現代数学基礎 BI　 5 月 7 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2024B1.html

断らない限り, 線形空間は体 $\mathbb{K}$ 上のものとする.

問題 3.1. n を正整数とし, 数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の標準基底を $e_1, e_2, \dots, e_n$ と書く.
(1) $e_1, e_1 + e_2, \dots, e_1 + \cdots + e_n$ が $\mathbb{K}^n$ の基底であることを示せ.
(2) $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ が $\mathbb{K}^n$ の基底ではないことを示せ.

問題 3.2 (講義ノート例 1.3.7, 例 2.4.14)**.** 不定元 x に関する $\mathbb{K}$ 係数多項式全体がなす集合を $\mathbb{K}[x]$ で表す. 多項式の和を加法とし, $\mathbb{K}$ の元による積をスカラー倍とすることで, $\mathbb{K}[x]$ が無限次元線形空間になることを示せ.

問題 3.3 (講義ノート命題 3.1.3 証明)**.** 線形空間 V と W が与えられていて, V の基底 $v_1, \dots, v_n$ と W の元 $w_1, \dots, w_n$ が与えられているとする. 写像 $f_w \colon V \to W$ を, 各 $v \in V$ を $v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$, $a_j \in \mathbb{K}$ $(j = 1, \dots, n)$ と表して, $f_w(v) \coloneqq \sum_{j=1}^{n} a_j w_j$ で定める.
(1) $f_w(v_i) = w_i$ $(i = 1, \dots, n)$ を示せ.
(2) f_w が線形写像であることを示せ.

問題 3.4 (講義ノート補題 3.3.5)**.** V, W を線形空間とする. 以下の主張を示せ.
(0) 恒等写像 $\mathrm{id}_V \colon V \to V$ は同型.
(1) 同型 $f \colon V \xrightarrow{\sim} W$ の逆写像 $f^{-1} \colon W \to V$ は同型.
(2) 二つの同型 $f \colon U \xrightarrow{\sim} V$ と $g \colon V \xrightarrow{\sim} W$ の合成 $g \circ f \colon U \to W$ は同型.

問題 3.5 (講義ノート定理 3.3.9)**.** V を有限次元線形空間とし, $B = (v_1, \dots, v_n)$ を V の順序付き基底とする. 写像 $\phi_B \colon \mathbb{K}^n \to V$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ が同型であることを示せ.

問題 3.6 (c.f. 講義ノート定理 3.4.1 証明)**.** 有限地毛線形空間 V の基底 $v_1, \dots, v_n$ が与えられているとする. 二つの線形写像 $f, g \colon V \to W$ について, $f(v_i) = g(v_i)$ $(i = 1, \dots, n)$ なら $f = g$ であることを示せ.

解答 3.1. (1) $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ として, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ が $\sum_{i=1}^n c_i(e_1 + \cdots + e_i) = v$ を満たすと仮定する. 両辺の第 i 成分を比較して $c_i + c_{i+1} + \cdots + c_n = v_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. この連立方程式を解いて $c_n = v_n$, $c_j = v_j - v_{j+1}$ $(j = 1, \ldots, n-1)$. 従って $e_1 + \cdots + e_i$ 達は $\mathbb{K}^n$ を生成する. また $v = 0$ の場合は $c_1 = \cdots = c_n = 0$ なので, $e_1 + \cdots + e_i$ 達は線形独立である.

(2) $e_1, \ldots, e_{n-1}$ の線形結合の第 n 成分は 0 だから, これらが生成する $\mathbb{K}^n$ の部分空間は $\mathbb{K}^n$ 全体にはならない. よって $\mathbb{K}^n$ の生成系ではなく, 特に基底ではない.

解答 3.2. 線形空間であることは略. 無限次元であることを背理法で示す. 有限個の元からなる $\mathbb{K}[x]$ の基底 $p_1, \ldots, p_n$ が存在すると仮定する. 多項式 p_i $(i = 1, \ldots, n)$ の次数を d_i と書き, $d \coloneqq \max\{d_1, \ldots, d_n\}$ とする. 仮定から $x^{d+1} \in \mathbb{K}[x]$ は p_i 達の線形結合 $p \coloneqq \sum_{i=1}^n a_i p_i$ $(a_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n)$ で書けるが, p の次数は d 以下だから, 次数 $d+1$ の多項式 x^{d+1} と一致することはないので矛盾.

解答 3.3. (1) Kronecker デルタを用いて $v_i = \sum_{j=1}^n \delta_{i,j} v_j$ と表せるので, $f_w(v_i) = \sum_{j=1}^n \delta_{i,j} w_j = w_i$.

(2) 任意の $a, b \in \mathbb{K}$ と $u, v \in V$ に対して $f_w(au+bv) = af_w(u) + bf_w(v)$ を示せば良い. 適当な $a_j, b_j \in \mathbb{K}$ $(j = 1, \ldots, n)$ が存在して $u = \sum_{j=1}^n a_j v_j$, $v = \sum_{j=1}^n b_j v_j$ と表せるが, $au + bv = \sum_{j=1}^n (aa_j + bb_j) v_j$ だから $f_w(au+bv) = \sum_{j=1}^n (aa_j + bb_j) w_j = a\sum_{j=1}^n a_j w_j + b\sum_{j=1}^n b_j w_j = af_w(u) + bf_w(v)$.

解答 3.4. 略.

解答 3.5. まず ϕ_B が線形写像であることを示す. 任意の $a, b \in \mathbb{K}$ と $x, y \in \mathbb{K}^n$ に対し $\phi_B(ax+by) = a\phi_B(x) + b\phi_B(y)$ を示せば良いが, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ とすると $ax + by = \begin{pmatrix} ax_1+by_1 \\ \vdots \\ ax_n+by_n \end{pmatrix}$ だから, $\phi_B(ax+by) = \sum_{i=1}^n (ax_i + by_i) v_i = a\sum_{i=1}^n x_i v_i + b\sum_{i=1}^n y_i v_i = a\phi_B(x) + b\phi_B(y)$ となって確かに成立.

次に $\phi_B(e_i) = \sum_{j=1}^n \delta_{i,j} v_i = v_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ に注意する. すると, $\mathbb{K}^n$ の標準基底 $e_1, \ldots, e_n$ と $\phi_B \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, V)$ 及び V の基底 $v_1, \ldots, v_n$ に命題 3.3.8 を適用して, ϕ_B は同型である.

解答 3.6. 任意の $v \in V$ に対し $f(v) = g(v)$ であることを示せば良いが, $v = \sum_{i=1}^n c_i v_i$, $c_i \in \mathbb{K}$ と書けて, 線形性から $f(v) = \sum_{i=1}^n c_i f(v_i)$, $g(v) = \sum_{i=1}^n c_i g(v_i)$ だから, 仮定 $f(v_i) = g(v_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ から $f = g$ が従う.