§3.5 基底変換行列

※ 授業アンケート

※ 線形空間は体K上

Lem. 3.5.1. V：有限次元。
$x_1, \dots, x_n$：Vの基底。 $y_1, \dots, y_n \in V$
$P \in \mathrm{End}(V)$. $P(x_i) = y_i \ (i = 1, \dots, n)$ (Prp 3.1.3よりPは一意存在)
この時、 $y_1, \dots, y_n$がVの基底
$\Leftrightarrow$ Pが可逆写像 [Cor. 3.3.13]
$\Leftrightarrow$ Pの$(x_1, \dots, x_n)$に関する行列表示Pが正則行列 [Lem 3.4.8.(4)] □

Dfn. 3.5.2. 上の設定で$y_1, \dots, y_n$がVの基底の時、
正則行列Pを$(x_1, \dots, x_n)$から$(y_1, \dots, y_n)$への基底変換行列と呼ぶ □

Rmk.
$$(y_1 \cdots y_n) = (x_1 \cdots x_n)P,$$
$$y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{ij}, \quad P = (p_{ij})_{i,j=1}^{n}$$ □

問1. $(y_1, \dots, y_n)$から$(x_1, \dots, x_n)$への基底変換行列はP^{-1}

Thm. 3.5.7. V, W：有限次元。 $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$
$B_V = (v_1, \dots, v_n)$, $B_V' = (v_1', \dots, v_n')$：$V$の基底。
$B_W = (w_1, \dots, w_m)$, $B_W' = (w_1', \dots, w_m')$：$W$ 〃 。
P：B_VからB_V'への基底変換行列。n次正則行列
Q：B_WからB_W' 〃 。m 〃
A：fのB_V, B_Wに関する行列表示。$m \times n$行列
A'：fのB_V', B_W' 〃 〃 。この時 $A' = Q^{-1}AP$.

(∵) $(f(v_1) \cdots f(v_n)) = (w_1 \cdots w_m)A$ を $f(B_V) = B_W A$と略記。
$(v_1' \cdots v_n') = (v_1 \cdots v_n)P$ を $B_V' = B_V P$ 〃
求めるA'は $f(B_V') = B_W' A$ をみたすが
$$f(B_V') = f(B_V P) = f(B_V)P \quad [f\text{は線形}]$$
$$= B_W A \cdot P = B_W' Q^{-1}AP \quad [\text{問1より } B_W = B_W' Q^{-1}]$$ □

E.g：問2

§4. 線形空間の直積と直和

§4.1. 直積空間と直和空間

Lem./Dfn. 4.1.1/4.1.2. $\{V_i \mid i\in I\}$：線形空間の族.

直積集合 $\prod_{i\in I} V_i$ は次の $+,\cdot,0$ で線形空間になる.

$c\in\mathbb{K}$, $(v_i)_{i\in I},(w_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}V_i$

$(v_i)_{i\in I}+(w_i)_{i\in I} := (v_i+w_i)_{i\in I}$, V_iの$+$

$c\cdot(v_i)_{i\in I} := (c\cdot v_i)_{i\in I}$ V_iの$\cdot$

$0 := (0_{V_i})_{i\in I}$ V_iの零元 (証明略)

これを直積空間と呼ぶ. 特に$I=\{1,\dots,n\}$の場合は$V_1\times\cdots\times V_n$と書く.
$\forall i\in I$, $V_i=V$の場合はV^Iと書く. 更に$I=\{1,\dots,n\}$の場合はV^nと書く. □

Eg. 4.1.5 $\mathbb{K}[[x]] := \{\mathbb{K}係数巾級数全体\} = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mid a_n\in\mathbb{K}\ (n=0,1,2,\dots)\}$ ← 無限和

は $(\sum_n a_n x^n)+(\sum_n b_n x^n) := \sum_n (a_n+b_n)x^n$,
$c\cdot(\sum_n a_n x^n) := \sum_n c a_n x^n$ で$\mathbb{K}$線形空間.

$\mathbb{N} := \mathbb{Z}_{\geq 0}=\{0,1,2,\dots\}$ とすると $\mathbb{K}[[x]]\cong\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

∵ 対応 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\mapsto(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が定める写像 $\mathbb{K}[[x]]\to\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ は全単射かつ線形. □

Lem./Dfn. 4.1.6/4.1.7 $\bigoplus_{i\in I}V_i := \{(v_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}V_i \mid 有限個のiを除いて\ v_i=0_{V_i}\}$
は部分空間. これを直和空間と呼ぶ. 証明：問3
$\forall i\in I$, $V_i=V$の場合は$V^{\oplus I}$, $I=\{1,\dots,n\}$の場合は$V_1\oplus\cdots\oplus V_n$と書く □

Lem. 4.1.8. Iが有限集合なら $\bigoplus_{i\in I}V_i = \prod_{i\in I}V_i$ (証明略) □

Eg. 4.1.9.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{K}[x]=\{\mathbb{K}係数多項式\} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{K}^{\oplus\mathbb{N}} \\
\cap & & \cap \\
\mathbb{K}[[x]]=\{\mathbb{K}係数巾級数\} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{K}^{\mathbb{N}}
\end{array}$$ □

§4.2. 部分空間の直和

Prp/Dfn 2.2.2/2.2.3 V：線形空間, $V_1, V_2 \subset V$：部分空間.

$V_1 + V_2 := \{ v_1 + v_2 \in V \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \}$

はVの部分空間. Vの和　V_1とV_2の和空間

∵ $\forall a, b \in \mathbb{K}$, $\forall v, w \in V_1 + V_2$, $av + bw \in V_1 + V_2$ を示す.

$\exists v_i, w_i \in V_i \ (i=1,2)$, $v = v_1 + v_2$, $w = w_1 + w_2$

$\therefore av + bw = a(v_1 + v_2) + b(w_1 + w_2) = (av_1 + bw_1) + (av_2 + bw_2)$

V_iはVの部分空間なので $av_i + bw_i \in V_i \ (i=1,2)$ $\therefore av + bw \in V_1 + V_2$ □

Prp. 4.2.1. V：線形空間　$V_1, V_2 \subset V$：部分空間.

$V_1 \cap V_2 = \{0\}$　集合として $V_1 \oplus V_2 = V_1 \times V_2$

$\Longleftrightarrow \varphi : \underbrace{V_1 \oplus V_2}_{\text{線形空間}V_1, V_2\text{の直和}} \longrightarrow \underbrace{V_1 + V_2}_{V\text{の和}}$, $(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$ は同型

∵ φは線形全射.　線形性は問4　$(v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2$で.

全射. $\forall v \in V_1 + V_2$, $\exists v_1 \in V_1$, $\exists v_2 \in V_2$ $v = v_1 + v_2$. $\varphi((v_1, v_2)) = v$.

($\Rightarrow$) φの単射性を示す. $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in V_1 \oplus V_2$,

$\varphi((v_1, v_2)) = \varphi((w_1, w_2))$ なら $v_1 + v_2 = w_1 + w_2$.

$\therefore v_1 - w_1 = w_2 - v_2$. 左辺は$V_1$の, 右辺は$V_2$の元.

$\therefore v_1 - w_1 = w_2 - v_2 \in V_1 \cap V_2 = \{0\}$　$\therefore (v_1, v_2) = (w_1, w_2)$

($\Leftarrow$) $\forall v \in V_1 \cap V_2$, $(v, 0), (0, v) \in V_1 \oplus V_2$, $\varphi((v, 0)) = \varphi((0, v)) = v$

φは単射なので $(v, 0) = (0, v)$　$\therefore v = 0$ □

Dfn. 4.2.2. V：線形空間, $V_1, V_2 \subset V$：部分空間.

$V_1 \cap V_2 = \{0\}$ かつ $V_1 + V_2 = V$ の時,

$V = V_1 \oplus V_2$ と書いて, Vの直和分解と呼ぶ. □

E.g. 4.2.5 $\mathbb{K}^n \supset V := \{ {}^t(v_1, \ldots, v_m, 0, \ldots, 0) \mid v_i \in \mathbb{K} \}$, $W := \{ {}^t(0, \ldots, 0, v_{m+1}, \ldots, v_n) \mid v_i \in \mathbb{K} \}$

$V \cong \mathbb{K}^m$, $W \cong \mathbb{K}^{n-m}$, $V \cap W = \{\vec{0}\}$, $V + W = \mathbb{K}^n$　$\therefore \mathbb{K}^n = V \oplus W$ □

Thm. 2.5.8. V：有限次元，$V_1, V_2 \subset V$：部分空間
$$\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) \qquad \square$$

Cor. 4.2.4. V：有限次元．$V = V_1 \oplus V_2$：直和分解　$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$ $\square$

2.5.8の証明に，次を使う

Thm. 2.4.15 V：有限次元，$V \neq \{0\}$，$S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$：線形独立
$\Rightarrow$ 有限個(又は0個)の元 $v_{m+1}, \dots, v_n$ が存在して，$v_1, \dots, v_n$ は V の基底

(:) V は有限次元なので，有限個の元からなる基底 $B = \{w_1, \dots, w_\ell\}$ がある．

$\mathrm{Span}\, S \subset V$：$S$ が生成する部分空間．

- $B \subset \mathrm{Span}\, S$ なら　$V = \mathrm{Span}\, B \subset \mathrm{Span}\, S$ より $V = \mathrm{Span}\, S$．
  よって S は V の基底で，$n = m$ として主張が成立
- $\exists w \in B \setminus \mathrm{Span}\, S$ なら，$S^{(1)} = S \cup \{v_{m+1} := w\}$ は線形独立　問5
  $B \subset \mathrm{Span}\, S^{(1)}$ なら 上と同様に S' は基底で，$n = m+1$ として主張が成立．
  $\exists w' \in B \setminus \mathrm{Span}\, S^{(1)}$ なら．同じ議論を繰り返して，高々 ℓ 回目で得られる
  $S^{(\ell)}$ に対して $B \subset \mathrm{Span}\, S^{(\ell)}$ となり，$S^{(\ell)}$ は V の基底である．　$\square$

Lem. 2.5.6 V：有限次元．$W \subset V$：部分空間 $\Rightarrow$ W：有限次元，$\dim W \leq \dim V$

(証明略) $\square$

2.5.8の証明. $V_1, V_2, V_1 \cap V_2 \subset V$，$V_1 \cap V_2 \subset V_1$，$V_1 \cap V_2 \subset V_2$ ：部分空間

Lem. より $\dim(V_1 \cap V_2) = r$，$\dim V_1 = r+s$，$\dim V_2 = r+t$ と書ける．$r, s, t \in \mathbb{N}$

$V_1 \cap V_2$ の基底 $B = \{u_1, \dots, u_r\}$ を取る．

Thm. 2.4.15 より V_1 の基底 $B_1 = B \sqcup \{v_1, \dots, v_s\}$

V_2 〃 $B_2 = B \sqcup \{w_1, \dots, w_t\}$ が取れる．

$B_1 \cup B_2 = \{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t\}$ が $V_1 + V_2$ の基底である事

(生成) 略．(線形独立) $\sum a_i u_i + \sum b_j v_j + \sum c_k w_k = 0$　を示せば良い

と仮定．$\sum a_i u_i + \sum b_j v_j = -\sum c_k w_k$　(左辺) $\in V_1$，(右辺) $\in V_2$ より

両辺とも $V_1 \cap V_2$ の元．B が基底だから $b_j = 0$，$c_k = 0$，$a_i = 0$．　$\square$