現代数学基礎 BI　4 月 16 日分課題解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2024B1.html

問題. n を正整数とする. 実数体 $\mathbb{R}$ 上の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合

$$V := \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n+1} v_k = 0 \right\}$$

は数ベクトルの和とスカラー倍及び零ベクトルに関して $\mathbb{R}$ 線形空間をなす. $\mathbb{R}^{n+1}$ の単位ベクトルを

$$\varepsilon_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{n+1} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表し, V の元 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を $\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ で定める. そして V から $\mathbb{R}^{n+1}$ への写像 $s_1, \ldots, s_n$ を以下の様に定める.

$$s_i(v) := v - \frac{2(v, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (v \in V,\ i = 1, \ldots, n).$$

但し $(\cdot, \cdot)$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の Euclid 内積を表す. つまり $v = {}^t(v_k)_{k=1}^{n+1}$, $w = {}^t(w_k)_{k=1}^{n+1}$ に対して $(v, w) := \sum_{k=1}^{n+1} v_k w_k$.

(1) 各 $i = 1, \ldots, n$ について, 写像 s_i の像が V に含まれることを示せ.

(2) 前問より写像 $s_i \colon V \to V$ $(i = 1, \ldots, n)$ が定まるが, これらが $\mathbb{R}$ 線形写像であることを示せ.

(3) 写像 $s_1, \ldots, s_n$ が全て同型写像であることを示せ.

解答 1. 任意の $v = {}^t(v_k)_{k=1}^{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して, $(\alpha_i, \alpha_i) = 2$ と $(v, \alpha_i) = v_i - v_{i+1}$ より

$$s_i(v) = v - (v, \alpha_i)\alpha_i = v - (v_i - v_{i+1})\alpha_i = {}^t\big(v_k - \delta_{k,i}(v_i - v_{i+1}) + \delta_{k,i+1}(v_i - v_{i+1})\big)_{k=1}^{n+1}.$$

但し $\delta_{i,j}$ は Kronecker デルタ. よって $s_i(v)$ の第 k 成分 $s_i(v)_k$ は

$$s_i(v)_k = \begin{cases} v_k & (k \neq i, i+1) \\ v_{i+1} & (k = i) \\ v_i & (k = i+1) \end{cases} \tag{\#}$$

となり, ベクトル $s_i(v)$ は v の第 i 成分と第 $i+1$ 成分を置き換えたものである.

(1) 任意の $v \in V$ に対して $s_i(v) \in V$ であることを示せば良いが, (#) より

$$\sum_{k=1}^{n+1} s_i(v)_k = \sum_{k=1}^{n+1} v_k = 0$$

なので, $s_i(v) \in V$ である.

(2) 任意の $v, w \in V$ に対して

$$s_i(v + w) = (v + w) - (v + w, \alpha_i)\alpha_i = (v - (v, \alpha_i)\alpha_i) + (w - (w, \alpha_i)\alpha_i) = s_i(v) + s_i(w)$$

であり, また任意の $c \in \mathbb{R}$ と $v \in V$ に対して

$$s_i(cv) = cv - (cv, \alpha_i)\alpha_i = c(v - (v, \alpha_i)\alpha_i) = c.s_i(v).$$

よって s_i は $\mathbb{R}$ 線形写像である.

(3) 各 s_i に逆写像が存在すること示せば良い. s_i 自身が s_i の逆写像であること, つまり $s_i^2 = \mathrm{id}_V$ が成立することを示そう. (#) より s_i は第 i 成分と第 $i+1$ 成分の入れ替えだから, それを 2 回行う s_i^2 は各成分を動かさない恒等写像である.

コメント. 各小問を 1 点として, 3 点満点で採点しました. 議論が不十分な場合は 0.5 点減点してあります. 平均点は 2.1 点でした.

(3) は幾何学的に示せます: s_i は α_i と垂直な超平面 $H_i \subset V$ に関する鏡映であり, 鏡映は二回行えば元に戻るので $s_i^2 = \mathrm{id}_V$. また (3) は直接計算でも示せます:

$$\begin{aligned} s_i^2(v) &= s_i(v - (v,\alpha_i)\alpha_i) = v - (v,\alpha_i)\alpha_i - (v - (v,\alpha_i)\alpha_i, \alpha_i)\alpha_i \\ &= v - (v,\alpha_i)\alpha_i - (v,\alpha_i)\alpha_i + (v,\alpha_i)(\alpha_i.\alpha_i)\alpha_i = v - (v,\alpha_i)\alpha_i - (v,\alpha_i)\alpha_i + 2(v,\alpha_i)\alpha_i = v. \end{aligned}$$

(1) で内積とベクトルの計算間違いをしている答案が目立ちました. また (1) や (2) で, どの集合から元を取っているのかを明記せずに議論が始まっている答案も目立ちました. 解答の様に「任意の $v \in V$ に対して」や「任意の $v, w \in V$ に対して」と明記して議論を始めて下さい.