現代数学基礎 BI　5 月 14 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2024B1.html

断らない限り, 線形空間は体 $\mathbb{K}$ 上のものとする.

問題 4.1. 有限次元線形空間 V の基底 $B = (v_1, \dots, v_n)$ からもう一組の基底 $B' = (w_1, \dots, w_n)$ への基底変換行列を P と書くと, B' から B への基底変換行列は逆行列 P^{-1} である事を示せ.

問題 4.2. $\mathbb{R}$ を実数体とする. x を不定元とする 3 次以下の実数多項式全体がなす集合

$$V \coloneqq \{f = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 \mid f_0, f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}\}$$

は $\mathbb{R}$ 線形空間であり, x に関する微分

$$D(f) \coloneqq \frac{df}{dx} = f_1 + 2f_2 x + 3f_3 x^2 \quad (f = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3)$$

は $D \in \mathrm{End}(V)$ を定める. また, $B \coloneqq (1, x, x^2, x^3)$ と $B' \coloneqq (1, x, x(x+1), x(x+1)(x+2))$ は共に V の基底である.

(1) B に関する $\frac{d}{dx}$ の行列表示 A を求めよ.
(2) B' に関する $\frac{d}{dx}$ の行列表示 A' を求めよ.
(3) B から B' への基底変換行列 P を求めよ.
(4) $A' = P^{-1}AP$ を示せ.

問題 4.3 (講義ノート補題 4.1.6)**.** 線形空間の族 $\{V_i \mid i \in I\}$ について, 直和空間 $\prod_{i \in I} V_i$ の部分集合 $\bigoplus_{i \in I} V_i \coloneqq \{(v_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} V_i \mid \text{有限個の } i \in I \text{ を除いて } v_i = 0\}$ が部分空間である事を示せ.

問題 4.4 (講義ノート命題 4.2.1 証明)**.** 線形空間 V の部分空間 V_1, V_2 について, 写像 $\varphi\colon V_1 \oplus V_2 \to V_1 + V_2$, $(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$ が線形である事を示せ.

問題 4.5 (講義ノート命題 2.4.15 証明)**.** 線形空間 V の元 $v_1, \dots, v_m$ は線形独立であり, また $w \in V$ は v_i 達の線形結合で書けない元だとする. この時 $v_1, \dots, v_m, w$ は線形独立である事を示せ.

解答 4.1. $(w_1 \cdots w_n) = (v_1 \cdots v_n)P$ だから, E を n 次単位行列として $(v_1 \cdots v_n) = (v_1 \cdots v_n)E = (v_1 \cdots v_n)PP^{-1} = (w_1 \cdots w_n)P^{-1}$. よって B' から B への基底変換行列は P^{-1}.

解答 4.2. (1) 以下の計算より $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 2 & 0 \\ & & 0 & 3 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

$$(D(1)\ D(x)\ D(x^2)\ D(x^3)) = (0\ 1\ 2x\ 3x^2) = (1\ x\ x^2\ x^3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 2 & 0 \\ & & 0 & 3 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 以下の計算より $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ & 0 & 2 & 3 \\ & & 0 & 3 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} (D(1)\ D(x)\ D(x(x+1))\ D(x(x+1)(x+2))) &= (0\ 1\ 1+2x\ 2+3x+3x(x+1)) \\ &= (1\ x\ x(x+1)\ x(x+1)(x+2)) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ & 0 & 2 & 3 \\ & & 0 & 3 \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(3) 以下の計算より $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 2 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

$$(1\ x\ x(x+1)\ x(x+1)(x+2)) = (1\ x\ x^2\ x^3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 2 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) $\det P = 1 \neq 0$ より P は正則. $AP = PA'$ を示せば良いが,

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ & 0 & 2 & 6 \\ & & & 3 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = PA'.$$

解答 4.3. 講義ノート該当箇所を参照.

解答 4.4. 講義ノート該当箇所を参照.

解答 4.5. $c_1, \ldots, c_m, c \in \mathbb{K}$ が $\sum_{i=1}^m c_i v_i + cw = 0$ を満たすとする. $c \neq 0$ なら $w = \sum_{i=1} (-c_i/c) v_i$ となり, w が v_i 達の線形結合で書けないことと矛盾. 従って $c = 0$ であり, $\sum_{i=1}^m c_i v_i = 0$ だが, v_i 達は線形独立だから $c_1 = \cdots = c_m = 0$. よって $v_1, \ldots, v_m, w$ は線形独立.