現代数学基礎 BI　4 月 23 日分課題解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2024B1.html

問題. 実開区間 $(-\pi,\pi) \subset \mathbb{R}$ 上の実数値函数全体がなす集合 V は, 函数の和とスカラー倍

$$(f+g)(x) \coloneqq f(x)+g(x), \quad (cf)(x) \coloneqq c \cdot f(x) \quad (f,g \in V,\ c \in \mathbb{R})$$

及び零函数 $0_V(x) \coloneqq 0$ に関して実線形空間をなす. また, 一次函数 x と指数函数 $\exp(x)$ 及び三角函数 $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x+\frac{\pi}{4})$ は V の元である.

(1) V の二元 x と $\exp(x)$ が線形独立であることを示せ.

(2) V の三元 $\sin(x), \cos(x), \sin(x+\frac{\pi}{4})$ が線形独立か否か論じよ.

解答. $I \coloneqq (-\pi,\pi)$ と略記する.

(1) $a,b \in \mathbb{R}$ を係数とする一次結合 $ax+b\exp(x)$ について, $ax+b\exp(x)=0_V$ は任意の $x \in I$ に対して $ax+b\exp(x)=0$ が成立することに他ならない. 特に $x=0$ と $x=1$ の場合を考えると, $a \cdot 0 - b \cdot 1 = 0$ かつ $a \cdot 1 - b \cdot e = 0$ が成立. この連立方程式を解くと $a=b=0$. 従って $x, \exp(x) \in V$ は線形独立.

(2) $\sin(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x)$ より $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x)+(-1)\sin(x+\frac{\pi}{4})=0$. $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},-1) \neq (0,0,0)$ なので, $\sin(x), \cos(x), \sin(x+\frac{\pi}{4}) \in V$ は線形独立ではない.

コメント. (1) と (2) それぞれ 1.5 点ずつ, 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.1 点でした. 論証にギャップがあれば 0.5 点減点してあります.