現代数学基礎 BI　5 月 07 日分課題解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2024B1.html

問題. $\mathbb{C}$ 係数の二次行列全体がなす $\mathbb{C}$ 線形空間を $M(2;\mathbb{C})$ で表す．その部分空間 $\mathfrak{g}$ を

$$\mathfrak{g} \coloneqq \{X \in M(2;\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} X = 0\}$$

で定義する．但し $\operatorname{tr} X$ は正方行列 X のトレースを表す．また $e, f, h \in \mathfrak{g}$ を次で定める．

$$e \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) e, f, h が $\mathfrak{g}$ の基底である事を示せ．

(2) 各元 $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\varphi(X) \coloneqq eX - Xe$ と定める．但し eX と Xe は行列の積を表す．対応 $X \mapsto \varphi(X)$ が自己準同型 $\varphi \in \operatorname{End}(\mathfrak{g})$ を定める事を示せ．

(3) 基底 e, f, h に関する φ の行列表示を求めよ．

解答. (1) 任意の $X \in \mathfrak{g}$ は $X = \left(\begin{smallmatrix} z & x \\ y & -z \end{smallmatrix}\right) = xe + yf + zh$ $(x, y, z \in \mathbb{C})$ と一意に表せるので, e, f, h は $\mathfrak{g}$ の基底である．

(2) 任意の同じサイズの正方行列 A, B に対し $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ だから, 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\operatorname{tr}\bigl(\varphi(X)\bigr) = \operatorname{tr}(hX - Xh) = \operatorname{tr}(hX) - \operatorname{tr}(Xh) = 0$, つまり $\varphi(X) \in \mathfrak{g}$. よって対応 $X \mapsto \varphi(X)$ は写像 $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を定める．後は φ の線形性を示せば良いが, 任意の $X, Y \in \mathfrak{g}$ と $c, d \in \mathbb{C}$ に対して $\varphi(cX + dY) = h(cX + dY) - (cX + dY)h = c(hX - Xh) + d(hY - Yh) = c\varphi(X) + d\varphi(Y)$ が成立する．以上より φ は $\mathfrak{g}$ から自分自身への線形写像である．

(3) $\varphi(e) = O$, $\varphi(f) = ef - fe = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) = h$, $\varphi(h) = eh - he = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = -2e$ より

$$\bigl(\varphi(e)\ \varphi(f)\ \varphi(h)\bigr) = (e\ f\ h) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

従って基底 e, f, h に関する φ の行列表示は $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

コメント. 各小問 1 点ずつ, 3 点満点で採点しました．平均点は 2.2 点でした．

(1) では、基底の定義である「張ること」と「線形独立であること」のうち．一方しか示していない解答がありました．基底の定義の条件は二つであることをしっかり意識して下さい．(2) では, 前回の課題と同様, $\mathfrak{g}$ への写像であることと線形写像であることの二点を示す必要がありますが, どちらか一方しか示せていない答案が多数ありました．(3) では表現行列の定義の理解が不十分だと思われる解答も一部ありました．

$\mathfrak{g}$ は交換子 $[X, Y] \coloneqq XY - YX$ を Lie 括弧とする **$\mathbb{C}$ 上の Lie 代数** (Lie algebra over $\mathbb{C}$) で, 2 次の**特殊線形 Lie 代数** $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ (the special linear Lie algebra) と呼ばれているものです．任意の Lie 代数 L とその元 $X \in L$ に対して $\operatorname{ad} X \coloneqq [X, \cdot]$ は $\operatorname{End}(L)$ の元です．特に $L = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, $X = e$ とすれば $\operatorname{ad} e$ は問題の φ と一致します．

以上です.