_{i \in I} V_i$ を線形空間 V_i $(i \in I)$ の直積とする. 各 $j \in I$ に対して写像 π_j を

$$\pi_j \colon \prod_{i \in I} V_i \longrightarrow V_j, \quad (v_i)_{i \in I} \longmapsto v_j$$

で定義すると, これは全射線形写像である.

証明. 任意の $v_j \in V_j$ に対して $v := (\delta_{i,j} v_j)_{i \in I}$, つまり j 成分が v_j であり, 他の成分が全て 0 である元 $v \in \prod_{i \in I} V_i$ を取れば $\pi_j(v) = v_j$ である. よって π_j は全射.

次に線形性を示す. 任意の $v = (v_i)_{i \in I}, v' = (v'_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} V_i$ に対して

$$\begin{aligned} \pi_j(v + v') &= \pi_j\big((v_i + v'_i)_{i \in I}\big) && [\text{直積での和の定義}] \\ &= v_j + v'_j && [\pi_j \text{ の定義}] \\ &= \pi_j(v) + \pi_j(v') && [\pi_j \text{ の定義}]. \end{aligned}$$

また任意の $v = (v_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} V_i$ と $c \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned} \pi_j(cv) &= \pi_j\big((cv_i)_{i \in I}\big) && [\text{直積でのスカラーの定義}] \\ &= cv_j && [\pi_j \text{ の定義}] \\ &= c.\pi_j(v) && [\pi_j \text{ の定義}]. \end{aligned}$$

よって π_j は線形写像である. □

定義 4.3.2 (**射影**, [足助 12, 定義 3.10.3])**.** 補題 4.3.1 の全射線形写像 $\pi_j \colon \prod_{i \in I} V_i \to V_j$ を**第 j 成分への射影** (the projection to the j-th component), 又は単に**第 j 射影** (the j-th projection) と呼ぶ.

直積と射影は次の性質を満たします. これを直積の**普遍性** (universality) と呼びます.

定理 4.3.3 (**直積の普遍性**, [足助 12, 定理 3.10.7])**.** V_i $(i \in I)$ を添字集合 I の線形空間の族とし, また各 $j \in I$ に対して $\pi_j \colon \prod_{i \in I} V_i \twoheadrightarrow V_j$[*65] を射影とする. そして W を線形空間とし, 各 $i \in I$ に対して線形写像

[*65] 鏃が二つある記号 $\twoheadrightarrow$ は全射を表すのでした (§0.3 (vii)).

$f_i\colon W \to V_i$ が与えられているとする．この時，線形写像 $f\colon W \to \prod_{i\in I} V_i$ であって，任意の $i \in I$ に対して $\pi_i \circ f = f_i$ となるものが一意に存在する．

証明． 写像 $f\colon W \to \prod_{i\in I} V_i$ を

$$f(w) \coloneqq \big(f_i(w)\big)_{i\in I} \quad (w \in W)$$

で定める．まず，これが主張の条件を満たす線形写像である事を示そう．任意の $j \in I$ と $w \in W$ に対して

$$(\pi_j \circ f)(w) = \pi_j\big(f(w)\big) = \pi_j\big((f_i(w))_{i\in I}\big) = f_j(w)$$

となるので，確かに f は条件を満たす．また任意の $w, w' \in W$ と $c \in \mathbb{K}$ に対して

$$f(w + w') = \big(f_i(w + w')\big)_{i\in I} = \big(f_i(w) + f_i(w')\big)_{i\in I} = \big(f_i(w)\big)_{i\in I} + \big(f_i(w')\big)_{i\in I} = f(w) + f(w'),$$
$$f(cw) = \big(f_i(cw)\big)_{i\in I} = \big(c.f_i(w)\big)_{i\in I} = c.\big(f_i(w)\big)_{i\in I} = c.f(w)$$

となるので，f は線形写像である．

次に一意性を示す．線形写像 $g\colon W \to \prod_{i\in I} V_i$ が任意の $i \in I$ に対して $\pi_i \circ g = f_i$ を満たすと仮定する．すると，任意の $w \in W$ に対して $g(w)$ の第 i 成分は $\pi_i\big(g(w)\big) = (\pi_i \circ g)(w) = f_i(w)$ になるから，$g(w) = \big(f_i(w)\big)_{i\in I} = f(w)$．よって $g = f$ である． □

注意 4.3.4. 添字集合が $I = \{1, 2\}$ の場合の直積空間 $V_1 \times V_2$ の普遍性は，次のような線形空間・線形写像の可換図式で表されます．

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, bend left, "f_1"] \arrow[dr, dotted, "\exists! f"] \arrow[ddr, bend right, "f_2"'] & & \\
& V_1 \times V_2 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & V_1 \\
& V_2 &
\end{tikzcd}$$

この図は「実線部分が与えられれば，破線部分を加えて定まる図式が可換になる」と解釈して下さい．また $\exists! f$ は「f が一意に存在する」と読んで下さい．

系 4.3.5. V_i $(i \in I)$ を線形空間の族とし，W を線形空間とする．定理 4.3.3 の対応 $(f_i)_{i\in I} \mapsto f$ が定める写像

$$\phi\colon \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(W, V_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}\Big(W, \prod_{i\in I} V_i\Big), \quad (f_i)_{i\in I} \longmapsto f$$

は同型写像である．

証明． 定理 4.3.3 における f の一意性より，写像 ϕ が確かに定まっている事に注意する．まず ϕ が線形写像である事を示そう．任意の $(f_i)_{i\in I}, (f'_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(W, V_i)$ を取り，$f \coloneqq \phi\big((f_i)_{i\in I}\big)$，$f' \coloneqq \phi\big((f_i)_{i\in I}\big)$ と置く．また

$$g \coloneqq \phi\big((f_i)_{i\in I} + (f'_i)_{i\in I}\big) = \phi\big((f_i + f'_i)_{i\in I}\big)$$

と置くと，定理 4.3.3 より任意の $i \in I$ に対して $\pi_i \circ g = f_i + f'_i$．一方で $f + f' \in \mathrm{Hom}(W, \prod_{i\in I} V_i)$ も，問題 3.2.3 から

$$\pi_i \circ (f + f') = \pi_i \circ f + \pi_i \circ f' = f_i + f'_i$$

となって, g と同じ性質を満たす．すると定理 4.3.3 の一意性より $g = f + f'$ である．また任意の $(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(W, V_i)$ と $c \in \mathbb{K}$ に対し, $f := \phi\bigl((f_i)_{i\in I}\bigr)$ 及び

$$h := \phi\bigl(c(f_i)_{i\in I}\bigr) = \phi\bigl((cf_i)_{i\in I}\bigr)$$

と置くと, 問題 3.2.3 と定理 4.3.3 から

$$\pi_i \circ h = cf_i = c(\pi_i \circ f) = \pi_i \circ (cf)$$

となり, 再び定理 4.3.3 の一意性から $h = cf$ である．以上で ϕ の線形性が示せた．

次に ϕ が単射である事を示そう．f が線形写像である事を既に示しているから, 問題 1.4.1 より, $(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(W, V_i)$ が $\phi\bigl((f_i)_{i\in I}\bigr) = 0$ を満たすと仮定して, $(f_i)_{i\in I} = 0$ を示せばよい．定理 4.3.3 の条件より任意の $i \in I$ に対して $\pi_i \circ 0 = f_i$ だが, $\pi_i \circ 0$ は零写像なので $f_i = 0$, つまり $(f_i)_{i\in I} = 0$ である．

最後に, 任意の $f \in \mathrm{Hom}(W, \prod_{i\in I} V_i)$ に対して $f_i := \pi_i \circ f$ とすれば, $\phi\bigl((f_i)_{i\in I}\bigr) = f$ なので (詳細は問題 4.3.1), ϕ は全射である． □

直積と射影の組 $(\prod_{i\in I} V_i, (\pi_i)_{i\in I})$ は定理 4.3.3 の性質を満たす訳ですが, 次の定理 4.3.6 が主張するように, 逆にこの性質が直積と射影の組を特徴付けます．

定理 4.3.6 ([足助 12, 定理 3.10.9])**.** V_i $(i \in I)$ を添字集合 I の線形空間の族とし, 線形空間 V 及び各 $i \in I$ に対して線形写像 $p_i\colon V \to V_i$ が与えられていて, 次の意味で定理 4.3.3 の性質を持つものとする．

- 線形空間 W 及び各 $i \in I$ に対して線形写像 $f_i\colon W \to V_i$ が与えられている時, 線形写像 $f\colon W \to V$ であって任意の $i \in I$ に対して $p_i \circ f = f_i$ となるものが一意に存在する．

この時, 同型写像 $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} V_i$ が存在して, 任意の $i \in I$ に対して $p_i = \pi_i \circ \varphi$ となる．更にこのような写像 φ は一意である．

証明の為に補題を用意します．

補題 4.3.7. V_i $(i \in I)$ を添字集合 I の線形空間の族とする．自己準同型 $f \in \mathrm{End}(\prod_{i\in I} V_i)$ が任意の $i \in I$ に対し $\pi_i \circ f = \pi_i$ を満たせば $f = \mathrm{id}_{\prod_{i\in I} V_i}$ である．

証明. 定理 4.3.3 を $W := \prod_{i\in I} V_i$, $f_i := \pi_i$ に適用すると, 任意の $i \in I$ に対して $\pi_i \circ f = \pi_i$ となる f は一意である．一方, 任意の $i \in I$ に対して $\pi_i \circ \mathrm{id} = \pi_i$ だから, 一意性より $\mathrm{id} = f$ である． □

定理 4.3.6 の証明. 定理 4.3.3 を $W := V$, $f_i := p_i$ に適用すれば, 線形写像 $\varphi\colon V \to \prod_{i\in I} V_i$ であって任意の i に対して $\pi_i \circ \varphi = p_i$ となるものが唯一存在する．従って φ が全単射である事を示せば良い．

仮定している性質で $W := \prod_{i\in I} V_i$, $f_i := \pi_i$ とすると, 線形写像 $\psi\colon \prod_{i\in I} V_i \to V$ であって 任意の $i \in I$ について $p_i \circ \psi = \pi_i$ となるものが一意に存在する．ψ が φ の逆写像である事を示そう．

任意に $w \in \prod_{i\in I} V_i$ を取ると, 各 $i \in I$ に対して $(\pi_i \circ \varphi \circ \psi)(w) = (p_i \circ \psi)(w) = \pi_i(w)$. よって $\pi_i \circ (\varphi \circ \psi) = \pi_i$ となり, 補題 4.3.7 より $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\prod_{i\in I} V_i}$ である．

後は $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$ を示せば証明が完了する．$v \in V$ を任意に取ると, 各 $i \in I$ に対して $(p_i \circ \psi \circ \varphi)(v) = (\pi_i \circ \varphi)(v) = p_i(v)$. ところで, 仮定している性質で $W := V$, $f_i := p_i$ とすれば, 線形写像 $g\colon V \to V$ であって任意の $i \in I$ について $p_i \circ g = p_i$ となるものが一意に存在する．一方, $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ も同じ性質 $p_i \circ \mathrm{id}_V = p_i$ を満たす線形写像だから, 一意性より $g = \mathrm{id}_V$ である．従って, この段落の最初の議論と合わせれば, $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$ となる． □

注意 4.3.8. 直積空間の元の定義 4.1.2 では, 明示的に集合及びその上の線形空間の構造を与えて入れて直積空間を定めました．このような定義を**構成的** (constructible) **な定義**と呼びます．一方で, 定理 4.3.3 と定理 4.3.6 は**特徴付けを与える**事で直積空間を**同型を除いて一意に定めて**います．このような定義を**普遍的** (universal) **な定義**と呼びます．後者は明示的でないので「集合として何なのか」分かりにくいのですが, 性質を与えてくれているので, 様々な議論で役立ちます (例えば, 与えられている線形空間が何かの直積空間と同型か否かを判断したい場合).

線形空間の直和 (定義 4.1.7) も普遍性を持ちますが, 直積の普遍性とは所々違います.

補題 4.3.9. $\bigoplus_{i\in I} V_i$ を線形空間 V_i $(i \in I)$ の直和とする．各 $j \in I$ に対して次で定まる写像 ι_j は単射線形写像である.

$$\iota_j \colon V_j \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} V_i, \quad v \longmapsto (\delta_{i,j} v)_{i\in I}.$$

ここで $\delta_{i,j}$ は Kronecker デルタで, $\iota_j(v)$ の i 成分は $i = j$ の時 v, その他の時は 0 である事を意味する.

証明. 問題 4.3.2 にします. □

定義 4.3.10 (**包含写像**, [足助 12, 定義 3.10.15])**.** 補題 4.3.9 の単射線形写像 $\iota_j \colon V_j \to \bigoplus_{i\in I} V_i$ を**第 j 成分の包含写像** (the inclusion of the j-th component), 又は単に**第 j 包含写像** (the j-th inclusion) と呼ぶ.

定理 4.3.11 (**直和の普遍性**, [足助 12, 定理 3.10.19])**.** V_i $(i \in I)$ を添字集合 I の線形空間の族とし, また各 $j \in I$ に対して $\iota_j \colon V_j \hookrightarrow \bigoplus_{i\in I} V_i$[*66]を包含写像とする．そして W を線形空間とし, 各 $i \in I$ に対して線形写像 $f_i \colon V_i \to W$ が与えられているとする．この時, 線形写像 $f \colon \bigoplus_{i\in I} V_i \to W$ であって, 任意の $i \in I$ に対して $f \circ \iota_i = f_i$ となるものが一意に存在する.

証明. 問題 4.3.3 にします. □

注意 4.3.12. 添字集合が $I = \{1, 2\}$ の場合の直和空間 $V_1 \oplus V_2$ の普遍性は, 次のような線形空間・線形写像の可換図式で表されます.

$$\begin{tikzcd}
& V_1 \arrow[d, "\iota_1"] \arrow[ddr, bend left, "f_1"] & \\
V_2 \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & V_1 \oplus V_2 \arrow[dr, dotted, "\exists! f"] & \\
& & W
\end{tikzcd}$$

また I が有限集合なら直積と直和が一致するので, $\bigoplus_{i\in I} V_i = \prod_{i\in I} V_i$ は定理 4.3.3 と定理 4.3.11 の両方の普遍性を持ちます.

系 4.3.13. V_i $(i \in I)$ を線形空間の族とし, W を線形空間とする．定理 4.3.11 の対応 $(f_i)_{i\in I} \mapsto f$ が定める写像

$$\phi \colon \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(V_i, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}\Bigl(\bigoplus_{i\in I} V_i, W\Bigr), \quad \phi\bigl((f_i)_{i\in I}\bigr) := f$$

は同型写像である.

[*66] 記号 $\hookrightarrow$ は単射を表します (§ 0.3 (vii)).

証明. 問題 4.3.4 にします. □

注意 4.3.14. 系 4.3.5 とは対照的に, $\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Hom}(V_i,W)$ **と** $\mathrm{Hom}\big(\bigoplus_{i\in I}V_i,W\big)$ **は同型だとは限らない**事に注意して下さい. 具体例は問題 4.3.5 で考えます.

定理 4.3.15 ([足助 12, 定理 3.10.9])**.** V_i $(i\in I)$ を添字集合 I の線形空間の族とし, 線形空間 V 及び各 $i\in I$ に対して線形写像 $s_i\colon V_i\to V$ が与えられていて, 次の意味で定理 4.3.11 の性質を持つものとする.

- 線形空間 W 及び各 $i\in I$ に対して線形写像 $f_i\colon V_i\to W$ が与えられている時, 線形写像 $f\colon V\to W$ であって任意の $i\in I$ に対して $f\circ s_i=f_i$ となるものが一意に存在する.

この時, 同型写像 $\psi\colon\bigoplus_{i\in I}V_i\xrightarrow{\sim}V$ が存在して, 任意の $i\in I$ に対して $s_i=\psi\circ\iota_i$ となる. 更にこのような写像 ψ は一意である.

証明. 問題 4.3.7 にします. □

演習問題 (解答: 125 ページ)

問題 4.3.1. 系 4.3.5 の証明を補完せよ.

問題 4.3.2. 補題 4.3.9 を証明せよ.

問題 4.3.3. 定理 4.3.11 を証明せよ.

問題 4.3.4. 系 4.3.13 を証明せよ.

問題 4.3.5. $\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Hom}(V_i,W)$ と $\mathrm{Hom}\Big(\bigoplus_{i\in I}V_i,W\Big)$ が同型ではない $(V_i)_{i\in I},W$ の例を挙げよ.

問題 4.3.6 (補題 4.3.7 の類似)**.** V_i $(i\in I)$ を添字集合 I の線形空間の族とし, $V:=\bigoplus_{i\in I}V_i$ と置く. 自己準同型 $f\in\mathrm{End}(V)$ が任意の $i\in I$ に対し $f\circ\iota_i=\iota_i$ を満たせば $f=\mathrm{id}_V$ である. これを証明せよ.

問題 4.3.7. 問題 4.3.6 を使って定理 4.3.15 を証明せよ.

問題 4.3.8 ([斎藤 09, 例 2.3.4])**.** V,W を有限次元実線形空間とする. $f\colon V\to W$ を実線形写像とし, $f_{\mathbb{C}}\colon V_{\mathbb{C}}\to W_{\mathbb{C}}$ をその複素化 (問題 4.1.7) とする. また V が基底 $B_V=(v_1,\dots,v_n)$ を持ち, W が基底 $B_W=(w_1,\dots,w_m)$ を持つとすると, $B_{V_{\mathbb{C}}}:=\big((v_1,0),\dots,(v_n,0)\big)$ と $B_{W_{\mathbb{C}}}:=\big((w_1,0),\dots,(w_m,0)\big)$ はそれぞれ $V_{\mathbb{C}}$ と $W_{\mathbb{C}}$ の基底である (問題 4.1.8). そして実線形写像 f の B_V,B_W に関する行列表示を $A\in M(m,n;\mathbb{R})$ とする. この時, 複素線形写像 $f_{\mathbb{C}}$ の $B_{V_{\mathbb{C}}},B_{W_{\mathbb{C}}}$ に関する行列表示は同じ行列 $A\in M(m,n;\mathbb{R})\subset M(m,n;\mathbb{C})$ になる事を示せ.

問題 4.3.9. U,V,W を線形空間とする. 以下の同型を証明せよ.

(1) $\mathrm{Hom}(U,V\oplus W)\simeq\mathrm{Hom}(U,V)\oplus\mathrm{Hom}(U,W)$.
(2) $\mathrm{Hom}(U\oplus V,W)\simeq\mathrm{Hom}(U,W)\oplus\mathrm{Hom}(V,W)$.

5 核と像 (05/21)

この節は参考書 [斎藤 09, §2.4] に基づきます. 引き続き, 線形空間と言ったら断らない限り体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間のことを指すものとします.

5.1 核と像

部分空間の例 2.1.9 で, 係数行列 $A \in M(m,n;\mathbb{K})$ の斉次連立一次方程式 $Ax=0$ の解集合 $K := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax=0\}$ が $\mathbb{K}^n$ の部分空間であることを説明しました. この部分空間は, 左掛算写像 $l_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ を使うと

$$K = l_A^{-1}(0)$$

と書けます. 実は, l_A に限らず任意の線形写像 $f\colon V \to W$ について, W の零元 0_W の逆像 $f^{-1}(0_W)$ は V の部分空間になります. これを f の核と呼びます. また例 2.1.10 では $I := \{Ax \mid x \in \mathbb{K}^n\}$ が $\mathbb{K}^m$ の部分空間になることを見ましたが, これは

$$I = l_A(\mathbb{K}^n),$$

つまり写像 l_A の像です. 一般の線形写像 $f\colon V \to W$ についても, その像 $f(V)$ は W の部分空間になります.

以上の話をもう少し一般化した, 次の主張を紹介します.

命題 5.1.1 ([斎藤 09, 命題 2.4.1])**.** $f\colon V \to W$ を線形写像とする.

(1) 部分空間 $V' \subset V$ の f による像 $f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\} \subset W$ は W の部分空間.

(2) 部分空間 $W' \subset W$ の f による逆像 $f^{-1}(W') := \{v \in V \mid f(v) \in W'\}$ は V の部分空間.

証明. (1) V の零元 0_V は V' に含まれ, $f(0_V) = 0_W$ は W の零元だから, $0_W = f(0_V) \in f(V')$. また任意の $w_1, w_2 \in f(V')$ と $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ に対して, $w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2)$ となる $v_1, v_2 \in V'$ が存在するから, f の線形性と $c_1v_1 + c_2v_2 \in V'$ より

$$c_1w_1 + c_2w_2 = c_1f(v_1) + c_2f(v_2) = f(c_1v_1 + c_2v_2) \in f(V').$$

(2) $f(0_V) = 0_W \in W'$ より $0_V \in f^{-1}(W')$. また任意の $v_1, v_2 \in f^{-1}(W')$ と $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ について, f の線形性と V' が部分空間であることから

$$f(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1f(v_1) + c_2f(v_2) \in V'.$$

□

定義 5.1.2. $f\colon V \to W$ を線形写像とする.

(1) V の部分空間 $f^{-1}(0)$ を f の**核** (kernel) と呼び, 次の記号[*67]で表す.

$$\operatorname{Ker} f := f(0)^{-1} = \{v \in V \mid f(v) = 0\}.$$

(2) W の部分空間 $f(V)$ を f の**像** (image) と呼び, 次の記号[*68]で表す.

$$\operatorname{Im} f := f(V) = \{f(v) \mid v \in V\}.$$

[*67] 小文字の $\ker f$ も良く用いられます. $\operatorname{Ker}(f)$ の様に括弧を付けることもあります.

[*68] 複素数 z の虚部 (imaginary part) も同じ記号を使って $\operatorname{Im} z$ と書くことが多いので注意して下さい. 核の場合と同様に, 小文字の $\operatorname{im} f$ も良く用いられます.

また $\mathrm{Im}\, f$ が有限次元の場合, その次元を f の**階数** (rank) と呼び[*69], 次の記号[*70]で表す.

$$\mathrm{rank}\, f := \dim(\mathrm{Im}\, f).$$

例 5.1.3 (**行列の左掛算写像の核と像**, [斎藤 09, 例 2.4.3]). 冒頭で説明したように, 行列 $A \in M(m, n; \mathbb{K})$ による左掛算写像 $l_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ について, その核は以下の様な意味がある.

$$\mathrm{Ker}\, l_A = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = 0\} = (\textbf{斉次連立一次方程式}\ Av = 0\ \textbf{の解空間}).$$

次に像 $\mathrm{Im}\, l_A = \{Av \mid v \in \mathbb{K}^n\}$ の意味を考えよう. $A = (a_1 \ \cdots \ a_n)$, $a_j := {}^t(a_{1j} \ \cdots \ a_{mj}) \in \mathbb{K}^m$ と数ベクトルに分解すると, $\mathbb{K}^n$ の標準基底 $(e_1^n, \ldots, e_n^n)$ について $l_A(e_j^n) = Ae_j^n = a_j$ となる. 任意の $v \in \mathbb{K}^n$ は $v = \sum_{i=1}^n c_i e_i^n$, $c_i \in \mathbb{K}$ と書けるから $l_A(v) = \sum_{i=1}^n c_i a_i$. ここで v を動かす, つまり c_i 達を動かして考えると

$$\mathrm{Im}\, l_A = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i a_i \ \middle|\ c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}^n \right\} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = (A\ \textbf{の列ベクトル}\ a_1, \ldots, a_n\ \textbf{が張る部分空間}).$$

後の例 5.1.3 で説明するように, 実は行列の階数 $\mathrm{rank}\, A$ と左 A 倍写像の階数 $\mathrm{rank}\, l_A$ は一致します. つまり

$$\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, l_A.$$

例 5.1.4 (**微分作用素の核**). $\mathbb{R}$ 上の滑らかな実数値関数の空間 $C^\infty(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の線形空間である. $C^\infty(\mathbb{R})$ の自己準同型のとして, 微分作用素 $D := \frac{d}{dx} - 1$ を考えよう. つまり線形写像

$$D \colon C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}), \quad f(x) \longmapsto f'(x) - f(x)$$

を考える. その核は

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\, D &= \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid D(f) = 0\} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - f(x) = 0\} \\ &= \{\ \text{微分方程式}\ f'(x) = f(x)\ \text{の解}\ \}. \end{aligned}$$

線形写像の核は定義域の部分空間だから, $\mathrm{Ker}\, D \subset C^\infty(\mathbb{R})$ も部分空間である. そこで $\mathrm{Ker}\, D$ を**微分方程式** $f'(x) = f(x)$ **の解空間** (the solution space of the differential equation $f'(x) = f(x)$) と呼ぶ.

解空間 $\mathrm{Ker}\, D$ にはどのような元があるか調べてみよう. 微分すると自分自身になる函数の事だから, 例えば

$$c \exp(x) \in \mathrm{Ker}\, D \quad (c \in \mathbb{R}).$$

c を動かす事によって, $\mathrm{Ker}\, D$ の 1 次元の部分空間が得られる.

$$\mathbb{R} \exp(x) = \{c \exp(x) \mid c \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Ker}\, D.$$

実は, **常微分方程式の解の存在と一意性**[*71]から, $\exp(x)$ は $\mathrm{Ker}\, D$ を張る, つまり次が成立する事が知られている. 特に微分方程式 $f' = f$ の解空間は 1 次元で, それは初期値 $f(0)$ の取り方の自由度に対応する.

$$\mathbb{R} \exp(x) = \mathrm{Ker}\, D.$$

[*69] 線形写像 f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ が有限次元の場合, その次元を退化次元 (nullity) と呼んで $\mathrm{null}\, f$ と書く事がありますが, 日本語の線形代数の教科書ではあまり用いられない用語だと思います.

[*70] 他にも, 参考書 [斎藤 09] の様に $\mathrm{rank}\, f$ という記号が用いられます.

[*71] 三年生春学期の常微分方程式論の講義で扱われますが, 二年生春学期までの微積分の知識で十分に理解可能なので, 意欲がある人は調べてみると良いです. 例えば

高野恭一, **常微分方程式**, 新数学講座 6, 朝倉書店 (1994)

の §4 を見て下さい.

核や像を用いて, 線形写像の単射性や全射性を言い換えることができます.

命題 5.1.5 ([斎藤 09, 命題 2.4.4, 系 2.4.5])**.** $f\colon V \to W$ を線形写像とする.

(1) f は単射 $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

(2) f は全射 $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = W$.

(3) f は同型 $\Leftrightarrow$ F は全射かつ単射 $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = 0$ かつ $\operatorname{Im} f = W$.

証明. (1) f が単射なら逆像 $f^{-1}(0)$ の元は 0 だけである. 逆に $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ を仮定すると, $v, v' \in V$ が $f(v) = f(v')$ を満たすなら, $f(v - v') = 0$ つまり $v - v' \in \operatorname{Ker} f = \{0\}$ だから $v = v'$ である.

(2) 全射の定義そのものである.

(3) (1) と (2) から従う.

□

演習問題

問題 5.1.1. $f\colon V \to W$ を線形写像とし, 部分空間 $V_1, V_2 \subset V$ が $V = V_1 + V_2$ を満たす時,

$$f(V) = f(V_1) + f(V_2) \quad (\text{つまり} \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f|_{V_1} + \operatorname{Im} f|_{V_2})$$

であることを示せ (右辺は W の部分空間 $f(V_1), f(V_2)$ の和空間).

問題 5.1.2. V と W を線形空間とし, V は有限次元で基底 $(v_1, \dots, v_n)$ を持つものとする. この時, 任意の線形写像 $f\colon V \to W$ について $\operatorname{Im} f = \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle$ であることを示せ. 特に, W が有限次元か否かに関わらず, V が有限次元なら $\operatorname{Im} f$ は有限次元である.

問題 5.1.3. V を有限次元線形空間とし, $n \coloneqq \dim V$ とする. また $f\colon V \to V$ は線形写像であって $f \circ f = f$ を満たすものとする. 写像 $g\colon V \to V$ を次で定める.

$$g(v) \coloneqq v - f(v) \quad (v \in V).$$

この時, 以下の主張が成立する事を示せ.

(1) g は線形写像であり, $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$ は部分空間になる.

(2) $V = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

(3) f が恒等的に 0 ではない時, 適当な整数 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ と V の基底 $v_1, \dots, v_n$ が存在して

$$f(v_i) = \begin{cases} v_i & (i = 1, \dots, r) \\ 0 & (i = r+1, \dots, n) \end{cases}.$$

問題 5.1.4 ([斎藤 09, 問題 2.4.2])**.** 正方行列 $A \in M(n; \mathbb{K})$ を $A - {}^t\!A$ に写す写像

$$\phi\colon M(n; \mathbb{K}) \longrightarrow M(n; \mathbb{K}), \quad \phi(A) \coloneqq A - {}^t\!A$$

が線形写像である事を示し, その核と像を求め, 更にそれぞれの次元を求めよ.

問題 5.1.5 ([斎藤 09, 問題 2.4.4])**.** $J \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と置いて, 写像 $\phi\colon \mathbb{R}[x] \to M(2; \mathbb{R})$ を $\phi(f) \coloneqq f(J)$ で定

める．但し多項式 $f = \sum_{n=0}^{d} f_n x^n \in \mathbb{R}[x]$ に対し，$f(J)$ は変数 x を行列 J に置き換えて得られる行列

$$f(J) \coloneqq \sum_{n=0}^{d} f_n J^n = f_0 E + f_1 J + f_2 J^2 + \cdots + f_d J^d \in M(2;\mathbb{R})$$

を意味する．ここで E は 2 次の単位行列．この写像 ϕ が線形写像であり，更に以下が成立する事を示せ．

$$\operatorname{Ker}\phi = \{(x^2+1)g \mid g \in \mathbb{R}[x]\}, \quad \operatorname{Im}\phi = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}J.$$

問題 5.1.6 ([斎藤 09, 問題 2.4.6])**.** 二つの写像 $F, G\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ を次式で定める．

$$F(f) \coloneqq f', \quad G(f)(x) \coloneqq \int_0^x f(x)\,dx \quad \bigl(f \in C^\infty(\mathbb{R})\bigr).$$

(1) F と G が $C^\infty(\mathbb{R})$ の自己準同型である事を示せ．
(2) $F \circ G = \mathrm{id}_{C^\infty(\mathbb{R})}$ を示し，$\operatorname{Ker} G$ と $\operatorname{Im} F$ を求めよ．
(3) $\operatorname{Ker} F = \operatorname{Ker}(G \circ F)$ を示し，$\operatorname{Ker} F$ を求めよ．
(4) $\operatorname{Im} G = \operatorname{Im}(G \circ F)$ を示し，$\operatorname{Im} G$ を求めよ．

問題 5.1.7 ([齋藤 85, p.120, 第 4 章 §4, 問題 6])**.** U, V, W を線形空間とし，$f \in \operatorname{Hom}(U, V)$, $g \in \operatorname{Hom}(V, W)$ とする．この時，次の同値が成立する事を示せ．

$$gf = 0\ (\text{零写像}) \iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g.$$

問題 5.1.8 ([足助 12, 問 4.6.8])**.** 二つの正方行列 $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ が $A + B = E_n$ を満たすとする．この時，以下の主張が成立する事を示せ．

(1) A, B による左掛算写像 $l_A, l_B \in \operatorname{End}(\mathbb{K}^n)$ について $\operatorname{Ker} l_A = \operatorname{Im} l_B$.
(2) $AB = BA = O$, $A^2 = A$, $B^2 = B$.

問題 5.1.9 ([足助 12, 問 4.6.9])**.** $A \in M(n;\mathbb{R})$ が $A^2 = E_n$ を満たすと仮定し，$f, g \in \operatorname{End}(\mathbb{K}^n)$ を $f(v) \coloneqq Av + v$, $g(v) \coloneqq Av - v$ で定める．また $V \coloneqq \operatorname{Im} f$, $W \coloneqq \operatorname{Im} g$ と置き，$s \coloneqq \dim V$, $t \coloneqq \dim W$ と書く．

(1) $s + t = n$ を示せ．
(2) $v_1, \ldots, v_s$ を V の基底とし，$w_1, \ldots, w_t$ を W の基底とする．この時 $v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_t$ が $\mathbb{K}^n$ の基底になる事を示せ．
(3) 基底 $v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_t$ の各元を列ベクトルとみなして，それらを並べる事で得られる行列を

$$T \coloneqq (v_1 \ \cdots \ v_s \ w_1 \ \cdots \ w_t)$$

とする．T が正則行列であり，また $T^{-1}AT$ は

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & -E_t \end{pmatrix}$$

とブロック対角行列になる事を示せ．

5.2　線形写像の標準形

この副節の目標は次の定理です．

定理 5.2.1 ([斎藤 09, 命題 2.4.8])**.** V と W を有限次元線形空間とし，$n := \dim V$, $m := \dim W$ とする．また $f\colon V \to W$ を線形写像とする．この時，以下の三条件は同値．

(i) f の階数は r.

(ii) V の基底 $(v_1, \dots, v_n)$ と W の基底 $(w_1, \dots, w_m)$ であって次を満たすものが存在する．

$$f(v_i) = \begin{cases} w_i & (1 \le i \le r) \\ 0 & (r < i \le n) \end{cases}.$$

(iii) V の基底と W の基底で，それらに関する f の行列表示が

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(m, n; \mathbb{K})$$

となるものが存在する．ここで $E_r \in M(r; \mathbb{K})$ は r 次単位行列．

証明. (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) は行列表示の定義から従う．また (ii) $\Rightarrow$ (i) は問題 5.1.2 より $\operatorname{Im} f = \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle = \langle w_1, \dots, w_r \rangle$ となる事から従う．(i) $\Rightarrow$ (ii) を以下の議論で示す． □

まず全射な線形写像に関する次の主張を示します．

命題 5.2.2 ([斎藤 09, 命題 2.4.6])**.** $f\colon V \to W$ を全射線形写像とする．部分空間 $V' \subset V$ について，次の二条件は同値．

(i) $V = V' \oplus \operatorname{Ker} f$.

(ii) f の V' への制限 $f|_{V'}\colon V' \to W$ (補題 3.2.9 参照) は同型．

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii): 命題 5.1.5 より $\operatorname{Im} f|_{V'} = W$ かつ $\operatorname{Ker} f|_{V'} = \{0\}$ を示せば良い．前半については，まず f は全射なので $W = f(V)$ であり，また仮定 $V = V' + \operatorname{Ker} f$ から $f(V) = f(V') + f(\operatorname{Ker} f)$ である (問題 5.1.1)．ここで $f(V') = \operatorname{Im} f|_{V'}$ と $f(\operatorname{Ker} f) = \{0\}$ に注意する．以上を合わせると

$$W = f(V) = f(V') + f(\operatorname{Ker} f) = \operatorname{Im} f|_{V'}$$

となり，前半が得られる．後半は，直和分解から $\operatorname{Ker} f \cap V' = \{0\}$ なので，$\operatorname{Ker} f|_{V'} = \operatorname{Ker} f \cap V' = \{0\}$ となって従う．

(ii) $\Rightarrow$ (i): $V = V' + \operatorname{Ker} f$ と $V' \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ を示せば良い．前半については，任意に $v \in V$ を取ると $f(v) \in W$ だから，仮定から $f(v) = f(v')$ となる $v' \in V'$ が存在する．この時 $f(v - v') = f(v) - f(v') = 0$ だから $v - v' \in \operatorname{Ker} f$．よって $v = v' + (v - v') \in V + \operatorname{Ker} f$ であり，$v \in V$ は任意に取っていたから前半が得られる．後半は $\operatorname{Ker} f \cap V' = \operatorname{Ker} f|_{V'}$ と命題 5.1.5 から従う． □

では定理 5.2.1 の残りの部分を示します．

定理 5.2.1 の証明の続き. (i) $\Rightarrow$ (ii) を示す．V' を $\operatorname{Ker} f$ の補空間，つまり $V = V' \oplus \operatorname{Ker} f$ を満たす V の部分空間とする．命題 5.2.2 より $f|_{V'}\colon V' \to \operatorname{Im} f$ は同型なので，$r = \operatorname{rank} f = \dim(\operatorname{Im} f)$ より $\dim V' = r$. 系 4.2.4 から $\dim V = \dim V' + \dim \operatorname{Ker} f$ なので $\dim \operatorname{Ker} f = n - r$．そこで V' の基底 $(v_1, \dots, v_r)$ と $\operatorname{Ker} f$

の基底 $(v_{r+1},\dots,v_n)$ を取ると, $V'+\operatorname{Ker} f = W$ と $V' \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ より $(v_1,\dots,v_n)$ が V の基底であることが分かる.

さて, $i=1,\dots,r$ に対して $w_i := f(v_i) \in \operatorname{Im} f \subset W$ と定めると, $f|_{V'}\colon V' \to \operatorname{Im} f$ が同型だから $(w_1,\dots,w_r)$ は $\operatorname{Im} f$ の基底である. それを延長して W の基底 $(w_1,\dots,w_m)$ を作れば, 構成の仕方から $i=1,\dots,r$ なら $f(v_i)=w_i$, $i=r+1,\dots,n$ なら $f(v_i)=0$ である. □

定理 5.2.1 の系として, 線形写像の核の次元と像の次元 (階数) の関係式が得られます.

系 5.2.3 ([斎藤 09, 系 2.4.9])**.** V と W を線形空間とし, V は有限次元だとする. この時, 任意の線形写像 $f\colon V \to W$ に対して

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rank} f.$$

証明. V が有限次元なので $\operatorname{Im} f$ も有限次元であることに注意する (問題 5.1.2). よって $f\colon V \to \operatorname{Im} f$ に定理 5.2.1 を適用することができる. すると V の基底 $(v_1,\dots,v_n)$ が存在して $\operatorname{Ker} f = \langle v_{r+1},\dots,f_n\rangle$, 但し $r := \operatorname{rank} f$, となる. これから主張が従う. □

定理 5.2.1 の別の帰結を一つ紹介します. **行列の階数**を思い出しましょう.

事実 5.2.4. 任意の行列 $A \in M(m,n;\mathbb{K})$ に対し, 以下の五つの非負整数は同じ値を取る. これを**行列 A の階数** (rank of the matrix A) と呼び, $\operatorname{rank} A$ と書く.

(i) A の行ベクトルの内, 線形独立なものの最大の個数.
(ii) A の列ベクトルの内, 線形独立なものの最大の個数.
(iii) A に左基本変形を施して得られる階段行列の, 零ベクトルでない行の個数.
(iv) A に右基本変形を施して得られる階段行列の, 零ベクトルでない列の個数.
(v) A の小行列式であって 0 でないものの最大サイズ.

線形写像 f の階数 $\operatorname{rank} f$ と同じ記号を用いていますが, 系 5.2.5, 系 5.2.6 で説明するように, 敢えて記号を重複させています.

系 5.2.5. V と W を有限次元線形空間とし, $f\colon V \to W$ を線形写像とする. この時 $\operatorname{rank} f$ は V, W の任意の基底に関する行列表示の階数と等しい.

証明. $r := \operatorname{rank} f$ と置く. 定理 5.2.1 より, V, W の特別な基底 B_V, B_W が存在して, それらに関する f の行列表示が $A := \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ になり, 確かに $\operatorname{rank} A = r$ である. 一方, 任意に基底 B'_V, B'_W が与えられたとすると, B_V から B'_V への基底変換行列を P, B_W から B'_W への基底変換行列を Q とすれば, 定理 3.5.7 より B'_V, B'_W に関する f の行列表示は $A' := Q^{-1}AP$ と書ける. P と Q^{-1} は正則行列だから, 共に基本変形行列の積で書ける. よって P と Q^{-1} を掛けても行列の階数は変化しない. 特に $\operatorname{rank} A' = \operatorname{rank} A$ である. □

行列 $A \in M(m,n;\mathbb{K})$ による左掛算写像 $l_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ については, 例 5.1.3 で l_A の像の意味を考えました. 続いて l_A の階数を考察すると, 次の主張が得られます.

系 5.2.6 (**行列の階数の意味付け**, [斎藤 09, 定理 1.5.7, 例 2.4.3])**.** 行列 $A \in M(m,n;\mathbb{K})$ を

$$A = (a_1 \ \cdots \ a_n), \quad a_j = {}^t(a_{1j} \ \cdots \ a_{mj}) \in \mathbb{K}^m = M(m,1;\mathbb{K})$$

と列ベクトルに分解し, また

$$A = {}^t(b_1 \ \cdots \ b_m), \quad b_i = (b_{i1} \ \cdots \ b_{in}) \in M(1, n; \mathbb{K})$$

と行ベクトルに分解すると, A の階数 $\operatorname{rank} A$ は左 A 倍写像 $l_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ の階数 $\operatorname{rank} l_A$ と等しい. 更に

$$\begin{aligned} \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} l_A &= \dim \langle a_1, \dots, a_n \rangle \\ &= (A \text{ の列ベクトル } a_1, \dots, a_n \text{ のうち線形独立なものの最大数}) \\ &= (A \text{ の行ベクトル } b_1, \dots, b_m \text{ のうち線形独立なものの最大数}) \\ &= \#\{ i = 1, \dots, n \mid a_i \notin \langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle \}. \end{aligned}$$

但し $\#S$ は有限集合 S の濃度 (元の個数) を表す.

証明. 系 5.2.5 より $\operatorname{rank} l_A$ は $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$ の標準基底に関する行列表示の階数に等しいが, 例 3.4.4 よりその行列表示は A だから, $\operatorname{rank} l_A = \operatorname{rank} A$ である. これで最初の等式が得られた. また例 5.1.3 より $\operatorname{rank} l_A = \dim(\operatorname{Im} l_A) = \dim \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ であり, 二番目の等式が得られる. 三番目の等式は次元の定義から従う.

四番目の等式 (線形独立な列ベクトルの最大数) = (線形独立な行ベクトルの最大数) は, 行列を転置しても階数が変わらない事と既に得られている $\operatorname{rank} A =$ (線形独立な列ベクトルの最大数) から従う.

後は, 線形独立な列ベクトルの最大数が $\#\{ i = 1, \dots, n \mid a_i \notin \langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle \}$ であることを示せば良いが, それには命題 2.3.12 の (i) ⇔ (iii) を使って, 命題 2.3.9 (2) を, 列ベクトルを一つずつ増やしていって得られる行列の列 $a_1, (a_1 \ a_2), \dots, (a_1 \ \cdots \ a_i), \dots, (a_1 \ \cdots \ a_n) = A$ に適用すれば良い. □

演習問題

問題 5.2.1 ([斎藤 09, 問題 2.4.1]). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in M(3; \mathbb{R})$ とする. 左 A 倍写像 l_A の核と像の基底を一組ずつ与え, $\operatorname{rank}(A)$ を求めよ.

問題 5.2.2. $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とし, $A \in M(m, n; \mathbb{K})$ とする. 以下の主張を示せ.

(1) 正則行列 $P \in \mathrm{GL}(m; \mathbb{K})$ と $Q \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ に対し

$$\operatorname{rank}(PAQ) = \operatorname{rank} A.$$

(2) 転置行列の階数は元の行列の階数と等しい. つまり

$$\operatorname{rank} {}^tA = \operatorname{rank} A.$$

問題 5.2.3 (不変部分空間, [齋藤 66, p.119]**).** V を線形空間, $f \colon V \to V$ を自己準同型とする. 部分空間 $W \subset V$ が

$$f(W) \subset W$$

を満たす時, W を f **不変部分空間** (f-invariant subspace) と呼ぶ.

更に V が有限次元の場合を考える. $n := \dim V$, $m := \dim W$ と置き, W の基底 $B_W = (v_1, \dots, v_m)$ と, それを拡張した V の基底 $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ が与えられたとする. この時, $f \colon V \to V$ の B_V に関する行列表示が以下の様なブロック三角行列で表せることを示せ.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{11} \in M(m; \mathbb{K}),\ A_{12} \in M(m, n-m; \mathbb{K}),\ A_{22} \in M(n-m; \mathbb{K})$$

問題 5.2.4 ([齋藤 66, p.119, 例 7])**.** $a \in \mathbb{K}$ として, n 次以下の多項式の空間 $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ 上のシフト作用素 $T_a \colon f(x) \mapsto f(x+a)$ を考える. $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ なら, 部分空間 $\mathbb{K}[x]_{\leq m} \subset \mathbb{K}[x]_{\leq n}$ は T_a 不変部分空間であることを示せ. また基底 $(x^i)_{i=0}^n$ に関する T_a の行列表示を求め, 問題 5.2.3 が成立していることを確認せよ.

5.3 連立一次方程式と線形写像

この副節は [足助 12, §3.7] に従います.

一年生の線形代数で, 行列を用いた連立一次方程式の解法を学びました. その話を線形写像の核と像を用いて整理すると以下の命題 5.3.1 の様になります. 行列の階数の定義 (事実 5.2.4) を思い出しておいて下さい.

命題 5.3.1. 与えられた行列 $A \in M(m, n; \mathbb{K})$ と数ベクトル $y \in \mathbb{K}^m$ に対し, $x \in \mathbb{K}^n$ を未知ベクトルとする連立方程式 $Ax = y$ を考え, その解全体のなす集合を次の様に表す.

$$S_y \coloneqq \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = y\}.$$

また左 A 倍写像を $l_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $l_A(x) \coloneqq Ax$ と書く.

(1) 次の同値が成立する. 方程式 $Ax = y$ が解を持つ $\Leftrightarrow$ $S_y \neq \emptyset \Leftrightarrow y \in \operatorname{Im} f$.

(2) $\mathbb{K}^m$ の部分集合を $W \coloneqq \{y \in \mathbb{K}^m \mid Ax = y$ が解を持つ $\}$ で定めると, $W = \operatorname{Im} f$ であり, 特に $\mathbb{K}^m$ の $\operatorname{rank} A$ 次元部分空間である.

(3) $y = 0$ の時 $S_0 = \operatorname{Ker} l_A$ であり, S_0 は $\mathbb{K}^n$ の $(n - \operatorname{rank} A)$ 次元部分空間である.

(4) 方程式 $Ax = y$ が解を持つと仮定して, 一つの解を x_0 とする. 写像 $f_{x_0} \colon S_w \to S_0$ が $f_{x_0}(x) \coloneqq x - x_0$ によって定まり, 更に f_{x_0} は全単射である.

証明は問題 5.3.1 にします.

次に行列の掃き出し法と命題 5.3.1 (3) との関係を考えます.

例 5.3.2 (c.f. [斎藤 09, 例題 2.4.10])**.** 行列 $A \in M(m, n; \mathbb{K})$ を係数行列とし, $x \in \mathbb{K}^n$ を未知ベクトルとする連立方程式 $Ax = 0$ を考えると, その解全体のなす集合は命題 5.3.1 (3) より左 A 倍写像 $l_A \colon \mathbb{K}^n$ の核 $\operatorname{Ker} l_A$ と等しい. よって $\operatorname{Ker} l_A$ の基底を求めれば $Ax = 0$ の解が全て求まる.

$\mathbb{K}^n$ の標準基底を $e_1, \ldots, e_n$ と書く. また $A = (a_{ij})_{i,j}$ と係数を書いて,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{pmatrix}, \quad a_i \coloneqq \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$$

と列ベクトルに分解する. この時 $l_A(e_i) = a_i$ であり, $a_1, \ldots, a_m$ は $\operatorname{Im} l_A$ の生成系である. これから $\operatorname{Im} l_A$ の基底 $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ を

- $a_i \neq 0$ となる最小の添え字 $i \in \{1, \ldots, m\}$ を i_1 とし
- $1 \leq i_1 < \cdots < i_{k-1} \leq m$ まで定めたとして, $a_i \notin \langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k-1}} \rangle$ となる最小の添え字 i を i_k とする

事で定める. この時 $r = \operatorname{rank} l_A = \dim \operatorname{Im} A$ である.

次に $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}$ とする. $i_s < j$ となる最大の $s \in \{1, \ldots, r\}$ を s_j と書く. この時, $a_j \in \langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_{s_j}} \rangle$ となるから, $a_j = \sum_{k=1}^{s_j} c_{jk} a_{i_k}$ を満たす $c_{j1}, \ldots, c_{js_j} \in \mathbb{K}$ が一意に決まる. そこで

$$x_j - (c_{j1} e_{i_1} + \cdots + c_{js_j} e_{i_{s_j}}) \in \mathbb{K}^n \quad (j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_r\})$$

を考えれば, これは $\operatorname{Ker} f$ の基底, つまり連立方程式 $Ax = 0$ の基本解になる.

演習問題 (解答: 129 ページ)

問題 5.3.1. 命題 5.3.1 を示せ.

問題 5.3.2. 例 5.3.2 では斉次連立一次方程式 $Ax = 0$ を考えたが, その代わりに非斉次連立一次方程式 $Ax = y$ $(y \neq 0)$ を考える事で, 拡大係数行列の掃き出し法で $Ax = y$ の解の基底を求めることができる事を説明せよ.

6 商空間 (05/28)

7 準同型定理 (06/04)

15　問題の解答

1　線形空間と線形写像

1.0　数ベクトル空間の復習

問題 1.0.1. 行列式の定義より左辺は x_i 達の多項式で, それを $p(x)=p(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ と表す. 具体的には, n 文字 $\{1,2,\ldots,n\}$ の置換 σ の符号を $\mathrm{sgn}(\sigma)$ と書くと

$$p(x)=\sum_{\sigma:\ n\text{ 文字の置換}}\mathrm{sgn}(\sigma)x_{\sigma(1)}^0x_{\sigma(2)}^1\cdots x_{\sigma(n)}^{n-1}. \tag{1.0.1}$$

また右辺を $q(x):=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$ と書く. 示すべきことは $p(x)=q(x)$ である.

二つの行が等しい行列の行列式は 0 だから, 任意の $j=1,2,\ldots,n$ と任意の $i\ne j$ について, $x_j=x_i$ とすると $p(x)=0$ (あらわに書くと $p(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j=x_i,\ldots,x_n)=0$). すると多項式の剰余の定理から, $p(x)$ は x_j-x_i で割り切れる. $i\ne j$ は任意に取っていて, また $x_i-x_j=-(x_j-x_i)$ だから, $p(x)$ は $\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)=q(x)$ で割り切れる. よって x_i 達の多項式 $r(x)$ を用いて $p(x)=q(x)r(x)$ と書ける.

次に $r(x)$ が定数であることを示す. 各 $x_1,\ldots,x_n$ を次数 1 と数えて, その時の斉次多項式 $f(x)$ の次数 (つまり全次数) を $\deg f(x)$ と表す. 定義から右辺 $q(x)$ は斉次多項式で

$$\deg q(x)=\#\{(i,j)\mid 1\le i<j\le n\}=\binom{n}{2}=\frac{1}{2}n(n-1).$$

一方 (1.0.1) より左辺 $p(x)$ も斉次多項式で, $\deg p(x)=0+1+\cdots+(n-1)=\binom{n}{2}$. よって $\deg p(x)=\deg q(x)$. このことと $p(x)=q(x)r(x)$ から $\deg r(x)=0$, つまり $r(x)$ が定数であることが分かる.

最後に $r=1$ であることを示す. (1.0.1) より, $p(x)$ における単項式 $m:=x_1^0x_2^1\ldots x_n^{n-1}$ の係数は恒等置換 id の符号だから $\mathrm{sgn}(\mathrm{id})=1$. 一方 $q(x)$ における m の符号も 1. よって $r=1$.

問題 1.0.2. s_λ の分子を $a_{\delta+\lambda}$, 分母を a_δ と置く. つまり $s_\lambda=a_{\delta+\lambda}/a_\delta$. 前問題の解答 (問題 1.0.1) と同様の議論を分子の正方行列に適用すると, $a_{\delta+\lambda}$ は x_j-x_i $(i\ne j)$ で割り切れる. よって $a_{\delta+\lambda}$ は $\prod_{1\le i<j\le}(x_j-x_i)$ で割り切れる. 後者は前問より a_δ だから, 主張が示せた.

1.1　体

問題 1.1.1. 問題 1.1.3 で $R:=\mathbb{R}$ とした場合なので, 省略する.

問題 1.1.2. $n=1$ なら $M_n(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ なので可換. $n\ge 2$ なら, 行列単位 E_{ij} ((i,j) 成分が 1 で他の成分が 0 の n 次行列.) 達を考えると $E_{12}E_{22}=E_{12}\ne O=E_{22}E_{12}$ (但し O は零行列) となるので非可換.

問題 1.1.3. 任意の $U=(u_{ij})_{i,j},V=(v_{ij})_{i,j},W=(w_{ij})_{i,j}\in M_n(R)$ と $c,d\in R$ に対して定義 1.1.1 の七条件が満たされることを示せば良い. 以下 $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ とする.

(1) $U+(V+W)=(U+V)+W$ を示す. 行列 $U+(V+W)$ の (i,j) 成分は $u_{ij}+(v_{ij}+w_{ij})$ で, 行列 $(U+V)+W$ の (i,j) 成分は $(u_{ij}+v_{ij})+w_{ij}$. R の和 $+$ の結合律から $u_{ij}+(v_{ij}+w_{ij})=(u_{ij}+v_{ij})+w_{ij}$ となり, どの成分も等しい. つまり行列として $U+(V+W)=(U+V)+W$.

(2) $U+O=O+U$ を示す．行列 $U+O$, $O+U$, U の (i,j) 成分はそれぞれ $u_{ij}+0$ と $0+u_{ij}$, u_{ij} であり, R の和 $+$ について $u_{ij}+0=0+u_{ij}=u_{ij}$ が成立するので $U+O=O+U=U$.

(3) $U+(-U)=(-U)+U=O$ を示す．行列 $U+(-U)$, $(-U)+U$, O の (i,j) 成分はそれぞれ $u_{ij}+(-u_{ij})$, $(-u_{ij})+u_{ij}$ 及び 0. R の和 $+$ について $u_{ij}+(-u_{ij})=(-u_{ij})+u_{ij}=0$ が成立するので $U+(-U)=(-U)+U=O$.

(4) $U+V=V+U$ を示す．$U+V$ と $V+U$ の (i,j) 成分はそれぞれ $u_{ij}+v_{ij}$ と $v_{ij}+u_{ij}$ で, R の和 $+$ は可換だから $u_{ij}+v_{ij}=v_{ij}+u_{ij}$. よって $U+V=V+U$.

残りの三条件を示そう．

(5) 正方行列の積の結合律 $(UV)W=U(VW)$ を示す．$i,j,k\in\{1,\ldots,n\}$ を任意に取る．UV の (i,k) 成分は $\sum_{l=1}^n u_{il}v_{lk}$ なので, 左辺の (i,j) 成分は $\sum_{k=1}^n(\sum_{l=1}^n u_{il}v_{lk})w_{kj}$. 同様の議論から, 右辺の (i,j) 成分は $\sum_{l=1}^n u_{il}(\sum_{k=1}^n v_{lk}v_{kj})$. R の分配律より $\sum_{k=1}^n(\sum_{l=1}^n u_{il}v_{lk})w_{kj}=\sum_{l=1}^n u_{il}(\sum_{k=1}^n v_{lk}v_{kj})$ なので, 両辺の (i,j) 成分は等しい．i と j は任意に取ったので, 両辺の行列が等しいことが分かる．

(6) 単位行列 $E_n\in M_n(R)$ は $E_nU=UE_n=U$ を満たすので, 積の単位元である．

(7) 前半の $(U+V)W=UW+VW$ を示す．左辺の (i,j) 成分は $\sum_k(u_{ik}+v_{ik})w_{kj}$ で, R の分配律より $\sum_k u_{ik}w_{kj}+\sum_k v_{ik}w_{kj}$ と等しいが, これは右辺の (i,j) 成分である．
次に後半の $U(V+W)=UV+UW$ を示す．左辺の (i,j) 成分は $\sum_k u_{ik}(v_{kj}+w_{kj})$ で, R の分配律より $\sum_k u_{ik}v_{kj}+\sum_k u_{ik}w_{kj}$ と等しいが, これは右辺の (i,j) 成分である．

問題 1.1.4. 剰余の性質 $a+b \bmod p=(a \bmod p)+(b \bmod p)$, $(ab) \bmod p=(a \bmod p)(b \bmod p)$ を使うと, $\mathbb{Z}$ が可換環であることから $\mathbb{F}_p$ が可換環であることが示せる (詳細は略)．残っている公理である, 任意の $a\in\mathbb{F}_p\setminus\{0\}$ が逆元を持つことを示そう．$a\in\mathbb{Z}$ と見なすと, 仮定より a は p で割り切れないから, p が素数であることと合わせて, a と p は互いに素である．よって $x,y\in\mathbb{Z}$ が存在して $ax+py=1$ となる．この等式を $\bmod p$ すれば, $\mathbb{F}_p$ において $a\cdot(x \bmod p)=1$. よって $x \bmod p\in\mathbb{F}_p$ が a の逆元である．

標数について．$\bar{1}:=(1 \bmod p)$, $\bar{0}:=(0 \bmod p)\in\mathbb{F}_p$ と書くと, i が p 未満の整数なら $\overbrace{\bar{1}+\cdots+\bar{1}}^{i}\neq\bar{0}$ であり, $\overbrace{\bar{1}+\cdots+\bar{1}}^{p}=\bar{0}$ なので, $\mathrm{char}(\mathbb{F}_p)=p$ である．

問題 1.1.5 (略解)**.** 零元は定数 0, 単位元は定数 1 である．また多項式 $f=\sum_i f_ix^i, g=\sum_i g_ix^i\in\mathbb{K}[x]$ について, 和は $f+g:=\sum_i(f_i+g_i)x^i$, 積は $fg:=\sum_n(\sum_{i=0}^n f_ig_i)x^n$ である．これを使って定義 1.1.1 の七条件と定義 1.1.4 の条件を確認すれば良い．

問題 1.1.6 (略解)**.** まず有理式の和 $\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}:=\frac{p_1q_2+p_2q_1}{q_1q_2}$ と積 $\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}:=\frac{p_1p_2}{q_1q_2}$ が well-defined であること, つまり $\frac{p_1}{q_1}=\frac{p_1'}{q_1'}$, $\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_2'}{q_2'}$ とそれぞれ二通りの書き方があるとして, $\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1'}{q_1'}+\frac{p_2'}{q_2'}$, $\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1'}{q_1'}\cdot\frac{p_2'}{q_2'}$ となることを確認する．

次に可換環であることを示す．それには定義 1.1.1 の七条件と定義 1.1.4 の条件を確認すれば良い．可換性は積の定義から直ぐに従う．環の最初の条件は, 任意に $f,g,h\in\mathbb{K}(x)$ を取って $\big(f+g\big)+h=f+\big(g+h\big)$ であることを示せばよいが, 多項式を使って $f=\frac{p_1}{q_1}$, $g=\frac{p_2}{q_2}$, $h=\frac{p_3}{q_3}$ と表せば $\big(f+g\big)+h=\frac{p_1q_2+p_2q_1}{q_1q_2}+\frac{p_3}{q_3}=\frac{(p_1q_2+p_2q_1)q_3+p_3q_1q_2}{q_1q_2q_3}$, $f+\big(g+h\big)=\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2q_3+p_3q_2}{q_2q_3}=\frac{p_1q_2q_3+(p_2q_3+p_3q_2)q_1}{q_1q_2q_3}$ となって, $\mathbb{K}[x]$ が可換環であることから両者は等しい．

定義 1.1.1 の他の条件も同様に示せる．零元は $0=\frac{0}{1}\in\mathbb{K}(x)$, 単位元は $1=\frac{1}{1}\in\mathbb{K}(x)$ であり, $f=\frac{p}{q}\in\mathbb{K}(x)$ の逆元は $\frac{q}{p}$ である．

問題 1.1.7. Catalan 数を $C'_n \coloneqq \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ と書くと, これは漸化式と初期値

$$C'_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C'_i C'_{n-i} \quad C'_0 = 1,\ C'_1 = 1$$

から一意に定まる (漸化式の証明は後回し). 従って, C_n が同じ漸化式と初期値を満たすことを示せば良い. $C_0 \coloneqq 1$ と約束すれば, $C_0 = C'_0$, $C_1 = C'_1$ なので初期値は一致する. 次に C_{n+1}, つまり $n+2$ 文字の列 $a_0 a_1 \cdots a_{n+1}$ に括弧を付ける方法を数え上げる時に, 左から数えて 2 番目の開き括弧 (の位置は a_0 より左か, 又は a_0 と a_1 の間かのどちらかである. これで場合分けすると

- 2 番目の開き括弧 (が a_0 より左にある場合. 対応する閉じ括弧) が a_i と a_{i+1} の間にあるとして i を定める. すると $i \in \{1, \ldots, n\}$ であり, 残りの括弧の付け方は $a_0 \cdots a_i$ の括弧の付け方と $a_{i+1} \cdots a_{n+1}$ の括弧の付け方だけあって, その数は $C_i C_{n-i}$.
- 2 番目の開き括弧 (が a_0 と a_1 の間にある場合. 対応する閉じ括弧) は a_{n+1} の右側にあるから, 残りの括弧の付け方は $a_1 \cdots a_{n+1}$ の括弧の付け方だけあって, その数は $C_n = C_0 C_n$.

これらを合わせると

$$C_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} C_i C_{n-i} + C_0 C_n = \sum_{i=0}^{n} C_0 C_n.$$

よって Catalan 数と同じ漸化式を満たすので, 初期値と合わせて $C_n = C'_n$ が従う.

最後に C'_n の漸化式を導く. まず母函数 $C'(x) \coloneqq \sum_{n \geq 0} C'_n x^n$ が

$$C'(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \tag{1.1.2}$$

となることを示す. 一般二項展開 $(1+x)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$, $\binom{\alpha}{n} \coloneqq \frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$ で $\alpha = \frac{1}{2}$ として

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{1/2} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)(-4x)^n = 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{(2n-3)!!}{n!}(2x)^n.$$

但し $(2n-3)!! \coloneqq (2n-3)(2n-5)\cdots 3 \cdot 1$, $(-1)!! \coloneqq 1$. よって

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x} \sum_{n \geq 1} \frac{(2n-3)!!}{n!}(2x)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(2n-1)!!}{(n+1)!}(2x)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} x^n.$$

$C'_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$ だから (1.1.2) が示せた. 次に母函数 $C'(x)$ の二乗を考えると

$$C'(x)^2 = \sum_{i \geq 0} C'_i x^i \sum_{j \geq 0} C'_j x^j = \sum_{i,j \geq 0} C'_i C'_j x^{i+j} = \sum_{n \geq 0} x^n \sum_{i=0}^{n} C'_i C'_{n-i}.$$

一方で (1.1.2) と $C'_0 = 1$ から

$$\begin{aligned} C'(x)^2 &= \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^2 = \frac{1 - 2x - \sqrt{1-4x}}{2x^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} - 1\right) \\ &= \frac{C'(x) - 1}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n \geq 1} C'_n x^n = \sum_{n \geq 0} x^n C'_{n+1}. \end{aligned}$$

両式右辺の x^n の係数を比較して $C'_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C'_i C'_{n-i}$ を得る.

1.2 線形空間の定義

問題 1.2.1. V には零元 0 が存在するので, 空集合ではない.

問題 1.2.2. 仮定の等式 $v+0'=v$ で $v=0$ として $0+0'=0$. 一方で線形空間の定義 1.2.1 (2) より任意の $v\in V$ に対して等式 $0+v=v$ が成立するから, $v=0'$ として $0+0'=0'$. 得られた二つの等式から $0=0+0'=0'$.

問題 1.2.3. 仮定の等式 $v+v'=0$ から $(-v)+(v+v')=(-v)+0=-v$. 一方で線形空間の定義 1.2.1 (1), (3), (2) を使うと $(-v)+(v+v')=(-v+v)+v'=0+v'=v'$. よって $v'=(-v)+(v+v')=-v$.

問題 1.2.4. $v+v=v$ の両辺に逆元 $-v$ を加えて $(-v)+v+v=(-v)+v$. 左辺は v と, 右辺は 0_V と等しいから $v=0_V$.

問題 1.2.5. V における分配律と $\mathbb{K}$ における等式 $0+0=0$ から $0.v+0.v=(0+0).v=0.v$. 前の問題 1.2.4 から $0.v=0_V$.

問題 1.2.6. $1.v=v$ と V における分配律から $(-1).v+v=(-1).v+1.v=(-1+1).v=0.v$. 同様に $v+(-1).v=1.v+(-1).v=(1-1).v=0.v$. よって問題 1.2.3 より $(-1).v=-v$.

問題 1.2.7. $c\neq 0$ と仮定して $v=0_V$ を示せば良い. 仮定から c の逆元 $c^{-1}\in\mathbb{K}$ が存在する. $cv=0_V$ の両辺を c^{-1} でスカラー倍して $c^{-1}.cv=c^{-1}.0_V$. 左辺は $(c^{-1}c).v=1.v=v$ だから, 右辺が 0_V であることを示せば良い. 簡単のため $d:=c^{-1}\in\mathbb{K}$ と書くと, 任意の $v\in V$ に対して $d.0_V+v=d.0_V+1.v=d.0_V+(c.d).v=d.0_V+d.(c.v)=d.(0_V+c.v)=d.(c.v)=1.v=v$. 同様に $v+d.0_V=d.(c.v)+d.0_V=d.(c.v+0_V)=v$ が従う. 従って問題 1.2.2 から $d.0_V=0_V$.

問題 1.2.8. 命題 1.0.1 の証明で $\mathbb{R}$ を $\mathbb{K}$ に置き換えればよい. 念のため書き下すと以下のようになる: まず前半の四条件について. $i=1,\dots,n$ として,

(1) ベクトル $u+(v+w)$ の第 i 成分は $u_i+(v_i+w_i)$ で, ベクトル $(u+v)+w$ の第 i 成分は $(u_i+v_i)+w_i$. $\mathbb{K}$ の和 $+$ の結合律から $u_i+(v_i+w_i)=(u_i+v_i)+w_i$ なので, どの成分も等しい. つまりベクトルとして $u+(v+w)=(u+v)+w$.

(2) ベクトル $v+0$, $0+v$, v の第 i 成分はそれぞれ v_i+0 と $0+v_i$, v_i. $\mathbb{K}$ の和 $+$ について $v_i+0=0+v_i=v_i$ が成立するので $v+0=0+v=v$.

(3) ベクトル $v+(-v)$, $(-v)+v$, 0 の第 i 成分はそれぞれ $v_i+(-v_i)$, $(-v_i)+v_i$ 及び 0. $\mathbb{K}$ の和 $+$ について $v_i+(-v_i)=(-v_i)+v_i=0$ が成立するので $v+(-v)=(-v)+v=0$.

(4) $v+w$ と $w+v$ の第 i 成分はそれぞれ v_i+w_i と w_i+v_i で, $\mathbb{K}$ の和 $+$ は可換だから $v_i+w_i=w_i+v_i$. よって $v+w=w+v$.

後半の三条件も同様に,

(5) $c.(v+w)$ の第 i 成分は $c(v_i+w_i)$, $c.v+c.w$ の第 i 成分は cv_i+cw_i で, $\mathbb{K}$ の分配律より $c(v_i+w_i)=cv_i+cw_i$. よって $c.(v+w)=c.v+c.w$.

(6) 前半について. $(c+d)v$ の第 i 成分は $(c+d)v_i$, $cv+dv$ の第 i 成分は cv_i+dv_i. $\mathbb{K}$ の分配律より $(c+d)v_i=cv_i+dv_i$. よって $(c+d)v=c.v+d.v$. 後半も同様で, $(cd).v$ の第 i 成分は $(cd)v_i$, $c.(d.v)$

の第 i 成分は $c(dv_i)$ で, $\mathbb{K}$ の積の結合律から $(cd)v_i = c(dv_i)$ なので $(cd).v = c.(d.v)$.

(7) $1.v$ の第 i 成分は $1 \cdot v_i$. 1 は $\mathbb{K}$ の積 $\cdot$ に関する単位元だから $1 \cdot v_i = v_i$ となって右辺の第 i 成分と等しい. よって $1.v = v$.

問題 1.2.9. Kronecker デルタを使って $v_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_{i,j} v_j$ と書ける.

問題 1.2.10. $w = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ $(c_i \in \mathbb{K})$, $v_i = \sum_{j=1}^{m} d_{ij} u_j$ $(d_{ij} \in \mathbb{K})$ と書ける. 分配律を繰り返し使うと $w = \sum_{i=1}^{n} c_i (\sum_{j=1}^{m} d_{ij} u_j) = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} c_i d_{ij}) u_j$ となるので, w は u_j 達の線形結合で書ける.

問題 1.2.11. (1) n に関する帰納法で示せる. 詳細は略す.

(2) [*72] $n = 1$ の場合は何も示すことは無い. $n \geq 2$ の場合を n に関する帰納法で示す. $n = 2$ の場合に示すべきことは $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ だが, これは和の可換性に他ならない. n まで示せたとして, $n+1$ 文字の任意の置換 $(i_1, \ldots, i_{n+1})$ を取る. $i_r = n+1$ となる $r \in \{1, \ldots, n+1\}$ が一意に存在する. $r = n+1$ なら $(i_1, \ldots, i_n)$ は $1, \ldots, n$ の置換だから, 帰納法の仮定を $(i_1, \ldots, i_n)$ に使えて,

$$v_{i_1} + \cdots + v_{i_{n+1}} = (v_{i_1} + \cdots + v_{i_n}) + v_{n+1} = (v_1 + \cdots + v_n) + v_{n+1} = v_1 + \cdots + v_n + v_{n+1}.$$

$r = 1$ なら $(i_2, \ldots, i_{n+1})$ は $1, \ldots, n$ の置換だから, やはり帰納法の仮定を $n = 2$ の場合と n の場合に用いて

$$\begin{aligned} v_{i_1} + \cdots + v_{i_{n+1}} &= v_{n+1} + (v_{i_2} + \cdots + v_{i_{n+1}}) = (v_{i_2} + \cdots + v_{i_{n+1}}) + v_{n+1} \\ &= (v_1 + \cdots + v_n) + v_{n+1} = v_1 + \cdots + v_n + v_{n+1}. \end{aligned}$$

$1 < r < n+1$ なら

$$v_{i_1} + \cdots + v_{i_{n+1}} = u + v_{n+1} + v, \quad u := v_{i_1} + \cdots + v_{i_{r-1}}, \quad w := v_{i_{r+1}} + \cdots + v_{i_{n+1}}$$

と三つの部分に分ける. $n = 2$ の場合の帰納法の仮定から $u + v + w = u + (v + w) = u + (w + v) = u + w + v = (u + w) + v$ だから,

$$\begin{aligned} v_{i_1} + \cdots + v_{i_{n+1}} &= u + v_{n+1} + w = (u + w) + v_{n+1} \\ &= \big((v_{i_1} + \cdots + v_{i_{r-1}}) + (v_{i_{r+1}} + \cdots + v_{i_{n+1}})\big) + v_{n+1} \\ &= (v_{i_1} + \cdots + v_{i_{r-1}} + v_{i_{r+1}} + \cdots + v_{i_{n+1}}) + v_{n+1}. \end{aligned}$$

$(i_1, \ldots, i_{r-1}, i_{r+1}, \ldots, i_n)$ は $1, \ldots, n$ の置換だから, 帰納法の仮定を n の場合に用いて

$$v_{i_1} + \cdots + v_{i_{n+1}} = (v_1 + \cdots + n) + v_{n+1} = v_1 + \cdots + v_{n+1}.$$

以上で $n+1$ の場合が示せたので, 帰納法より任意の $n \geq 2$ について主張が成立する.

問題 1.2.12. 次の問題 1.2.13 と全く同様の議論が適用できるので省略する.

問題 1.2.13. 和と零元 $(+, 0)$ に関する公理 (定義 1.2.1 の (1)–(4)) は $\mathbb{C}$ 上と $\mathbb{R}$ 上とで変わらないので自動的に成立する. 定義 1.2.1 の (5), (6) は, $c, d \in \mathbb{R}$ ならば $c, d \in \mathbb{C}$ だから, $\mathbb{C}$ 上で成立していれば $\mathbb{R}$ 上でも成立する. 残りの (7) は, $1 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ より, $\mathbb{C}$ 上で成立していれば $\mathbb{R}$ 上でも成立する.

[*72] 三年生春学期の群論の講義で扱う定理「n 文字の置換群 $\mathfrak{S}_n$ は隣接置換 $(1,2), (2,3), \ldots, (n-1, n)$ 達で生成される」と和の可換性から簡単に示せますが, この定理を使わない議論を紹介します.

問題 1.2.14. 前の問題 1.2.13 の証明で $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ を $(\mathbb{C}, \mathbb{Q})$ に置き換えれば V に関する主張が, $(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ に置き換えれば W に関する主張が従う.

問題 1.2.15. V を $\mathbb{K}'$ 線形空間とする. 線形空間の定義 1.2.1 の (1)–(4) は係数体によらないから, (5)–(7) だけ議論すれば良い. $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$ が部分体なので, (5) と (6) が $c, d \in \mathbb{K}'$ について成り立てば, $c, d \in \mathbb{K}$ についても成立する. また $1 \in \mathbb{K} \subset \mathbb{K}$ なので, (7) が $\mathbb{K}'$ について成り立てば, $\mathbb{K}$ についても成立する. よって V は $\mathbb{K}$ 線形空間である.

1.3 線形空間の例

問題 1.3.1. 定義 1.2.1 の七条件を示す. 以下, 行列 $U = (u_{ij})_{i,j}, V = (v_{ij})_{i,j}, W = (w_{ij})_{i,j} \in M(m, n; \mathbb{K})$ とスカラー $c, d \in \mathbb{K}$ を任意に取る. また $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ とする.

(1) $U + (V + W) = (U + V) + W$ を示す. 行列 $U + (V + W)$ の (i, j) 成分は $u_{ij} + (v_{ij} + w_{ij})$ で, 行列 $(U+V)+W$ の (i, j) 成分は $(u_{ij}+v_{ij})+w_{ij}$. $\mathbb{K}$ の和 $+$ の結合律から $u_{ij}+(v_{ij}+w_{ij}) = (u_{ij}+v_{ij})+w_{ij}$ となり, どの成分も等しい. つまり行列として $U + (V + W) = (U + V) + W$.

(2) $U + O = O + U$ を示す. 行列 $U + O$, $O + U$, U の (i, j) 成分はそれぞれ $u_{ij} + 0$ と $0 + u_{ij}$, u_{ij} であり, $\mathbb{K}$ の和 $+$ について $u_{ij} + 0 = 0 + u_{ij} = u_{ij}$ が成立するので $U + O = O + U = U$.

(3) $U + (-U) = (-U) + U = O$ を示す. 行列 $U + (-U)$, $(-U) + U$, O の (i, j) 成分はそれぞれ $u_{ij} + (-u_{ij})$, $(-u_{ij}) + u_{ij}$ 及び 0. $\mathbb{K}$ の和 $+$ について $u_{ij} + (-u_{ij}) = (-u_{ij}) + u_{ij} = 0$ が成立するので $U + (-U) = (-U) + U = O$.

(4) $U + V = V + U$ を示す. $U + V$ と $V + U$ の (i, j) 成分はそれぞれ $u_{ij} + v_{ij}$ と $v_{ij} + u_{ij}$ で, $\mathbb{K}$ の和 $+$ は可換だから $u_{ij} + v_{ij} = v_{ij} + u_{ij}$. よって $U + V = V + U$.

(5) $c(U+V) = cU+cV$ を示す. $c(U+V)$ の (i, j) 成分は $c(u_{ij}+v_{ij})$, $cU+cV$ の (i, j) 成分は $cu_{ij}+cv_{ij}$ で, $\mathbb{K}$ の分配律より $c(u_{ij} + v_{ij}) = cu_{ij} + cv_{ij}$. よって $c(U + V) = cU + c.V$.

(6) $(c+d)U = cU+dU$ を示す. $(c+d)U$ の (i, j) 成分は $(c+d)u_{ij}$, $cU+dU$ の (i, j) 成分は $cu_{ij}+du_{ij}$. $\mathbb{K}$ の分配律より $(c+d)u_{ij} = cu_{ij} + du_{ij}$. よって $(c+d)U = cU + dU$.
次に $(cd)U = c(dU)$ を示す. $(cd)U$ の (i, j) 成分は $(cd)u_{ij}$, $c(dU)$ の第 i 成分は $c(du_{ij})$ で, $\mathbb{K}$ の積の結合律から $(cd)u_{ij} = c(du_{ij})$ なので $(cd)U = c(dU)$.

(7) $1.U = U$ を示す. $1.U$ の (i, j) 成分は $1 \cdot u_{ij}$. 1 は $\mathbb{K}$ の積 $\cdot$ に関する単位元だから $1 \cdot u_{ij} = u_{ij}$ となって右辺の (i, j) 成分と等しい. よって $1.U = U$.

問題 1.3.2. 定義 1.2.1 の七条件を示す. 多項式 $f = \sum_i f_i x^i$, $g = \sum_i g_i x^i$, $h = \sum_i h_i x^i$ とスカラー $c, d \in \mathbb{K}$ を任意に取る. 多項式の和は $f + g = \sum_i (f_i + g_i)x^i$, スカラー倍は $c.f = \sum_i (cf_i)x^i$ であり, 両者とも確かに $\mathbb{K}[x]$ の元であることに注意しておく. また $0 \in \mathbb{K} \subset \mathbb{K}[x]$ である.

(1) $f + (g + h) = (f + g) + h$ を示す. 多項式 $f + (g + h)$ における x^i の係数は $f_i + (g_i + h_i)$ で, 多項式 $(f + g) + h$ における x^i の係数は $(f_i + g_i) + h_i$. $\mathbb{K}$ の和 $+$ の結合律から $f_i + (g_i + h_i) = (f_i + g_i) + h_i$ となり, 任意の i について i 次係数が等しい. つまり多項式として $f + (g + h) = (f + g) + h$.

(2) $f + 0 = 0 + f$ を示す. 多項式 $f + 0$, $0 + f$, f における x^i の係数はそれぞれ $f_i + 0$, $0 + f_i$, f_i であり, $\mathbb{K}$ の和 $+$ について $f_i + 0 = 0 + f_i = f_i$ が成立するので $f + 0 = 0 + f = f$.

(3) $f + (-f) = (-f) + f = 0$ を示す. 多項式 $f + (-f)$, $(-f) + f$, 0 における x^i 係数はそれぞれ

$f_i+(-f_i)$, $(-f_i)+f_i$ 及び 0. $\mathbb{K}$ の和 $+$ について $f_i+(-f_i)=(-f_i)+f_i=0$ が成立するので $f+(-f)=(-f)+f=0$.

(4) $f+g=f+g$ を示す. $f+g$ と $g+f$ における x^i の係数はそれぞれ f_i+g_i と g_i+f_i で, $\mathbb{K}$ の和 $+$ は可換だから $f_i+g_i=g_i+f_i$. よって $f+g=g+f$.

(5) $c(f+g)=cf+cg$ を示す. $c(f+g)$ における x^i の係数は $c(f_i+g_i)$, $cf+cg$ における x^i の係数は cf_i+cg_i で, $\mathbb{K}$ の分配律より $c(f_i+g_i)=cf_i+cg_i$. よって $c(f+g)=cf+cg$.

(6) $(c+d)f=cf+df$ を示す. $(c+d)f$ における x^i の係数は $(c+d)f_i$, $cf+df$ における x^i の係数は cf_i+df_i. $\mathbb{K}$ の分配律より $(c+d)f_i=cf_i+cf_i$. よって $(c+d)f=cf+df$.
次に $(cd)f=c(df)$ を示す. $(cd)f$ における x^i の係数は $(cd)f_i$, $c(df)$ における x^i の係数は $c(df_i)$ で, $\mathbb{K}$ の積の結合律から $(cd)f_i=c(df_i)$ なので $(cd)f=c(df)$.

(7) $1.f=f$ を示す. $1.f$ における x^i の係数は $1\cdot f_i$. 1 は $\mathbb{K}$ の積 $\cdot$ に関する単位元だから $1\cdot f_i=f_i$ となって右辺における x^i の係数と等しい. よって $1.f=f$.

問題 1.3.3 (略解)**.** 一変数多項式の集合が線形空間であることの証明 (問題 1.3.2) で, 一変数多項式 $f=\sum_i f_ix^i$ を多変数多項式 $f=\sum_I f_Ix^I$ に取り換えて, 「x^i の係数」に注目する部分を「x^I の係数」に注目すれば, あとは全く同じ議論で示せる.

問題 1.3.4 (略解)**.** 多項式の集合が線形空間であることの証明 (問題 1.3.2) で, $f=\sum_i f_ix^i$ の和の範囲を変えれば, あとは全く同じ議論で示せる.

問題 1.3.5. 問題 1.3.4 と同様.

問題 1.3.6. 問題 1.3.4 と同様.

問題 1.3.7. 問題 1.3.4 と同様.

問題 1.3.8. 線形空間の定義 1.2.1 のうち, (1)–(4), (7) は V と V' で変わらない. (5) についても, $c\in\mathbb{C}$ なら $\overline{c}\in\mathbb{C}$ だから, (5) が V で成立すれば

$$c.'(v+w)=\overline{c}.(v+w)=\overline{c}.v+\overline{c}.w=c.'v+c.'w$$

となって V' でも成立する. (6) の前半も同様に示せる. 残った (6) の後半は, $c,d\in\mathbb{C}$ に対して $\overline{cd}=\overline{c}\cdot\overline{d}$ だから, (6) 後半が V で成立すれば

$$(cd).'v=\overline{cd}.v=(\overline{c}\cdot\overline{d}).v=\overline{c}.(\overline{d}.v)=c.'(d.'v)$$

となって, V' でも成立する. よって V' は線形空間である.

1.4 線形写像

問題 1.4.1. f が単射だと仮定する. $f(v)=0_W$ なら, 補題 1.4.3 から $f(v)=f(0_V)$ となって, 単射性から $v=0_V$. 逆に "$f(v)=0_W\Rightarrow v=0_V$" を仮定し, $v,v'\in V$ が $f(v)=f(v')$ を満たすとすると, f の線形性から $f(v-v')=f(v)-f(v')=0_W$ となり, 仮定から $v-v'=0_V$. よって $v=v'$ となり, f は単射である.

問題 1.4.2. $u:={}^t(-3\ 2\ 2)$, $v:={}^t(-2\ 1\ 2)$, $w:={}^t(2\ 1\ 1)$ と置くと $e_1:={}^t(1\ 0\ 0)=\frac{1}{7}(2w-u)$ なので, f の線形性から $f(e_1)=f\bigl(\frac{1}{7}(2w-u)\bigr)=-\frac{1}{7}f(u)+\frac{2}{7}f(w)=-\frac{1}{7}x+\frac{2}{7}z$. 同様に $e_2:={}^t(0\ 1\ 0)=\frac{6}{7}u-v+\frac{2}{7}w$

なので $f(e_2)=f\big(\frac{6}{7}u-v+\frac{2}{7}w\big)=\frac{6}{7}x-y+\frac{2}{7}z$. また $e_3 \coloneqq {}^t(0\ 0\ 1)=-\frac{4}{7}u+v+\frac{1}{7}w$ なので $f(e_3)=f\big(-\frac{4}{7}u+v+\frac{1}{7}w\big)=-\frac{4}{7}x+y+\frac{1}{7}z$.

問題 1.4.3. (1) 任意の $X,Y\in M(n,p;\mathbb{K})$ に対して, 行列の和と積の分配律から $l_A(X+Y)=A(X+Y)=AX+AY=l_A(X)+l_A(Y)$. また任意の $X\in M(n,p;\mathbb{K})$ と $c\in\mathbb{K}$ に対して, 行列のスカラー倍の性質から $l_A(cX)=A(cX)=c(AX)=c(l_A(X))$. よって l_A は線形写像である.

(2) 任意の $X,Y\in M(l,m;\mathbb{K})$ に対して, 行列の和と積の分配律から $r_A(X+Y)=(X+Y)A=XA+YA=r_A(X)+r_A(Y)$. また任意の $Y\in M(l,m;\mathbb{K})$ と $c\in\mathbb{K}$ に対して, 行列のスカラー倍の性質から $r_A(cY)=(cY)A=c(YA)=c(r_A(Y))$. よって r_A は線形写像である.

問題 1.4.4. (1) $v,w\in\mathbb{K}^n$ と $d\in\mathbb{K}$ を任意に取る. $\mathbb{K}^n$ の分配律から $c.(v+w)=c.v+c.w$ となり, また $\mathbb{K}^n$ のスカラー積の公理と $\mathbb{K}$ の積の可換性から $c.(d.w)=(c\cdot d).w=(d\cdot c).w=d.(c.w)$. よってスカラー倍写像は線形写像である.

(2) 任意の $v\in\mathbb{K}^n$ に対して $l_{cE_n}(v)=(cE_n)v=c.v$ だから, 写像 l_{cE_n} は c 倍写像と一致する.

問題 1.4.5. 任意に $X=(x_{ij})_{i,j},Y=(y_{ij})_{i,j}\in M(m,n;\mathbb{K})$ と $c\in\mathbb{K}$ を取ると, ${}^t(X+Y)={}^t(x_{ij}+y_{ij})_{i,j}=(x_{ji}+y_{ji})_{i,j}=(x_{ji})_{i,j}+(y_{ji})_{i,j}={}^tX+{}^tY$, ${}^t(c.X)={}^t(cx_{ij})_{i,j}=(cx_{ji})_{i,j}=c(x_{ji})_{i,j}=c.{}^tX$ となるので, 写像 $X\mapsto {}^tX$ は線形写像である.

問題 1.4.6. 任意に $f,g\in C^\infty(\mathbb{R})$ と $c\in\mathbb{R}$ を取ると, $\frac{d^n}{dx^n}(f+g)=\frac{d^nf}{dx^n}+\frac{d^ng}{dx^n}$, $\frac{d^n}{dx^n}(cf)=c\frac{d^nf}{dx^n}$ となるから, $D(f+g)=\sum_{n=0}^N a_n\frac{d^n}{dx^n}(f+g)=\sum_{n=0}^N a_n\frac{d^nf}{dx^n}+\sum_{n=0}^N a_n\frac{d^ng}{dx^n}=D(f)+D(g)$, $D(cf)=\sum_{n=0}^N a_n\frac{d^n}{dx^n}(cf)=c\sum_{n=0}^N a_n\frac{d^nf}{dx^n}=c.D(f)$. また, 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して $\frac{d^nf}{dx^n},\frac{d^ng}{dx^n}\in C^\infty(\mathbb{R})$ となり, $C^\infty(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の線形空間だから, それらの線形結合である $D(f)+D(g)$ や $c.D(f)$ も $C^\infty(\mathbb{R})$ の元である. よって D は写像 $C^\infty(\mathbb{R})\to C^\infty(\mathbb{R})$ であって, 更に線形である.

問題 1.4.7. 任意に $f,g\in C^0(I)$ と $c\in\mathbb{K}$ を取ると, $\int_J(f+g)(x)dx=\int_J f(x)dx+\int_J g(x)dx$, $\int_J(cf)(x)dx=c\int_J f(x)dx$ なので, $f\mapsto\int_J f(x)dx$ は線形写像である.

問題 1.4.8. 任意に $X=(x_{ij})_{i,j=1}^n,Y=(y_{ij})_{i,j=1}^n\in M(n;\mathbb{K})$ と $c\in\mathbb{K}$ を取ると $\mathrm{tr}(X+Y)=\mathrm{tr}\big((x_{ij}+yij)_{i,j}\big)=\sum_{i=1}^n(x_{ii}+y_{ii})=\sum_{i=1}^n x_{ii}+\sum_{i=1}^n y_{ii}=\mathrm{tr}(X)+\mathrm{tr}(Y)$, $\mathrm{tr}(cX)=\mathrm{tr}\big(c(x_{ij})_{i,j}\big)=\sum_{i=1}^n cx_{ii}=c\sum_{i=1}^n x_{ii}=c\,\mathrm{tr}(X)$ なので, $X\mapsto\mathrm{tr}\,X$ は線形写像である.

問題 1.4.9. $A\in M(m,n;\mathbb{R})\subset M(m,n;\mathbb{C})$ と $c\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ を取ると, $\overline{cA}=\overline{(ca_{ij})_{i,j}}=(\overline{c}\cdot\overline{a_{ij}})_{i,j}=\overline{c}(a_{ij})_{i,j}=\overline{c}A\neq cA=c\overline{A}$ なので, $A\mapsto\overline{A}$ は $\mathbb{C}$ 線形写像ではない. 一方, 任意の $A,B\in M(m,n;\mathbb{C})$ と $c\in\mathbb{R}$ に対して $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$, $\overline{cA}=c\overline{A}$ が成立するので, $A\mapsto\overline{A}$ は $\mathbb{R}$ 線形写像である.

問題 1.4.10. 前半について. 任意の $f\in\mathbb{K}^{[n]}=\mathrm{Map}([n],\mathbb{K})$ に対して, $g\coloneqq(\psi\circ\varphi)(f)=\psi\big(f(1)\cdots f(n)\big)\in\mathbb{K}^n$ は $g(i)=f(i)$ を満たす. よって $g=f$, つまり $\psi\circ\varphi=\mathrm{id}_{\mathbb{K}^{[n]}}$ である. また任意の $v\in\mathbb{K}^n$ に対して $(\varphi\circ\psi)(v)=\varphi\big(\psi(v)\big)=\big(\psi(v)(1)\ \cdots\ \psi(v)(1)\big)=(v_1\ \cdots\ v_n)=v$ だから $\varphi\circ\psi=\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$. よって ψ は φ の逆写像である.

後半について. $\mathbb{K}$ の積を $\cdot$ で, $\mathbb{K}^{[n]}$ のスカラー倍を . で表すと, 定義から $f\in\mathbb{K}^{[n]}$ と $c\in\mathbb{K}$ に対して $(c.f)(i)=c\cdot f(i)$. よって $\varphi(cf)=\big((cf)(1)\cdots(cf)(n)\big)=\big(c\cdot f(1)\cdots c\cdot f(n)\big)=c.\big(f(1)\cdots f(n)\big)=c.\varphi(f)$.

問題 1.4.11. 実数の集合 $\mathbb{R}$ には絶対値 $|\cdot|$ があって, それを使って函数 $f\colon I\to\mathbb{R}$ の $x\in I$ における連続性を

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$ と定義した．しかし, 一般の体には絶対値 $|\cdot|$ が定められていないので, “$|f(x)-f(y)| < \varepsilon$” の部分の意味が無い．

問題 1.4.12. $i > n$ なら $i(i-1)\dots(i-n+1) = 0$ なので $\frac{d^n}{dx^n}x^i = 0$ である． よって $\frac{d^n}{dx^n}$ は写像 $\mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ を定める．任意に $p(x) = \sum_i p_i x^i, q(x) = \sum_i q_i x^i \in \mathbb{K}[x]$ と $c \in \mathbb{K}$ を取ると, $\frac{d^n}{dx^n}\big(p(x) + q(x)\big) = \frac{d^n}{dx^n}(\sum_i (p_i + q_i)x^i) = \sum_i (p_i + q_i)\frac{d^n}{dx^n}x^i = \sum_i p_i \frac{d^n}{dx^n}x^i + \sum_i q_i \frac{d^n}{dx^n}x^i = \frac{d^n}{dx^n}p(x) + \frac{d^n}{dx^n}q(x)$, $\frac{d^n}{dx^n}\big(cp(x)\big) = \frac{d^n}{dx^n}(\sum_i cp_i x^i) = \sum_i cp_i \frac{d^n}{dx^n}x^i = c\sum_i p_i \frac{d^n}{dx^n}x^i = c\frac{d^n}{dx^n}p(x)$ となるので, $\frac{d^n}{dx^n}$ は線形写像である．同様に $D = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dx^k}$ についても $D(p+q) = D(p) + D(q)$, $D(cp) = c.D(p)$ が示せるので, D は線形写像である．

2　基底と次元

2.1　線形部分空間

問題 2.1.1. (ii) と (iii) を仮定すると, (iii) より $v' \coloneqq cv$ と $w' \coloneqq dw$ はそれぞれ W の元で, 更に (ii) より $v' + w' = cv + dw$ も W の元.

逆に任意の $c, d \in \mathbb{K}$ と $v, w \in W$ に対して $cv + dw \in W$ なら, $c = d = 1$ として $v + w \in W$ なので (ii) が従い, また $d = 0$ として問題 1.2.5 より $cv + 0w = cv + 0_V = cv$ が W の元だから (iii) が従う.

また (i) を仮定すると $0 \in W$ だから $W \neq \emptyset$, つまり (i)' が成立する.

逆に (i)' を仮定して $w \in W$ を取ると, 問題 1.2.6 より $W \ni (-1).w = -w$ は w の逆元で, (ii) より $0_V = w + (-w) \in W$, つまり (i) が成立する.

問題 2.1.2. どの線形空間も $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の部分集合であり, 和と零元及びスカラー倍の定義は共通している. 従ってどれも $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の部分空間. あとは集合としての包含関係 $\mathbb{R}[x] \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ を示せば良い.

多項式は $\mathbb{R}$ 上の実数値函数として見なせて, それは更に任意回微分可能だから, 包含関係 $\mathbb{R}[x] \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ がある. また, 任意回微分可能な関数は 1 回微分可能で, 従って連続函数である[*73]. よって包含関係 $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ がある.

問題 2.1.3. 包含写像 $\iota \colon W \to V$ は W の元をそれ自身に写すから単射である. また任意の $w, w' \in W$, $c \in \mathbb{K}$ について $\iota(w + w') = w + w' = \iota(w) + \iota(w')$, $\iota(cw) = cw = c.\iota(w)$ だから, ι は線形写像である. しかし

問題 2.1.4 (略解)**.**

- (1) と (3) は部分空間である. 議論は同様なので, (3) についてだけ示す. 任意に $v = {}^t\!(x\ y\ z), v' = {}^t\!(x'\ y'\ z') \in W_0$ を取ると $2x + 3y + z = 0$, $2x' + 3y' + z' = 0$. すると $v + v' = {}^t\!(x+x'\ y+y'\ z+z')$ について $2(x+x') + 3(y+y') + (z+z') = (2x+3y+z) + (2x'+3y'+z') = 0$ なので $v + v' \in W_0$. また任意に $v = {}^t\!(x\ y\ z) \in W_0$ と $c \in \mathbb{K}$ を取ると, $cv = {}^t\!(cx\ cy\ cz)$ について $2cx + 3cy + cz = c(2x + 3y + z) = 0$ だから $cv \in W_0$. よって W_0 は部分空間である.
- (2) と (4) は部分空間ではない. 実際, $v \coloneqq {}^t\!(-1, 1, 0)$, $v' \coloneqq {}^t\!(-4, 3, 0)$ は $v, v' \in V_1 \cap W_1$ を満たすが $v + v' = {}^t\!(-5, 4, 0) \notin V_1 \cup W_1$ である.

問題 2.1.5.

(1) 部分空間である. 実際, $v = {}^t\!(v_1\ \cdots\ v_n), w = {}^t\!(w_1\ \cdots\ w_n) \in V_1$ なら $v_1 + \ldots + v_n = 0$, $w_1 + \ldots + w_n = 0$ だから, $v + w = {}^t\!(v_1 + w_1\ \cdots\ v_n + w_n)$ について $(v_1 + w_1) + \ldots + (v_n + w_n) = (v_1 + \ldots + v_n) + (w_1 + \ldots + w_n) = 0$ となり, $v + w \in V_1$ となる. また $v = {}^t\!(v_1\ \cdots\ v_n) \in V_1$ と $c \in \mathbb{K}$ に対して $cv = {}^t\!(cv_1\ \cdots\ cv_n)$ は $cv_1 + \ldots + cv_n = c(v_1 + \ldots + v_n) = 0$ を満たすので $cv \in V_1$ である.

(2) 部分空間ではない. 実際, $v \coloneqq {}^t\!(1\ 0\ \cdots\ 0) \in V_2$ について $2v \notin V_2$ である.

(3) 部分空間ではない. 実際, $v \coloneqq {}^t\!(1\ 0\ \cdots\ 0) \in V_3$ について $2v \notin V_3$ である.

問題 2.1.6. $a = (a_n)_n, b = (b_n) \in S$ を任意に取って $c = (c_n)_n \coloneqq a + b$ と置くと $c_n = a_n + b_n$ だから, $\sum_{i=1}^m p_i c_{n+m-i} = \sum_{i=1}^m p_i a_{n+m-i} + \sum_{i=1}^m p_i b_{n+m-i} = a_{n+m} + b_{n+m} = c_{n+m}$. よって $c = a + b \in S$

[*73] 微積分の教科書, 例えば [杉浦 80, p.83, 第 II 章 §1, 命題 1.2] を見て下さい.

である．また $d \in \mathbb{K}$ と $a = (a_n)_n \in S$ を任意に取ると，$da = (da_n)_n$ について $\sum_{i=1}^{m} p_i(da_{n+m-i}) = d\sum_{i=1}^{m} p_i a_{n+m-i} = da_{n+m}$．よって $da \in S$ である．

問題 2.1.7. n 次以下の二つの多項式の和は n 次以下の多項式であり，またスカラー倍しても，次数は増えない．よって $\mathbb{K}[x]_{\geq n} \subset \mathbb{K}[x]$ は部分空間．n を動かしても和，零元，スカラー倍は共通しているから，部分集合の列 $\mathbb{K} \subset \cdots \subset \mathbb{K}[x]_{\leq n} \subset \mathbb{K}[x]_{\leq n+1} \subset \cdots$ は部分空間の列になる．

問題 2.1.8. (f) の任意の二元 v_1, v_2 は適当な $g_1, g_2 \in \mathbb{K}[x]$ を使って $v_1 = fg_1, v_2 = fg_2$ と書けて，$v_1 + v_2 = fg_1 + fg_2 = f(g_1 + g_2)$, $g_1 + g_2 \in \mathbb{K}[x]$ だから $v_1 + v_2 \in (f)$．また $v = fg \in \mathbb{K}[x]$ と $c \in \mathbb{K}$ を任意に取ると，$cv = f(cg)$, $cg \in \mathbb{K}[x]$ だから $cv \in \mathbb{K}[x]$．以上より $(f) \subset \mathbb{K}[x]$ は部分空間である．

問題 2.1.9. 前半は $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} V_i = V_0$ と $V_0 \subset V$ が部分空間であることから従う．

後半は，任意に $v, w \in \bigcap V_i$ と $c \in \mathbb{K}$ を取ると，各 $i \in \mathbb{N}$ に対して $v, w \in V_i$ であり，$V_i \subset V$ が部分空間であることから $v + w, cv \in V_i$．よって $v + w, cv \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} V_i$ である．

問題 2.1.10. $a = (a_i)_i, b = (b_i)_i \in V_p$ と $k \in \mathbb{K}$ を任意に取ると，i が p で割り切れれば $a_i = b_i = 0$ だから $a_i + b_i = ka_i = 0$．よって $a + b = (a_i + b_i)_i, ka = (ka_i)_i \in V_p$ であり，$V_p \subset \mathbb{K}^n$ は部分空間である．$i = 0$ 及び任意の $i > 1$ は適当な素数 p で割り切れるから，$\bigcap_p V_p$ の元 $(a_i)_i$ は $a_0 = 0$ 及び任意の $i > 1$ に対して $a_i = 0$ を満たす．よって $\bigcap_p V_p = \{(0, a_1, 0, 0, \dots) \mid a_1 \in \mathbb{K}\} \simeq \mathbb{K}$ であり，確かに $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ の部分空間である．

問題 2.1.11. R と I は両者とも和と実数倍に関して閉じているが，虚数倍では閉じていない．よって両者とも $\mathbb{R}$ 線形空間としての $\mathbb{C}$ 部分空間であるが，$\mathbb{C}$ 線形空間としての部分空間ではない．

2.2 部分空間の和と生成系

問題 2.2.1. 無限和 $v_0 + v_1 + \cdots$ に意味が無い．

問題 2.2.2. $\mathbb{R}e_1 \cup \mathbb{R}e_2$ は x 軸と y 軸の合併で，これは $\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2 = \mathbb{R}^2$ の真部分集合．

問題 2.2.3. V の任意の元は S の線形結合で書けるから，$S \cup T$ の線形結合で書ける．

問題 2.2.4. $W \cap W' = \{0\}$, $W + W' = \mathbb{C}^3$ となるので，確かにどちらも部分空間である．

問題 2.2.5. $\alpha_i \coloneqq e_i - e_{i+1}$ と書くと，任意の $v = {}^t(v_1 \ \cdots \ v_n) \in V$ は $v = \sum_{i=1}^{n-1} c_i\alpha_i$, $c_i \coloneqq v_1 + \cdots + v_i$ と書ける．

問題 2.2.6. 略．

問題 2.2.7. $W \not\subset W'$ かつ $W' \not\subset W$ と仮定して，$w \in W \setminus W'$ と $w' \in W' \setminus W$ を取る．$W \cup W' \subset V$ が部分空間であることから $w + w' \in W \cup W'$，つまり $w + w' \in W$ 又は $w + w' \in W'$．前者なら $W \subset V$ が部分空間であることから $w' \in W$ となり，後者なら同様に $w \in W$ となるので，どちらにせよ矛盾する．

問題 2.2.8. $(V' \cap W) + W' \subset (V' + W') \cap W$ と $(V' \cap W) + W' \supset (V' + W') \cap W$ を示せば良い．

$(V' \cap W) + W' \subset (V' + W') \cap W$ の証明: $u \in V' \cap W$ と $w' \in W'$ を任意に取ると，和空間の定義から $u + w' \in V' + W'$ であり，また $w' \in W' \subset W$ と $u \in V' \cap W \subset W$, 及び $W \subset V$ が部分空間であることか

ら $u+w'\in W$. よって $u+w'\in(V'+W')\cap W$.

$(V'\cap W)+W'\supset(V'+W')\cap W$ の証明: 任意の元 $u\in(V'+W')\cap W$ を取る. すると $u\in V'+W'$ なので, 適当な $v'\in V'$ と $w'\in W'$ を用いて $u=v'+w'$ と書ける. また $W'\subset W\subset V$ は部分空間だから $v'=u-w'\in W'\subset W$ である. よって $v'\in V'\cap W$ となるので, $u=v'+w'\in(V'\cap W)+W'$ が成立する.

問題 2.2.9.
(1) 部分集合の列であることは $\mathbb{K}[\![x]\!]$ 達の定義から明らか. 和と零元及びスカラー倍は共通していて, 各部分集合が和とスカラー倍で閉じていることも例 1.3.8 等で確認しているから, この列は部分空間の列である.
(2) $\mathbb{K}[\![x]\!]\cap\mathbb{K}[x^{\pm1}]=\mathbb{K}[x]$, $\mathbb{K}[\![x]\!]+\mathbb{K}[x^{\pm1}]=\mathbb{K}[x^{-1},x]\!]$ となり, (1) から確かに部分空間である.
(3) $\mathbb{K}[\![x]\!]\not\subset\mathbb{K}[x^{\pm1}]$ かつ $\mathbb{K}[\![x]\!]\not\supset\mathbb{K}[x^{\pm1}]$ なので, 問題 2.2.7 より合併集合は部分空間ではない.

2.3 線形独立性

問題 2.3.1. T の元達の線形関係 $\sum_{i=1}^n c_iv_i=0$, $c_i\in\mathbb{K}$, $v_i\in T$ について, $T\subset S$ よりこれは S の元達の線形関係だから, S の線形独立性より $c_1=\cdots=c_n=0$.

問題 2.3.2. 非自明な線形関係 $1.0_V=0_V$ がある.

問題 2.3.3. 単位ベクトル $e_1,\ldots,e_n$ を用いる.
(1) 線形独立である. 実際, $v_i=\sum_{j=1}^i e_j$ より線形関係 $\sum_{i=1}^n c_iv_i=0$ は $\sum_{j=1}^n(\sum_{i=j}^n c_i)e_j=0$ と書き直せる. 両辺の第 i 成分 ($i=n,n-1,\ldots,1$) を比較して連立方程式 $c_n=0$, $c_n+c_{n-1}=0$, $\ldots$, $c_n+\cdots+c_1=0$ が得られる. これを解いて $c_n=c_{n-1}=\cdots=c_1=0$.
(2) $v_1-2v_2+v_3=0$ が非自明な線形関係なので線形従属である.
(3) 線形独立である. 実際, 線形関係 $\sum_{i=1}^{n-1}c_iv_i=0$ は $(\sum_{i=1}^{n-1}c_i)e_1+\sum_{j=2}^n c_{j-1}e_j=0$ と書き直せて, 両辺の各成分を比較して連立方程式 $c_1+\cdots+c_{n-1}=0$, $c_1=0$, $c_2=0$, $\ldots$, $c_{n-1}=0$ が得られる. これを解いて $c_1=\cdots=c_{n-1}=0$.

問題 2.3.4. 有限集合 S の元の個数を $|S|$ と書く.
(1) $|\mathbb{F}_p|=p$ より $\left|\mathbb{F}_p^n\right|=|\mathbb{F}_p|^n=p^n$. よって $\left|\mathbb{F}_p^n\setminus\{0\}\right|=\left|\mathbb{F}_p^n\right|-|\{0\}|=p^n-1$.
(2) $v_1\in\mathbb{F}_p^n$ の選び方は前項より p^n-1 通り.
v_1 を選んだとして, これと線形独立な v_2 は $\mathbb{F}_p^n\setminus\mathbb{F}_pv_1$ から任意に取れるので, v_2 の選び方は $\left|\mathbb{F}_p^n\setminus\mathbb{F}_p\right|=\left|\mathbb{F}_p^n\right|-|\mathbb{F}_p|=p^n-p$ 通り.
v_1,v_2 を選んだとして, これらと線形独立な v_3 は $\mathbb{F}_p^n\setminus(\mathbb{F}_pv_1+\mathbb{F}_pv_2)$ から任意に取れる. v_1 と v_2 が線形独立であることから $|\mathbb{F}_pv_1+\mathbb{F}_pv_2|=\left|\mathbb{F}_p^2\right|=p^2$ なので, v_3 の選び方は $\left|\mathbb{F}_p^n\setminus(\mathbb{F}_pv_1+\mathbb{F}_pv_2)\right|=\left|\mathbb{F}_p^n\right|-|\mathbb{F}_pv_1+\mathbb{F}_pv_2|=p^n-p^2$ 通り.
同様に, $v_1,\ldots,v_i$ を選んだとして, これらと線形独立な v_{i+1} は $\mathbb{F}_p^n\setminus(\mathbb{F}_pv_1+\cdots+\mathbb{F}_pv_i)$ から任意に取れる. $v_1,\ldots,v_i$ が線形独立であることから $|\mathbb{F}_pv_1+\cdots+\mathbb{F}_pv_i|=\left|\mathbb{F}_p^i\right|=p^i$ なので, v_{i+1} の選び方は $\left|\mathbb{F}_p^n\setminus(\mathbb{F}_pv_1+\cdots+\mathbb{F}_pv_i)\right|=\left|\mathbb{F}_p^n\right|-|\mathbb{F}_pv_1+\cdots+\mathbb{F}_pv_i|=p^n-p^i$ 通り.
よって線形独立な $(v_1,\ldots,v_m)$ の選び方は $\prod_{i=1}^m(p^n-p^i)$ 通りある.

2.4　基底

問題 2.4.1. 条件 (2.4.2) を満たす $b^{(i)}$ が一意に定まること: 漸化式 (2.4.1) は m 階だから, (正確には帰納法より) 初期値 $b(i)_0, \dots, b(i)_{m-1}$ から $b(i) = \big(b(i)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ が一意に定まる. を説明せよ.

c は漸化式 (2.4.1) の解であること: 元の解 a との差 $c - a$ を考えると, S が部分空間であることから $c - a \in S$. ここで c の定義の仕方から, $i = 0, 1, \dots, m-1$ に対して $(c-a)_i = c_i - a_i = 0$. 漸化式 (2.4.1) は m 階だから, 最初の m 項が 0 の解 $c - a$ は, その全ての項が 0 である. つまり $c - a = 0 \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. よって $a = c \in \langle b(0), b(1), \dots, b(m-1)\rangle$.

問題 2.4.2. $\Rightarrow$: $B := \{v_i \mid i \in I\}$ とすると, $\langle B\rangle$ の任意の元は B の線形結合で書けるから, B が線形独立であればそれは $\langle B\rangle$ の基底である.

$\Leftarrow$: 基底は線形独立である.

問題 2.4.3. $\Rightarrow$: $T \subsetneq S$ が生成系だとすると, $s \in S \setminus T$ は T の線形結合で $s = \sum_{t\in T} c_t t$ (右辺は有限和) と書けるが, それは S の非自明な線形関係 $\sum_{t\in T} c_t t - s = 0$ があることを意味するので, S は線形独立ではなく, 特に基底ではない.

$\Leftarrow$: S が線形独立でないと仮定すると, 非自明な線形関係 $\sum_{s\in S} c_s s = 0$ がある. この時 $c_s \neq 0$ なる $s \in S$ が存在するが, $T := S \setminus \{s\}$ とすると s は T の線形結合で書ける. V の任意の元 v は S の線形結合で書けるから, 結局 v は真部分集合 $T \subsetneq S$ の線形結合で書けることになる.

問題 2.4.4. 連立一次方程式の解の集合は部分空間である (例 2.1.9) から, 特に問題の $W_1, W_2 \subset \mathbb{K}^4$ は部分空間.

次に $\dim(W_1+W_2)$ の次元を求める為に, 命題 2.5.9 の $\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1\cap W_2)$ を用いる. W_1 と W_2 を定めている方程式系はそれぞれ独立だから $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$. また $W_1 \cap W_2$ の元は $x \in \mathbb{K}^4$ に対する連立方程式 $Ax = 0$ の解である. 但し

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

掃き出し法 (左基本変形ないし行基本変形) で A は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に変形できるから, 解空間は 1 次元で, $W_1 \cap W_2 = \mathbb{K}v$, $v := {}^t(1\ 1\ 0\ 1)$ となる. よって $\dim(W_1 + W_2) = 3$ だと分かる.

最後に W_1, W_2 の元で v と線形独立なものをそれぞれ探すと, 例えば $W_1 = \mathbb{K}v + \mathbb{K}w_1$, $w_1 := {}^t(1\ 0\ 1\ 0)$, $W_2 = \mathbb{K}v + \mathbb{K}w_2$, $w_2 := {}^t(2\ 1\ -2\ 0)$ となることから, v, w_1, w_2 が $W_1 + W_2$ の基底だと分かる.

問題 2.4.5. 方針は前の問題と同様. $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$ であり, また $W_1 \cap W_2$ は連立方程式 $Ax = 0$ の

解空間である．但し

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{掃き出し法}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって解空間は 1 次元で，$W_1 \cap W_2 = \mathbb{K}v$, $v := {}^t(1\ 1\ -1\ 0)$ となる．よって $\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = 3$.

あとは $W_1 = \mathbb{K}v + \mathbb{K}w_1$, $w_1 := {}^t(-11\ 2\ 0\ 3)$, $W_2 = \mathbb{K}v + \mathbb{K}w_2$, $w_2 := {}^t(-2\ 0\ 0\ 1)$ となることから，v, w_1, w_2 が $W_1 + W_2$ の基底になる．

問題 2.4.6. $W_1 \cap W_2$ の元は $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \varphi \in \mathbb{K}$ を用いて $\alpha a + \beta b + \gamma c = \delta d + \epsilon e + \varphi f$ と書ける．すると $x = {}^t(\alpha\ \beta\ \cdots\ \varphi) \in \mathbb{K}^6$ は連立方程式 $Ax = 0$ の解である．但し

$$A := (a\ b\ \cdots\ f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

掃き出し法で A は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

に変形できるから，$Ax = 0$ の解空間は $x_1 = {}^t(1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 0)$ と $x_2 = {}^t(2\ 2\ -2\ 1\ 0\ -1)$ で生成される．x_1 に対応する $W_1 \cap W_2$ の元は $w := a + b - c = d - e = {}^t(1\ -1\ -1\ -2)$, x_2 に対応する $W_1 \cap W_2$ の元は $2a + 2b - 2c = -d - f = 2w$ なので，$W_1 \cap W_2 = \mathbb{K}w$ であり，w が求める基底である．

問題 2.4.7. 前問と同様の方針で，

$$A := (a\ b\ \cdots\ f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{掃き出し法}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

より，$a - b = d - e = {}^t(-1\ -2\ 0\ -1)$ と $a - 2b + c = d - f = {}^t(-2\ -2\ 2\ 0)$ の二つのベクトルが $W_1 \cap W_2$ の基底をなす．

問題 2.4.8. E_{ij} を行列単位 (例 2.4.5) とする．

- 計 $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ 個の元 $E_{ij} + E_{ji}$ $(1 \le i \le j \le n)$ のが $S(n;\mathbb{K})$ の基底をなす．
- 計 $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ 個の元 $E_{ij} - E_{ji}$ $(1 \le i < j \le n)$ のが $A(n;\mathbb{K})$ の基底をなす．
- E_{ij} $(1 \le i \le j \le n)$ が $U(n;\mathbb{K})$ の基底をなす．
- E_{ij} $(1 \le j \le i \le n)$ が $L(n;\mathbb{K})$ の基底をなす．
- E_{ii} $(1 \le i \le n)$ が $D(n;\mathbb{K})$ の基底をなす．

問題 2.4.9. $\mathbb{C}^n$ の任意の元は $z = {}^t(z_1\ \cdots\ z_n) = \sum_{k=1}^n (\mathrm{Re}\, z_k) x_{2k-1} + \sum_{k=1}^n (\mathrm{Im}\, z_k) x_{2k}$ と x_k 達の線形結合で一通りの方法で書ける．

2.5　次元

問題 2.5.1. 行列単位 E_{ij} $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ が基底なので，次元は $\dim M(m,n;\mathbb{K}) = mn$.

問題 2.5.2. 多項式 $(x)_j$ 達が生成系であることを示す為に，n 次以下の多項式 $f(x) \in \mathbb{K}[x]_{\leq n}$ に対して未知係数 $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ に関する方程式

$$\sum_{j=0}^{n} c_j (x)_j = f(x)$$

を考える．両辺で $x = i$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ とすると，$(i)_j = 0$ $(i < j)$ だから $\sum_{j=i}^{n} (i)_j c_j = f(i)$．そこで $f := {}^t\!\big(f(0)\ f(1)\ \cdots\ f(n)\big)$ とすると，この等式は未知ベクトル $c := {}^t(c_0\ c_1\ \cdots\ c_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ の連立一次方程式

$$Ac = f, \quad A := \big((i)_j\big)_{i,j=0}^{n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 0 & 0 & 2\cdot 1 & \cdots & (n-2)(n-1) & (n-1)(n-2) & n(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & (n-2)! & (n-1)_{n-2} & (n)_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (n-1)! & (n)_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n! \end{pmatrix}$$

に他ならない．A は上三角行列で対角成分はどれも 0 でないから可逆である．よって方程式の解は $c = A^{-1} f$ と一意に定まる．つまり，任意の元 $f(x) \in \mathbb{K}[x]_{\leq n}$ が $(x)_j$ 達の線形結合で一意に書ける．よって $(x)_j$ 達は基底である．

問題 2.5.3. 問題 2.4.8 の解答 2.4.8 より，$\dim S(n;\mathbb{K}) = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim A(n;\mathbb{K}) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, $\dim U(n;\mathbb{K}) = \dim L(n;\mathbb{K}) = \binom{n+1}{2}$, $\dim D(n;\mathbb{K}) = n$.

問題 2.5.4. 各 W_i に対し基底 $w^i_1, \ldots, w^i_{n_i}$ を取ると，$G := \{w^j_i \mid i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, n_i\}$ は和空間 $W := W_1 + \ldots + W_k$ の生成系である．よって $\dim W \leq |G| \leq n_1 + \cdots + n_k = \dim W_1 + \cdots + \dim W_k$.

問題 2.5.5. $2n+1$ 個の関数 $1, \cos kx, \sin kx$ $(k = 1, \ldots, n)$ が線形独立であることを示せば良い．$a, b_k, c_k \in \mathbb{K}$ が $a \cdot 1 + \sum_{k=1}^{n} b_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} c_k \sin kx = 0$ を満たすと仮定する．両辺の $x = 0$ での値を比べると $a + \sum_{k=1}^{n} b_k = 0$．また両辺を $2i-1$ 回 $(i = 1, \ldots, n)$ x で微分して，その $x = 0$ での値を比べると $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i-1} k^{2i-1} c_k = 0$．そして両辺を $2i$ 回 $(i = 1, \ldots, n)$ x で微分して，その $x = 0$ での値を比べると $\sum_{k=1}^{n} (-1)^i k^{2i} b_k = 0$. 後半二種類の等式は連立方程式

$$Ax = 0, \quad A := (k^i)_{i,k=1}^{2n}, \quad x := {}^t(c_1\ b_1\ c_2\ b_2\ \cdots\ c_n\ b_n)$$

にまとめられる．Vandermonde の行列式より $\det A = (-1)^n (2n)! \prod_{1 \leq i < j \leq 2n} (j - i) \neq 0$ なので A は正則．よって $x = A^{-1} 0 = 0$, つまり $b_1 = \cdots = b_n = c_1 = \cdots = c_n = 0$．すると最初の等式より $a = 0$. 以上より線形独立性が示せた．

問題 2.5.6. 任意に $X, Y \in V_A$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ を取ると，$A(\alpha X + \beta Y) = \alpha(AX) + \beta(AY) = \alpha(XA) + \beta(YA) = (\alpha X + \beta Y)A$ より $\alpha X + \beta Y \in V_A$ となる．よって V_A は部分空間．

$X = (x_{ij})_{i,j} \in M(3;\mathbb{K})$ と置いて計算すると

$$AX - XA = \begin{pmatrix} 0 & (a-b)x_{12} & (a-c)x_{13} \\ (b-a)x_{21} & 0 & (b-c)x_{23} \\ (c-a)x_{31} & (b-c)x_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

仮定 $a \neq b \neq c \neq a$ より $A \in V_A \iff x_{12} = x_{13} = x_{21} = x_{23} = x_{31} = x_{33} = 0$. よって V_A は対角行列全体のなす部分空間であり, $\dim V_A = 3$.

問題 2.5.7. 部分空間であることは前問の解答の前半部分がそのまま適用できる. 次元の計算についても, 前問の $AX - XA$ の計算が使える.

- $V_{A_0} = M(3;\mathbb{K})$, $\dim V_{A_0} = 9$.
- V_{A_1} の元は $\left(\begin{smallmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{smallmatrix}\right)$ の形の行列で $\dim V_{A_1} = 5$.
- V_{A_2} の元は $\left(\begin{smallmatrix} * & 0 & * \\ * & 0 & * \\ 0 & * & 0 \end{smallmatrix}\right)$ の形の行列で $\dim V_{A_2} = 5$.
- V_{A_3} の元は $\left(\begin{smallmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{smallmatrix}\right)$ の形の行列で $\dim V_{A_3} = 5$.

問題 2.5.8. 部分空間であることの証明は略. 基底は例えば $x^{2n} - 1$ $(n \in \mathbb{N})$.

問題 2.5.9. 問題 2.3.4 より $\dim \mathbb{F}_q^n = (q^n - 1)(q^n - q)\cdots(q^n - q^{n-1})$.

問題 2.5.10. 単位ベクトルを e_i $(i = 1, \ldots, n)$ と書くと, $e_1, \sqrt{-1}e_1, \ldots, e_n, \sqrt{-1}e_n$ が $\mathbb{R}$ 上の線形空間としての $\mathbb{C}^n$ の基底になるので $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$.

3　線形写像の行列表示

3.1　線形写像と自己準同型

問題 3.1.1. 問題 2.5.2 の下降冪 $(l)_k := l(l-1)\cdots(l-k+1)$ $(k \in \mathbb{N})$ を用いる．$l \in \mathbb{N}$, $l < k$ なら $(l)_k = 0$ であることに注意する．

$\mathbb{R}[x]$ は基底 $(x^l)_{l\in\mathbb{N}}$ を持っていて，その元 x^l は $D(x^l) = \sum_{k=0}^{l} a_k (l)_k x^{l-k}$ に写る．$a_k(l)_k \in \mathbb{R}$, $x^{l-k} \in \mathbb{R}[x]$ より $y_l := D(x^l) \in \mathbb{R}[x]$ である．D は対応 $x^l \mapsto y_l$ を線形に拡張して得られる線形写像だから，命題 3.1.3 より D は $\mathbb{R}[x]$ の自己準同型である．また y_l の次数は l だから，$\mathbb{R}[x]_{\le m}$ の基底 $(x^l)_{l=0}^{m}$ の像 y_l は $\mathbb{R}[x]_{\le m}$ に属す．よって D は $\mathbb{R}[x]_{\le m}$ の自己準同型でもある．

問題 3.1.2. $\mathbb{K}[x]$ の基底 $(x^l)_{l\in\mathbb{N}}$ について，二項定理より

$$y_l := T_h(x^l) = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} x^k, \quad \binom{l}{k} := \frac{l!}{k!(l-k)!}$$

なので $y_l \in \mathbb{K}[x]$ である．T_h は対応 $x^l \mapsto y_l$ を線形に拡張して得られる線形写像なので，命題 3.1.3 より $\mathbb{K}[x]$ の自己準同型である．また y_l の次数は l だから，$\mathbb{K}[x]_{\le n}$ の基底 $(x^l)_{l=0}^{n}$ の像 y_l は $\mathbb{R}[x]_{\le n}$ に属す．よって T_h は $\mathbb{K}[x]_{\le n}$ の自己準同型でもある．

問題 3.1.3. §3.2 の内容を用いて示そう．T_h と id は共に $\mathbb{K}[x]$ の自己準同型である．線形写像の減法の定義から，各 $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ に対して

$$(T_h - \mathrm{id})\bigl(p(x)\bigr) = T_h\bigl(p(x)\bigr) - \mathrm{id}\bigl(p(x)\bigr) = p(x+h) - p(x) = \Delta_h\bigl(p(x)\bigr)$$

となるので $\Delta_h = T_h - \mathrm{id}$．よって $\Delta_h = T_h - \mathrm{id}$ が成立し，これは $\mathbb{K}[x]$ 及び $\mathbb{K}[x]_{\le n}$ の自己準同型である．

問題 3.1.4. (i) $\Rightarrow$ (ii): 同型写像は全単射であり，特に単射である．

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $n := \dim V = \dim W$ と置き，V の基底 $(v_i)_{i=1}^{n}$ を一つ取って $w_i := f(v_i)$ とする．もし f が全射でなければ，部分空間 $\langle w_1, \ldots, w_n \rangle \subset W$ の次元は n 未満，つまり w_i 達は線形従属だから $\sum_{i=1}^{n} c_i w_i = 0$ となる $c_i \in \mathbb{K}$, $(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$ が存在する．よって $v := \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ が $f(v) = 0$ を満たすから，仮定より $v = 0$ となり，v_i 達が基底であることと矛盾する．

(iii) $\Rightarrow$ (i): $n := \dim V = \dim W$ と置き，W の基底 $(w_i)_{i=1}^{n}$ を一つ取る．f は全射だから，$f(v_i) = w_i$ を満たす $v_i \in V$ がある．この時 v_i 達は線形独立である．実際，$\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = 0$ なら $0 = f(0) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i w_i$ となり，w_i 達が基底だから $c_i = 0$ が従う．$\dim V = n$ と合わせて，v_i 達は V の基底である．もし f が単射でないと仮定すると，問題 1.4.1 より $f(v) = 0$ となる $v \in V \setminus \{0\}$ が存在するが，$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ と基底で展開すると $(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$ かつ $0 = f(v) = \sum_{i=1}^{n} c_i w_i$ となって矛盾する．よって f は単射であり，従って同型写像である．

問題 3.1.5 (略解). 三角関数の加法定理から $T_a(\sin kx) \in \langle \sin kx, \cos kx \rangle$, $T_a(\cos kx) \in \langle \sin kx, \cos kx \rangle$ となって，これから主張が従う．

問題 3.1.6. $\mathbb{C}$ の元を $z = x + iy$, $x := \mathrm{Re}\, z$, $y := \mathrm{Im}\, z$ 等と書く．

(1) $z, z' \in \mathbb{C}$ に対して $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ であり，$r \in \mathbb{R}$ なら $\overline{rz} = r\overline{z}$ なので実線形写像である．しかし $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ なら $\overline{cz} = \overline{c}\overline{z} \neq c\overline{z}$ なので複素線形写像ではない．

(2) $z, z' \in \mathbb{C}$ に対して $c(z+z') = cz + cz'$ であり, また $d \in \mathbb{C}$ に対して $c(dz) = d(cz)$ なので複素線形写像である. また $d \in \mathbb{R}$ に対して $c(dz) = d(cz)$ なので実線形写像である.

問題 3.1.7. (1) (ii) だけが非自明である. 区別の為に V でのスカラー倍を $c.v$, V' でのスカラー倍を $c.'v$ と書くと, $f\colon V \to W$ の線形性から $f(c.'v) = f(\bar{c}.v) = \bar{c}f(v)$ となる.

(2) 区別の為に V, W でのスカラー倍を $c.-$ で, V', W' でのスカラー倍を $c.'-$ で表し, また $f'\colon V' \to W'$ と書くと. 任意の $v_1, v_2 \in V$ に対して $f'(v_1+v_2) = f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2) = f'(v_1)+f'(v_2)$ が, また任意の $v \in V$ と $c \in \mathbb{C}$ に対して $f'(c.'v) = f'(\bar{c}.v) = f(\bar{c}.v) = \bar{c}.f(v) = c.'f(v)$ が成立するので, f' は複素線形写像である.

問題 3.1.8. $a_k = {}^t(a_{1k} \ \cdots \ a_{nk}) \in \mathbb{K}^n$ と置く. また $e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{K}^n$ の標準基底とする

(1) a_i 達が基底だから, $e_j = \sum_{k=1}^n a_k c_{kj}$ となる $c_{kj} \in \mathbb{K}$ が存在する. これから行列 $C \coloneqq (c_{ij})_{i,j=1}^n \in M(n;\mathbb{C})$ を定めると, 行列の積 AC の第 (i,j) 成分は $\sum_{k=1}^n a_{ik}c_{kj} = (e_j \text{ の第 } i \text{ 成分}) = \delta_{i,j}$ となるので, $AC = E_n$ である. よって $C = A^{-1}$ となり, A は正則行列である.

(2) $A^{-1}A = E_n$ から $A^{-1}a_j = e_j$ である. よって $l_{BA^{-1}}(a_i) = Be_i = b_i$ となる. f の一意性から $f = l_{BA^{-1}}$ が従う.

3.2 線形写像の空間

問題 3.2.1. 定義 1.2.1 の七条件を確認する. $f, g, h \in \mathrm{Hom}(V, W)$ と $c, d \in \mathbb{K}$ を任意に取る.

(1) $(f+g)+h = f+(g+h)$ を示す. 左辺で $v \in V$ を写すと $\big((f+g)+h\big)(v) = (f+g)(v)+h(v) = \big(f(v)+g(v)\big)+h(v) \in W$ になり, 右辺で写すと $\big(f+(g+h)\big)(v) = f(v)+(g+h)(v) = f(v)+\big(g(v)+h(v)\big) \in W$ になる. W において加法のは結合的だから $\big(f(v)+g(v)\big)+h(v) = f(v)+\big(g(v)+h(v)\big)$. よって $\big((f+g)+h\big)(v) = \big(f+(g+h)\big)(v)$ となる. これが任意の $v \in V$ に対して成立するから, 写像 $V \to W$ として $(f+g)+h = f+(g+h)$ である.

(2) $f+0 = 0+f$ を示す. W の零元を 0_W と書くと, 任意の $v \in V$ について $(f+0)(v) = f(v) + 0(v) = f(v)+0_W$ 及び $(0+f)(v) = 0(v)+f(v) = 0_W + f(v)$ となるが, 零元 0_W の性質から $f(v)+0_W = f(v) = 0_W + f(v)$. よって任意の $v \in V$ に対して $(f+0)(v) = (0+f)(v)$ となり, $f+0 = 0+f$ が従う.

(3) $f+g = g+f$ を示す. 任意の $v \in V$ について $(f+g)(v) = f(v)+g(v)$ 及び $(g+f)(v) = g(v)+f(v)$ となるが, W の和の可換性から $f(v)+g(v) = g(v)+f(v)$. よって任意の $v \in V$ に対して $(f+g)(v) = (g+f)(v)$, つまり $f+g = g+f$ が従う.

(4) $c.(f+g) = c.f + c.g$ を示す. その為には任意の $v \in V$ に対して $\big(c.(f+g)\big)(v) = (c.f+c.g)(v)$ を示せば良い. 左辺は $c.(f+g)(v) = c.\big(f(v)+g(v)\big)$, 右辺は $(c.f)(v)+(c.g)(v) = c.f(v)+c.g(v)$ となるが, W における分配律から両者は等しい.

(5) も同様.

(6) $1.f = f$ を示す. その為には任意の $v \in V$ に対して $(1.f)(v) = f(v)$ を示せば良いが, 左辺は $1.f(v)$ であり, W が線形空間であることから $1.f(v) = f(v)$ なので, 右辺と等しい.

問題 3.2.2 (略解)**.** φ は線形写像であって, かつ全単射, つまり同型写像である.

問題 3.2.3. $f, f' \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $g, g' \in \mathrm{Hom}(V, W)$ とし，また $c, c' \in \mathbb{K}$ する．

(1) $g \circ (c.f + d.f') = c.(g \circ f) + c'.(g \circ f')$ を示せば良い．その為には任意の $v \in V$ に対して $\big(g \circ (c.f + c'.f')\big)(v) = \big(c.(g \circ f) + c'.(g \circ f)')\big)(v)$ を示せば良いが，左辺から変形していくと

$$\begin{aligned}
\big(g \circ (c.f + c'.f')\big)(v) &= g\big(c.f + c'.f')(v)\big) && [\text{合成} \circ \text{の定義}]\\
&= g\big(c.f(v) + c'.f'(v)\big) && [\text{線形写像の和とスカラー倍の定義}]\\
&= c.g\big(f(v)\big) + c'.g\big(f'(v)\big) && [g\ \text{は線形写像}]\\
&= c.(g \circ f)(v) + c'.(g \circ f')(v) && [\text{合成} \circ \text{の定義}]\\
&= \big(c.(g \circ f) + c'.(g \circ f')\big)(v) && [\text{線形写像の和とスカラー倍の定義}]
\end{aligned}$$

となって成立する．

(2) 前項 (1) と同様なので省略する．

問題 3.2.4. $\mathrm{ev}(-, f) = f(-)$ なので，f が線形写像であることから $\mathrm{ev}(-, f)$ も線形写像である．$\mathrm{ev}(v, -)$ については，任意の $f, f' \mathrm{Hom}(V, W)$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ に対して $\mathrm{ev}(v, c.f + c'.f') = c.\,\mathrm{ev}(v, f) + c.'\,\mathrm{ev}(v', f')$ を示せば良いが，以下の議論から従う．

$$\begin{aligned}
\mathrm{ev}(v, c.f + c'.f') &= (c.f + c'.f')(v) && [\mathrm{ev}\ \text{の定義}]\\
&= c.f(v) + c'.f'(v). && [\text{線形写像の和とスカラー倍の定義}]
\end{aligned}$$

問題 3.2.5. 零写像 0 は確かに微分作用素である．よって主張を示すには，$D \coloneqq \sum_{k=0}^{m} a_k \frac{d^k}{dx^k}$ と $D' \coloneqq \sum_{k=0}^{n} a'_k \frac{d^k}{dx^k}$ を任意の微分作用素とし，また任意に $c, c' \in \mathbb{R}$ を取って，$c.D + c'.D'$ がまた微分作用素になることを示せば良いが，

$$c.D + c'.D' = \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (ca_k + c'a'_k) \frac{d^k}{dx^k}$$

と $ca_k + c'a_k \in \mathbb{R}$ より確かに微分作用素である．但し $a_k \coloneqq 0\ (k > m)$ 及び $a'_k \coloneqq 0\ (k > n)$ とした．

問題 3.2.6. f と g は線形写像だから $f(0_V) = g(0_V) = 0_W$ となり，従って $0_V \in U$ である．また任意の $u, u' \in U$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ に対して $f(cu + c'u') = c.f(u) + c'.f(u') = c.g(u) + c'.g(u') = g(cu + c'u')$ となる．以上より $U \subset V$ は部分空間.

また $0_W = f(0_V) = g(0_V)$ より $0_W \in X$ であり，任意の $x, x' \in X$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ に対して，$x = f(v_1) = g(v_2)$ 及び $x' = f(v'_1) = g(v'_2)$ を満たす $v_1, v_2, v'_1, v'_2 \in V$ が取れて，$cx + c'x' = f(cv_1 + c'v'_1) = g(cv_2 + c'v'_2)$ となるから $cx + c'x' \in X$．以上より $U \subset V$ は部分空間.

3.3 線形同型

問題 3.3.1. 問題の写像を $\varphi\colon W_m \to W'_m$ と名付ける．任意の $v, v' \in W_m$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ に対して

$$\varphi(cv + c'v') = \varphi(cv_1 + c'v'_1 \cdots cv_m + c'v'_m\ 0 \cdots 0) = (0 \cdots 0\ cv_1 + c'v'_1 \cdots cv_m + c'v'_m) = c\varphi(v) + c'\varphi(v')$$

が成立するので φ は線形写像である．また写像 $\psi\colon W'_m \to W_m$ を $\psi(0 \cdots 0\ v_1 \cdots v_m) \coloneqq (v_1 \cdots v_m\ 0 \cdots 0)$ で定めると，これは φ の逆写像だから，φ は全単射である．

後半の主張については，$m \geq 1$ かつ $n - m \geq 1$ なら，$v \coloneqq (1\ \overbrace{0 \cdots 0}^{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ は $\varphi(v) = (\overbrace{0 \cdots 0}^{n-m}\ 1\ \overbrace{0 \cdots 0}^{m-1}) \neq v$ に写るから $\varphi \neq \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$ である．

問題 3.3.2. 問題の写像を $\varphi\colon \mathbb{K}[x]_{\leq n} \to \mathbb{K}^{n+1}$ と名付ける．任意の $f, g = \sum_{i=0}^{n} g_i x^i \in \mathbb{K}[x]_{\leq n}$ と $c, d \in \mathbb{K}$ に対して

$$\varphi(cf + dg) = \varphi\Big(\sum_{i=0}^{n}(cf_i + dg_i)x^i\Big) = (cf_0 + dg_0 \ \cdots \ cf_n + dg_n) = c\varphi(f) + c'\varphi(g)$$

となるので φ は線形写像である．また写像 $\psi\colon \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}[x]_{\leq n}$ を $\psi(f_0 \ \cdots \ f_n) := \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$ は φ の逆写像だから, φ は全単射である．

問題 3.3.3. 基底存在定理から V の基底 B が取れて, 前半から同型写像 $\phi_B\colon \mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} V$ が存在するので, V と $\mathbb{K}^n$ は同型である．

問題 3.3.4. 答えは A が正則であること．実際, 任意の $A \in M(n; \mathbb{K})$ に対して l_A は線形写像なので, l_A が同型写像 $\Leftrightarrow$ l_A が全単射 $\Leftrightarrow$ 写像 $v \mapsto Av$ に逆写像がある $\iff$ A は正則.

問題 3.3.5. 任意の $f, f' \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}, V)$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ に対して $\varphi(cf + c'f') = (cf + c'f')(1) = c.f(1) + c'.f'(1) = c.\varphi(f) + c'.\varphi(f')$ が成立するので φ は線形写像．また $v \in V$ に対して

$$\psi(v)\colon \mathbb{K} \longrightarrow V, \quad \psi(v)(c) := c.v \ (c \in \mathbb{K})$$

とすると, 写像 $\psi(v)$ は線形写像である．実際, $a, a', c, c' \in \mathbb{K}$ に対して $\psi(v)(ca + c'a') = (ca + c'a').v = c.(a.v) + c'(a'.v) = c.\psi(v)(a) + c'.\psi(v)(a')$ が成立する．以上で写像

$$\psi\colon V \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{K}, V), \quad v \longmapsto \psi(v)$$

が得られた．あとは ψ が φ の逆写像になることを示せば主張が従う．

任意の $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}, V)$ に対して, $(\psi \circ \varphi)(f) = \psi\big(f(1)\big) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}, V)$ は各 $c \in \mathbb{K}$ を $\psi\big(f(1)\big)(c) = c.f(1) = f(c)$ に写す写像だから $(\psi \circ \varphi)(f) = f$, つまり $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(\mathbb{K}, V)}$ が成立する．また任意の $v \in V$ に対して $(\varphi \circ \psi)(v) = \varphi\big(\psi(v)\big) = \psi(v)(1) = 1.v = v$ だから $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_V$ である．よって ψ は φ の逆写像である．

問題 3.3.6. (3.3.9) の対応 $B \mapsto \phi_B$ が定める写像 $\{V \text{ の基底 }\} \to \{ \text{同型写像 } \mathbb{K}^n \to V\}$ が f の逆写像を与える．

問題 3.3.7. (1) 任意の $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right), v_2 = \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ と $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} f(c_1.v_2 + c_2.v_2) = f\Big(\left(\begin{smallmatrix} c_1x_1 + c_2x_2 \\ c_1y_1 + c_2y_2 \end{smallmatrix}\right)\Big) &= (c_1x_1 + c_2x_2) + \sqrt{-1}(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_2(x_1 + \sqrt{-1}y_1) + c_1(x_2 + \sqrt{-1}y_2) = c_1.f(v_1) + c_2.f(v_2) \end{aligned}$$

が成立するので f は線形写像である．また写像 $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ を $g(z) := \left(\begin{smallmatrix} (z+\bar{z})/2 \\ (z+\bar{z})/(2\sqrt{-1}) \end{smallmatrix}\right)$ と定義すれば g は f の逆写像になるので, f は同型写像である．$f^{-1} = g$ は既に与えた．

(2) $\lambda.v = f^{-1}\big(\lambda \cdot f(v)\big) = f^{-1}\big((a + \sqrt{-1}b)(x + \sqrt{-1}y)\big) = f^{-1}\big((ax - by) + \sqrt{-1}(bx + ay)\big) = \left(\begin{smallmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{smallmatrix}\right)$.

問題 3.3.8. 一次関係 $\sum = i \in Ic_iy_i = 0$ ($c_i \in \mathbb{K}$, 有限個を除いて 0) があったとすると, f の線形性から $0 = \sum i \in Ic_iy_i = \sum_{i \in I} c_i f(x_i) = f(\sum_{i \in I} c_i x_i)$. 仮定より f は単射だから $\sum_{i \in I} c_i x_i = 0$ で, x_i 達が一次独立であることから任意の $i \in I$ に対して $c_i = 0$.

3.4 行列表示

問題 3.4.1. n 次単位行列を E_n と書くと $\bigl(l_A(e_1)\ \cdots\ l_A(e_n)\bigr) = (Ae_1\ \cdots\ Ae_n) = A(e_1\ \cdots\ e_n) = AE_n = E_mA = (e_1\ \cdots\ e_m)A$ より行列表示は A.

問題 3.4.2. $\bigl(f(x_1)\ f(x_2)\bigr) = (x_1\ x_2)\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ より行列表示は $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$.

問題 3.4.3. (1) 任意の $X, Y \in M(2;\mathbb{K})$, $p, q \in \mathbb{K}$ に対して $T_A(pX + qY) = A(pX + qY)A^{-1} = p(AXA^{-1}) + q(AYA^{-1}) = pT_A(X) + qT_A(Y)$ なので T_A は線形写像.

(2) 以下の計算より $\frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} dA & -cA \\ -bA & aA \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad & bd & -ac & -bc \\ cd & d^2 & -c^2 & -cd \\ -ab & -b^2 & a^2 & ab \\ -bc & -bd & ac & ad \end{pmatrix}$ が行列表示.

$$\begin{aligned}
&\bigl(T_A(E_{11})\ T_A(E_{21})\ T_A(E_{12})\ T_A(E_{22})\bigr) \\
&= \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{pmatrix} ad & -ab \\ cd & -bc \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} bd & -b^2 \\ d^2 & -bd \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} -ac & -a^2 \\ -c^2 & ac \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} -bc & ad \\ -cd & ad \end{pmatrix}\right) \\
&= (E_{11}\ E_{21}\ E_{12}\ E_{22})\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad & bd & -ac & -bc \\ cd & d^2 & -c^2 & -cd \\ -ab & -b^2 & a^2 & ab \\ -bc & -bd & ac & ad \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

問題 3.4.4. (1) 前半については $V \subset M(2;\mathbb{K})$ が部分空間であることを示せば十分だが, $\operatorname{tr} O = 0$ なので $O \in V$ であり, また任意の $X, Y \in M(2;\mathbb{K})$ と $p, q \in \mathbb{K}$ に対して $\operatorname{tr}(pX + qY) = p\operatorname{tr} X + q\operatorname{tr} Y = 0$ より $pX + qY \in V$.

後半については, 問題 3.4.3 (1) より T_A が $M(2;\mathbb{K})$ の自己準同型なので, $T_A(V) \subset V$ を示せば十分だが, $X \in V$ なら $\operatorname{tr}\bigl(T_A(X)\bigr) = \operatorname{tr}(AXA^{-1}) = \operatorname{tr}(XA^{-1}A) = \operatorname{tr} X = 0$ なので $T_A(X) \in V$.

(2) B の元 $E_{12}, E_{11} - E_{22}, E_{21}$ の tr は 0 だから, どれも V の元である. 線形関係式 $pE_{12} + q(E_{11} - E_{22}) + rE_{21} = O$ を仮定すると $\left(\begin{smallmatrix} q & p \\ r & -q \end{smallmatrix}\right) = O$ だから $p = q = r = 0$ となって, B は線形独立である. また V の任意の元 $X = \left(\begin{smallmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{smallmatrix}\right)$ は $\operatorname{tr}(X) = x_{11} + x_{12} = 0$ より $X = \left(\begin{smallmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & -x_{12} \end{smallmatrix}\right) = x_{12}E_{12} + x_{11}(E_{11} - E_{22}) + x_{21}E_{21}$ と書けるので, B は V を生成する.

(3) 以下の計算より行列表示は $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a^2 & -2ab & -b^2 \\ -ac & ad+bc & bd \\ -c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
&\bigl(T_A(E_{12})\ T_A(E_{11} - E_{22})\ T_A(E_{21})\bigr) \\
&= \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{pmatrix} -ac & a^2 \\ -c^2 & ac \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} ad+bc & -2ab \\ 2cd & -ad-bc \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} bd & -b^2 \\ d^2 & -bd \end{pmatrix}\right) \\
&= (E_{12}\ E_{11} - E_{22}\ E_{21})\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a^2 & -2ab & -b^2 \\ -ac & ad+bc & bd \\ -c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

問題 3.4.5. e_1, e_2 を $\mathbb{C}^2$ の標準基底とすると $V = \{X \in M(2;\mathbb{C}) \mid \exists c \in \mathbb{C}, Xe_1 = ce_1\}$ である.

(1) $Oe_1 = 0e_1$ より $O \in V$. また任意の $X, Y \in V$ と $p, q \in \mathbb{C}$ に対し, $Xe_1 = ce_1$, $Ye_1 = de_1$ となる $c, d \in \mathbb{C}$ があるから $(pX + qY)e_1 = (pc + qd)e_1$ となって $pX + qY \in V$.

(2) $E_{11}e_1 = e_1$, $E_{12}e_1 = E_{22}e_1 = 0e_1$ より, これらは V の元. 線形関係式 $aE_{11} + bE_{12} + cE_{22} = O$ があると $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) = O$ だから $a = b = c = 0$ となるので, これらは線形独立. また V の任意の元 $X = \left(\begin{smallmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{smallmatrix}\right)$ は $Xe_1 = x_{11}e_1 + x_{21}e_2$ より $x_{21} = 0$ となるので $X = x_{11}E_{11} + x_{12}E_{12} + x_{22}E_{22}$ と書けて, これらが V を生成することも分かる.

(3) まず f が写像 $V \to V$ であることを示す．任意の $X \in V$ に対して，$Xe_1 = ce_1$ となる $c \in \mathbb{C}$ が取れるから，$f(X)e_1 = AXBe_1 = AXe_1 = A(ce_1) = 2ce_1$ となって $f(X) \in V$ である．あとは f が線形写像であることを示せば良い．任意の $X, Y \in V$ と $p, q \in \mathbb{C}$ に対して $f(pX + qY) = A(pX + qY)B = p(AXB) + q(AYB) = pf(X) + qf(Y)$ となり，$f(X), f(Y) \in V$ と $V \subset M(2;\mathbb{C})$ が部分空間であることから $pf(X) + qf(Y) \in V$，つまり $f(pX + qY) \in V$ が従う．

(4) 以下の計算より $\left(\begin{smallmatrix} 2&0&0\\ 2&2&3\\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$ が行列表示．

$$\begin{aligned}
&\bigl(f(E_{11})\ f(E_{12})\ f(E_{22})\bigr)\\
&= \left(\begin{pmatrix} 2 & 2\\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2\\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3\\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\\
&= (E_{11}\ E_{12}\ E_{22}) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

問題 3.4.6. $\mathbb{K}^n$ の標準基底を $e_1, \ldots, e_n$ と書くと，φ の標準基底が B であることから $\bigl(\varphi(e_1)\ \cdots\ \varphi(e_l)\bigr) = (e_1\ \cdots\ e_n)B = B$．よって $u = \sum_{i=1}^{l} u_i e_i \in \mathbb{K}^l$ に対して $\varphi(u) = \sum_{i=1}^{l} \varphi(e_i)u_i = Bu$．すると $\varphi^{-1}(K_A) = \{u \in \mathbb{K}^l \mid \varphi(u) \in K_A\} = \{u \in \mathbb{K}^l \mid A\varphi(u) = 0\} = \{u \in \mathbb{K}^l \mid ABu = 0\}$ となる．

問題 3.4.7. f_{ij} は E_{ij} による左掛算写像だから，$k = 1, \ldots, n$ について $f_{ij}(e_k) = E_{ij}e_k = \delta_{j,k}e_i$ となることに注意する．

(1) 任意の $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ に対して，$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} e_i c_{ij}$ で $c_{ij} \in \mathbb{K}$ を定めると $f = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}E_{ij}$ と書ける．よって f_{ij} 達は $\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ を生成する．$\dim \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) = \dim M(m, n; \mathbb{K}) = mn$ で，f_{ij} 達も mn 個あるから，これらは線形独立で基底になる．

(2) 冒頭の注意より $f_{ij}(e_k) = \delta_{j,k}e_i$.

問題 3.4.8. $A = (a_{ij}) \in M(m, n; \mathbb{K})$ と成分を置く．行列表示の定義から $f(V') \subset f(W') \iff \forall j = 1, \ldots, l,\ f(v_j) = \sum_{i=1}^{k} w_i a_{ij}\ (a_{ij} \in \mathbb{K})$.

(1) $\iff a_{ij} = 0$ for $i > k$ and $j \le l \iff A_{21} = O$.

(2) 冒頭の計算から $\bigl(f|_V(e_1)\ \cdots\ f|_V(e_l)\bigr) = (e_1\ \cdots\ e_k)A_{11}$.

問題 3.4.9. $A = (a_{ij})$ と成分を置くと $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} w_i a_{ij}$ であり，また $f_{\mathbb{C}} = f \oplus f$ だから $f_{\mathbb{C}}(v_i, 0) = \bigl(f(v_i), f(0)\bigr) = (\sum_{i=1}^{m} w_i a_{ij}, 0) = \sum_{i=1}^{m} (w_i, 0)a_{ij}$ となる，従って $f_{\mathbb{C}}(B_{V_{\mathbb{C}}})) = B_{W_{\mathbb{C}}}A$ となって，確かに $f_{\mathbb{C}}$ の行列表示は A である．

問題 3.4.10. $c \in \mathbb{C}$ の実部と虚部を $c = a + b\sqrt{-1}$, $a, b \in \mathbb{R}$ と書くと $\bigl(l_c(1), l_c(\sqrt{-1})\bigr) = (a + b\sqrt{-1}, -b + a\sqrt{-1}) = (1, \sqrt{-1})\left(\begin{smallmatrix} a & -b\\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ となるので，行列表示は $\left(\begin{smallmatrix} a & -b\\ b & a \end{smallmatrix}\right)$.

問題 3.4.11. 仮定と問題 3.4.1 から f は左 A 倍写像，つまり $f = l_A$ である．$v = (v_i)_{i=1}^{n} \in \mathbb{C}^n$ に対して $\overline{v} \coloneqq (\overline{v}_i)_{i=1}^{n}$ と書き，同様に行列 A の各成分の複素共役を取って得られる行列を $\overline{A}$ と書くと，任意の $v, w \in \mathbb{C}^n$ と $c, d \in \mathbb{C}$ に対して $g(cv + dw) = (\varphi_m \circ f)(\overline{cv + dw}) = \varphi_m\bigl(A(\overline{cv} + \overline{dw})\bigr) = \varphi_m(\overline{c}A\overline{v} + \overline{d}A\overline{w}) = \overline{\overline{c}A\overline{v} + \overline{d}A\overline{w}} = c\overline{A}v + d\overline{A}w$ となるので，$g(cv + dw) = cg(v) + dg(w)$，つまり g は $\mathbb{C}$ 上の線形写像である．また $g(v) = \overline{A}v$ なので，再び問題 3.4.1 から g の行列表示は $\overline{A}$ である．

問題 3.4.12. $j = 0, \dots, n$ に対して $D(x^j) = jx^{j-1}$ なので, 行列表示は $(j\delta_{i,j-1})_{i,j=0}^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & n \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$.

問題 3.4.13. $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ に対して二項係数を $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-i)!}$ と書く. 但し $0! := 1$ と約束する.

(1) 二項定理より $j = 0, \dots, n$ に対して $T_a(x^j) = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} a^{n-i} x^i$ となるので, 行列表示は $\bigl(\binom{j}{i} a^{n-i}\bigr)_{i,j=0}^n$.

(2) $j = 0, \dots, n$ に対して $T_1\bigl((x)_j\bigr) = (x+1)x \cdots \bigl(x-(j-2)\bigr) = (x-(j-1)+j) \cdot (x)_{j-1} = (x)_j + j(x)_{j-1}$ となるので, 行列表示は $(\delta_{i,j} + j\delta_{i,j-1})_{i,j=0}^n$.

3.5 線形写像の空間

問題 3.5.1. 正則行列 P による左掛算写像 $l_P \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ の, 標準基底 B_{std} に関する行列表示は P だから, 命題 3.4.1 より $l_P(e_i) = Pe_i$ 達は $\mathbb{K}^n$ の基底 B' をなす. そして, B_{std} から B' への基底変換行列は, その定義 3.5.2 から P である.

問題 3.5.2. ベクトル u, v, w が基底であることを示すには, それらを並べてできる行列を列基本変形して, 階数が 3 であることを示せば良い.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので, 確かに階数 3 である.

次に A' の式 (3.5.1) は以下の計算から従う.

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

また $l_A(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2u$, $l_A(v) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = v$, $l_A(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.w$ なので, 定義 3.4.2 から直接, $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ が l_A の B に関する行列表示であることも分かる.

問題 3.5.3. (1) $x_1, \dots, x_4$ を並べてできる行列を複素数係数で列基本変形すると.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1+i & 2 & 1-i \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1-i & 2 & 1+i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2i & 1 & 2i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので, この行列の階数は 4 であり, $x_1, \dots, x_4$ は $\mathbb{C}^4$ の基底である.

(2) $l_A(x_1) = Ax_1 = x_1$, $l_A(x_2) = ix_2$, $l_A(x_3) = -x_3$, $l_A(x_4) = -ix_4$ より行列表示は

$$\bigl(l_A(x_1)\ l_A(x_2)\ l_A(x_3)\ l_A(x_4)\bigr) = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & i & & \\ & & -1 & \\ & & & -i \end{pmatrix}.$$

(3) 任意の $w = {}^t(w_1 \cdots w_4), w' = {}^t(w'_1 \cdots w'_4) \in W$ と $c, c' \in \mathbb{C}$ に対して $u = {}^t(u_1\ u_2\ u_3\ u_4) := cw + c'w'$ は $u_1 + \cdots + u_4 = c(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + c'(w'_1 + w'_2 + w'_3 + w'_4) = c \cdot 0 + c' \cdot 0 = 0$ を満たすので $u \in W$ である. よって $W \subset \mathbb{C}^4$ は部分空間.

(4) $y_1, y_2, y_3 \in W$ は容易に示せる. W の任意の元は $w = {}^t(a\ b\ c\ {-a-b-c}) = ay_1 + (a+b)y_2 + (a+b+c)y_3$ $(a, b, c \in \mathbb{C})$ と y_1, y_2, y_3 の一次結合で一意に表せるので, y_1, y_2, y_3 は W の基底である.

(5) 基底 y_1, y_2, y_3 の像 $l_A(y_1), l_A(y_2), l_A(y_3)$ が W に含まれていることを示せば, 任意の $w \in W$ について $w = c_1y_1 + c_2 + y_3$ と表せば $l_A(w) = c_1l_A(y_1) + c_2l_A(y_2) + c_3l_A(y_3)$ となって, W は部分空

間だから $l_A(w) \in W$, つまり $l_A(W) \subset W$ が従う．しかし直接計算で $l_A(y_1) = y_2$, $l_A(y_2) = y_3$, $l_A(y_3) = -y_1 - y_2 - y_3$ となるので, 確かに W に含まれている．またこの計算から行列表示は

$$\bigl(l_A(y_1)\ l_A(y_2)\ l_A(y_3)\bigr) = (y_1\ y_2\ y_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(6) $x_2, x_3, x_4 \in W$ が容易に示せる．$x_1, \dots, x_4$ が $\mathbb{C}^4$ の基底だから, 特に一次独立で, その部分集合 x_2, x_3, x_4 も一次独立である. (4) より $\dim W = 3$ だから, x_2, x_3, x_4 は W の基底である.
また $x_2 = y_1 + (1-i)y_2 - iy_3$, $x_3 = y_1 + y_3$, $x_4 = y_1 + (1+i)y_2 + iy_3$ なので, 基底変換行列 P は $(x_2\ x_3\ x_4) = (y_1\ y_2\ y_3)P$ より $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-i & 0 & 1+i \\ -i & 1 & i \end{pmatrix}$ である.

(7) $l_A(x_2) = ix_2$, $l_A(x_3) = -x_3$, $l_A(x_4) = -ix_4$ より

$$\bigl(l_A(x_2)\ l_A(x_3)\ l_A(x_4)\bigr) = (x_2\ x_3\ x_4)C, \quad C = \begin{pmatrix} i & & \\ & -1 & \\ & & -i \end{pmatrix}$$

である．一方で

$$P^{-1}BP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-i & 1+i & i-1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1+i & 1-i & -1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-i & 0 & 1+i \\ -i & 1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-i & i-1 & -1-i \\ -2 & 2 & -2 \\ 1-i & -1-i & i-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-i & 0 & 1+i \\ -i & 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & & \\ & -1 & \\ & & -i \end{pmatrix}$$

となり, 確かに C と一致する.

問題 3.5.4. (1) 恒等数列 $0 = (0)_{n\in\mathbb{N}}$ は漸化式 $0 = 0 + 0 - 0$ を満たすので W の元である．また任意に $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W$ と $p, q \in \mathbb{R}$ を取ると, $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} := pa + qb \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は $c_n = pa_n + qb_n$ より $c_{n+3} = pa_{n+3} + qb_{n+3} = p(a_{n+2} + a_{n+1} - a_n) + q(b_{n+3} + b_{n+1} - b_n) = (pa_{n+2} + qb_{n+2}) + (pa_{n+1} + qb_{n+1}) - (pa_n + qb_n) = c_{n+2} + c_{n+1} - c_n$ を満たすので $c \in W$ である. よって $W \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は部分空間であり, 特に $\mathbb{R}$ 上の線形空間である.

(2) 考えている漸化式は 3 階だから初期値は a_0, a_1, a_3 の三つで, 従って解空間 W の次元も 3 になる. $x := (1)_n$, $y := (n)_n$, $z := \bigl((-1)^n\bigr)_n$ とすると $x, y, z \in W$ は簡単に示せるから, 後はこれらが線形独立であることを示せば十分. しかし, x は初期値 $(x_0, x_1, x_2) = (1, 1, 1)$, y は初期値 $(y_0, y_1, y_2) = (0, 1, 2)$, z は初期値 $(z_0, z_1, z_2) = (1, -1, 1)$ であり, この 3 つを $\mathbb{R}^3$ の元とみなす一次独立である．よって x, y, z も一次独立であり, W の基底である.

(3) $a = (a_n)_n \in W$ に対して $(T_W a)_{n+3} = a_{n+4} = a_{n+3} + a_{n+2} - a_{n+1} = (T_W a)_{n+2} + (T_W a)_{n+1} - (T_W a)_n$ より $T_W a \in W$. よって T_W は $W \to W$ という写像である．また任意の $a, b \in W$ と $p, q \in \mathbb{R}$ に対して $T_W(pa + qb) = pa_{n+1} + qb_{n+1} = pT_W(a) + qT_W(b)$ なので T_W は線形写像である．よって $T_W \in \mathrm{End}(W)$.

(4) $x := (1)_n$, $y := (n)_n$, $z := \bigl((-1)^n\bigr)_n$ と書くと $T(x) = x$, $T(y) = (n+1)_n = (n)_n + (1)_n = x + y$, $T(z) = \bigl((-1)^{n+1}\bigr)_n = -\bigl((-1)^n\bigr)_n = -z$ なので, 行列表示は

$$\bigl(T(x)\ T(y)\ T(z)\bigr) = (x\ y\ z)A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

(5) (2) で説明した.

(6) 前半は同型写像による基底の像が基底であること (命題 3.3.8) から従う．後半については, $b_0 = (1, 0, 0, -1, \dots)$ から $T_W(b_0) = (0, 0, -1, -1. \dots) = \bigl(-(b_2)_{n+1}\bigr)$, $\phi\bigl(T_W(b_0)\bigr) = {}^t(0\ 0\ \ -1) = -b_3$ となり, 同様に $\phi\bigl(T_W(b_1)\bigr) = \phi(1, 0, 1, \dots) = {}^t(1\ 0\ 1) = b_1 + b_3$, $\phi\bigl(T_W(b_2)\bigr) = \phi(0, 1, 1, \dots) = {}^t(0\ 1\ 1) = b_2 + b_3$ となるので, 行列表示は

$$\bigl(T_W(b_0)\ T_W(b_1)\ T_W(b_2)\bigr) = (b_0\ b_1\ b_2)B, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(7) $\phi(x) = {}^t(1\ 1\ 1) = e_1 + e_2 + e_3$, $\phi(y) = {}^t(0\ 1\ 2) = e_2 + 2e_3$, $\phi(z) = {}^t(1\ {-1}\ 1) = e_1 - e_2 + e_3$ より $\bigl(\phi(x)\ \phi(y)\ \phi(z)\bigr) = (e_1\ e_2\ e_3)P'$, $P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. すると $(x\ y\ z) = (b_0\ b_1\ b_2)P$ と $b_i = \phi^{-1}(e_i)$ から, $P = P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(8) $P^{-1}BP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A$.

問題 3.5.5. $\dim V = n$ より同型写像 $\psi_V\colon V \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n$ が存在し,$\dim W = m$ より同型写像 $\psi_W\colon W \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^m$ が存在する. $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ に対して合成 $\psi_W^{-1} \circ f \circ \psi_V\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ は線形写像, つまり $\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ の元だから, 命題 3.4.7 の同型写像 $\varphi\colon M(m, n; \mathbb{K}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ を用いて $\varphi^{-1}(\psi_W^{-1} \circ f \circ \psi_V\colon \mathbb{K}^n) \circ \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ が得られる. この対応

$$\mathrm{Hom}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K}), \quad f \longmapsto \varphi^{-1}(\psi_W^{-1} \circ f \circ \psi_V)$$

が同型を与える.

4　直積と直和

4.1　線形空間の直積と直和

問題 4.1.1. 写像 $a \in \mathbb{K}^I$ に対して数列 $\bigl(a(i)\bigr)_{i\in I}$ を対応させる写像が φ の逆写像になり，特に φ は全単射．$a \coloneqq \varphi\bigl((a_i)_{i\in I}$, $b \coloneqq \varphi\bigl((a_i)_{i\in I}$ と置くと，$a + b \in \mathbb{K}^I$ は $(a+b)(i) = a(i) + b(i) = a_i + b_i$ だから，(4.1.1) の前半は $\varphi\bigl((a_i)_{i\in I} + (b_i)_{i\in I}\bigr) = \varphi\bigl((a_i + b_i)_{i\in I}\bigr) = a + b = \varphi\bigl((a_i)_{i\in I}\bigr) + \varphi\bigl((b_i)_{i\in I}\bigr)$ となって成立する．後半も同様．

問題 4.1.2. 点列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ に対して形式的冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ を対応させる写像が ψ の逆写像になり，特に ψ は全単射．$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ の二元 $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$, $g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$ に対して $f + g = \sum_{n=0}^{\infty}(f_n + g_n)x^n$ だから，$\psi(f+g) = \psi(\sum_{n=0}^{\infty}(f_n+g_n)x^n) = f + g = \psi(f) + \psi(g)$．同様に $c \in \mathbb{K}$ について $\psi(cf) = c\psi(f)$ が言えるので，ψ は線形写像．

問題 4.1.3. $\mathbb{K}[x] \subset \mathbb{K}[\![X]\!]$ が部分空間であることを示す．$\mathbb{K}[\![X]\!]$ の零元は $0 \in \mathbb{K}$ を形式的冪級数とみなしたもので，それは多項式だから $\mathbb{K}[x]$ に含まれる．また $\mathbb{K}[\![x]\!]$ の和とスカラー倍は、$\mathbb{K}[x]$ に制限すれば多項式の和とスカラー倍になるから，その結果は多項式，つまり $\mathbb{K}[x]$ に含まれる．よって $\mathbb{K}[x]$ は $\mathbb{K}[\![x]\!]$ の和とスカラー倍で閉じている．以上より $\mathbb{K}[x] \subset \mathbb{K}[\![x]\!]$ は部分空間である．

問題 4.1.4 (略証)**.** 写像 $\phi\colon \mathbb{K}^m \oplus \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^{m+n}$ を $\phi\bigl((a_i)_{i=1}^m, (b_i)_{i=1}^n\bigr) \coloneqq (c_i)_{i=1}^{m+n}$, $c_i \coloneqq a_i$ $(i \le m)$, $c_i \coloneqq b_{i-m}$ $(m+1 \le i \le n)$ と定義すれば，これが線形写像であることが示せる．また $\psi\colon \mathbb{K}^{m+n} \to \mathbb{K}^m \oplus \mathbb{K}^n$ を $\psi\bigl((c_i)_{i=1}^{m+n}\bigr) \coloneqq \bigl((c_i)_{i=1}^m, (c_{i+m})_{i=1}^n\bigr)$ と定めれば，これは ϕ の逆写像だから，ϕ は全単射である．以上より ϕ は同型写像である．

問題 4.1.5. 写像 $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $\phi(z)z \coloneqq (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ が実線形写像であることは，任意の $z, w \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}\phi(z+w) &= \bigl(\operatorname{Re}(z+w), \operatorname{Im}(z+w)\bigr) = \bigl(\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w), \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w)\bigr)\\ &= \bigl(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)\bigr) + \bigl(\operatorname{Re}(w), \operatorname{Im}(w)\bigr) = \phi(z) + \phi(w)\end{aligned}$$

となること，及び任意の $z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ と $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\phi(az) = \phi\bigl(ax + \sqrt{-1}(ay)\bigr) = (ax, ay) = a(x, y) = a\phi(z)$$

となることから従う．また $\psi\colon \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\psi(x, y) \coloneqq x + \sqrt{-1}y$ が ϕ の逆写像なので，ϕ は全単射である．以上より ϕ は同型写像である．

問題 4.1.6 (略証)**.**　(1) 写像 $\phi\colon \mathbb{K}[\![x]\!] \to \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ を $\phi(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n x^n) \coloneqq (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ で定義すると，これは写像 $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n x^n$ を逆写像とする全単射である．また ϕ が線形写像であることが簡単に示せる．従って ϕ は同型写像．

(2) 前項の $\phi\colon \mathbb{K}[\![x]\!] \to \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ を部分空間 $V' \coloneqq \mathbb{K}[x^{-1}, x]\!]$ に制限すると

$$\phi' \coloneqq \phi|_{V'}\colon \sum_{n=-p}^{\infty} f_n x^n \longmapsto (f_n)_{n=-p}^{\infty} = \bigl((f_n)_{n=-p}^{-1}, (f_n)_{n\in\mathbb{N}}\bigr) \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{<0}} \oplus \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$

となる．よって写像 $\phi'\colon V' \to \mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{<0}} \oplus \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ が得られる．ϕ が線形写像であることから ϕ' が線形写像であることが直ぐに従う．また ϕ' の逆写像も簡単に作れるので，ϕ' が全単射であることも従う．よって ϕ' は同型写像である．包含写像を $\iota\colon V' \to \mathbb{K}[\![x^{\pm 1}]\!]$ 及び $\jmath\colon \mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{<0}} \oplus \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ と書くと，任意の $f \in V'$ に対して $(\jmath \circ \phi')(f) = (\jmath \circ \phi \circ \iota)(f) = \phi(f) \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ だから，図式

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\phi'"'] & \mathbb{K}[\![x^{\pm 1}]\!] \arrow[d, "\phi"] \\ \mathbb{K}^{\mathbb{Z}_{<0}} \oplus \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \arrow[r, "\jmath"'] & \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} \end{tikzcd}$$

は可換である．ϕ', ϕ は同型だから $\xrightarrow{\sim}$ と書き，$\iota, \jmath$ は単射準同型だから $\hookrightarrow$ と書けば，主張の図式右端の正方形が得られる．

問題 4.1.7. 線形空間の定義 1.2.1 の内，スカラー倍が関わる (5)–(7) だけ確認すれば十分．

(5) $u = (v, w), u' = (v', w') \in V \oplus V$ と $c = a + b\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ を任意に取ると

$$\begin{aligned} c.(u+u') &= c.(v+v', w+w') = \big(a(v+v') - b(w+w'), b(v+v') + a(w+w')\big) \\ &= (av - bw, bv + aw) + (av' - bw', bv' + aw') = c.u + c.u'. \end{aligned}$$

(6) $u = (v, w) \in V \oplus V$ と $c = a + b\sqrt{-1}, c' = a' + b'\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ を任意に取ると

$$\begin{aligned} (c+c').u &= \big((a+a') + (b+b')\sqrt{-1}\big).u = \big((a+a')v - (b+b')w,' b+b')v + (a+a')w\big) \\ &= (av - bw, bv + aw) + (a'v - b'w, b'v + a'w) = c.u + c'.u, \\ (cc').u &= \big((aa' - bb') + (ab' + a'b)\sqrt{-1}\big).u \\ &= \big((aa' - bb')v - (ab' + a'b)w, (ab' + a'b)v + (aa' - bb')w\big) \\ &= \big(a(a'v - b'w) - b(b'v + a'w), b(a'v - b'w) + a(b'v + a'w)\big) \\ &= (a + \sqrt{-1}b).(a'v - b'w, b'v + a'w) = c.(c'.u). \end{aligned}$$

(7) $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ と任意の $(v, w) \in V \oplus V$ について $1.(v, w) = (1v - 0w, 0v + 1w) = (v, w)$.

問題 4.1.8. $V_{\mathbb{C}}$ の任意の元 z に対して $x, y \in V$ が一意に存在しては $z = (x, y)$ となる．また $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ($i \in I$, 有限個の i を除いて $a_i = b_i = 0$) が一意に存在して $x = \sum_{i \in I} a_i v_i$, $y = \sum_{i \in I} b_i v_i$ と書ける．従って $z = x + y = \sum_{i \in I}(a_i v_i, b_i v_i) = \sum_{i \in I}(a_i + \sqrt{-1}b_i).(v_i, 0)$ と一意に書ける．

問題 4.1.9 (略証)**.** 以下の写像 ϕ が求めるものである．$v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, $v_3 \in V_3$ を任意の元とする．

(1) $\phi\colon V_1 \oplus V_2 \to V_2 \oplus V_1$, $(v_1, v_2) \mapsto (v_2, v_1)$.

(2) $\phi\colon (V_1 \oplus V_2) \oplus V_3 \to V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$, $\big((v_1, v_2), v_3\big) \mapsto (v_1, v_2, v_3)$.

(3) $\phi\colon (V_1 \oplus V_2) \oplus V_3 \to V_1 \oplus (V_2 \oplus V_3)$, $\big((v_1, v_2), v_3\big) \mapsto \big(v_1, (v_2, v_3)\big)$.

問題 4.1.10. V の複素化 $V_{\mathbb{C}} = V \oplus V$ の元を (v, v') 等と表す．$(v_1, v_1'), (v_2, v_2') \in V_{\mathbb{C}}$ に対して

$$\begin{aligned} (f \oplus f)\big((v_1, v_1') + (v_2, v_2')\big) &= (f \oplus f)(v_1 + v_1', v_2 + v_2') = \big(f(v_1 + v_1'), f(v_2 + v_2')\big) \\ &= \big(f(v_1) + f(v_1'), f(v_2) + f(v_2')\big) = \big(f(v_1), f(v_1')\big) + \big(f(v_2), f(v_2')\big) \\ &= (f \oplus f)(v_1, v_1') + (f \oplus f)(v_2, v_2') \end{aligned}$$

が成立し，また $(v, v') \in V_{\mathbb{C}}$ と $c = a + bi \in \mathbb{C}$ に対して

$$(f \oplus f)\big(c.(v, v')\big) = (f \oplus f)(av - bv', bv + av') = \big(f(av - bv'), f(bv + av')\big)$$

$$= \bigl(af(v) - bf(v'), bf(v) + af(v')\bigr) = c.\bigl(f(v), f(v')\bigr) = c.(f \oplus f)(v, v')$$

問題 4.1.11. f_1, f_2 の逆写像をそれぞれ f_1^{-1}, f_2^{-1} とすると，$f_1^{-1} \times f_2^{-1}$ が $f_1 \times f_2$ の逆写像になるから，$f_1 \times f_2$ は全単射で，従って同型写像である．

問題 4.1.12. (1) まず写像 $\varphi\colon \mathrm{Hom}(U, V \oplus W) \to \mathrm{Hom}(U, V)$ を作る．直和空間 $V \oplus W$ は直積空間 $V \times W$ と同一であることに注意して，射影を $\pi_V : V \oplus W \twoheadrightarrow V$, $\pi_W : V \oplus W \twoheadrightarrow W$ と書く．各元 $f \in \mathrm{Hom}(U, V \oplus W)$ に対して $\pi_V \circ f \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $\pi_W \circ f \in \mathrm{Hom}(U, W)$ となるから，写像 φ を

$$\varphi\colon \mathrm{Hom}(U, V \oplus W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U, V) \oplus \mathrm{Hom}(U, W), \quad f \longmapsto (\pi_V \circ f, \pi_W \circ f)$$

で定義できる．但し二つの線形写像 $g\colon U \to V$ と $h\colon U \to W$ に対して $(g, h)\colon U \to V \oplus W$ を $(g, h)(u) := \bigl(g(u), h(u)\bigr)$ で定めた．φ が同型写像であることを示せば主張が従う．
まず φ が線形写像であることを示そう．任意の $f, f' \in \mathrm{Hom}(U, V \oplus W)$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ に対して $\varphi(c.f + c'.f') = c.\varphi(f) + c'.\varphi(f')$ を示せば良いが，問題 3.2.3 から $\pi_V \circ -$ と $\pi_W \circ -$ は線形写像なので

$$\begin{aligned}
\varphi(c.f + c'.f') &= \bigl(\pi_V \circ (c.f + c'.f'), \pi_W \circ (c.f + c'.f')\bigr) && [\varphi \text{ の定義}] \\
&= \bigl(c.(\pi_V \circ f) + c'.(\pi_V \circ f'), c.(\pi_W \circ f) + c'.(\pi_W \circ f')\bigr) && [\pi \circ - \text{ は線形写像}] \\
&= c.(\pi_V \circ f, \pi_W \circ f) + c'.(\pi_V \circ f', \pi_W \circ f') && [\text{直和空間の定義}] \\
&= c.\varphi(f) + c'.\varphi(f'). && [\varphi \text{ の定義}]
\end{aligned}$$

最後に φ が全単射であることを示そう．逆写像を与えれば良い．$\iota_V : V \hookrightarrow V \oplus W$ と $\iota_W : W \hookrightarrow V \oplus W$ を包含写像として，$(g, h) \in \mathrm{Hom}(U, V) \oplus \mathrm{Hom}(U, W)$ に対して $\psi(g, h) := \iota_V \circ g + \iota_W \circ g$ と定めると，ここに登場する写像は全て線形写像だから $\psi(g, h) \in \mathrm{Hom}(U, V \oplus W)$ である．よって写像

$$\psi\colon \mathrm{Hom}(U, V) \oplus \mathrm{Hom}(U, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U, V \oplus W), \quad (g, h) \longmapsto \iota_V \circ g + \iota_W \circ g$$

が定まる．$\pi_V \circ \iota_V = \mathrm{id}_V$, $\pi_W \circ \iota_W = \mathrm{id}_W$ 及び $\iota_V \circ \pi_V + \iota_W \circ \mathrm{id}_W = \mathrm{id}_{V \oplus W}$ から，ψ が φ の逆写像であることが示せる．

(2) 前項と同様なので概略だけ示す．

$$\begin{aligned}
&\varphi\colon \mathrm{Hom}(U \oplus V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U, W) \oplus \mathrm{Hom}(V, W), && \varphi(f) := (\iota_U \circ f, \iota_V \circ f), \\
&\psi\colon \mathrm{Hom}(U, W) \oplus \mathrm{Hom}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U \oplus V, W), && \psi(g, h) := g \circ \pi_U + h \circ \pi_V
\end{aligned}$$

は線形写像であり，互いに逆写像になる．

4.2 部分空間の直和

問題 4.2.1. (i) $\Rightarrow$ (ii): $w \in (W_i \cap \sum_{j \in I \setminus \{i\}} W_j) \setminus \{0\}$ が存在すれば，有限和で $w = \sum_{j \in I \setminus \{i\}} w_j$ と書けて，一方で $w \in W_i$ だから，$w \in \sum_{i \in I} W_i$ が二通りの方法で書けている．

(ii) $\Rightarrow$ (i): $\sum_{i \in I} w_i = \sum_{i \in I} w_i'$ と二通りの表し方があると仮定すると，ある i が存在して $w_i \neq w_i'$．この i について $w_i - w_i' = \sum_{j \in I \setminus \{i\}} (w_i' - w_j)$ は $(W_i \cap \sum_{j \in I \setminus \{i\}} W_j) \setminus \{0\}$ の元である．

次に (i), (ii) を仮定する．任意の元 $(w_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} W_i$ について，$w_i \neq 0$ なる $i \in I$ は有限個しかないから $\sum_{i \in I} w_i$ は有限和で，従って写像 $\phi\colon (w_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} w_i$ が確かに定まることに注意する．ϕ の線形性

は容易に示せるので, ϕ が全単射であることを示せば証明が終了する. 仮定より, 任意の元 $w \in \sum_{i\in I} W_i$ に対して $(w_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} W_i$ が一意に存在して $w = \sum_{i\in I} w_i$. よって対応 $w \mapsto (w_i)_{i\in I}$ によって写像 $\psi\colon \sum_{i\in I} W_i \to \bigoplus_{i\in I} W_i$ が定まる. この ψ が ϕ の逆写像になることが容易に示せる. 以上より ϕ は全単射で, 従って同型写像である.

問題 4.2.2. $S := S(n;\mathbb{K})$, $A := A(n;\mathbb{K})$, $U := U(n;\mathbb{K})$, $L := L(n;\mathbb{K})$, $D := D(n;\mathbb{K})$ と略記する. また $X = (x_{ij})_{i,j} \in M(n;\mathbb{K})$ とする.

(1) 前半は, $X \in S \cap U \iff x_{ij} = x_{ji}$ かつ $i > j$ なら $x_{ij} = 0 \iff i \neq j$ なら $x_{ij} = 0 \iff X \in D$. 後半は, $X = (x_{ij})_{i,j} \in M(n;\mathbb{K})$ に対し

$$Y = (y_{ij})_{i,j}, \quad y_{ij} := \begin{cases} x_{ij} & (i \geq j) \\ x_{ji} & (i < j) \end{cases}, \quad Z := X - Y$$

と定めれば $Y \in S$, $Z \in U$ かつ $X = Y + Z$. よって $M(n;\mathbb{K}) = S + U$.

(2) $X = (x_{ij})_{i,j} \in M(n;\mathbb{K})$ に対し

$$Y = (y_{ij})_{i,j}, \quad y_{ij} := \begin{cases} x_{ij} & (i \geq j) \\ -x_{ji} & (i < j) \end{cases}, \quad Z := X - Y$$

と定めれば $Y \in A$, $Z \in U$ かつ $X = Y + Z$ となるので, $M(n;\mathbb{K}) = A + U$ が成立する. また $X \in A \cap U \iff x_{ij} = -x_{ji}$ かつ $i > j$ なら $x_{ij} = 0 \iff X = O$ より $A \cap U = 0$. よって $M(n;\mathbb{K}) = A \oplus U$.

(3) $X \in M(n;\mathbb{K})$ に対し $Y := \frac{1}{2}(X + {}^t\!X)$, $Z := \frac{1}{2}(X - {}^t\!X)$ とすれば $Y \in S$, $Y \in Z$, $X = Y + Z$ なので $M(n;\mathbb{K}) = A + S$. また $A \cap S = 0$ なので $M(n;\mathbb{K}) = A \oplus S$.

問題 4.2.3 (略証)**.** (1) は略. (2) は $\mathfrak{n}^+ \cap (\mathfrak{h} + \mathfrak{n}^-) = \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{n}^- + \mathfrak{n}^+) = \mathfrak{n}^- \cap (\mathfrak{n}^+ + \mathfrak{h}) = 0$ と $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}^+ + \mathfrak{n} + \mathfrak{h}^-$ を示せば良いが, 前者は $\mathfrak{n}^\pm, \mathfrak{h}$ の定義から直ぐに従い, 後者は $X = (x_{ij})_{i,j} \in \mathfrak{g}$ に対して

$$X^\pm = (x^\pm_{ij})_{i,j}, \quad x^+_{ij} := \begin{cases} 0 & (i \geq j) \\ x_{ij} & (i < j) \end{cases}, \quad x^-_{ij} := \begin{cases} 0 & (i \leq j) \\ x_{ij} & (i > j) \end{cases}, \quad Z = (z_{ij})_{i,j}, \quad z_{ij} := \delta_{i,j} x_{ii}$$

と定めれば $X^\pm \in \mathfrak{n}^\pm$, $Z \in \mathfrak{h}$, $X = X^+ + Z + X^-$ となることから従う.

問題 4.2.4. 任意の多項式 $p \in \mathbb{K}[x]$ を f で割って $p = fg + r$, $g, r \in \mathbb{K}[x]$ と書くと, $fg \in (f)$ であり, また r は余りだから次数は $n-1$ 以下なので $r \in \mathbb{K}[x]_{\leq n-1}$. よって $\mathbb{K}[x] = (f) + \mathbb{K}[x]_{\leq n-1}$. また (f) の 0 でない元は次数 n 以上だから $(f) \cap \mathbb{K}[x]_{\leq n-1} = \{0\}$. 以上より $\mathbb{K}[x] = (f) \oplus \mathbb{K}[x]_{\leq n-1}$

問題 4.2.5. (1) V, W はそれぞれ $V \oplus W$ の部分集合であって零元 $(0,0)$ を含む. また $V \oplus W$ の和は $(v,w) + (v',w') = (v+v', w+w')$ だから, V に制限すれば $(v,0) + (v',0) = (v+v', 0)$ で, V の和と一致する. また $V \oplus W$ のスカラー倍は $c, (v,w) = (cv, cw)$ なので, V に制限すれば $c(v,0) = (cv,0)$ となり, V のスカラー倍と一致する. W についても同様で, よって V, W はそれぞれ部分空間になる.

(2) $V \cap W = \{(0,0)\}$ であり, また $V \oplus W$ の任意の元は $(v,w) = (v,0) + (0,w) \in V + W$ と書ける.

問題 4.2.6. $V = \mathbb{K}^2 = \mathbb{K}e_1 + \mathbb{K}e_2$, $W_1 = \mathbb{K}e_1$, $W_2 = \mathbb{K}e_2$, $W_3 = \mathbb{K}(e_1+e_2)$ とすると, $W_1 \cap W_2 = W_2 \cap W_3 = W_3 \cap W_1 = \{0\}$ だが $W_1 + W_2 = V \supsetneq W_3$ より $W_1 + W_2 + W_3 = V = \mathbb{K}^2$. 一方 $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \simeq \mathbb{K}^3$. 次元が違うからこの二つは同型ではない (命題 3.3.11).

4.3 直積と直和の普遍性

問題 4.3.1. 一次関係 $\sum = i \in I c_i y_i = 0$ ($c_i \in \mathbb{K}$, 有限個を除いて 0) があったとすると, f の線形性から $0 = \sum i \in I c_i y_i = \sum_{i\in I} c_i f(x_i) = f(\sum_{i\in I} c_i x_i)$. 仮定より f は単射だから $\sum_{i\in I} c_i x_i = 0$ で, x_i 達が一次独立であることから任意の $i \in I$ に対して $c_i = 0$.

問題 4.3.2. 定理 4.3.3 の証明より, 任意の $w \in W$ に対して $\varphi\big((f_i)_{i\in I}\big)(w) = \big(f_i(w)\big)_{i\in I}\big) = \big((\pi_i \circ f)(w)\big)_{i\in I}\big) = f(w)$. よって $\varphi\big((f_i)_{i\in I}\big) = f$.

問題 4.3.3. 任意の $v, v' \in V_j$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ に対して $\iota_j(cv + c'v') = \big(\delta_{i,j}(cv + c'v')\big)_{i\in I} = c.(\delta_{i,j}v)_{i\in I} + c'.(\delta_{i,j}v')_{i\in I} = c.\iota_j(v) + c'.\iota_j(v')$ となるので ι_j は線形写像. また $\iota_j(v) = 0$ なら第 j 成分も 0 だから $v = 0$. よって問題 1.4.1 より ι_j は単射.

問題 4.3.4. 写像 $f\colon \bigoplus_{i\in I} V_i \to W$ を

$$f\big((v_i)_{i\in I}\big) \coloneqq \sum_{i\in I} f_i(v_i)$$

で定める. ここで $(v_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} V_i$ だから有限個の $i \in I$ を除いて $v_i = 0$ なので, $\sum_{i\in I} f_i(v_i)$ は有限和になり確かに W の元であることに注意する. f が線形写像であることは簡単に確認できる (証明を省略する). また任意の $j \in I$ と $v \in V_i$ に対して, $\iota_i(v) = (\delta_{i,j}v)_{j\in I}$ より $(f \circ \iota_i)(v) = f\big((\delta_{i,j}v)_{j\in I}\big) = f_i(v)$ となるので, $f \circ \iota_i = f_i$ となって確かに f は条件を満たす.

次に一意性を示す. 線形写像 $g\colon \bigoplus_{i\in I} V_i \to W$ が任意の $i \in I$ に対して $g \circ \iota_i = f_i$ を満たすと仮定する. すると任意の $v = (v_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} V_i$ に対して, $v = \sum_{i\in I}(\delta_{i,j}v_j)_{j\in I} = \sum_{i,j\in I} \delta_{i,j}\iota_j(v_j)$ と有限和で書けるから, $g(v) = \sum_{i,j\in I} \delta_{i,j} g\big(\iota_j(v_j)\big) = \sum_{i,j\in I} \delta_{i,j} f_j(v_j) = \sum_{i\in I} f_i(v_i) = \sum_{i\in I}(f \circ \iota_i)(v) = f\big(\sum_{i\in I} \iota_i(v)\big) = f(v)$ となる. よって $g = f$ である.

問題 4.3.5. $I = \mathbb{N}$, $V_i = \mathbb{K}$ ($i = 0, 1, \ldots$), $W = \mathbb{K}$ の場合を考える. $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} V_i = \mathbb{K}^{\oplus\mathbb{N}}$ の元 $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は有限個の $i \in \mathbb{N}$ を除いて $v_i = 0$ を満たすから, $f((v_i)_{i\in\mathbb{N}}) \coloneqq \sum_{i\in\mathbb{N}} v_i$ によって写像 $f\colon \mathbb{K}^{\oplus\mathbb{N}} \to \mathbb{K}$ が定義できる. f が線形であること, つまり $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^{\oplus\mathbb{N}}, \mathbb{K})$ である事が簡単に示せる. この f が系 4.3.5 の写像 ϕ による $\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(V_i, W) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{End}(\mathbb{K})$ の像に含まれないことを示そう. もし f が ϕ の像に含まれるなら, $(f_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{End}(\mathbb{K})$ が存在して, 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対し, 包含写像 $\iota_i\colon V_i = \mathbb{K} \to \mathbb{K}^{\oplus\mathbb{N}}$ に関して $f \circ \iota_i = f_i$. ここで有限個の $i \in \mathbb{N}$ を除いて $f_i = 0$ だから, $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $i > N$ を満たす任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $f_i = 0$. ここで各 $j \in \mathbb{N}$ に対して $v^{(j)} \coloneqq (\delta_{i,j})_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\oplus\mathbb{N}}$ とすると, f の定義から $f(v^{(j)}) = 1$ であり, また $i > N$ なら $f_i = 0$ だから $f_i(v^{(j)}) = 0$. これは $f \circ \iota_i = f_i$ と矛盾する.

問題 4.3.6. 定理 4.3.11 における f の一意性より, 写像 ϕ が確かに定まっていることに注意する. まず ϕ が線形写像であることを示そう. 任意の $(f_i)_{i\in I}, (f'_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(V_i, W)$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ について, $f \coloneqq \phi\big((f_i)_{i\in I}\big)$, $f' \coloneqq \phi\big((f_i)_{i\in I}\big)$ と置き, また $g \coloneqq \phi\big(c.(f_i)_{i\in I} + c'.(f'_i)_{i\in I}\big) = \phi\big((c.f_i + c'.f'_i)_{i\in I}\big)$ と置くと, 定理 4.3.11 より任意の $i \in I$ に対して $g \circ \iota_i = c.f_i + c'.f'_i$. 一方で $c.f + c'.f' \in \mathrm{Hom}(\bigoplus_{i\in I} V_i, W)$ も $(c.f + c.'f') \circ \iota_i = c.(\pi_i \circ f) + c'.(\pi_i \circ f') = c.f_i + c'.f'_i$ となって, g と同じ性質を満たす. よって定理 4.3.11 の一意性より $g = c.f + c'.f'$ である. よって ϕ の線形性が示せた.

次に ϕ が単射であることを示そう. f が線形写像であることを既に示しているから, 問題 1.4.1 より,

$(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(W, V_i)$ が $\phi\big((f_i)_{i\in I}\big) = 0$ を満たすと仮定して, $(f_i)_{i\in I} = 0$ を示せばよいが, 定理 4.3.11 の条件より任意の $i \in I$ に対して $f_i = \phi\big((f_i)_{i\in I}\big) \circ \iota_i = 0 \circ \iota_i = 0$ である.

最後に, 任意の $f \in \mathrm{Hom}(\bigoplus_{i\in I} V_i, W)$ に対して $f_i \coloneqq f \circ \iota_i$ とすれば $\phi\big((f_i)_{i\in I}\big) = f$ なので, ϕ は全射である.

問題 4.3.7. 定理 4.3.11 を $W \coloneqq V = \bigoplus_{i\in I} V_i$, $f_i \coloneqq \iota_i$ に適用すると, 任意の $i \in I$ に対して $f \circ \iota_i = \iota_i$ となる f は一意である. 一方, 任意の $i \in I$ に対して $\mathrm{id}_V \circ \iota_i = \iota_i$ だから, 一意性より $f = \mathrm{id}_V$ である.

問題 4.3.8. 定理 4.3.6 と同様の方針で示せる. 詳細は略す.

5　核と像

5.1　核と像

問題 5.1.1. $f(V)$ の任意の元は $f(v)$, $v \in V$ と書けるが, $V = V_1 + V_2$ より $v = v_1 + v_2$, $v_i \in V_i$ と書けるので, f の線形性から $f(v) = f(v_1) + f(v_2) \in f(V_1) + f(V_2)$ となる．よって $f(V) \subset f(V_1) + f(V_2)$．また $f(V_1), f(V_2) \subset f(V)$ は部分空間だから $f(V_1) + f(V_2) \subset f(V)$ である．

問題 5.1.2. $W := \langle f(v_1), \ldots, f(v_n) \rangle$ と置く．$\mathrm{Im}\, f$ の任意の元は $f(v)$, $v \in V$ と書けるが, $v = \sum_{i=1}^n c_i v_i$, $c_i \in \mathbb{K}$ と書けるので, f の線形性より $f(v) = \sum_{i=1}^n c_i f(v_i) \subset W$．逆に W の任意の元 w は $w = \sum_{i=1}^n c_i f(v_i)$, $c_i \in \mathbb{K}$ と書けるから, f の線形性より $w = f(v)$, $v = \sum_{i=1}^n c_i v_i \in V$ となって $w \in \mathrm{Im}\, f$, つまり $W \subset \mathrm{Im}\, f$ である．

問題 5.1.3. (1) 任意の $v, v' \in V$ と $c, c' \in \mathbb{K}$ に対して, f の線形性から $g(cv + c'v') = cv + c'v' - f(cv + c'v') = c(v - f(v)) + c'(v' - f(v')) = cg(v) + c'g(v')$ となり, g の線形性が示せた．よって $\mathrm{Im}\, g \subset V$ は部分空間なので, 後半の主張を示すには集合としての包含関係 $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$, つまり任意の $v \in V$ に対して $f(g(v)) = 0$ を示せば良いが, $f(g(v)) = f(v - f(v)) = f(v) - (f \circ f)(v) = f(v) - f(v) = 0$ となる．

(2) 任意の $v \in V$ は $v = (v - f(v)) + f(v) = g(v) + f(v)$ と書けるが, $f(v) \in \mathrm{Im}\, f$ であり, また (1) より $g(v) \in \mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$ だから $V = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, f$ である．また $w \in \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f$ とすると, $w \in \mathrm{Im}\, f$ より $w = f(v)$, $v \in V$ と書けるが, $w \in \mathrm{Ker}\, f$ より $0 = f(w) = (f \circ f)(v) = f(v) = w$ となり, $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ である．よって $V = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$．

(3) $f \neq 0$ と V が有限次元である事から, $r := \dim \mathrm{Im}\, f$ は正の整数である．そこで $\mathrm{Im}\, f$ の基底 $v_1, \ldots, v_r$ を取り, それを延長して得られる V の基底を $v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n$ とする．この時, $i = 1, \ldots, r$ に対しては $v_i = f(w_i)$, $w_i \in V$ と書けるから, $f(v_i) = (f \circ f)(w_i) = f(w_i) = v_i$ となる．また $i = r+1, \ldots, n$ に対しては, (2) より $v_i \in \mathrm{Ker}\, f$ だから $f(v_i) = 0$ である．

問題 5.1.4. ϕ が線形写像である事の証明は略す．$\mathrm{Ker}\, \phi = \{A \in M(n; \mathbb{K}) \mid A = {}^t\!A\} = \{$ 対称行列 $\}$, $\mathrm{Im}\, \phi = \{$ 反対称行列 $\}$ であり, 行列単位 E_{ij} を用いると, $E_{ij} + E_{ji}$, $1 \leq i \leq j \leq n$ が $\mathrm{Ker}\, \phi$ の, $E_{kl} - E_{kl}$, $1 \leq k < l \leq n$ が $\mathrm{Im}\, \phi$ の基底をなす．$\dim \mathrm{Ker}\, \phi = \binom{n+1}{2}$, $\dim \mathrm{Im}\, \phi = \binom{n}{2}$ である．

問題 5.1.5. 任意の多項式 $f = \sum_{n=0}^{d_1} f_n x^n$, $g = \sum_{n=0}^{d_2} g_n x^n$ と $c, c' \in \mathbb{R}$ に対して, $d := \max\{d_1, d_2\}$, $f_n := 0$ $(n > d_1)$, $g_n := 0$ $(n > d_2)$ として,

$$\phi(cf + c'g) = (cf + c'g)(J) = \sum_{n=0}^{d} (cf_n + c'g_n) J^n = c \sum_{n=0}^{d_1} f_n J^n + c' \sum_{n=0}^{d_2} g_n J^n = c\phi(f) + c'\phi(g)$$

となるので ϕ は線形写像である．

また $J^2 = E_2$ より, 任意の $f = \sum_{n=0}^{d} f_n x^n \in \mathbb{R}[x]$ に対して

$$\phi(f) = \Bigl(\sum_{n=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} f_{2n} \Bigr) E_2 + \Bigl(\sum_{n=0}^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor} f_{2n+1} \Bigr) J$$

となるので $\mathrm{Im}\, \phi = \{cE_2 + c'J \mid c, c' \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}E + \mathbb{R}J$．また $W := \{(x^2 + 1)g \mid g \in \mathbb{R}[x]\}$ と置くと,

$\phi\big((x^2+1)g\big) = (J^2+1)g(J) = O$ より $W \subset \operatorname{Ker}\phi$. また多項式を x^1+1 で割った余りを考えることで $\mathbb{R}[x] = W \oplus V$, $V := \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x = \operatorname{Im}\phi$ となり, $\operatorname{Ker}\phi \cap V = \{0\}$ だから $\operatorname{Ker}\phi = W$ である.

問題 5.1.6. (1) 略.

(2) 微積分学の基本定理から $F \circ G = \mathrm{id}$. よって G は単射で $\operatorname{Ker} G = \{0\}$, f は全射で $\operatorname{Im} f = C^\infty(\mathbb{R})$.

(3) $(G \circ F)(f) = f(x) - f(0)$ より $\operatorname{Ker}(G \circ F) = \{$ 定数函数 $\} = \operatorname{Ker} F$.

(4) $(G \circ F)(f) = f(x) - f(0)$ より $\operatorname{Im}(G \circ F) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\} = \operatorname{Im} G$.

問題 5.1.7. $gf = 0 \Leftrightarrow \forall u \in U,\ g\big(f(u)\big) = 0 \Leftrightarrow \forall u \in U,\ f(u) \in \operatorname{Ker} g \Leftrightarrow \forall w \in \operatorname{Im} f,\ w \in \operatorname{Ker} g \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

問題 5.1.8. (1) $A + B = E_n$ から $l_A + l_B = l_{A+B} = l_{E_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$. よって任意の $v \in \mathbb{K}^n$ に対して $v = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}(v) = l_A(v) + l_B(v)$ なので $\operatorname{Ker} l_A = \{v \in \mathbb{K}^n \mid l_A(v) = 0\} = \{v \in \mathbb{K}^n \mid v = l_B(v)\} = \operatorname{Im} l_B$.

(2) $\operatorname{Im} l_B \subset \operatorname{Ker} l_A$ より任意の $v \in \mathbb{K}^n$ に対して $A(Bv) = 0$. よって $AB = O$. (1) の議論で A と B を置換すれば $\operatorname{Ker} l_B = \operatorname{Im} l_A$ が従うので, 同様に $BA = O$. すると $A + B = E_n$ の両辺に A および B を掛けて $A^2 = A$, $B^2 = B$ が従う.

問題 5.1.9. (1) , (2) $\mathbb{K}^n = V \oplus W$ を示せば良い. 任意の $v \in \mathbb{R}^n$ は $v = \frac{1}{2}(Av + v) - \frac{1}{2}(Av - v) = f(\frac{v}{2}) + g(\frac{-v}{2})$ と書けるから $\mathbb{R}^n = V + W$ である. また $u \in V \cap W$ は $u = f(v) = g(w)$, $v, w \in \mathbb{K}^n$ と書けるが, $Av + v = Aw - w$ の辺々に A を掛けて $A^2 = A$ を使うと $Au = v + Av = u$ 及び $Au = w - Aw = -(Aw - w) = -u$ となるので $u = 0$. よって $V \cap W = \{0\}$.

(3) $v_1, \dots, w_t$ が $\mathbb{R}^n$ の基底だから, T は正則行列. (1) の議論から $Av_i = v_i$, $Aw_i = -w_i$ なので, この基底に関する A の行列表示は $\begin{pmatrix} E_s & O \\ O & -E_t \end{pmatrix}$ になる.

5.2 線形写像の標準形

問題 5.2.1. A を左基本変形すると

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が連立方程式 $Av = 0$ の解の基底. つまり $\operatorname{Ker} l_A$ は v_1 を基底に持つ.

また $\operatorname{Im} l_A$ は A の列ベクトルが張る $\mathbb{R}^3$ の部分空間だから, 基底は一次独立なものをとれば良くて, 例えば $w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $w_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$. そして $\operatorname{rank}(A) = \dim \operatorname{Im} l_A = 2$.

問題 5.2.2. 行列 B の左掛算写像を l_B と書く.

(1) l_P, l_Q は同型写像だから $\operatorname{Im}(l_{PAQ}) = \operatorname{Im}(l_P \circ l_A \circ l_Q) \simeq \operatorname{Im} l_A$. 両辺の次元を見ると $\operatorname{rank}(PAQ) = \operatorname{rank} A$.

(2) $r := \operatorname{rank} A$, $s := \operatorname{rank} {}^t\!A$ と置くと, 正則行列 P, P', Q, Q' が存在して $Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, $Q'^{-1}\,{}^t\!AP' = \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$. 前半の転置を取って ${}^t\!P\,{}^t\!A\,{}^t\!Q^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ となるから, 標準形の一意性より $s = r$.

問題 5.2.3. 問題 3.4.8 と同趣旨の問題.

問題 5.2.4. 前半は, d 次多項式 $f(x)$ をシフトした $T_a(f)(x) = f(x + a)$ も x の d 次式であることから従う.

後半は二項定理から

$$T_a(x^j) = (x+a)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{i}{j} a^{i-j} x^j, \quad \binom{i}{j} \coloneqq \frac{i!}{j!(i-j)!}$$

となるので, 行列表示は $\left(\binom{i}{j} a^{i-j}\right)_{i,j=1}^{n}$. 但し $j > i$ なら $\binom{i}{j} \coloneqq 0$.

5.3 連立一次方程式と線形写像

問題 5.3.1. (4) の後半だけ示す. $f_{x_0}\colon S_w \to S_0$ は逆写像 $g\colon S_0 \to S_w$, $g(x) \coloneqq x + x_0$ を持つので全単射である.

問題 5.3.2. 略.

参考文献

[足助 12] 足助太郎, **線型代数学**, 東京大学出版会 (2012).

[斎藤 09] 斎藤毅, **線形代数の世界**, 大学数学の入門 **7**, 東京大学出版会 (2009).

[斎藤 09] 斎藤毅, **集合と位相**, 大学数学の入門 **8**, 東京大学出版会 (2009).

[齋藤 66] 齋藤正彦, **線形代数入門**, 基礎数学 **1**, 東京大学出版会 (1966). [電子版有り]

[齋藤 85] 齋藤正彦, **線形代数演習**, 基礎数学 **4**, 東京大学出版会 (1985). [電子版有り]

[佐武 15] 佐武一郎, **線型代数学** (新装版), 数学選書 **1**, 裳華房 (2015).

[杉浦 80] 杉浦光夫, **解析入門 I**, 基礎数学 **2**, 東京大学出版会 (1980). [電子版有り]

以上です．