現代数学基礎 BI　4 月 23 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2024B1.html

$(\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1)$ を体とし, $(V, +, ., 0_V)$ を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする. 以下の主張を示せ.

問題 2.1 (講義ノートの問題 1.2.4)**.** $v \in V$ が $v + v = v$ を満たすなら $v = 0_V$.

問題 2.2. 任意の $a \in \mathbb{K}$ に対して $a.0_V = 0_V$.

問題 2.3 (講義ノートの問題 1.2.5)**.** 任意の $v \in V$ に対して $0.v = 0_V$.

問題 2.4. n を 2 以上の整数とし, 数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の単位ベクトルを $e_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\ldots$, $e_n \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と記す. $V \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^n v_i = 0 \right\}$ は $\mathbb{K}^n$ の部分空間である (この主張は証明しなくて良い). このとき, $\mathbb{K}^n$ の部分集合 $R \coloneqq \{e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n\}$ は V の生成系である.

問題 2.5. 上の問 2.4 と同じ記号のもと, R は $\mathbb{K}^n$ の生成系ではない.

解答 2.1. $v \in V$ の加法 $+$ に関する逆元 $-v$ を用いると $((-v)+v)+v = 0_V + v = v$. 一方で加法の結合律と仮定 $v+v=v$ から $((-v)+v)+v = (-v)+(v+v) = (-v)+v = 0_V$. よって $v = 0_V$.

解答 2.2. $a.0_V + a.0_V = a.(0_V + O_V) = a.0_V$ と問 2.1 から $a.0_V = 0_V$.

解答 2.3. $0.v + 0.v = (0+0).v = 0.v$ と問 2.1 から $0.v = 0_V$.

解答 2.4. 任意の $v \in V$ が $e_i - e_{i+1}$ 達の線形結合で書けることを示せば良いが, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, $v_i \in \mathbb{K}$ $(i = 1, \ldots, n)$ と置けば $v_n = -(v_1 + \cdots + v_{n-1})$ だから

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{n} v_i e_i = \sum_{i=1}^{n-1} v_i e_i - (v_1 + \cdots + v_{n-1}) e_n \\ &= v_1(e_1 - e_2) + (v_1 + v_2)(e_2 - e_3) + \cdots + (v_1 + \cdots + v_{n-1})(e_{n-1} - e_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{i} v_j \right) (e_i - e_{i+1}) \end{aligned}$$

となって, 確かに $e_i - e_{i+1}$ 達の線形結合で書ける.

解答 2.5. $\langle R \rangle$ の任意の元 v は, 適当な $c_i \in \mathbb{K}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ を用いて $v = \sum_{i=1}^{n-1} c_i (e_i - e_{i+1})$ と書けるから,

$$v = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 - c_1 \\ c_3 - c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} - c_{n-2} \\ -c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

よって $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ と表せば $\sum_{i=1}^{n} v_i = c_1 + \sum_{i=2}^{n-1} (c_i - c_{i-1}) + (-c_{n-1}) = 0$, つまり $v \in V$ である. よって $\langle R \rangle \subset V$. 一方 $V \subsetneq \mathbb{K}^n$ である (例えば $e_1 \in \mathbb{K}^n \setminus V$). 従って $\langle R \rangle \subsetneq \mathbb{K}^n$ なので, R は $\mathbb{K}^n$ の生成系ではない.