線形空間は体$\mathbb{K}$上.

§2.4. 次元

前回補足

Dfn. V: 線形空間, $W \subset V$: 部分空間, $S \subset V$: 部分集合

SがWを生成する $:\Leftrightarrow \langle S \rangle = W$

$\langle S \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i s_i \in V \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K},\ s_1, \ldots, s_n \in S \right\}$

Rmk. $\langle S \rangle = W \Leftrightarrow S \subset W$ かつ Wの任意の元はSの線形結合で書ける

証 $(\Rightarrow)$ $\forall s \in S$, $s = 1 . s \in \langle S \rangle$. $\therefore S \subset \langle S \rangle = W$. $W \subset \langle S \rangle$

後半は $W = \langle S \rangle$ から従う.

$(\Leftarrow)$ $\langle S \rangle \subset W$ を示す. $S \subset W$ かつ Wは部分空間なので, $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\forall c_i \in \mathbb{K}$, $\forall s_i \in S$

$\sum_{i=1}^{n} c_i s_i \in W$. $\therefore \langle S \rangle \subset W$ □

Dfn. 2.4.1. 線形空間Vの部分集合Sが基底 $:\Leftrightarrow$ 線形独立かつVを生成する.

Dfn. 2.4.12 〃 Vが有限次元 $:\Leftrightarrow \exists S \subset V$, 有限部分集合. SはVの基底.

〃 無限次元 $:\Leftrightarrow$ Vは有限次元ではない.

Thm. 2.5.1. V: 有限次元線形空間. S, T: Vの基底 $\Rightarrow |S| = |T| < \infty$

証明略　　Sの元の個数

Dfn. 2.5.2. V: 〃. S: Vの基底　$\dim V := |S|$.

↖ Dfn. 2.4.12より存在する　↖ Thm. 2.5.1より Sの取り方によらない

Eg. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\mathbb{K}^n$: 数ベクトル空間　$\dim \mathbb{K}^n = n$

(1) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\mathbb{K}^n$の基底 (標準基底), nコ

(2) $e_1, e_1 + e_2, \ldots, e_1 + \cdots + e_n$: $\mathbb{K}^n$の基底. nコ

(3) $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$: 〃 ではない　問1.　$n-1$コ

Non-eg. $\mathbb{K}[x] := \left\{ \sum_{j=0}^{d} a_j x^j \;\middle|\; d \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ a_j \in \mathbb{K}\ (j = 0, 1, \ldots, d) \right\}$

: $\mathbb{K}$線形空間 (問2), 無限次元 (問2)

§3. 線形写像の行列表示

§3.1. 線形写像

V, W：線形空間．

$\mathrm{Hom}(V,W) := \{ f : V \to W \mid 線形写像 \}$ ← $\forall v, v' \in V,\ \forall c, c' \in \mathbb{K}.$ $f(cv + c'v') = c \cdot f(v) + c' f(v')$

$\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V,V)$

E.g. 1.4.2. $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ ← $m \times n$ 行列．$l_A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$．$l_A(v) := Av$ 左A倍写像

E.g. $C^\infty(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \mathbb{R}の任意の点で，任意回微分可能 \}$

：滑らかな函数の空間，$\mathbb{R}$線形空間．

$\frac{d}{dx} : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$，$f \longmapsto f'$　$\mathbb{R}$線形．$\left[\because\ (af+bg)' = af' + bg' \quad a, b \in \mathbb{R},\ f, g \in C^\infty(\mathbb{R}) \right]$

$\left(\frac{d}{dx}\right)^n : f \longmapsto f^{(n)}$，〃

$D = \sum_{j=0}^n a_j \left(\frac{d}{dx}\right)^j = a_0 + a_1 \frac{d}{dx} + \cdots + a_n \left(\frac{d}{dx}\right)^n : f \mapsto \sum_{j=0}^n a_j f^{(j)}$

$D \in \mathrm{End}(C^\infty(\mathbb{R}))$

Prp. 3.1.3 V, W：線形空間．V：有限次元．$v_1, \ldots, v_n \in V$：基底．

$w_1, \ldots, w_n \in W$ に対し，$\exists! f \in \mathrm{Hom}(V,W)$．$f(v_i) = w_i \ (i = 1, \ldots, n)$

$\because$ (存在) 任意の $v \in V$ に対し，$v = \sum_{j=1}^n c_j v_j$ なる $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ が一意存在

$f_w : V \to W$ を $f_w(v) := \sum_{j=1}^n c_j w_j$ で定める．

定め方から $f_w(v_i) = w_i$ ］問3

更に f_w は線形

(一意性) $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$，$f(v_i) = w_i \ (i = 1, \ldots, n)$ なら $f = f_w$ を示す．

$\forall v \in V$，$f(v) = f_w(v)$ を示す．

$v = \sum_{j=1}^n c_j v_j$，$c_j \in \mathbb{K}$ と書けるから．

$f(v) = \sum_{j=1}^n c_j f(v_j) = \sum_{j=1}^n c_j w_j = f_w(v)$

↖ f の線形性

□

§3.3. 線形同型

Dfn. 3.3.1. V, W : 線形空間.
$f : V \to W$ が同型 :$\Leftrightarrow$ f は可逆かつ線形. この時 $f : V \xrightarrow{\sim} W$ と書く.

Lem. 3.3.5 (0) 恒等写像 $\mathrm{id}_V : V \to V$ は同型
(1) 同型 $f : V \xrightarrow{\sim} W$ の逆写像 $f^{-1} : W \to V$ は同型.
(2) 〃 $f : V \xrightarrow{\sim} W$, $g : U \xrightarrow{\sim} V$ の合成 $f \circ g : U \xrightarrow{\sim} W$ は同型.
証明：問4

Prp. 3.3.8. V, W : 有限次元線形空間. $v_1, \dots, v_n$: V の 基底.
$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ に対し、
f は同型 $\Longleftrightarrow$ $f(v_1), \dots, f(v_n)$: W の基底.

$\because$ $w_i := f(v_i)$ $(i = 1, \dots, n)$ と書く.
($\Rightarrow$) (線形独立) $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$, $\sum_{i=1}^n c_i w_i = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$ を示す
Lem.(1) より f^{-1} は線形.
$\therefore$ $0 = f^{-1}(0) = f^{-1}(\sum_{i=1}^n c_i w_i) = \sum_{i=1}^n c_i f^{-1}(w_i) = \sum_{i=1}^n c_i v_i$
v_i 達は基底だから $c_1 = \dots = c_n = 0$.
(生成) $\forall w \in W$. $f^{-1}(w) \in V$ は $f^{-1}(w) = \sum_{i=1}^n c_i v_i$, $c_i \in \mathbb{K}$ と書ける
f の線形性から $w = f(f^{-1}(w)) = f(\sum c_i v_i) = \sum c_i f(v_i) = \sum c_i w_i$
($\Leftarrow$) Prp.3.1.3 から $\exists g \in \mathrm{Hom}(W, V)$, $g(w_i) = v_i$ $(i = 1, \dots, n)$.
$\forall v \in V$, $v = \sum_{i=1}^n c_i v_i$, $c_i \in \mathbb{K}$ と表せて
$(g \circ f)(v) = g(\sum c_i f(v_i)) = \sum c_i g(w_i) = \sum c_i v_i = v$ $\therefore g \circ f = \mathrm{id}_V$
$\forall w \in W$, $w = \sum_{i=1}^n c_i w_i$, $c_i \in \mathbb{K}$ と表せて
証：問5
$(f \circ g)(w) = f(\sum c_i g(w_i)) = \sum c_i f(v_i) = \sum c_i w_i = w$ $\therefore f \circ g = \mathrm{id}_W$
よって f は可逆. $\square$

Thm 3.3.9. V : 有限次元線形空間, $\dim V = n$, $B = (v_1, \dots, v_n)$: V の(順序付き)基底
$\Rightarrow$ $\phi_B : \mathbb{K}^n \to V$, ${}^t(c_1, \dots, c_n) \mapsto \sum_{i=1}^n c_i v_i$ は同型. $\square$

§3.4. 行列表示

Prp. 3.4.1. V, W: 有限次元線形空間, $n := \dim V$, $m := \dim W$

$B_V = (v_1, \dots, v_n)$: Vの基底, $\phi_{B_V}: \mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} V$. Prp.3.3.9の同型

$B_W = (w_1, \dots, w_m)$: W 〃 , $\phi_{B_W}: \mathbb{K}^m \xrightarrow{\sim} W$. 〃

$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^m w_i a_{ij}, \quad a_{ij} \in \mathbb{K}$$

で $A := (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ を定める. fの行列表示

$\ell_A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $v \mapsto Av$. 左A倍写像

$\phi_{B_W}^{-1} \circ f \circ \phi_{B_V}: \mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} V \to W \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^m$: 線形写像の合成.

この時 $\ell_A = \phi_{B_W}^{-1} \circ f \circ \phi_{B_V}$ ← Lem.3.3.5(3)

∵ $\mathbb{K}^n$の標準基底 e_j $(j = 1, \dots, n)$に対し

$\ell_A(e_j) = (\phi_{B_W}^{-1} \circ f \circ \phi_{B_V})(e_j)$ を示せば十分. 問6

$(\text{左辺}) = Ae_j = {}^t(a_{1j}, \dots, a_{mj}) \in \mathbb{K}^m$

$(\text{右辺}) = (\phi_{B_W}^{-1} \circ f)(v_j) = \phi_{B_W}^{-1}(\sum_i w_i a_{ij}) = \sum_i e_i a_{ij} = {}^t(a_{1j}, \dots, a_{mj})$

← $\phi_{B_V}(e_j) = \sum_i \delta_{ij} v_i = v_j$ ← $\phi_{B_W}(e_i) = w_i$ □

Dfn 3.4.2. ・fの基底B,Cに関する行列表示 $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$

$$(f(v_1)\ f(v_2) \cdots f(v_n)) = (w_1, w_2 \cdots w_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

・$V = W$の場合. $f \in \mathrm{End}(V)$ の基底Bに関する行列表示 $A \in \mathrm{Mat}(n; \mathbb{K})$

$$(f(v_1) \cdots f(v_n)) = (v_1 \cdots v_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ □

E.g. V:有限次元線形空間 $B = (v_1, \dots, v_n)$: Vの基底.

$\mathrm{id}_V \in \mathrm{End}(V)$のBに関する行列表示は $(v_1 \cdots v_n) = (v_1 \cdots v_n) \cdot I_n$ ← 単位行列 □

E.g. $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$: 2次以下の多項式空間.

$B = (1, x, x^2)$: Vの基底. $\frac{d}{dx} \in \mathrm{End}(V)$ のBに関する行列表示

$$\left(\frac{d}{dx}1\ \ \frac{d}{dx}x\ \ \frac{d}{dx}x^2\right) = (0\ \ 1\ \ 2x) = (1\ \ x\ \ x^2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lem. U, V, W : 有限次元線形空間, B_U, B_V, B_W : 基底.
3.4.8 (2) $f' \in \mathrm{Hom}(U, V)$, A' : f' の B_U, B_V に関する行列表示. 行列の積
$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, A : f の B_V, B_W 〃 〃.
この時 $f \circ f' \in \mathrm{Hom}(U, W)$ の B_U, B_W 〃 は AA'

(4) $f \in \mathrm{End}(V)$ の B_V に関する行列表示 A について.
f が同型 $\Longleftrightarrow$ A が正則行列

∵ (2) $B_U = (u_1, \dots, u_n)$, $B_V = (v_1, \dots, v_m)$, $B_W = (w_1, \dots, w_\ell)$

$f'(u_k) = \sum_{j=1}^m v_j a'_{jk}$ $\quad A' = (a'_{jk})_{j,k}$

$f(v_j) = \sum_{i=1}^\ell w_i a_{ij}$ $\quad A = (a_{ij})_{i,j}$

$(f \circ f')(u_k) = f(\sum v_j a'_{jk}) = \sum_j f(v_j) a'_{jk}$

$= \sum_j (\sum_i w_i a_{ij}) a'_{jk} = \sum_i w_i (\sum_j a_{ij} a'_{jk})$

$= \sum_i w_i a''_{ik}$, $\quad a''_{ik} := \sum_j a_{ij} a'_{jk}$

$=$ AA' の (i,k) 成分.

(4) ($\Rightarrow$) 逆写像 f^{-1} が存在して $f^{-1} \in \mathrm{End}(V)$.
A' : f^{-1} の B_V に関する行列表示
$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V$ と (2) から $AA' = A'A = I_n$
よって A は可逆.

($\Leftarrow$) A の逆行列 A^{-1} が存在. $\ell_{A^{-1}} \in \mathrm{End}(K^m)$: 左 A^{-1} 倍写像
$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ より $\ell_{AA^{-1}} = \ell_{A^{-1}A} = \ell_{I_n} = \mathrm{id}_{K^m}$

$\phi := \phi_{B_V}$ $\quad g := \phi \circ \ell_{A^{-1}} \circ \phi^{-1} : V \xrightarrow{\sim} K^m \to K^m \xrightarrow{\sim} V$

$g \in \mathrm{End}(V)$ の B_V に関する行列表示は A^{-1} (∵ Prp. 3.4.1)

一方で $f = \phi \circ \ell_A \circ \phi^{-1}$ (∵ 〃)

∴ $f \circ g = (\phi \circ \ell_A \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \ell_{A^{-1}} \circ \phi^{-1}) = \phi \circ (\ell_A \circ \ell_{A^{-1}}) \circ \phi^{-1}$

$= \phi \circ \ell_{AA^{-1}} \circ \phi^{-1} = \phi \circ \mathrm{id}_{K^m} \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_V$

$g \circ f = \phi \circ \ell_{A^{-1}} \circ \ell_A \circ \phi^{-1} = \phi \circ \ell_{A^{-1}A} \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_V$

∴ f は可逆 □