現代数学基礎 BI　4 月 16 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2024B1.html

問題 1.1 (c.f. 講義ノートの問題 1.1.4)**.** p を素数とし, $\mathbb{F}_p \coloneqq \{0, 1, \dots, p-1\}$ に二項演算 $+_p$ と $\cdot_p$ を $a +_p b \coloneqq a + b \bmod p$, $a \cdot_p b \coloneqq a \cdot b \bmod p$ で定義する. 高校数学で学んだように, $(\mathbb{F}_p, +_p, \cdot_p, 0, 1)$ は可換環である. これが更に体であること, つまり講義ノートの定義 1.1.6 の条件 (9) を満たすことを示せ.

問題 1.2. S を空でない集合とする. S から体 $\mathbb{K}$ への写像全体がなす集合 $\mathbb{K}^S$ について, 任意の $f, g \in \mathbb{K}^S$ と $a \in \mathbb{K}$ に対して $f + g, a.f \in \mathbb{K}^S$ を $(f+g)(s) \coloneqq f(s) + g(s)$, $(a.f)(s) \coloneqq a \cdot f(s)$ $(s \in S)$ で定義し, また $o \in \mathbb{K}^S$ を $o(s) \coloneqq 0$ $(s \in S)$ で定義すると, $(\mathbb{K}^S, +, ., o)$ が $\mathbb{K}$ 線形空間になることを示せ.

問題 1.3. $I \subset \mathbb{R}$ を空でない開区間とし, $\mathbb{R}$ 線形空間 $C^\infty(I) = \{f \colon I \to \mathbb{R} \mid 任意回微分可能\}$ を考える. 微分 $\frac{d}{dx} \colon f \mapsto f' = \frac{df}{dx}$ が $\mathbb{R}$ 線形写像 $\frac{d}{dx} \colon C^\infty(I) \to C^\infty(I)$ を定めることを示せ.

問題 1.4. n を正整数とし, 集合 $[n]$ を $[n] \coloneqq \{1, 2, \dots, n\}$ で定める. 体 $\mathbb{K}$ 上の数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ から函数空間 $\mathbb{K}^{[n]}$ への写像 $\psi \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^{[n]}$ を, 各 $v = {}^t(v_i)_{i=1}^n$ に対して $\psi(v) \colon [n] \to \mathbb{K}$, $\psi(v)(i) \coloneqq v_i$ で定める. また写像 $\varphi \colon \mathbb{K}^{[n]} \to \mathbb{K}^n$ を, 各 $f \colon [n] \to \mathbb{K}$ に対して $\varphi(f) \coloneqq {}^t\big(f(i)\big)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n$ で定める. ψ と φ が互いに逆写像であることを示せ.

解答 1.1. 各 $a \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ に対し, その逆元が $\mathbb{F}_p$ に存在することを示したい. $a \in \mathbb{Z}$ と見なすと, 仮定より a は p で割り切れないから, p が素数であることと合わせて, a と p は互いに素である. よって (高校数学で Euclid の互除法の系として学んだように) $x, y \in \mathbb{Z}$ が存在して $ax + py = 1$. この等式を $\bmod p$ すれば, $\mathbb{F}_p$ において $a \cdot (x \bmod p) = 1$. よって a の逆元 $(x \bmod p) \in \mathbb{F}_p$ が確かに存在する.

解答 1.2. 講義ノート命題 1.3.2 の証明を参照.

解答 1.3. 講義ノートの問題 1.4.10 を参照.

解答 1.4. 講義ノート例 1.4.6 の特別な場合だが, 念のため示しておく. 次の二つの主張を示せば良い.

- 任意の $f, g \in C^\infty(I)$ に対して $\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{d}{dx}f + \frac{d}{dx}g$ を示す. その為には, 任意の $x \in I$ に対して $\left(\frac{d}{dx}(f+g)\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}f + \frac{d}{dx}g\right)(x)$ を示せば良い.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dx}(f+g)\right)(x) &\overset{*1}{=} \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} \overset{*2}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
&\overset{*3}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&\overset{*1}{=} \left(\frac{d}{dx}f\right)(x) + \left(\frac{d}{dx}g\right)(x) \overset{*2}{=} \left(\frac{d}{dx}f + \frac{d}{dx}g\right)(x).
\end{aligned}
$$

  ここで $*1$ では微分の定義, $*2$ では線形空間 $C^\infty(I)$ における和 $+$ の定義, $*3$ では極限に関する命題「右辺の二つの極限が存在していれば極限の和は和の極限に等しい」を用いた.

- 任意の $f \in C^\infty(I)$ と $a \in \mathbb{R}$ に対して $\frac{d}{dx}(a.f) = a.\frac{d}{dx}f$ を示す. その為には, 任意の $x \in I$ に対して $\left(\frac{d}{dx}(af)\right)(x) = \left(a.\frac{d}{dx}f\right)(x)$ を示せば良い.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dx}(a.f)\right)(x) &\overset{*1}{=} \lim_{h\to 0} \frac{(a.f)(x+h) - (a.f)(x)}{h} \overset{*2'}{=} \lim_{h\to 0} \frac{a \cdot f(x+h) - a \cdot f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(a \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \overset{*3'}{=} a \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \overset{*1}{=} a \left(\frac{d}{dx}f\right)(x) \overset{*2'}{=} \left(a.\frac{d}{dx}f\right)(x).
\end{aligned}
$$

  ここで $*1$ では微分の定義, $*2'$ では線形空間 $C^\infty(I)$ におけるスカラー倍 . の定義, $*3'$ では極限に関する命題「右辺の極限が存在していれば, 極限の定数倍は定数倍の極限に等しい」を用いた.