現代数学基礎 BI　5 月 14 日分課題解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2024B1.html

問題. $\mathbb{C}$ を複素数体とし, n を正整数とする. 二変数 x, y の複素係数多項式全体がなす $\mathbb{C}$ 線形空間を $\mathbb{C}[x,y]$ と書き, 単項式 $x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, \ldots, xy^{n-1}, y^n$ が張る $\mathbb{C}[x,y]$ の部分空間を $V(n) \subset \mathbb{C}[x,y]$ と書く. そして三つの写像 $E, F, H \colon \mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{C}[x,y]$ を, 多項式 $f \in \mathbb{C}[x,y]$ に対して

$$E(f) \coloneqq y\frac{\partial f}{\partial x}, \quad F(f) \coloneqq x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad H(f) \coloneqq -x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$$

で定義する. 但し $\frac{\partial}{\partial x}$ は x に関する微分を, $\frac{\partial}{\partial y}$ は y に関する微分を表す.

(1) 写像 E, F, H がどれも $V(n)$ の自己準同型であることを示せ.

(2) $V(n)$ の基底 $y^n, xy^{n-1}, \ldots, x^{n-1}y, x^n$ に関する $E, F, H \in \mathrm{End}\big(V(n)\big)$ の行列表示をそれぞれ求めよ.

解答. (1) 微分作用素 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ 及び掛算写像 $x \cdot -, y \cdot -$ は $\mathbb{C}[x,y]$ の自己準同型だから, それらの合成 $E = (y \cdot -) \circ \frac{\partial}{\partial x}$, $F = (x \cdot -) \circ \frac{\partial}{\partial y}$, $H_1 \coloneqq (x \cdot -) \circ \frac{\partial}{\partial x}$, $H_2 \coloneqq (y \cdot -) \circ \frac{\partial}{\partial y}$ も $\mathbb{C}[x,y]$ の自己準同型であり, それらの線形結合 $H = -H_1 + H_2$ も $\mathbb{C}[x,y]$ の自己準同型である. あとは E, F, H それぞれによる $V(n)$ の像が $V(n)$ に含まれることを示せば $E, F, H \in \mathrm{End}\big(V(n)\big)$ が従うが, それを示すには $V(n)$ の基底 $x^i y^{n-i}$ $(i = 0, \ldots, n)$ の像が $V(n)$ に属すことを言えば十分.

$$E(x^i y^{n-i}) = i x^{i-1} y^{n-i+1}, \quad F(x^i y^{n-i}) = (n-i) x^{i+1} y^{n-i-1}, \quad H(x^i y^{n-i}) = (n-2i) x^i y^{n-i}$$

はどれも $V(n)$ の元だから, 主張が示せた.

(2) (1) の計算から, 行列表示は以下の $(n+1)$ 次正方行列になる. 但し書いていない成分は全て 0.

$$\big(E(y^n)\ E(xy^{n-1})\ \cdots\ E(x^{n-1}y)\ E(x^n)\big) = \big(y^n\ xy^{n-1}\ \cdots\ x^{n-1}y\ x^n\big) \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & n \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\big(F(y^n)\ F(xy^{n-1})\ \cdots\ F(x^{n-1}y)\ F(x^n)\big) = \big(y^n\ xy^{n-1}\ \cdots\ x^{n-1}y\ x^n\big) \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ n & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 2 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\big(H(y^n)\ H(xy^{n-1})\ \cdots\ H(x^{n-1}y)\ H(x^n)\big) = \big(y^n\ xy^{n-1}\ \cdots\ x^{n-1}y\ x^n\big) \begin{pmatrix} n & & & & \\ & n-2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 2-n & \\ & & & & -n \end{pmatrix}.$$

コメント. (1),(2) を E, F, H でそれぞれ 0.5 点ずつとして, 計 3 点で採点しました. 平均点は 2.0 点でした.

(1) では示すべき二つのこと (V から V への写像であることと, 線形写像であること) のうち一方にしか言及していない人がいました. (2) では行列サイズがそもそも間違えている人がいました.

前回の小テストで 2 次の特殊線形 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2)$ を扱いましたが, 今回の問題は微分作用素による $\mathfrak{sl}(2)$ の実現と, $\mathfrak{sl}(2)$ の既約表現を背景としています. 線形空間 $V(n)$ は $\mathfrak{sl}(2)$ の既約表現です. 更に任意の有限次元既約表現は, その次元を $n+1$ とすると, $V(n)$ と同型であることが知られています.

以上です.