前回の残り。　　☆分属アンケート 18時まで

E.g. (函数空間)　S:空でない集合, $\mathbb{K}$:体　$f: S \to \mathbb{K}$, $s \mapsto f(s)$　$\mathbb{K}$の和

1.3.2.　$\mathbb{K}^S := \{任意の写像 S \to \mathbb{K}\} \ni f$

$f, g \in \mathbb{K}^S$　$f+g \in \mathbb{K}^S$を $\forall s \in S$, $(f+g)(s) := f(s)+g(s)$で定義

$f \in \mathbb{K}^S$, $a \in \mathbb{K}$, $a.f \in \mathbb{K}^S$を $\forall s \in S$ $(a.f)(s) := a \cdot f(s)$で定義.　$\mathbb{K}$の積

$\underline{0} \in \mathbb{K}^S$を $\forall s \in S$ $\underline{0}(s) := 0$で定義

$\Rightarrow (\mathbb{K}^S, +, \cdot, \underline{0})$は$\mathbb{K}$線形空間　$\mathbb{K}$

∵ 線形空間の定義の条件(1)-(7)を示す.

(1) $\forall f, g, h \in \mathbb{K}^S$. $(f+g)+h = f+(g+h)$ ($\mathbb{K}^S$での等式)を示す.

$\forall s \in S$, $((f+g)+h)(s) = (f+(g+h))(s)$ を示せば良い.

(左辺) $= (f+g)(s)+h(s) = (f(s)+g(s))+h(s)$ ①

(右辺) $= f(s)+(g+h)(s) = f(s)+(g(s)+h(s))$ ②

$\mathbb{K}$は体なので和の結合律が成立. ∴ ①=②

(2) $\forall f, g \in \mathbb{K}^S$. $f+g = g+f$を示す. $\forall s \in S$. $(f+g)(s) = (g+f)(s)$を示す

(左辺) $= f(s)+g(s)$. (右辺) $= g(s)+f(s)$.

体$\mathbb{K}$の和の可換性から (左辺)=(右辺)

(3) $\forall f \in \mathbb{K}^S$, $f+\underline{0} = f$, つまり $\forall s \in S$ $(f+\underline{0})(s) = f(s)$を示す.

(左辺) $= f(s)+\underline{0}(s) = f(s)+0 = f(s) =$ (右辺). ($0 \in \mathbb{K}$は零元)

(4) $\forall f \in \mathbb{K}^S$. $(-f)(s) := -f(s)$ $(s \in S)$ で $-f \in \mathbb{K}^S$が定まる.

$\forall s \in S$. $(f+(-f))(s) := f(s)+(-f)(s) = f(s)+(-f(s)) = 0$　∴ $f+(-f) = \underline{0}$

(5) $\forall f, g \in \mathbb{K}^S$, $\forall a \in \mathbb{K}$, $a.(f+g) = a.f + a.g$

(6) $\forall f \in \mathbb{K}^S$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$, $(a+b).f = a.f + b.f$, $(a \cdot b).f = a.(b.f)$　] 略

(7) $\forall f \in \mathbb{K}^S$, $1.f = f$, つまり $\forall s \in S$ $(1.f)(s) = f(s)$を示す.

(左辺) $= (1.f)(s) = 1 \cdot f(s) = f(s) =$ (右辺)　($1 \in \mathbb{K}$は単位元) □

§2 基底と次元

§2.1. 線形部分空間

Dfn. $V=(V,+,\cdot,0_V)$: $\mathbb{K}$線形空間　　$\mathbb{K}$: 体 ($\mathbb{R}$又は$\mathbb{C}$)

2.1.1. 部分集合 $W\subset V$ が V の線形部分空間

:$\Leftrightarrow$ $0_V\in W$

かつ $\forall v,w\in W$　$v+w\in W$

かつ $\forall w\in W$, $\forall a\in\mathbb{K}$, $a.w\in W$ □

問1. Lem. : $v+v=v \Rightarrow v=0_V$

(∵) $v=0+v=((-v)+v)+v$
$=(-v)+(v+v)$
$=(-v)+v=0$ □

Rmk. $W\subset V$ が部分空間 $\Leftrightarrow$ $0\in W$ かつ $\forall v,w\in W$, $\forall a,b\in\mathbb{K}$, $av+bw\in W$ □

Eg (1) $\{0_V\}\subset V$ は V の部分空間　線形空間の定ぎ(3) $v+0_V=v$ で $v=0_V$

(∵) $0_V\in\{0_V\}$, $0_V+0_V=0_V$, $\forall a\in\mathbb{K}$　$a.0_V=0_V$ □

(2) V は V の部分空間.　問2 $a.0_V+a.0_V=a.(0_V+0_V)=a.0_V$ とLem.

(3) $v\in V$, $\mathbb{K}v:=\{a.v\mid a\in\mathbb{K}\}$ は V の部分空間

(∵) $0_V=0.v\in\mathbb{K}v$,　$\longleftarrow$ 問3. $0.v+0.v=(0+0).v=0.v$ とLem.

$\forall u,w\in\mathbb{K}v$, $\exists a,b\in\mathbb{K}$, $u=a.v$, $w=b.v$

∴ $u+w=a.v+b.v=(a+b).v\in\mathbb{K}v$

$\forall w\in\mathbb{K}v$, $\exists a\in\mathbb{K}$, $w=a.v$　∴ $\forall b\in\mathbb{K}$, $b.w=b.(a.v)=(ba).v\in\mathbb{K}v$ □

(4) $\mathbb{K}^n\supset W_m:=\left\{\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_m\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} w_i\in\mathbb{K}\\ i=1,\dots,m\end{array}\right\}$　$(m=0,1,\dots,n)$

$\mathbb{K}^n=W_n\supset W_{n-1}\supset\cdots\supset W_1=\mathbb{K}\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\supset W_0=\{0\}$

は部分空間の列 □

Non-e.g. $\mathbb{R}^2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\middle| x,y\in\mathbb{R}\right\}$: $\mathbb{R}$線形空間

$\cup$

$W:=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cup\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\left\{x.\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}\cup\left\{y.\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\middle| y\in\mathbb{R}\right\}$

$=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\middle| 〃\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}\middle| 〃\right\}$

は部分空間ではない. ∵ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in W$ だが $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\notin W$ □

E.g. 2.1.9. (斉次連立方程式の解空間) $A \in M(m,n;\mathbb{K})$

$S := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = \vec{0}\}$ は $\mathbb{K}^n$ の部分空間

(∵) • $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in S$ $(\because A\vec{0} = \vec{0})$

• $\forall x, y \in S,\ \forall a, b \in \mathbb{K}$ $A(ax+by) = aAx + bAy = a\vec{0} + b\vec{0} = \vec{0}$

$\therefore ax+by \in S$ □

Prp. 2.1.12 V : $\mathbb{K}$線形空間, $W_i \subset V$ $(i \in I)$: 部分空間の族

$\Rightarrow W := \bigcap_{i\in I} W_i \subset V$ は部分空間.

← 例えば $I=\{1,2\}$ なら 2つの部分空間 $W_1, W_2 \subset V$.

(∵) • $\forall i \in I$, $0_V \in W_i$ より $0_V \in \bigcap_{i\in I} W_i = W$

• $\forall v, w \in W,\ \forall a, b \in \mathbb{K}$. $\forall i$, $av + bw \in W_i$ より

$av + bw \in \bigcap_{i\in I} W_i = W$ □

§2.2. 部分空間の生成系

線形空間Vの有限個の元$v_1, \dots, v_n$に対して $\sum_{i=1}^n v_i := (((v_1+v_2)+v_3)+\cdots+v_{n-1})+v_n \in V$

結合律から( )のつけ方によらない.

Prp. V : $\mathbb{K}$線形空間, $S \subset V$: 部分集合

$\Rightarrow \langle S \rangle := \left\{ \sum_{s\in S} c_s s \in V \;\middle|\; \begin{array}{l} c_s \in \mathbb{K}\ (s \in S) \\ \text{有限個の}s\text{を除いて}\ c_s = 0 \end{array} \right\}$

$\langle S \rangle$はSの(有限)線形結合で書ける
Vの元がなす部分集合.

→Sが無限集合でも $\sum_{s\in S} c_s s$ は有限和
でVの元 $\sum_{s\in S} c_s s \in V$ が定まる

$= \left\{ \sum_{i=1}^n c_i s_i \in V \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ c_i \in \mathbb{K},\ s_i \in S\ (i=1,\dots,n) \end{array} \right\}$

$n=0$の場合は $\sum_{i=1}^0 c_i s_i := 0_V$

($S = \phi$ の場合は $\langle \phi \rangle := \{0_V\}$)

$\langle S \rangle$ は Vの部分空間. : Sが生成する(張る)Vの部分空間

(∵) • $0_V \in \langle S\rangle$ は $\langle S\rangle$ の定義から成立.

• $\forall v, w \in V$, $\exists \{a_s \in \mathbb{K} \mid s \in S$, 有限個を除いて $a_s = 0\}$, $\exists \{b_s \in S \mid \cdots\}$.

$v = \sum_{s\in S} a_s s$, $w = \sum_{s\in S} b_s s$.　　有限個の s を除いて $ca_s + db_s = 0$

$\forall c, d \in \mathbb{K}$. $cv + dw = c\cdot\sum a_s s + d\cdot\sum b_s s = \sum(ca_s + d\cdot b_s)s \in \langle S\rangle$ □

Dfn. V: $\mathbb{K}$ 線形空間, $W \subset V$: 部分空間, $S \subset V$: 部分集合

S が W を生成する / W を張る / W の生成系 :⇔ $\langle S\rangle = W$. □

⇔ $S \subset W$ かつ, W の任意の元は S の線形結合で表せる.

Eg. (1) $S := \{e_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, e_n := \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\}$ は $\mathbb{K}^n$ の生成系.

$n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$.　(∵) $\mathbb{K}^n \ni \forall v$, $\exists v_i \in \mathbb{K}$ $(i = 1, \ldots, n)$,

$v = {}^t(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{i=1}^n v_i e_i \in \langle S\rangle$ □

(2) $\mathbb{K}^n \supset V := \{v = {}^t(\;\;〃\;\;) \mid \sum_{i=1}^n v_i = 0\}$: 部分空間

(∵) $\vec{0} = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \in V$, $\forall v, w \in V$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$,

$a.v + b.w = {}^t(a v_i + b w_i)_{i=1}^n$ は次から V の元:

$\sum_{i=1}^n (a_i v_i + b_i w_i) = a\sum_{i=1}^n v_i + b\sum_{i=1}^n w_i = a\cdot 0 + b\cdot 0 = 0$ □

(1) の S は V の生成系 (∵ S は $\mathbb{K}^n$ の生成系)

$R := \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n\}$ は V の生成系.

問4　(∵) $V \ni \forall v = v_1(e_1 - e_2) + (v_1 + v_2)(e_2 - e_3) + \cdots + (v_1 + \cdots + v_{n-1})(e_{n-1} - e_n)$

$= \sum_{i=1}^{n-1} (\sum_{j=1}^{i} v_j)(e_i - e_{i+1})$ □

Non-e.g. 上の R は $\mathbb{K}^n$ の生成系ではない.

問5　(∵) $\forall v \in \langle R\rangle$, $\exists c_i \in \mathbb{K}$ $(i = \ldots, n-1)$,

$v = \sum_{i=1}^{n-1} c_i(e_i - e_{i+1}) = c_1 e_1 + \sum_{j=2}^{n-1}(c_j - c_{j-1})e_j + (-c_{n-1})e_n$

$c_1 + (c_2 - c_1) + \cdots + (c_n - c_{n-1}) + (-c_n) = 0$　∴ $v \in V$

∴ $\langle R\rangle \subset V \subsetneq \mathbb{K}^n$ □

← 例えば $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \setminus V$

記号 $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ の場合, $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle := \langle S\rangle$ と書く.

§2.3 線形独立, 基底.

Dfn. 2.3.2 V: $\mathbb{K}$線形空間. $n\in\mathbb{Z}_{>0}$. $v_1,\dots,v_n\in V$が線形独立
$:\Leftrightarrow$ $\forall c_i\in\mathbb{K}$, $(i=1,\dots,n)$, $\sum_{i=1}^n c_i v_i = 0_V \Rightarrow c_1=\cdots=c_n=0$
部分集合$S\subset V$が線形独立　← Sが無限集合の時はこちらの定義を使う.
$:\Leftrightarrow$ 任意の(空でない)有限部分集合$\{v_1,\dots,v_n\}\subset S$について, $v_1,\dots,v_n$が線形独立. □

Dfn. 2.4.1 部分集合$S\subset V$がVの基底 $:\Leftrightarrow$ 線形独立かつSはVの生成系. □

唯一つ存在

Lem. $S=\{v_1,\dots,v_n\}$が基底 $\Leftrightarrow$ $V\ni\forall v$, $\exists!\{c_i\in\mathbb{K}\mid i=1,\dots,n\}$, $v=\sum_{i=1}^n c_i v_i$

∵ $(\Rightarrow)$ SはVの生成系なので, $\forall v\in V$. $\exists\{c_i\in\mathbb{K}\mid i=1,\dots,n\}$, $v=\sum_{i=1}^n c_i v_i$

問6　もう一組$\{d_i\in\mathbb{K}\mid i=1,\dots,n\}$, $v=\sum_{i=1}^n d_i v_i$があれば
$0_V = v-v = \sum_{i=1}^n (c_i-d_i)v_i$. 線形独立性より $c_i=d_i$ $(\forall i=1,\dots,n)$

$(\Leftarrow)$ $\forall v\in V$, $v\in\{\sum_{i=1}^n c_i v_i \mid c_i\in\mathbb{K}, i=1,\dots,n\} = \langle S\rangle$より $V=\langle S\rangle$.
$0_V=\sum_{i=1}^n 0\cdot v_i$と唯一性より $\sum_{i=1}^n c_i v_i = 0_V \Rightarrow c_1=\cdots=c_n=0$. □

Eg. 2.3.4. 2.4.2 (1) $\{e_1,\dots,e_n\}$は$\mathbb{K}^n$の基底
∵ 生成系なことは既知. $\sum c_i e_i=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow c_1=\cdots=c_n=0$より線形独立

(2) $\{e_1-e_2,\dots,e_{n-1}-e_n\}$は $V=\{{}^t(v_i)_{i=1}^n \mid \sum_{i=1}^n v_i=0\}$の基底
∵ 生成系なことは既知, $\sum c_i(e_i-e_{i+1})=\vec{0} \Leftrightarrow c_1=c_2-c_1=\cdots=c_{n-1}-c_n=0$
$\Leftrightarrow c_1=\cdots=c_n=0$より線形独立 □

Thm. 2.4.11 任意の線形空間は基底を持つ □　(証明は6月初旬)