2023年度現代数学基礎CⅢ　講義ノート

担当:　柳田 伸太郎

ver. 2024.01.18

目次

0　講義の概要

0.1　概要

この講義の内容

この講義は二年生を対象として**複素関数論**を扱います．春学期の複素関数論の講義の続きとして位置づけられています．具体的には以下の内容を扱う予定です．

- 春学期の複素関数論の復習: 複素微分, 正則関数, 複素積分, Cauchy の積分定理・積分公式
- 冪級数と正則関数
- 有理型関数, 留数定理, Laurent 展開
- 等角写像, Riemann の写像定理
- ガンマ関数, ゼータ関数, 楕円関数

講義の進め方

この講義は二コマ続きの設定で, 一コマ目は講義中心, 二コマ目は演習中心で進めます．
予め講義ノートを読み, **演習問題も解いて**おいて下さい．予復習には週 4 時間程度かけて下さい．

予定

- 講義日程と各講義の内容を以下のように予定しています．全部で講義 14 日 + 試験 2 日です．

日付	内容	日付	内容
10/05	複素微分	10/12	冪級数と正則関数
10/14 (土)	複素積分	10/19	Cauchy の積分定理 1
10/26	Cauchy の積分定理 2	11/02	正則関数の性質
11/09	有理型関数	11/16	留数定理
11/30	関数の大域的表示	12/07	**中間試験**
12/14	等角写像	12/21	ガンマ関数
01/11	ゼータ関数	01/18	楕円関数
01/25	**定期試験**		

- 10/14 (土) の木曜授業日も講義を行います．
- 10/05, 10/14, 10/19 の 3 回の内容は春学期の復習です．
- 12/07 の 1 コマ目に中間試験を, 01/25 の 1 コマ目に定期試験を実施する予定です．それぞれ 2 コマ目の講義はありません．

教科書・参考書

- 教科書は下記の [1] です．主な参考書は下記の [2] と春学期の教科書 [3] です．

[1] 岸正倫, 藤本坦孝, **複素関数論**, 学術図書 (1980).

[2] E. M. Stein, R. Shakarchi, **Complex Analysis**, Princeton lectures in Analysis Ⅱ, Princeton University Press (2003);
日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, **プリンストン解析学講義 Ⅱ 複素解析**, 日本評論社 (2009).

[3] 川平友規, **入門 複素関数**, 裳華房 (2019). [Kindle 版有り]

[1] と [2] 共にこの講義全体をカバーしていますが, 講義ノートは主に [2] の Stein 達の本を参考に作ってあります. また 11 月末までの内容は春学期の教科書 [3] でカバーできます.

- その他の参考書を挙げます. 最初の二つはこの講義全般に役立つ有名な本です. 三冊目は楕円積分/楕円関数に関する近刊の本です.
  - 神保道夫, **複素関数入門**, 岩波書店 (2003).
  - L. Ahlfors, **Complex Analysis**, 3rd edition, McGraw-Hill (1979);
    日本語訳: アールフォルス著, 笠原乾吉訳, **複素解析**, 現代数学社 (1982).
  - 武部尚志, **楕円積分と楕円関数**, 日本評論社 (2019).
- 講義ノートに演習問題を載せていますが, 量的には不足しています. 上記の参考書についている練習問題や数学演習 V,VI の問題, そして例えば下記のような演習書で練習を積んで下さい.
  - M. R. Spiegel 著, 石原宗一訳, **複素解析**, マグロウヒル大学演習, オーム社 (1995).
  - E. Pap, **Complex Analysis through Examples and Exercises**, Texts in the Mathematical Sciences Book 21, Springer (1999).

成績

主に定期試験の点数で成績を決めます. 定期試験では正則性・Cauchy の積分定理・有理型関数・留数定理・Laurent 展開といった主要概念の理解を問います.

課題

毎回 TACT で課題を出します. 成績には反映させませんが, 理解度の確認になるので奮って提出して下さい. 問題は TACT の「課題」に, 講義日の 0 時に掲載します. 締切は講義日の 23 時です.

不可と欠席の基準

定期試験を受験しなければ欠席です. 定期試験の点数が 0 だと不可です.

オフィスアワー・連絡先

オフィスアワーは随時設けます. TACT のメッセージかメール (yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp) で相談して下さい.

ウェブページ

この講義用のウェブページを以下のアドレスに作りました. 予定や板書内容などを掲載します.

https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023WC3.html

0.2　全般的な記号

この講義ノートの全編で用いる記号を説明します.

(1) $\mathbb{N} \coloneqq \{0, 1, 2, \ldots\}$ で非負整数全体の集合を表す.

(2) 整数全体, 有理数全体, 実数全体, 複素数全体の集合をそれぞれ $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ で表す.

(3) 複素数について, 虚数単位は i で, 実部は Re で, 虚部は Im で表す.

(4) $\mathbb{R}_{>0}$ は正の実数全体のなす集合を, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ は非負実数全体のなす集合を表す. 同様に $\mathbb{Z}_{>0}$, $\mathbb{Q}_{\leq 0}$ 等の記号も用いる.

(5) 集合 T に対し $S \subset T$ と書いたら, S は T の部分集合であることを意味する.

(6) 集合 S と T に対し, $S \setminus T \coloneqq \{s \in S \mid s \notin T\}$ で集合差を表す.

(7) 集合 S と T に対し, $S \sqcup T$ で非連結和, つまり交わりのない合併を表す.

(8) $\delta_{m,n}$ で Kronecker のデルタを表す. つまり $m = n$ なら $\delta_{m,n} = 1$, $m \neq n$ なら $\delta_{m,n} = 0$.

(9) 可算無限個の点列ないし数列 $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ を $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n\geq 0}$ または $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で表す.

1 複素微分

この節は春学期の復習で, 複素数平面の集合および位相, 複素関数と複素微分 (正則微分), および Cauchy-Riemann 方程式を扱います. 記述は参考書 [SS, Chapter 1, §1, §2] に基づきます.

1.1 複素数平面

複素数平面内の集合および位相に関する用語をまとめて紹介します. より詳しい議論は位相空間論の講義 (現代数学基礎 AII) で扱われます. 教科書 [岸藤, §1.1] や春学期の教科書 [川平, §2.1] 参照して下さい.

(1) $c \in \mathbb{C}$ と $r \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し,

$$D(c,r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < r\}$$

を中心 c, 半径 r の**開円板** (open disk) と呼ぶ. また

$$\overline{D(c,r)} := \{z \in \mathbb{C} \mid |c-z| \leq r\}$$

を中心 c, 半径 r の**閉円板** (closed disk) と呼ぶ.

(2) $S \subset \mathbb{C}$ を部分集合とする. $z \in \mathbb{C}$ が S の**内点** (interior point) であるとは, $D(z,r) \subset S$ となる $r \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在することをいう. S の内点全体からなる集合を

$$S^\circ := \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ は } S \text{ の内点}\}$$

と書いて S の**内部** (interior) と呼ぶ. いつも $S^\circ \subset S$ が成立する (問題 1.1.1).

(3) 部分集合 $S \subset \mathbb{C}$ が**開集合** (open set) であるとは $S^\circ = S$ となることをいう. 開円板 $D(c,r)$ は開集合である (問題 1.1.2). また任意の部分集合 $S \subset \mathbb{C}$ に対し, その内部 S° は開集合である (問題 1.1.4).

(4) 部分集合 $S \subset \mathbb{C}$ が**閉集合** (closed set) であるとは補集合 $S^c := \mathbb{C} \setminus S$ が開集合であることをいう. 閉円板 $\overline{D(c,r)}$ は閉集合である (問題 1.1.3). また $\mathbb{C}$ 全体や $\emptyset$ (空集合) は開集合かつ閉集合である (問題 1.1.5).

演習問題 (解答: 102 ページ)

問題 1.1.1. 任意の部分集合 $S \subset \mathbb{C}$ に対して $S^\circ \subset S$ となることを示せ.

問題 1.1.2. 開円板が開集合であることを示せ.

問題 1.1.3. 閉円板が閉集合であることを示せ.

問題 1.1.4. 任意の部分集合 $S \subset \mathbb{C}$ に対し, その内部 S° が開集合であることを示せ.

問題 1.1.5. $\mathbb{C}$ と $\emptyset$ がそれぞれ開集合かつ閉集合であることを示せ.

問題 1.1.6. $\mathbb{C}$ における $\mathbb{Q}$ の補集合 $\mathbb{Q}^c = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ が開集合か否か, および閉集合か否かを論じよ.

1.2　複素微分

複素関数の微分について復習します．教科書 [岸藤, §1.3] や春学期の教科書 [川平, §2.4, §2.5] も参照して下さい．以下簡単のため，**開集合または閉集合**といったら §1.1 の意味での $\mathbb{C}$ **の開集合または閉集合のこと**とします．また**開集合** U **からの複素数値関数** $U \to \mathbb{C}$ のことを**複素関数**ないし単に**関数**と呼びます．

この先に進む前に，**複素数列の極限**，**複素関数の極限**，**複素関数の連続性**を復習しておいて下さい ([岸藤, §1.2] や [川平, §2.1, 付録 B] など)．

定義. 空ではない開集合 U 上の関数 f が $z \in U$ で**正則** (holomorphic) または**複素微分可能**であるとは，商 $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ の $h \to 0$ における極限が存在することをいう．正則であるときは

$$f'(z) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

と書き，f の z における (複素または正則) **微分** (derivative) という．

関数 f が**開集合** U **上で正則**であるとは，U の各点で f が (定義されていてかつ) 正則であることをいう．

f が**閉集合** C **上で正則**であるとは，C を含む空でない開集合が存在して，その上で正則であることをいう．

f が $\mathbb{C}$ 上で正則なとき，f を**整関数** (entire function) と呼ぶ．

例 1.2.1. 正則な関数と正則でない関数の例を挙げる．

(1) 関数 $f(z) = z$ は $\mathbb{C}$ の任意の開集合で正則，特に整関数であり，$f'(z) = 1$ である．任意の多項式 $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ も整関数であり，$f'(z) = n a_n z^{n-1} + \cdots + a_1$ となる．後者は後の命題 1.2.2 (1), (2) から得られる．

(2) $f(z) = 1/z$ は原点を含まない任意の開集合上で正則であり，$f'(z) = -1/z^2$．より一般に関数の商については命題 1.2.2 (3) が成立する．

(3) 関数 $f(z) = \overline{z}$ は正則ではない．

次の命題は実関数の場合と殆ど同じ方法で示せる．

命題 1.2.2. f と g を開集合 U 上の正則関数とする．このとき

(1) $f+g$ は U 上正則で $(f+g)' = f' + g'$．

(2) fg は U 上正則で $(fg)' = f'g + fg'$．

(3) $z \in U$ において $g(z) \neq 0$ なら f/g は z で正則で $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$．

演習問題 (解答: 102 ページ)

問題 1.2.1. 以下の関数 $f(z)$ の $z = 0$ における連続性を調べよ．

(1) $f(z) := \begin{cases} (z+\overline{z})/|z| & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}$.　(2) $f(z) := \begin{cases} (z+\overline{z})^2/|z| & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}$.

(3) $f(z) := \begin{cases} (z+\overline{z})/|z|^{1/2} & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}$.

問題 1.2.2. 例 1.2.1 (3) を示せ．

1.3 Cauchy-Riemann 方程式

次に複素関数の正則性のいい換えである **Cauchy-Riemann 方程式**を復習します．教科書 [岸藤, §1.3, pp.21–24] や春学期の教科書 [川平, §2.6] も参照して下さい．引き続き, (複素) 関数といったら開集合 $U \subset \mathbb{C}$ 上の複素数値関数 $U \to \mathbb{C}$ のこととします．

定理 1.3.1 ([川平, 定理 2.8])**.** $U \subset \mathbb{C}$ を開集合とする．

(1) f を U 上の複素関数とし, 実部と虚部への分解を

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

と書く．$z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ において $f = u + iv$ が正則ならば, 連立方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \tag{1.3.1}$$

が成立する．これを **Cauchy-Riemann 方程式**と呼ぶ．

(2) $U \subset \mathbb{R}^2$ とみなし, 二変数実関数 $u\colon U \to \mathbb{R}$ と $v\colon U \to \mathbb{R}$ が二条件

- 連続微分可能 (導関数が存在し, それは連続)
- Cauchy-Riemann 方程式が成立する

を満たすと仮定する．このとき $f := u + iv\colon U \to \mathbb{C}$ は U 上正則である．

偏微分を $u_x := \dfrac{\partial u}{\partial x}$ などと略記し, z_0 での条件であることも省略すると, Cauchy-Riemann 方程式 (1.3.1) は次のように略記できます．

$$u_x = v_y. \quad u_y = -v_x.$$

Cauchy-Riemann 方程式の別形を思い出しておきましょう．以下のように二つの作用素を導入します．

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\Big), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\Big).$$

この記号は次のような意味で用います．

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} f = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\Big), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\Big).$$

$\frac{\partial}{\partial z}$ を**正則微分** (作用素), $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ を**反正則微分** (作用素) と呼ぶ．

命題 1.3.2 ([川平, 章末問題 2.16])**.** f を開集合 U 上の関数とする．f が $z_0 \in U$ で正則なら,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0).$$

(1) の証明は問題 1.3.1 を参照して下さい．

演習問題 (解答: 103 ページ)

問題 1.3.1. 開集合 U 上の関数 $f = u + iv$ と $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ について, 以下の同値性を示せ．

$$\text{Cauchy-Riemann 方程式 (1.3.1) が成立する} \iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.$$

問題 1.3.2. 極座標を用いて複素変数 z とその関数 $f(z)$ を

$$z = x + iy = re^{i\theta}, \quad f(z) = u + iv = Re^{i\varphi}$$

と表すと, $f(z)$ に関する Cauchy-Riemann 方程式は以下の三通りに書き換えられることを示せ.

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}.$

(2) $\dfrac{\partial R}{\partial x} = R\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial R}{\partial y} = -R\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}.$

(3) $\dfrac{\partial R}{\partial r} = \dfrac{R}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial R}{\partial \theta} = -R\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}.$

問題 1.3.3. 連結 (定義 3.3.1 参照) な開集合 U 上の正則関数 f の実部 $\mathrm{Re}\, f$ が定数ならば, f も定数であることを示せ.

問題 1.3.4. $\mathbb{C}$ 上の正則関数 $f = u + iv$ であって $u_y = 0$ となるものを全て求めよ.

問題 1.3.5. f を開集合 U 上の正則関数とする. 開集合 $\overline{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} \in U\}$ 上の関数 g を $g(z) := \overline{f(\overline{z})}$ で定める. g は $\overline{U}$ 上の正則関数であることを示せ.

問題 1.3.6 (正則関数と調和関数)**.** $z = x + iy$ を複素変数の実部と虚部への分解とする.

(1) $\Delta := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ を**ラプラシアン** (Laplacian) と呼ぶ. 偏微分の順序交換 $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x}$ を使って以下の等式を示せ.

$$\Delta = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}.$$

(2) $\Delta h(x, y) = 0$ となる実二変数の実関数 $h(x, y)$ を**調和関数** (harmonic function) と呼ぶ. $f(z)$ が開集合 Ω 上の正則関数のとき, f の実部と虚部はそれぞれ二変数 x, y に関する調和関数であることを示せ. 但し偏微分の順序交換が可能であること, つまり $\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f$ を認めてよい.

2 冪級数と正則関数

この節では冪級数と正則関数の関係, および初等関数を扱います. 初等関数の方は春学期に一通り扱われているはずですが, 冪級数については新規内容です. 記述は参考書 [SS, Chapter 1, §2.3] に基づきます.

前節と同様に, 関数といったら複素数変数の複素数値関数のことを意味します.

2.1 一様収束

準備として, 連続関数列の収束先が連続であるための十分条件である一様収束性と, その類似概念である広義一様収束性を説明します. 教科書 [岸藤, §1.2, pp.16–18] や春学期の教科書 [川平, 付録 B.3] も参照して下さい.

以下, $[0,\infty] \coloneqq \mathbb{R}_{\geq 0} \sqcup \{\infty\}$ と置きます. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ の部分集合 S に対して, その上限 $\sup S \in [0,\infty]$ が定まります. つまり, S が上に有界なら $\sup S \in \mathbb{R}$ が定まり, 有界でなければ $\sup S = \infty$ です (不慣れな人は §2.4 を参考にして下さい).

定義 2.1.1. f 及び f_n $(n \in \mathbb{N})$ を空でない開集合 $U \subset \mathbb{C}$ 上の関数とする. 空でない部分集合 $V \subset U$ に対し

$$\|f - f_n\|_V \coloneqq \sup\{|f(z) - f_n(z)| \mid z \in V\} \in [0,\infty]$$

と定める. この値の n に関する極限が

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_V = 0$$

を満たすとき, **関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ は f に V 上一様収束する**という.

また, 任意の有界閉部分集合 $\emptyset \neq K \subset U$ 上で

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_K = 0$$

であるとき, **$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ は f に U 上広義一様収束する**という.

定義より, 関数列 $\{f_n\}$ が f に U 上一様収束するなら, U 上広義一様収束します (問題 2.1.1).

命題 2.1.2 (一様収束極限の連続性, [川平, 定理 B.11], [岸藤, §1.2, 定理 5])**.** 空でない開集合 $U \subset \mathbb{C}$ 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が関数 f に U 上広義一様収束するなら, f は U で連続である.

証明. 任意に $u \in U$ をとると, U が開集合だから, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して $K \coloneqq \overline{D(u,r)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-u| \leq r\} \subset U$. 仮定より $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_K = 0$ なので, 任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ に対しある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ なら $\|f_n - f\|_K < \varepsilon/3$. f_n は連続関数だから, $0 < \delta < r$ を満たす適当な $\delta \in \mathbb{R}$ が存在して, $|z-u| < \delta$ なら $|f_n(z) - f_n(u)| < \varepsilon/3$. よって任意の $z \in D(u,\delta) \subset K$ に対して

$$\begin{aligned} |f(z) - f(u)| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(u)| + |f_n(u) - f(u)| \\ &\leq 2\|f_n - f\|_K + \|f_n(z) - f_n(u)\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

例 2.1.3 ([岸藤, 例題 2])**.** $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(z) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$ とすると, 関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が原点中心で半径 1 の開円板 $D = D(0,1)$ 上で $f(z) \coloneqq 1/(1-z)$ に広義一様収束する.

実際, 任意の有界閉集合 $K \subset D$ について, $K \subset D(0,r)$ かつ $0 < r < 1$ となる実数 r が存在するから, 任意の $z \in K$ に対して

$$|f_n(z) - f(z)| = \left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} - \frac{1}{1 - z} \right| \leq \frac{r^{n+1}}{1 - r},$$

つまり

$$\|f_n - f\|_K \leq \frac{r^{n+1}}{1 - r}$$

となって, $0 < r < 1$ より $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_K = 0$ が従う. すると命題 2.1.2 より $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ は D 上 f に広義一様収束する.

演習問題 (解答: 104 ページ)

問題 2.1.1. 空でない開集合 U 上の関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が関数 f に U 上一様収束するなら, U 上広義一様収束することを示せ.

2.2　冪級数と正則関数

ここでは正則関数と冪級数の関係を扱います. 教科書 [岸藤, §1.4] や春学期の教科書 [川平, 付録 C] も参照して下さい.

以下, 数列や級数と言ったら, 断らない限り複素数に値を持つもののこととします. 先に進む前に複素数列の**収束**と**絶対収束**を思い出しておいて下さい ([川平, 付録 B.1]).

複素数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し, 級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n (z - \alpha)^n$$

を係数 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, 中心 α の**冪級数**[*1] と呼びます.

級数の収束に関する用語に従って, 冪級数 $a(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$ の $z \in \mathbb{C}$ **における収束性**, および z **における絶対収束性**が定義できます.

また, $S \subset \mathbb{C}$ を部分集合として, 冪級数 $a(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$ が各 $z \in S$ で収束するとき, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k (z - \alpha)^k$ と定めれば, 関数列 $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ が関数 $a(z)$ に S 上収束することになります. すると定義 2.1.1 に従って, $a(z)$ の S **における一様収束性**, および S **における広義一様収束性**が定義できます.

例 2.2.1. 級数 $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ は原点中心半径 1 の開円板 $D = D(0,1)$ の各点 $z \in D$ で絶対収束し, $|z| > 1$ なる $z \in \mathbb{C}$ では収束しない. また例 2.1.3 より, $a(z)$ は D 上で広義一様収束する.

以下, 冪級数の収束を考えます. 中心 α の値は本質的ではないので, $\alpha = 0$ の場合だけ考えます. 収束するか否かは勿論 $z \in \mathbb{C}$ の取り方に依存しますが, 次のような主張が成立します.

命題 2.2.2 ([岸藤, §1.4, 定理 1])**.** 冪級数 $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ について, 以下が成立する.

[*1] 「冪」の画数が多いので, 「巾」で代用したり, 「べき」や「ベキ」と仮名を使うことの方が多いです.

(1) $a(z)$ が $w \in \mathbb{C}$ で収束するなら, 原点中心の開円板 $D := D(0, |w|) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < |w|\}$ 上で $a(z)$ は絶対収束かつ広義一様収束する.

(2) $a(z)$ が $u \in \mathbb{C}$ で収束しなければ, $|z| > |u|$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ で $a(z)$ は収束しない.

証明. (1) $w = 0$ なら $D = \emptyset$ なので主張は自明. よって $w \neq 0$ と仮定してよい. 級数 $a(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ が収束するので, ある $M \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n w^n| \leq M$. よって任意の $z \in D(0, |w|)$ に対し, $c := |z| / |w|$ とおけば,

$$|a_n z^n| = |a_n w^n| \frac{|z|^n}{|w|^n} \leq Mc^n$$

が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して成立する. 従って, $m < n$ を満たす任意の $m, n \in \mathbb{N}$ について

$$\sum_{k=m}^{n} \left|a_k z^k\right| \leq M \sum_{k=m}^{n} c^k \leq Mc^m/(1-c).$$

$0 \leq c < 1$ に注意すると, $m \to \infty$ で右辺は 0 に収束する. 従って $a(z)$ は D 上で絶対収束する.
次に広義一様収束性について. 任意の有界閉部分集合 $K' \subset D$ に対し, $K' \subset \overline{D(0,r)}$ かつ $0 < r < |w|$ となる実数 r が存在するから, $K := \overline{D(0,r)}$ 上で一様収束することを示せば良い. $f_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ とおくと, 各点 $z \in K$ で

$$|a(z) - f_n(z)| = \left|\textstyle\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|a_k z^k\right| \leq M \sum_{k=n+1}^{\infty} \leq Mc^{n+1}/(1-c)$$

と評価できる. 従って $\|a - f_n\|_K \leq Mc^{n+1}/(1-c)$ となり, $\lim_{n\to\infty} \|a - f_n\|_K = 0$, つまり $a(z)$ が K 上一様収束することが示せた.

(2) $|z| > |u|$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ で $a(z)$ が収束するなら, $u \in D(0, |z|)$ だから (1) より $a(u)$ が収束して矛盾する.

□

以下, $[0, \infty] := \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ と書きます.

系 2.2.3 (収束半径の存在, [岸藤, p.31])**.** 冪級数 $a(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ に対し,

$$R := \sup S, \quad S := \{|w| \in \mathbb{R} \mid w \in \mathbb{C},\ a(w) \text{ は収束する}\} \tag{2.2.1}$$

と定めると $R \in [0, \infty]$ であり, 次の二条件が成立する.

- $a(z)$ は $D(0, R)$ 上で絶対収束かつ広義一様収束する.
- $|z| > R$ なら $a(z)$ は収束しない.

更に, $R \in [0, \infty]$ であって上の二条件が成立するものは一意である.

証明の前に用語を導入しておきます.

定義 2.2.4. 系 2.2.3 の $R \in [0, \infty]$ を冪級数 $a(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の (原点を中心とする) **収束半径** (radius of convergence) と呼ぶ. また原点中心の開円板 $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ を $a(z)$ の**収束円板** (disk of convergence) と呼ぶ.

系 2.2.3 の証明. $a(0) = a_0$ より $0 \in S$ なので, $R = \sup S \in [0, \infty]$ である[*2].

一番目の条件を示そう. $0 < r < R$ を任意にとると, $r < s < R$ を満たす $s \in S$ が存在する. よって, 円 $|z| = s$ 上の適当な点 w で $a(w)$ は収束する. 従って命題 2.2.2 より, $|z| < r$ において $a(z)$ は絶対収束かつ広義一様収束する. r は $r < R$ の条件下で任意にとっていたから, 一番目の条件が成立する.

二番目の条件について. 命題 2.2.2 より, $r \in S$ かつ $0 \leq s < r$ なら $s \in S$ である. よって $|z| > R = \sup S$ なら $|z| \notin S$. これから従う.

一意性について. まず $R' < R$ が二条件を満たすと仮定すると, $R' < |z| < R$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ について, R に関する条件から $a(z)$ は収束し, R' に関する条件から $a(z)$ は収束しないから矛盾する. $R < R'$ の場合も同様に矛盾する. 従って $R' = R$. □

次のように, 収束半径が比較的に簡単に求まる場合があります.

命題 2.2.5 (ratio test, [岸藤, p.31 (3)])**.** 冪級数 $a(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ について, 極限

$$R := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \in [0, \infty]$$

が存在すれば, この R が系 2.2.3 の収束半径である. 但し $R = \infty$ は $|a_n/a_{n+1}|$ が発散する場合のことを意味する.

証明. $\rho := \lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$ と置く. また (2.2.1) の集合 $S \subset \mathbb{R}$ を用いる

まず $R \geq \rho$ を示す. $\rho > 0$ と仮定してよい. 任意の $0 < s < \rho$ に対して $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| s^n < \infty$ が示せれば, $R \geq \rho$ が従う. 実際, $z \in \mathbb{C}$ が $|z| = s$ を満たすなら $a(z)$ が収束するから $s \in S$ であり, $R = \sup S \geq s$ が従う. さて, $s < r < \rho$ なる $r \in \mathbb{R}$ をとると, $r < \rho = \lim_n |a_n/a_{n+1}|$ だから, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ なら $|a_n/a_{n+1}| > r$. 従って任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して $|a_{N+k}| < |a_N| / r^k$ となるので, $0 < s/r < 1$ に注意して

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| s^n = \sum_{n=0}^{N} |a_n| s^n + \sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| s^{N+k} \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n| s^n + s^N |a_N| \sum_{k=0}^{\infty} (s/r)^k < \infty.$$

次に $R \leq \rho$ を示す. $\rho < \infty$ と仮定してよい, 前段と同様の議論により, 任意の $s > \rho$ に対して $s \notin S$ を示せば良い. $\rho < r < s$ なる $r \in \mathbb{R}$ をとると, $r > \rho = \lim_n |a_n/a_{n+1}|$ だから, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ なら $|a_n/a_{n+1}| < r$. 従って任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して $|a_{N+k}| > |a_N| / r^k$ となるので, $s/r > 1$ に注意して $\lim_{k\to\infty} |a_{N+k}| s^{N+k} = \infty$. よって $|z| = s$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $a(z)$ は収束しない. つまり $s \notin S$. □

例 2.2.6. 次の冪級数の半径は $+\infty$, つまり任意の $z \in \mathbb{C}$ について収束する.

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

この冪級数で定まる z の関数 $\exp(z)$ を**指数関数** (exponential function) と呼ぶ.

例 2.2.7. 次の三つの冪級数の収束半径はどれも 1 である.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}.$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n.$

[*2] $R = \infty$ となるのは S が上に有界でないときです.

一方, 収束半径の円周上では冪級数は収束することもあれば発散することもある. 例えば上の (4) は $|z| = 1$ を満たす全ての $z \in \mathbb{C}$ で収束するが, (1) は $z = -1$ で発散する.

命題 2.2.5 が使えない場合があることあります. 例えば

例 2.2.8. 冪級数 $a(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}/(2n)!$ について, $a_{2n} := 1/(2n)!$ および $a_{2n+1} := 0$ とすると $\lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$ は存在しない. しかし $w := z^2$ に関する冪級数とみなすと $a(z) = \sum_{n\geq 0} w^n/(2n)!$ だから, $b_n = 1/(2n)!$ として $\lim_{n\to\infty} |b_n/b_{n+1}| = \infty$ となるので, $a(z)$ の収束半径は ∞ である.

任意の冪級数の収束半径は次の Cauchy-Hadamard (コーシー・アダマール) の公式で与えられます.

事実 2.2.9 (Cauchy-Hadamard の定理, [川平, 命題 C.2])**.** 冪級数 $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径 R は

$$R = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n}\right)^{-1}.$$

但し $1/0 := \infty$, $1/\infty := 0$ とする.

実数列の上極限 $\overline{\lim}$ については §2.4 を参照して下さい. 事実 2.2.9 は命題 2.2.5 と同様の方針で証明できますが, 詳細は省きます.

例 2.2.10. 冪級数の収束半径の例を挙げよう. 議論の途中で用いる等式は問題 2.2.1 で示す.

(1) 例 2.2.7 (1) の冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ の収束半径は $(\overline{\lim}_{n\to\infty} 1^{1/n})^{-1} = 1^{-1} = 1$.

(2) 例 2.2.6 の指数関数 $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ の収束半径は $(\overline{\lim}_{n\to\infty}(1/n!)^{1/n})^{-1} = 1/0 = \infty$.

(3) 例 2.2.8 の冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}/(2n)!$ の収束半径は, $a_{2n} := 1/(2n)!$ および $a_{2n+1} := 0$ として

$$\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} {a_n}^{1/n}\right)^{-1} = 1/0 = \infty.$$

次に, 冪級数はその収束半径の内側で正則関数を定めることを説明します.

定理 2.2.11 ([川平, 定理 C.3])**.** 冪級数 $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ はその収束円板上での正則関数 a を定める. そして収束円板での a の微分は次の冪級数で与えられる.

$$a'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

更に冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ の収束半径は $a(z)$ の収束半径と等しい.

定理 2.2.11 を繰り返し用いると

系 2.2.12. 冪級数は収束円板上で任意回微分可能な関数を定める.

注意. 開集合 $U \subset \mathbb{C}$ 上の関数 f が $c \in U$ で**解析的** (analytic) であるとは, c のある近傍において $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ と c を中心とする冪級数で書けることをいいます. f が U の任意の点で解析的であるとき, f は U 上解析的であるといいます. 定理 2.2.11 をいい直すと, 開集合 U 上の関数は**解析的ならば正則**です.

注意 2.2.13. 実は逆に**正則関数は解析的**, つまり級数展開を持つことが知られています. これは Cauchy の積分定理の応用として §6.1 で扱います. この正則性と解析性の同値は**実関数では成立しません**. 実関数における反例を問題 2.2.4 で扱います.

例.　(1) 例 2.2.6 の指数関数 $\exp(z)$ について $\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$.

(2) 例 2.2.7 (1) の冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ は $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 上の正則関数を定める:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

両辺を k 回微分して, 二項係数 $\binom{n}{m} := {}_n\mathrm{C}_m = n(n-1)\cdots(n-m+1)/m!$ を用いると

$$\frac{1}{(1-z)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n.$$

演習問題 (解答: 104 ページ)

問題 2.2.1. 例 2.2.10 で用いた以下の等式を示せ.

(1) $\overline{\lim}_{n\to\infty} (1/n!)^{1/n} = 0$.

(2) $a_{2n} := 1/(2n)!$ および $a_{2n+1} := 0$ として $\overline{\lim}_{n\to\infty} {a_n}^{1/n} = 0$.

問題 2.2.2. 以下の複素数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径を求めよ.

(1) $a_n = (\log n)^2$.　(2) $a_n = n!$.　(3) $a_n = \dfrac{n^2}{4^n + 3n}$.

問題 2.2.3. Fibonacci 数列 $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ から定まる級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径を求めよ.

問題 2.2.4. $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を次のように定める.

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ \exp(-1/x^2) & (x > 0) \end{cases}.$$

(1) $f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上で無限回微分可能であることを示せ.

(2) 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $f^{(n)}(0) = 0$ となることを示せ.

(3) $f(x)$ は $x = 0$ の近傍で収束級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に展開できないことを示せ.

問題 2.2.5. 以下の等式が $|z| < 1$ で成立することを示せ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$.

(3) $p \in \mathbb{N}$ に対し $f_p(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n^p z^n$ とすると $f_{p+1}(z) = z f_p'(z)$.

問題 2.2.6 (級数に関する Abel の定理)**.**　(1) $\{a_n\}_{n=1}^{N}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{N}$ を複素数の有限列とする. $B_0 := 0$, $B_k := \sum_{n=1}^{k} b_n$ $(k = 1, \ldots, N)$ とする. このとき次の等式を示せ.

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n.$$

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は複素数列であって級数和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するものとする. (1) を用いて次の等式を示せ.

$$\lim_{r\to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} r^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2.3　初等関数

最後に古典的な正則関数について復習します．教科書 [岸藤, §1.5] および春学期の教科書 [川平, §1.3, §1.4, §2.6] も参照して下さい．

定義. 例 2.2.6 の指数関数 $e^z := \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ を用いて**三角関数** (trigonometric functions) を

$$\cos z := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}, \quad \sin z := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1},$$
$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z := \frac{1}{\tan z}, \quad \sec z := \frac{1}{\cos z}, \quad \operatorname{cosec} z := \frac{1}{\sin z}$$

と定義する．$e^{\pm iz}$ や $\cos z$ 及び $\sin z$ は**周期** 2π を持つ．つまり $f(z+2\pi) = f(z)$ が成立する．

また**双曲線関数** (hyperbolic function) を

$$\cosh z := \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sinh z := \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z := \frac{\cosh z}{\sinh z}, \quad \operatorname{sech} z := \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{cosech} z := \frac{1}{\sinh z}$$

と定義する．$e^{\pm z}$ や $\cosh z$ 及び $\sinh z$ は周期 $2\pi i$ を持つ．

次に逆関数の定義を思い出しましょう．関数 f に対して $g(f(z)) = z$ 及び $f(g(z)) = z$ を満たす関数 g を f の**逆関数**と呼び $f^{-1}(z)$ と書きます．例えば $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ について，n 乗関数 z^n の逆関数を n 乗根と呼び $z^{1/n}$ と表します．

逆関数の微分の公式は高校数学の微積分で有用でしたが，複素関数論でもやはり有用です．

命題 2.3.1. 関数 f が逆関数 f^{-1} を持ち，f が z で正則かつ f^{-1} が $w := f(z)$ において連続な場合，f^{-1} は w において正則で

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

逆関数は一意とは限りません．例えば n 乗関数 z^n の逆関数は，極座標表示 $z = re^{i\theta}$ に対して

$$z^{1/n} = r^{1/n}e^{i\theta/n+2\pi ik/n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

と n 個の候補があります．通常の意味の関数を定めるにはこの候補のうちから一つ指定する，つまり**分岐を指定する**必要があります．指定しない場合は n **価関数**であるといいます．

例 2.2.6 の指数関数 $e^z := \exp(z)$ の逆関数を**対数関数** (logarithmic function) と呼び $\log z$ と書きます．$\log z$ も一意ではなく，極座標表示 $z = re^{i\theta}$ に対して

$$\log z = \log r + i(\theta + 2\pi n) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

と可算無限個の分岐があります．但し $\log r$ は正の実数 r に対する対数関数であり，こちらは一意に定まっています．分岐を指定しないときの $\log z$ は**無限多価関数**であるといいます．対数関数の場合には**主値**と呼ばれる分岐の選び方があったことを復習しましょう．

定義 2.3.2 ([川平, p.22])**.** $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し, 以下を満たす実数 r と θ が一意に決まる:

$$z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \ -\pi < \theta \leq \pi.$$

これらを用いて z の**対数の主値** (principal value of logarithm) $\operatorname{Log} z$ を次で定義する.

$$\operatorname{Log} z := \log r + i\theta.$$

関数 $\operatorname{Log} z$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上では連続だとは限りません. 正確にいうと, 任意の負の実数において不連続です. しかし 0 以下の実数全体 $\mathbb{R}_{\leq 0}$ の補集合

$$D := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$$

の上では, 関数 $\operatorname{Log} z$ は連続関数であり, 指数関数 e^z の逆関数です. すると命題 2.3.1 より

命題 2.3.3. $\operatorname{Log} z$ は D 上の正則関数である. 更に $|z| < 1$ において次の等式が成立する.

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$$

証明. 後半のみ示す. w の指数関数 e^w について $(e^w)' = e^w$ だから, 命題 2.3.1 より, $z = e^w$ として

$$(\operatorname{Log} z)' = 1/(e^w)' = 1/e^w = 1/z.$$

$|z| < 1$ なら $1 + z \in D$ であることに注意して, $(\operatorname{Log}(1+z))' = 1/(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$. 一方で ratio test (命題 2.2.5) と定理 2.2.11 より $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^n/n$ は $|z| < 1$ で正則であり, 導関数は $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$. すると次の事実 2.3.4 を $\Omega = D(0,1)$ と $f(z) = \operatorname{Log}(1+z) - \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} z^n/n$ に適用して, $\operatorname{Log}(1+z)$ と $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} z^n/n$ の差は定数. $z = 0$ での値を比較して, この定数は 0 だと分かる. □

証明の最後で次の事実を用いました. 主張に § 3 定義 3.3.1 で定義される "領域" が現れますが, ここでは $D(0,1)$ が領域であることを認めてもらえれば十分です.

事実 2.3.4 ([川平, 命題 2.10], 系 3.3.4 参照)**.** 任意の領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数 f について, 全ての $z \in \Omega$ で $f'(z) = 0$ ならば f は定数である.

対数の主値を用いて複素数冪の冪関数を定義することができます.

定義 2.3.5 ([川平, p.22])**.** $\alpha \in \mathbb{C}$ と $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して

$$z^\alpha := \exp(\alpha \operatorname{Log} z).$$

正則関数の合成は正則だから, z^α は D 上の正則関数です. また $\alpha \in \mathbb{Z}$ のときは通常の冪関数であり, $\alpha = 1/n \in \mathbb{Q}$ のときは前述の n 乗根 (の主値) です.

二項定理 $(1+z)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} z^n$ も複素数冪に一般化できます. 証明は演習問題 2.3.5 にします.

命題 2.3.6 (一般二項展開)**.** 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ と $|z| < 1$ なる $z \in \mathbb{C}$ に対し

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, \quad \binom{\alpha}{n} := \begin{cases} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)/n! & (n \geq 1) \\ 1 & (n = 0) \end{cases}.$$

三角関数の逆関数を**逆三角関数**と呼びます．以下の命題 2.3.7 と命題 2.3.8 の証明は演習問題 2.3.6, 2.3.7 にします．

命題 2.3.7. 冪級数

$$\operatorname{Arcsin} z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

の収束半径は 1 であり，それが定める収束円板 $D(0,1)$ 上の正則関数 $\operatorname{Arcsin} z$ は正弦関数 $\sin z$ の逆関数である．これを**逆正弦関数**と呼ぶ．また $D(0,1)$ 上の正則関数

$$\operatorname{Arccos} z := \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} z$$

は余弦関数 $\cos z$ の逆関数であり，それを**逆余弦関数**と呼ぶ．

命題 2.3.8. 冪級数

$$\operatorname{Arctan} z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}$$

の収束半径は 1 であり，それが定める収束円板 $D(0,1)$ 上の正則関数 $\operatorname{Arctan} z$ は正接関数 $\tan z$ の逆関数である．これを**逆正接関数**と呼ぶ．

有理関数，指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数，およびこれらの関数の有限回の合成で得られる関数は**初等関数** (elementary function) と呼ばれます．

演習問題 (解答: 105 ページ)

問題 2.3.1. 次の等式を満たす複素数を全て求めよ．

(1) $\cosh z = 0$.　　(2) $\log z = 2 + \pi i/6$.

問題 2.3.2. 次の関数を対数関数で表し，導関数を求めよ (導関数が存在することは認めてよい)．

(1) $\sin^{-1} z$.　　(2) $\tanh^{-1} z$.

問題 2.3.3. 次の複素数を $x + iy$ の形に表せ．

(1) $\log i$.　　(2) i^i.

問題 2.3.4. z_1 と z_2 が以下の開集合に属する場合について，$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$ が成立するか否か，log の分岐を取って議論せよ．

(1) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$.

(2) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$.

問題 2.3.5. 命題 2.3.6 を示せ．

問題 2.3.6. 命題 2.3.7 を示せ．

問題 2.3.7. 命題 2.3.8 を示せ．

2.4 附録: 上極限と下極限

ここでは上限 sup や上極限 lim sup についてまとめておきます. 詳細については [杉浦, 第 I 章 §§1–3] を参照して下さい.

まず実数列の上界と上限の定義を思い出します.

定義. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を実数列とする.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq u$ となる実数 $u \in \mathbb{R}$ を $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の**上界** (upper bound) と呼ぶ. 上界が存在する実数列のことを**上に有界な実数列**という.

(2) 以下の二条件を満たす $s \in \mathbb{R}$ を $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の**上限** (supremum) と呼び, $s = \sup\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ と書く[*3].

(i) s は $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の上界である. (ii) $t < s$ となる任意の $t \in \mathbb{R}$ は $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の上界でない.

同様に実数列の**下界** (lower bound) と**下限** (infimum) が定義されます. また, これらは数列だけではなく部分集合 $S \subset \mathbb{R}$ に対しても同様に定義できます. 次に実数の集合 $\mathbb{R}$ の基本的な性質を思い出しておきます.

定理 2.4.1 ([杉浦, 第 I 章 §3 定理 3.1])**.** 上に有界な単調増加実数列は収束する.

注意 2.4.2 ([杉浦, 第 I 章 §3 注意 4])**.** この性質は $\mathbb{R}$ の連続性と同値. 正確にいうと, 以下の命題は全て同値.

- 上に有界な実数列は上限を持つ (連続の公理).
- 上に有界な単調増加実数列は収束する.
- Archimedes の原理と区間縮小法が成立する.
- 有界実数列は収束部分列を持つ (Bolzano-Weierstrass の定理).
- Cauchy 列は収束する.

詳しくは [杉浦, 第 I 章 §3 注意 4] を参照して下さい.

実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ から新たに数列 $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ を

$$s_n \coloneqq \sup_{k \geq n} a_k = \sup\{a_k\}_{k=n}^{\infty} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

と定義します. 但し最後の $\in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ は, sup が存在しなければ ∞ と定義する, という意味です. $\{a_k\}_{k=n}^{\infty} \supset \{a_k\}_{k=n+1}^{\infty}$ だから $s_n \geq s_{n+1}$ となることに注意すると, $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ は単調減少数列だと分かります. すると定理 2.4.1 より, 実数列 $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $n \to \infty$ で収束するか ∞ に発散します. そこで:

定義. 実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の**上極限** (limit superior) を次のように定義する.

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \coloneqq \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} a_k\right) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

同様に**下極限** (limit inferior) $\liminf_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ も定義できます.

[*3] 他に $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ や $\sup_{n\geq 0} a_n$ などと書くこともあります

3 複素積分

この節の内容は [SS, Chapter 1, §3] に基づきます. 春学期の教科書 [川平, §3.1, §3.2] も参照して下さい. 前節と同様に, 関数といったら複素数変数の複素数値関数のことを意味します.

3.1 複素平面内の曲線

まず複素積分の積分路の扱い方から思い出します.

定義 3.1.1. 複素数平面 $\mathbb{C}$ 上で考える.

(1) **パラメータ付き曲線** (parametrized curve) とは閉区間 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ から $\mathbb{C}$ への連続写像 p のことである.

(2) パラメータ付き曲線 $p\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ が**滑らか** (smooth) であるとは, $[a,b]$ 上で $p(t)$ が連続微分可能であり, 更に任意の $t \in [a,b]$ に対して $p'(t) \neq 0$ となるもののことである. 但し端点 $t = a, b$ での微分は片側微分の意味とする:

$$p'(a) := \lim_{h \to +0} \frac{p(a+h) - p(a)}{h}, \quad p'(b) := \lim_{h \to -0} \frac{p(b+h) - p(b)}{h}.$$

(3) **区分的に滑らかな** (piecewise-smooth) パラメータ付き曲線 $p\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ とは, 連続写像であって, 区間 $[a,b]$ の有限個の分割

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

が存在し, 各区間 $[a_k, a_{k+1}]$ 上で $p(t)$ が滑らかなパラメータ付き曲線であることをいう.

集合 X 上の二項関係 $\sim$ が**同値関係** (equivalence relation) であるとは, 任意の $x, y, z \in X$ に対し三条件

(i) $x \sim x$ (ii) $x \sim y$ ならば $y \sim x$ (iii) $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x \sim z$

が成立することでした. 同値関係 $\sim$ と $x \in X$ に対し $\overline{x} := \{y \in X \mid y \sim x\}$ を x の**同値類** (equivalence class) と呼び, 同値類全体のなす集合を $X/\sim$ と書いて同値関係 $\sim$ による X の**商集合** (quotient set) と呼びました.

定義 3.1.2. (1) 二つのパラメータ付き曲線 $p\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ と $q\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ について, p から q への**パラメータの取り替え**とは, 連続微分可能な全単射 $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ であって $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$ かつ任意の $s \in [c,d]$ に対して $\varphi'(s) > 0$ かつ $q(s) = p(\varphi(s))$ を満たすもののことをいう.
p から q へのパラメータの取り替えが存在するとき $p \sim q$ と表す. するとパラメータ付き曲線のなす集合に同値関係 $\sim$ が定まる (問題 3.1.1).

(2) **曲線** (curve) とは, パラメータ付き曲線のなす集合において (1) で定めた同値関係による同値類のことをいう. また**滑らかな曲線** (smooth curve) とは, 滑らかなパラメータ付き曲線のなす集合において, (1) で定めた同値関係 $\sim$ による同値類のことをいう. **区分的に滑らかな曲線** (piecewise smooth curve) も同様に定義する.

つまり複素数平面上の向きのついた曲線のことを単に曲線と呼ぶ[*4], ということです.

例 3.1.3. $z \in \mathbb{C}$ を中心とする半径 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ の**正向きの円** (positively oriented circle) とは, パラメータ付き曲線 $p\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $p(t) = z + re^{it}$ の同値類 C のこと, つまり**反時計回りの向き付けを持つ円** (circle with

[*4] これはこの講義における曲線の定義です. 数学では様々な曲線の定義が考えられるので, 必ず定義を確認するようにして下さい.

counterclockwise orientation) のことをいう.

パラメータ付き曲線 $q\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $q(s) = z + re^{2\pi i s}$ は p と同値である. 実際, 写像 $\varphi\colon [0,1] \to [0,2\pi]$ を $\varphi(s) := 2\pi s$ で定めれば, φ は連続微分可能な全単射であり, 任意の $s \in [0,1]$ に対して $\varphi'(s) = 2\pi > 0$ かつ $q(s) = p(\varphi(s))$ である.

例 3.1.4. 一次関数 $p(t) = \alpha t + \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ が定めるパラメータ付き曲線 $p\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ の同値類を (向き付けを持つ) **線分**と呼び, 始点 $z := p(0)$ と $w := p(1)$ を用いて $\overrightarrow{zw}$ と表す.

線分からなる区分的に滑らかな単純閉曲線を (向き付けを持つ) **多角形**と呼ぶ.

例えばパラメータ付き曲線 $p\colon [0,3] \to \mathbb{C}$, $p(t) = \begin{cases} t & (t \in [0,1]) \\ 1 - \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)(t-1) & (t \in [1,2]) \\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(3-t) & (t \in [2,3]) \end{cases}$ の同値類は, 一辺の長さが 1 の正三角形 (に正の向き付けを入れたもの) を表す.

後の議論ではある領域に含まれる積分路を考えることがしばしば起きるので, それに対応した曲線の用語を導入しておきます.

定義 3.1.5. $S \subset \mathbb{C}$ を部分集合とする. S **上の曲線** (または S 内の曲線) とはその像が S に含まれるようなパラメータ付き曲線の同値類のこと, つまり連続写像 $p\colon [a,b] \to S$ の同値類のことである. S **上の滑らかな曲線**や S **上の区分的に滑らかな曲線**も同様に定義できる.

以下では ($S \subset \mathbb{C}$ 上の区分的に滑らかな) 曲線を記号 C で表し, またその代表元であるパラメータ付き曲線を C **のパラメータ付け**または**パラメータ表示** (parametrization of C) と呼びます.

複素積分では向きのついた曲線を積分路にとしますが, 積分路の向きを逆にするという操作が考えられます. それを定式化すると次のようになります.

定義 3.1.6. 曲線 C に対し, そのパラメータ付け $p\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ を一つとり,

$$p^-(t) := p(a+b-t)$$

で定まるパラメータ付き曲線 $p^-\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ の同値類を C の**逆向きの曲線**と呼び, C^- で表す.

逆向きの曲線という概念が well-defined であること, つまりパラメータ付け p に依存しないことに注意して下さい (問題 3.1.2).

例 3.1.7. $z \in \mathbb{C}$ を中心とする半径 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ の**負向きの円** (negatively oriented circle) とは, z を中心とする半径 r の正向きの円の逆向きの曲線のこと, つまり**時計回りの向き付けを持つ円** (circle with clockwise orientation) のことをいう.

Cauchy の積分定理では積分路として単純閉曲線を取ります (定理 4.2.3). その定義を思い出しましょう.

定義 3.1.8.
(1) 区分的に滑らかな曲線 C に対し, そのパラメータ付け $p\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ を一つ取り, $p(a) \in \mathbb{C}$ を C **の始点**, $p(b) \in \mathbb{C}$ を C **の終点**と呼ぶ. これらはパラメータ付け p の取り方によらない (問題 3.1.3).
(2) 始点と終点が一致する区分的に滑らかな曲線を**閉曲線** (closed curve) と呼ぶ.
(3) 区分的に滑らかな曲線が**単純** (simple) であるとは, そのパラメータ付けを $p\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ として, $s, t \in (a,b)$ かつ $s \neq t$ ならば $p(s) \neq p(t)$ となることをいう. この条件はパラメータ付け p の取り方に

よらない (問題 3.1.4).

(4) 単純な閉曲線を**単純閉曲線** (simple closed curve) と呼ぶ.

最後に滑らかな曲線の長さの定義を思い出します.

定義 3.1.9. (1) 滑らかな曲線 C の**長さ** $\ell(C) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ を, パラメータ付け $p\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ を一つとって

$$\ell(C) := \int_a^b |p'(t)|\, dt$$

と定義する. 但し右辺は Riemann 積分の意味とする.

(2) 区分的に滑らかな曲線 C に対しては, パラメータ付け $p\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ を一つとり, 各区間 $[a_k, a_{k+1}]$ で滑らかになるような分割 $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ をとって, 区間 $[a_k, a_{k+1}]$ での滑らかな曲線 C_k としての長さ $\ell(C_k)$ の和を C の長さと定義する. つまり

$$\ell(C) := \sum_{k=0}^{n-1} \ell(C_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |p'(t)|\, dt.$$

滑らかな曲線の長さはパラメータの取り方によりません. 実際, $q\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ を別のパラメータ付けとして, $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ を p から q へのパラメータの取り替えとすると, $q(s) = (p \circ \varphi)(s)$ および $\varphi'(s) > 0$ より

$$\int_c^d |q'(s)|\, ds = \int_c^d |p'(\varphi(s))\varphi'(s)|\, ds = \int_c^d |p'(\varphi(s))|\, \varphi'(s)\, ds = \int_a^b |p'(t)|\, dt.$$

区分的に滑らかな曲線の長さもパラメータの取り方によりません.

演習問題 (解答: 107 ページ)

問題 3.1.1. 定義 3.1.2 (1) の $\sim$ が同値関係であることを確認せよ.

問題 3.1.2. 逆向きの曲線の定義 3.1.6 が well-defined であること, つまり曲線 C の二つのパラメータ付け $p\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ と $q\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ に対し, p^- と q^- が同値なパラメータ付き曲線であることを示せ.

問題 3.1.3. 曲線 C の始点および終点の定義 3.1.8 (1) が C のパラメータ付けによらないことを確認せよ.

問題 3.1.4. 単純曲線の定義 3.1.8 (3) が well-defined であることを確認せよ.

3.2　複素積分

§3.1 の準備の下, 複素積分の定義を思い出しましょう.

以下で**曲線 C 上の関数** f といったら, C のパラメータ付け $p : [a,b] \to \mathbb{C}$ の像 $p([a,b])$ を含むある開集合 $U \subset \mathbb{C}$ 上で定義された関数 $f\colon U \to \mathbb{C}$ のことを意味します. 像 $p([a,b]) \subset \mathbb{C}$ は p の取り方によらずに C のみから定まることに注意して下さい.

定義. C を滑らかな曲線とし, f を C 上で連続な関数とする. f **の** C **上での複素 (線) 積分** $\int_C f(z)\,dz$ を, C のパラメータ付け $p\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ を一つとって

$$\int_C f(z)\,dz \coloneqq \int_a^b f(p(t))p'(t)\,dt$$

と定義する. 但し右辺は Riemann 積分の意味とする. また C をこの積分の**積分路**と呼ぶ.
区分的に滑らかな曲線 C に対しては, 各区間で C が滑らかになるように $[a,b]$ を分割し, 各区間での積分の和として $\int_C f(z)dz$ を定義する. この場合も C をこの積分の積分路と呼ぶ.

複素積分は積分路のパラメータ付けに依存しません [川平, 命題 3.5]. 実際, C が滑らかな場合は, $q\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ を別のパラメータ付けとするとパラメータの取り替え $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ が存在するから, $t = \varphi(s)$ と変数変換して

$$\int_c^d f(q(s))q'(s)\,ds = \int_c^d f(p(\varphi(s)))p'(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds = \int_a^b f(t)p'(t)\,dt.$$

C が区分的に滑らかな場合も, 区間を分割して滑らかな場合に帰着して示せます.

複素積分の基本的な性質を次の命題にまとめておきます.

命題 3.2.1 ([川平, 公式 3.2, 3.3])**.** 区分的に滑らかな曲線 C とその上の連続関数 f, g に対して

(1) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ なら

$$\int_C (\alpha f(z) + \beta g(z))\,dz = \alpha \int_C f(z)dz + \beta \int_C g(z)\,dz.$$

(2) C^- を C の逆向きの曲線とすると

$$\int_{C^-} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz.$$

(3) C のパラメータ付け $p\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ の像 $p([a,b])$ に $z \in \mathbb{C}$ が含まれることを $z \in C$ と書くと,

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \sup_{z\in C} |f(z)| \cdot \ell(C).$$

証明. (1) は Riemann 積分の線形性から従う. (2) は逆向きの曲線の定義から従う. (3) は, やはり Riemann 積分の性質から, $p\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ を C のパラメータ付けとして

$$\begin{aligned}\left|\int_C f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(p(t))p'(t)\,dt\right| &\le \int_a^b |f(p(t))p'(t)|\,dt \\ &\le \sup_{t\in[a,b]} |f(p(t))| \cdot \int_a^b |p'(t)|\,dt = \sup_{z\in C} |f(z)| \cdot \ell(C).\end{aligned}$$

□

命題 3.2.1 (3) から, 積分と極限の順序交換に関する以下の命題 3.2.2 が得られます. 関数列の一様収束性 (定義 2.1.1) を思い出しておいて下さい.

命題 3.2.2. C を区分的に滑らかな曲線とし, f 及び f_n $(n \in \mathbb{N})$ を C 上連続な関数とする. 関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が f_n に C 上一様収束 ($:\Longleftrightarrow$ パラメータ付け $p\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ の像 $p([a,b])$ 上で一様収束) すれば,

$$\int_C f(z)\,dz \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)\,dz.$$

証明. 命題 3.2.1 (3) から

$$\left| \int_C \bigl(f(z) - f_n(z)\bigr)\,dz \right| \;\le\; \|f - f_n\|_C \cdot \ell(C).$$

仮定より $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_C = 0$ だから $\lim_{n\to\infty} \left|\int_C \bigl(f(z) - f_n(z)\bigr)\,dz\right| = 0$ となり, 結論を得る. □

次に原始関数の概念を思い出しましょう.

定義 3.2.3 ([川平, p.147])**.** 開集合 $U \subset \mathbb{C}$ 上の関数 f の**原始関数** (primitive function) とは, U 上の正則関数 F であって任意の $z \in U$ に対して $F'(z) = f(z)$ となるもののことをいう.

定理 3.2.4. f を開集合 $U \subset \mathbb{C}$ 上の連続関数とし, F を f の原始関数とする. また C を U 上の区分的に滑らかな曲線であって, 始点が w_0, 終点が w_1 であるものとする. このとき

$$\int_C f(z)\,dz \;=\; F(w_1) - F(w_0).$$

特に**左辺の複素積分は始点と終点のみに依存**する.

証明. まず C が滑らかな場合, $p\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ を C のパラメータ付けとして,

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz \;&=\; \int_a^b f(p(t))p'(t)\,dt \;=\; \int_a^b F'(p(t))p'(t)\,dt \;=\; \int_a^b \frac{d}{dt}F(p(t))\,dt \\ &=\; F(p(b)) - f(p(a)) \;=\; F(w_1) - F(w_0).\end{aligned}$$

C が区分的に滑らかな場合は, $p : [a,b] \to \mathbb{C}$, $a = a_0 < \cdots < a_n = b$ を定義 3.1.1 (3) のような C のパラメータ付けとして, 滑らかな場合の結果から

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz \;&=\; \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(p(t))p'(t)\,dt \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \bigl(F(p(a_{k+1})) - F(p(a_k))\bigr) \\ &=\; F(p(a_n)) - F(p(a_0)) \;=\; F(w_1) - F(w_0).\end{aligned}$$

□

特に C が閉曲線の場合は次の主張が成立します.

系 3.2.5. C を開集合 $U \subset \mathbb{C}$ 上の閉曲線とし, f を U 上の連続関数であって原始関数を持つものとすると

$$\int_C f(z)\,dz \;=\; 0.$$

演習問題 (解答: 107 ページ)

問題 3.2.1. (1) と (2) は複素積分を計算し, (3) は等式を示せ.

(1) $n \in \mathbb{Z}$ とし, また C を原点中心で半径 r の正向きの円 (例 3.1.3) とする.

$$\int_C z^n \, dz.$$

(2) 中心 $2r$, 半径 r の正の向き付けを持つ円 C に対して, (1) と同じ複素積分を計算せよ.

(3) $|a| < r < |b|$ と仮定し, 原点中心で半径 r の正向きの円を C とすると

$$\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)} \, dz = \frac{2\pi i}{a-b}.$$

問題 3.2.2. C_r を原点中心で半径 r の正の向き付けを持つ円とする. 次の等式を示せ.

$$\lim_{r \to +0} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2\pi i.$$

問題 3.2.3. C_r を半径 r の正の向き付けを持つ円とする. $U := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ 上の連続関数 f が $\lim_{z \to 0} f(z) = a$ を満たすとき, 次の等式が成立することを示せ.

$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i a.$$

問題 3.2.4. 以下の関数 f と積分路 C に対して複素積分 $\int_C f(z) \, dz$ の値を求めよ.

(1) $f(z) = z/(z+1)$, C は 0 から i への線分.

(2) $f(z) = |z|$, C は原点中心で正の向きの単位円のうちの上半分.

(3) $f(z) = \operatorname{Log} z$, $C\colon z(t) = e^{it}$ $(-\pi/2 \leq t \leq \pi/2)$.

(4) $f(z) = 1/z$, $C : 1$ から i への線分.

3.3　連結性と弧状連結性

§1.1 で複素数平面上の集合に関する用語をいくつか導入しましたが, それらに追加して:

定義 3.3.1. $S \subset \mathbb{C}$ とする.

(1) 開集合 S が**連結** (connected) であるとは, 空でない開集合 U と V で以下の二条件を満たすものは存在しないことをいう.

$$S = U \cup V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

連結開集合を**領域** (region) と呼ぶ.

(2) S が**弧状連結** (path connected) であるとは, S の任意の二点について, それらを始点と終点とするような S 上の区分的に滑らかな曲線が存在することをいう.

定義から領域は空集合ではありません. $\mathbb{C}$ の空でない部分集合に対しては, 次の同値が成立します.

定理 3.3.2. 空でない開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ が弧状連結であることと連結であることは同値.

この定理の証明は問題 3.3.1 で与えます.

例 3.3.3. 中心 $z \in \mathbb{C}$, 半径 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ の開円板 $D = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < r\}$ は領域である. 実際, 開集合の定義 (§1.1 (3)) から D は空でない開集合なので, D が連結であることを示せばよいが, そのためには定理 3.3.2 より D が弧状連結であることを示せば良い. 任意の相違なる二点 $x, y \in D$ に対してパラメータ付き曲線 $p\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ を $p(t) := (1-t)x + ty$ で定めると, $p([0,1]) \subset D$ だから (問題 3.3.3), p の同値類は始点 x, 終点 y の D 上の線分 (例 3.1.4) である. よって D は弧状連結である.

定理 3.3.2 の同値性と定理 3.2.4 の帰結として, 次の主張が成立します.

系 3.3.4. f を領域 Ω 上の正則関数であって任意の $z \in \Omega$ に対して $f'(z) = 0$ となるものとする. このとき f は定数関数である.

証明. $w_0 \in \Omega$ を一つとり固定する. 任意の $w \in \Omega$ に対して $f(w) = f(w_0)$ を示せばよい. Ω は連結なので, 定理 3.3.2 より始点を w_0 とし終点を w とする Ω 上の曲線 C が存在する. f は f' の原始関数なので,

$$\int_C f'(z)\,dz \;=\; f(w) - f(w_0)$$

が定理 3.2.4 から従う. 仮定より $f'(z) = 0$ なので左辺は 0. よって示せた. □

演習問題 (解答: 109 ページ)

問題 3.3.1. 定理 3.3.2, 即ち, 空でない開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ が弧状連結であることと連結であることが同値であることを, 以下の手順で示せ.

(1) Ω が弧状連結な開集合であると仮定し, 背理法で連結であることを示したい. $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ と互いに交わらない, 空でない開集合 Ω_i の合併で書けたとする. $w_i \in \Omega_i$ $(i = 1, 2)$ を取る. 仮定より w_1 を始点とし w_2 を終点とする区分的に滑らかな曲線 C がある. そのパラメータ付けを $z : [a, b] \to \Omega$, $z(a) = w_1$,

$z(b) = w_2$ とする．ここで

$$t^* := \sup\{t \in [a,b] \mid z(s) \in \Omega_1 \ (a \leq \forall\, s < t)\}$$

とする．$z(t^*)$ を考えることで矛盾を導け．

(2) 逆に Ω が連結開集合だと仮定し，$w \in \Omega$ を一つ取って固定する．部分集合 $\Omega_1 \subset \Omega$ を

$$\Omega_1 := \{z \in \Omega \mid w \text{ を始点とし } z \text{ を終点とする区分的に滑らかな } \Omega \text{ 内の曲線が存在する }\}$$

で定め，また $\Omega_2 := \Omega \setminus \Omega_1$ と定める．このとき Ω_1 と Ω_2 はともに開集合であることを示せ．また $\Omega_1 \neq \emptyset$ を示せ．すると $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ と $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ および連結性の仮定から $\Omega = \Omega_1$ が従う．

問題 3.3.2. $\Omega \subset \mathbb{C}$ を空でない開集合とし，$z \in \Omega$ とする．$z \in \Omega$ を含む Ω の**連結成分** C_z を次で定める．

$$C_z := \{w \in \Omega \mid z \text{ から } w \text{ へ区分的に滑らかな } \Omega \text{ 上の曲線で結べる }\}.$$

(1) C_z が領域であることを示せ．C_z は $z \in \Omega$ を含む Ω の**連結成分** (connected component) と呼ばれる．

(2) $w \in C_z$ は Ω 上の同値関係を与えること，つまり任意の $u, w, z \in \Omega$ に対し次の三条件が成立することを示せ．

(i) $z \in C_z$.　(ii) $w \in C_z$ ならば $z \in C_w$.　(iii) $w \in C_z$ かつ $z \in C_u$ ならば $w \in C_u$.

これから Ω は互いに交わらない連結成分の和 $\Omega = \bigsqcup_{i \in I} C_{z_i}$ であることが分かる．

注意. 実は (2) の I は高々可算無限濃度の集合であること，つまり Ω の異なる連結成分の数は高々可算個であることが示せます．

問題 3.3.3. 例 3.3.3 の議論における主張 $p([0,1]) \subset D$ を示せ．

問題 3.3.4. 領域 Ω 上の連続関数 $f(z)$ の二つの原始関数 $F_1(z)$ と $F_2(z)$ について，$F_1(z) - F_2(z)$ は定数関数であることを示せ．

4 Cauchy の積分定理 1

今回の内容は [SS, Chapter 2, §§1–4] に基づきます．春学期の教科書 [川平, §3.3] も参照して下さい．

前回までと同様, 複素数値関数のことを単に関数と呼びます．また, 開集合および閉集合といったら § 1.1 の意味での $\mathbb{C}$ の開集合および閉集合のことです．

4.1 Goursat の定理

Jordan の閉曲線定理を思い出しましょう．

事実 4.1.1 (Jordan の閉曲線定理). $\Gamma \subset \mathbb{C}$ を (§3.1 の意味での) 区分的に滑らかな単純閉曲線 (で長さ正のもの) とする．このとき $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ は二つの領域からなる．そのうち一つは有界かつ単連結 (次回の定義 5.1.3 を参照) であり, それを Γ の**内部** (interior) と呼ぶ．もう一つの連結成分は非有界であり, それを Γ の**外部** (exterior) と呼ぶ．

この定理の証明は与えません．例えば [SS, Appendix B.2] を参照して下さい．

例 3.1.4 で扱ったように, $\mathbb{C}$ 上の**多角形**とは区分的に滑らかな単純閉曲線であって各区間が線分であるもののことです．定義より多角形には向き付けがあります．Jordan の閉曲線定理 (事実 4.1.1) より多角形 $P \subset \mathbb{C}$ に対してその内部と外部が定まります．

定理 4.1.2 (Goursat (グルサー) の定理). $U \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, $T \subset U$ を三角形 (例 3.1.4) であってその内部が U に含まれるものとする．f が U で正則な関数なら

$$\int_T f(z)dz \;=\; 0.$$

証明. $T^{(0)} := T$ とする．$T^{(0)}$ の各辺の中点を結ぶことで $T^{(0)}$ の内部を四つの三角形に分割できるが, それらを $T_1^{(1)}, \ldots, T_4^{(1)}$ と名付ける．但し各 $T_j^{(1)}$ の向き付けは $T^{(0)}$ の向き付けに合わせる (下図 4.1.1 参照．但し $T_4^{(1)}$ の向きは図の矢印と逆に取る)．

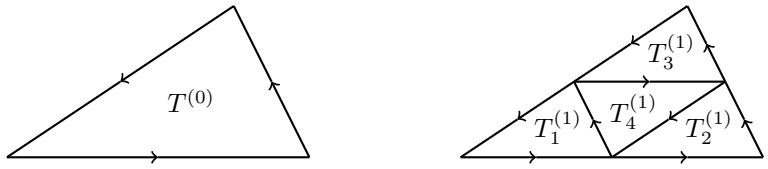


図 4.1.1 $T^{(0)}$ の分割

このとき $\int_{T^{(0)}} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{T_j^{(1)}} f(z)\,dz$ なので, ある $j \in \{1,2,3,4\}$ が存在して $\left|\int_{T^{(0)}} f(z)\,dz\right| \leq 4\left|\int_{T_j^{(1)}} f(z)\,dz\right|$．この $T_j^{(1)}$ を改めて $T^{(1)}$ と書く．以上の操作を今度は $T^{(1)}$ に施して $T^{(2)}$ を得る．この操作を繰り返すことで, 三角形の列 $T^{(0)}, T^{(1)}, \ldots$ であって

$$\left|\int_{T^{(0)}} f(z)\,dz\right| \leq 4^n \left|\int_{T^{(n)}} f(z)\,dz\right| \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.1.1}$$

を満たすものが得られる．$T^{(n)}$ は $T^{(n+1)}$ と相似な三角形で相似比 $2:1$ だから, $T^{(n)}$ の (周の) 長さ $\ell(T^{(n)})$ に関して $\ell(T^{(n)}) = 2^{-n}\,\ell(T^{(0)})$ であり, また $T^{(n)}$ の外接円の直径を $d^{(n)}$ と書くと $d^{(n)} = 2^{-n} d^{(0)}$ である．

一方, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ に対する Bolzano-Weierstrass の定理 (注意 2.4.2 を参照) から, ある $w \in U$ が存在して, 任意の n について w は $T^{(n)}$ の内部または境界にある. $f(z)$ は正則だったから, $z \to w$ で $\psi(z) \to 0$ となる関数 $\psi(z)$ を用いて

$$f(z) \;=\; f(w) + f'(w)(z-w) + \psi(z)(z-w)$$

と書ける. この等式の両辺を $T^{(n)}$ 上で積分して $\int_{T^{(n)}} f(z)\,dz = 0 + 0 + \int_{T^{(n)}} \psi(z)(z-w)\,dz$ を得る. ここで $c_n \coloneqq \sup\{|\psi(z)| \mid z \in T^{(n)}\}$ とすれば, $z \in T^{(n)}$ なら $|z-w| \le d^{(n)}$ なので, 命題 3.2.1 (3) より

$$\left|\int_{T^{(n)}} \psi(z)(z-w)\,dz\right| \le c_n d^{(n)} \ell(T^{(n)}) \;=\; 4^{-n} c_n d^{(0)} \ell(T^{(0)}).$$

よって (4.1.1) と合わせて

$$\left|\int_{T^{(0)}} f(z)\,dz\right| \le c_n d^{(0)} \ell(T^{(0)})$$

が得られる. 左辺は n によらない非負実数である. この不等式で極限 $n \to \infty$ をとると, c_n の定義から $c_n \to 0$ となるので右辺は 0 に収束する. よって $\int_T f(z)\,dz = \int_{T^{(0)}} f(z)\,dz = 0$. □

系 4.1.3. 開集合 $U \subset \mathbb{C}$ が多角形 P とその内部を含むなら, U 上で正則な関数 f について

$$\int_P f(z)dz \;=\; 0.$$

証明. P を三角形に分割して各々に Goursat の定理 4.1.2 を用いると, 求める積分は 0 の和. □

4.2 Cauchy の積分定理

開集合 $U \subset \mathbb{C}$ 上の関数 f の原始関数とは, U 上の正則関数 F であって任意の $z \in U$ に対して $F'(z) = f(z)$ となるもののことでした (定義 3.2.3).

定理 4.2.1. 開円板 D 上の正則関数は D における原始関数を持つ.

証明. D の中心を $c \in \mathbb{C}$ と書く. 任意の $z \in D$ に対して $w \coloneqq c + \mathrm{Re}(z-c)$ とし, 線分 $\overrightarrow{cw}$ と $\overrightarrow{wz}$ (例 3.1.4) からなる D 上の区分的に滑らかな曲線を C_z と書く. そして $F(z)$ を次のように定める:

$$F(z) \;\coloneqq\; \int_{C_z} f(w)\,dw.$$

Goursat の定理 4.1.2 とその系 4.1.3 より, $z + h \in D$ となる任意の複素数 h に対して

$$F(z+h) - F(z) = \int_\eta f(w)\,dw$$

と書ける. 但し $\eta \coloneqq \overrightarrow{z(z+h)}$ は線分. f は z で連続だから, $w \to z$ で $\psi(w) \to 0$ となる関数 ψ を用いて $f(w) = f(z) + \psi(w)$ と書ける. すると $F(z+h) - F(z) = f(z)h + \int_\eta \psi(w)\,dw$. ここで命題 3.2.1 (3) より $\left|\int_\eta \psi(w)\,dw\right| \le \sup\{|\psi(w)| \mid w \in \eta\} \cdot |h|$. よって

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} \;=\; f(z),$$

つまり F は f の原始関数である. □

定理 4.2.2 (**円板の場合の Cauchy の積分定理**)**.** 開円板 D 上の任意の正則関数 f と D 上の任意の区分的に滑らかな閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z)dz \;=\; 0.$$

証明. 定理 4.2.1 より f は原始関数を持つので, 系 3.2.5 より結論を得る. □

円板以外の場合でも定理 4.2.2 の主張が成立する場合, それを **Cauchy の積分定理**と総称します. 次の形のものが最も一般的な Cauchy の積分定理です.

定理 4.2.3 (**Cauchy の積分定理** [川平, 定理 3.10])**.** f を領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数とし, C を D 上の区分的に滑らかな単純閉曲線とする. C の内部 Ω (事実 4.1.1 を参照) が D に含まれるなら

$$\int_C f(z)\,dz \;=\; 0.$$

この定理の証明はしません. [SS, Appendix B §2.1] を参照して下さい.

実用上は図 4.2.1 にあるような積分路に関して Cauchy の積分定理を用いれば十分です. ここに挙げているものに関する Cauchy の定理は定理 4.2.2 と同じ方針で証明できます.

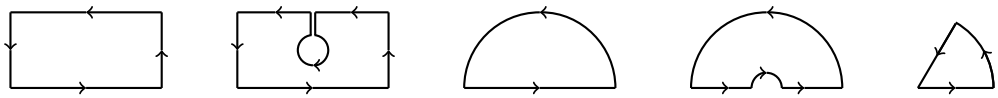


図 4.2.1　積分路の例

演習問題 (解答: 110 ページ)

問題 4.2.1. $\xi \in \mathbb{R}$ に対して次の等式を示そう.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi}\, dx \;=\; e^{-\pi \xi^2}.$$

以下 $f(z) := e^{-\pi z^2}$ とする. まず $\xi > 0$ と仮定し, $R \in \mathbb{R}_{>0}$ として積分路 γ_R を図 4.2.2 のようにとる.

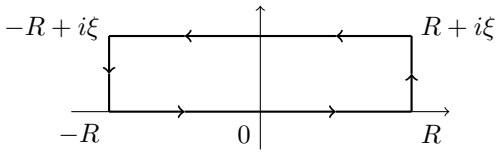


図 4.2.2　積分路 γ_R

$V_l(R)$ と $V_r(R)$ を左辺および右辺での積分として, 長方形に対する Cauchy の積分定理 (系 4.1.3) より

$$0 \;=\; \int_{\gamma_R} f(z)dz \;=\; \int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2}\, dx + V_r(R) + V_l(R) + \int_{R}^{-R} f(x+i\xi)\, dx. \tag{4.2.1}$$

(1) R によらない $C \in \mathbb{R}_{>0}$ で $|V_l(R)|, |V_r(R)| \le Ce^{-\pi R^2}$ と評価できることを示せ.

(2) 式 (4.2.1) で $R \to \infty$ として $0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx - e^{\pi\xi^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi}\,dx$ を示せ.
(3) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx = 1$ を示し, $\xi \geq 0$ の場合の結論を導け.
(4) $\xi < 0$ の場合を示せ.

問題 4.2.2. 前問と同様に

$$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx \;=\; \frac{\pi}{2}$$

を導こう. 図 4.2.3 の積分路上で $(1-e^{iz})/z^2$ の積分を考える. 内側の半円周部を C_r^-, 外側の半円周部を C_R^+ と書くと, Cauchy の積分定理から

$$\int_{-R}^{-r} \frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx + \int_{C_r^-} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz + \int_r^R \frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx + \int_{C_R^+} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz \;=\; 0. \tag{$*$}$$

(1) C_R^+ 上の積分が $R \to \infty$ で 0 に収束することを示せ.
(2) C_r^- 上の積分が $r \to 0$ で $-\pi$ となることを示せ.
(3) 以上を使って結論を導け.

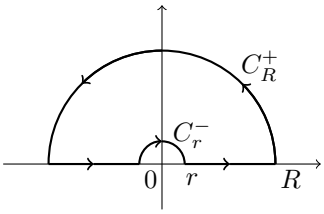


図 4.2.3 問題 4.2.2 の積分路

4.3 Cauchy の積分表示

次に Cauchy の積分表示を復習します. 春学期の教科書では最初から一般の場合の主張 [川平, 定理 3.14] を扱っていますが, ここでは積分路が円の場合をまず扱い, 一般の場合は次節の系 5.2.2 で扱います.

まず, $\mathbb{C}$ の位相に関する用語 (§1.1) を少し追加します.

定義. 部分集合 $S \subset \mathbb{C}$ に対して

$$\overline{S} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid \forall r \in \mathbb{R}_{>0},\ D(z,r) \cap S \neq \emptyset\}$$

を S の**閉包** (closure) と呼ぶ. これは S の内部 S° を含む (問題 4.3.1). 閉包と内部の集合差

$$\partial S \coloneqq \overline{S} \setminus S^\circ$$

を S の**境界** (boundary) と呼ぶ.

中心が c で半径 r の開円板 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < r\}$ について, その閉包 $\overline{D}$ は

$$\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \leq r\}, \tag{4.3.1}$$

つまり閉円板と一致します (問題 4.3.2). また D の内部 D° は D と一致するので (§ 1.1 (3) 参照), D の境界は中心 z, 半径 r の円になります:

$$\partial D = \overline{D} \setminus D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| = r\}.$$

中心 c, 半径 r の正向きの円とはパラメータ付き曲線

$$[0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \theta \longmapsto c + re^{i\theta}$$

が定める曲線 C のことであり, 負向きの円とは C の逆向きの曲線 C^- のことでした (例 3.1.3, 例 3.1.7).

定理 4.3.1 (**Cauchy の積分表示** (円の場合))**.** $D \subset \mathbb{C}$ を開円板とし, 開集合 $U \subset \mathbb{C}$ は D の閉包 $\overline{D}$ を含むものとする. ∂D に正の向き付けを入れたものを ∂D^+ と書く. このとき, 任意の U 上の正則関数 f と任意の $z \in D$ に対して

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

証明. 任意に $z \in D$ を選んで固定する. $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$ を図 4.3.1 のような積分路とする. 但し δ は帯部分の幅とし, ε は内円の半径とする.

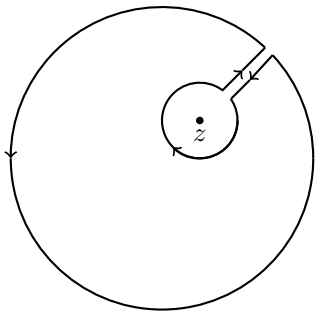


図 4.3.1 積分路 $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$

この積分路で $F(w) := f(w)/(w - z)$ を積分すると, Cauchy の積分定理から $\int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} F(w)\, dw = 0$. ここで $\delta \to 0$ の極限を取ると, 二つの直線部分の積分は打ち消しあって 0 になる. また内円部は中心 z, 半径 ε の負の向きの円周 C_ε^- 上での積分になり, 外円部は ∂D^+ 上での積分になる. 従って

$$\int_{C_\varepsilon^-} F(w)\, dw + \int_{\partial D^+} F(w)\, dw = 0.$$

ここで $F(w)$ を次のように変形する:

$$F(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z} + \frac{f(z)}{w - z}.$$

f が正則なので, ある $B \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して, 任意の $w \in C_\varepsilon^-$ に対して $\left|\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\right| \leq B$. 従って命題 3.2.1 (3) から $\left|\int_{C_\varepsilon^-} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw\right| \leq B \cdot \ell(C_\varepsilon^-) = 2\pi\varepsilon B$. また C_ε^- を $w(\theta) = z + \varepsilon e^{-i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ とパラメータ付けすると

$$\int_{C_\varepsilon^-} \frac{f(z)}{w - z} dw = f(z) \int_0^{2\pi} \frac{-\varepsilon i e^{-i\theta}}{\varepsilon e^{-i\theta}} d\theta = -2\pi i f(z)$$

従って $\varepsilon \to 0$ の極限で

$$-2\pi i f(z) + \int_{\partial D^+} F(w)\,dw \;=\; 0$$

となって結論を得る. □

定理 4.3.2 (導関数の積分表示)**.** 定理 4.3.1 と同じ仮定のもと, 任意の $z \in D$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$f^{(n)}(z) \;=\; \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw.$$

証明. n に関する帰納法で示す. $n = 0$ の時は定理 4.3.1 である. 次に f が $(n-1)$ 回複素微分可能であり,

$$f^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{(w-z)^n}dw$$

だと仮定する. $h \in \mathbb{C}$ は十分小さくて $z + h \in D$ だとすると, $A := w - z - h$ と略記すれば

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} &= \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{h}\left(\frac{1}{(w-z-h)^n} - \frac{1}{(w-z)^n}\right)dw \\
&= \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{h}\left(\frac{1}{A^n} - \frac{1}{(A+h)^n}\right)dw \\
&= \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{h}\frac{(A+h)^n - A^n}{A^n(A+h)^n}dw \\
&= \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{h}\frac{nhA^n + \cdots + h^n}{A^n(A+h)^n}dw \\
&\xrightarrow{h\to 0} \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{\partial D^+} f(w)\frac{n(w-z)^{n-1}}{(w-z)^{2n}}\,dw \;=\; \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw
\end{aligned}$$

となって示せた. 但し極限 $h \to 0$ をとる所で, 一様収束の場合の積分と極限の順序交換 (命題 3.2.2) を用いた. □

演習問題 (解答: 111 ページ)

問題 4.3.1. 任意の部分集合 $S \subset \mathbb{C}$ に対して $S^\circ \subset \overline{S}$ となることを示せ.

問題 4.3.2. (4.3.1) を示せ.

問題 4.3.3 (**平均定理**)**.** $a \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}_{>0}$ とし, f を開円板 $D_a(R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\}$ 上の正則関数とする. このとき, $0 < r < R$ なる任意の実数 r に対して次の等式が成立することを示せ.

$$f(a) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\,dt.$$

問題 4.3.4. a と b を正の実数とする.

(1) E をパラメータ付け $z(t) = a\cos t + ib\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ を持つ曲線, C をパラメータ付け $z(t) = be^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ を持つ曲線とする. このとき次の等式が成立することを示せ.

$$\int_E \frac{dz}{z} \;=\; \int_C \frac{dz}{z}.$$

(2) (1) を用いて次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt.$$

問題 4.3.5. (1) C を原点中心で半径 1 の正向きの円とする. 次の複素積分の値を求めよ.

$$\int_C \frac{e^z}{z}\,dz.$$

(2) その値から実積分に関する次の等式を導け.

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,d\theta \;=\; 2\pi.$$

5 Cauchy の積分定理 2

前期の復習の最後の項目として, ホモトピーの概念を用いた最も一般的な形の Cauchy の積分定理 5.2.3 を扱います. 記述は [SS, Chapter 3 §5, §6] に基づいていますが, [岸藤,] および [川平, §3.3] にも説明があるので参照して下さい.

5.1 ホモトピーと単連結領域

まず $\mathbb{C}$ 上の二つの曲線の間の**ホモトピー**という概念を導入します. 大雑把に説明すると, 始点と終点を固定したまま, はじめの曲線 γ_0 を連続的に変形して次の曲線 γ_1 が得られるとき, γ_0 と γ_1 はホモトピックであるといいます. 正確な定義は次の通りです.

定義 5.1.1. $U \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, γ_0 と γ_1 を始点と終点を共有する U 内の二つの曲線とする. γ_0 と γ_1 が U **内でホモトピック** (homotopic) であるとは, 以下の三条件を満たす連続写像 $h\colon [0,1] \times [a,b] \to U$ が存在することをいう. またそのような h を γ_0 から γ_1 への**ホモトピー写像**と呼ぶ.

(i) 任意の $s \in [0,1]$ を固定すると, $h_s\colon [a,b] \to U$, $h_s(t) := h(s,t)$ は U 内の曲線を定める.

(ii) $h(0,t)$ は γ_0 の, $h(1,t)$ は γ_1 のパラメータ付けになっている.

(iii) 任意の $s \in [0,1]$ について $h(s,a) = h(0,a) = h(1,a)$ かつ $h(s,b) = h(0,b) = h(1,b)$.

γ_0, γ_1 が (区分的に) 滑らかな場合は, 条件 (i) において, h_s が定める曲線が (区分的に) 滑らかだと仮定する.

注意. 部分集合 $S \subset \mathbb{C}$ 上の曲線 γ_0 と γ_1 がホモトピックであることを $\gamma_0 \sim \gamma_1$ と表すと, $\sim$ は S 上の曲線全体がなす集合 $C(S)$ 上の同値関係です. 同値類の集合 $\pi_1(S) := C(S)/\sim$ は曲線の連結を積とする亜群 (groupoid) の構造を持ちます.

定理 5.1.2. 開集合 $U \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数 f と U 内のホモトピックな区分的に滑らかな曲線 γ_0, γ_1 に対し

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

証明. γ_0 と γ_1 のホモトピー写像を $h\colon [0,1] \times [a,b] \to U$ とし, h の像を K と書く. ここで Euclid 空間 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ の部分集合について "コンパクト $\iff$ 有界閉" であること (事実 6.5.1) と, コンパクト集合の連続写像による像がコンパクトであることを思いだすと, K はコンパクト. 更に距離空間の部分集合について "コンパクト $\iff$ 点列コンパクト" であることから, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ であって任意の $z \in K$ に対して $D(z, 3\varepsilon) \subset U$ となるものが存在する. 以下このような ε を固定する.

h の一様連続性から, $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ であって $|s_1 - s_2| < \delta$ なら $\sup\{|h(s_1,t) - h(s_2,t)| \mid t \in [a,b]\} < \varepsilon$ となるものが存在する. このような δ も固定しよう.

以下 $|s_1 - s_2| < \delta$ なる $s_1, s_2 \in [0,1]$ を固定し, $\gamma(s)$ を $h_s\colon [a,b] \to U$, $h_s(t) := h(s,t)$ の定める曲線として,

$$\int_{\gamma(s_1)} f(z)\,dz = \int_{\gamma(s_2)} f(z)\,dz$$

を示す. これが示せれば, s_1, s_2 を取り直して繰り返しこの等式を用いることで結論が得られる.

K のコンパクト性から, 半径 2ε の有限個の開円板 $D_0, \ldots, D_n$ であって $\gamma(s_1), \gamma(s_2) \subset D_0 \cup \cdots \cup D_n$ となるものが存在する. 更に, 必要なら D_i 達を取り直して, 曲線 $\gamma(s_1)$ 上の点 $z_0, \ldots, z_{n+1}$ および曲線 $\gamma(s_2)$ 上の

点 $w_0, \ldots, w_{n+1}$ であって,

- 各 $i = 0, \ldots, n$ に対して $z_i, z_{i+1}, w_i, w_{i+1} \in D_i$

となるものが存在する. 特に $z_0 = w_0 = h(s, 0)$ (曲線の始点), $z_{n+1} = w_{n+1} = h(s, 1)$ (曲線の終点) とすることができる.

定理 4.2.1 より各 D_i 上で f は原始関数を持つが, それを F_i と書く. $D_i \cap D_{i+1}$ において F_i と F_{i+1} の微分は等しく, また $D_i \cap D_{i+1}$ は領域だから (問題 5.1.1), 問題 3.3.4 より $F_i - F_{i+1}$ は定数関数. 特に $F_i(z_{i+1}) - F_{i+1}(z_{i+1}) = F_i(w_{i+1}) - F_{i+1}(w_{i+1})$ であり, 従って

$$F_{i+1}(z_{i+1}) - F_{i+1}(w_{i+1}) \;=\; F_i(z_{i+1}) - F_i(w_{i+1}).$$

これを繰り返し用いると

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma(s_1)} f(z)\,dz \;=\; \int_{\gamma(s_2)} f(z)\,dz \;&=\; \sum_{i=0}^{n} (F_i(z_{i+1}) - F_i(z_i)) - \sum_{i=0}^{n} (F_i(w_{i+1}) - F_i(w_i)) \\
&=\; \sum_{i=0}^{n} \big((F_i(z_{i+1}) - F_i(w_{i+1})) - (F_i(z_i) - F_i(w_i))\big) \\
&=\; (F_n(z_{n+1}) - F_n(w_{n+1})) - (F_0(z_0) - F_0(w_0)) \;=\; 0.
\end{aligned}$$

□

ホモトピーを用いて, 連結性とは別の概念である単連結性を導入します. 連結開集合を領域と呼んだ (定義 3.3.1) ことを思い出して下さい.

定義 5.1.3. 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ が**単連結** (simply connected) であるとは, 始点と終点を共有する Ω 内の二つの曲線が必ずホモトピックであることをいう.

単連結性は, 大雑把には "穴が開いていない" ことを表す概念です. とりあえず次の例を理解して下さい.

補題 5.1.4. 開円版は単連結領域である.

証明. $z_0(t)$ と $z_1(t)$ を開円板 D 内の二曲線のパラメータ付けとして, $h(s,t) := (1-s)z_0(t) + sz_1(t)$ とすればこれが求めるホモトピー写像になる. □

演習問題 (解答: 112 ページ)

問題 5.1.1. 二つの開円板 D, D' について, $D \cap D'$ は空集合でなければ領域であることを示せ.

問題 5.1.2. $\mathbb{C}$ の部分集合 S が**凸** (convex) であるとは, S の任意の二点を結ぶ線分が S に含まれることをいう. 凸な開集合は単連結領域であることを示せ.

問題 5.1.3. $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin (-\infty, 0]\}$ は単連結領域であることを示せ.

問題 5.1.4. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ は領域ではあるが単連結領域ではないことを示せ.

5.2　単連結領域と Cauchy の積分定理

さて, 複素積分に話題を戻しましょう.

定理 5.2.1. 単連結領域上の正則関数は原始関数を持つ.

証明. $\Omega \subset \mathbb{C}$ を単連結領域とし, f を Ω 上の正則関数とする. $s \in \Omega$ を一つ取って固定する. s を始点とし $z \in \Omega$ を終点とする Ω 上の曲線 γ を任意に取り,

$$F(z) := \int_\gamma f(w)\,dw$$

と定めると, 定理 5.1.2 よりこれは γ の選び方によらないので well-defined. すると, $h \in \mathbb{C}$ を $z+h \in \Omega$ なるものとして,

$$F(z+h) - F(z) = \int_\eta f(w)\,dw$$

と書ける. 但し η は z を始点とし $z+h$ を終点とする Ω 内の曲線. すると定理 4.2.1 (開円板上の正則関数は原始関数を持つ) と同じ議論により $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z)$. □

この定理と系 3.2.5 から次の形の Cauchy の積分定理が従います.

系 5.2.2. f が単連結領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数で, γ が Ω 内の区分的に滑らかな閉曲線なら

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

更に次の形に書き直したものが応用上有用です.

定理 5.2.3. 互いに交わらない有限個の区分的に滑らかな単純閉曲線 $C_0, C_1, \ldots, C_n$ があり, C_0 の内部に $C_1, \ldots, C_n$ が含まれ, 更に $C_1, \ldots, C_n$ は互いに外部にあるものとする. $C_0, C_1, \ldots, C_n$ で囲まれる有界領域を D とし, $\overline{D} := D \cup \bigcup_{k=0}^n C_k$ とする. また C_0 の向き付けは D が進行方向左側にあるものとし, $C_1, \ldots, C_n$ の向き付けは D が右側にあるものとする (図 5.2.1). このとき, $\overline{D}$ を含む開集合上の正則関数 f について,

$$\int_{C_0} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^n \int_{C_j} f(z)\,dz.$$

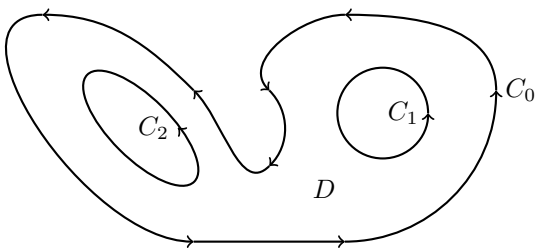


図 5.2.1　Cauchy の積分定理の積分路

この講義ノートでは今後 Cauchy の積分定理といったら定理 5.2.3 のことを指すものとします.

演習問題 (解答: 112 ページ)

問題 5.2.1. C を単純閉曲線であって, $\pm i$ がその内部にあるものとする. 次の複素積分を計算せよ.

$$\int_C \frac{1}{z^2+1}\,dz.$$

問題 5.2.2. 円 $|z|=1$ と直線 $\mathrm{Re}(z)=-1/2$ との一部からなり, 原点を含む閉曲線に正の向き付けを入れたものを積分路として, 以下の関数の複素積分を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{z}$.　(2) $\dfrac{\sin z}{z}$.　(3) $\dfrac{1}{z^2-4/9}$.

問題 5.2.3. 次の実積分を複素積分を用いて計算せよ. 但し $c\in\mathbb{C}$, $|c|<1$ とする.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2c\cos\theta+c^2}.$$

問題 5.2.4. $\mathbb{C}$ 内の単純閉曲線で囲まれた領域 D について

(1) D の面積が次の複素積分で与えられることを示せ. 但し ∂D^+ は D の境界に正の向き付けを入れたものとする.

$$\frac{1}{2i}\int_{\partial D^+} \overline{z}\,dz.$$

(2) f を $\overline{D}$ 上の単射な正則関数とする. D の f による像 $f(D)$ の面積が次の重積分で与えられることを示せ.

$$\iint_D |f'(x+iy)|^2\,dxdy.$$

問題 5.2.5 ([SS, Chapter 2 Exercise 11])**.** $R_0\in\mathbb{R}_{>0}$ とし, f を原点中心の開円板 $D(0,R_0)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<R_0\}$ 上の正則関数とする. また $R\in\mathbb{R}$ と $z\in\mathbb{C}$ を $0<R<R_0$ かつ $|z|<R$ なるものとする.

(1) $w:=R^2/\overline{z}$ とする. 次の等式を示せ.

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-w}\,d\zeta \;=\; 0.$$

但し積分路 C は原点中心で半径 R の円とする.

(2) 次の等式を示せ.

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\,\mathrm{Re}\Big(\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\Big)\,d\varphi.$$

問題 5.2.6 ([SS, Chap. 2, Exercise 12])**.** u を原点中心の単位閉円板 $\overline{D(0,1)}=\{z=x+iy\in\mathbb{C}\mid |z|\le 1\}$ を含む開集合上の実数値関数であって, 2 回連続微分可能かつ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) \;=\; 0$$

が任意の $z=x+iy\in D(0,1)$ で成立するものと仮定する.

(1) $D(0,1)$ 上の正則関数 f であって $\mathrm{Re}(f)=u$ となるものが存在することを示せ. またこのような f の虚部は定数を足す分を除いて一意であることを示せ.

(2) 問題 5.2.5 と (1) を用いて次の等式を示せ.

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-\varphi)u(e^{i\varphi})\,d\varphi.$$

但し

$$P_r(\gamma) := \frac{1-r^2}{1-2r\cos\gamma+r^2}.$$

こうして得られた (2) の等式を**調和関数の Poisson 積分表示**と呼ぶ.

5.3 複素対数

複素関数としての対数関数には §2.3 でも扱いましたが, ここでもう一度詳しく扱います. [川平, pp.148–150] も参考にして下さい.

§2.3 では $\log z$ を e^z の逆関数として定義し, そして $\log z$ が無限多価関数であることを説明しました. つまり, $z = re^{i\theta}$ と極座標表示すると,

$$\log z = \log r + \theta + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

と n の取り方だけ自由度があります ($\log r$ は正の実数 r の対数). n の値を選ぶことを対数関数 $\log z$ の**枝** (branch) を選ぶといいます. 定義 2.3.2 の対数の主値 $\operatorname{Log} z$ は, $\log z$ の枝の一つです. $\operatorname{Log} z$ は $D := \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\le 0}$ 上の正則関数でした. より一般の対数関数の枝は次のように与えられます.

定理 5.3.1. $\Omega \subset \mathbb{C}$ を単連結領域であって $1 \in \Omega$ かつ $0 \notin \Omega$ なるものとする. このとき次の三条件を満たす Ω 上の関数 $\operatorname{Log}_\Omega$ が存在する. そして関数 $\operatorname{Log}_\Omega$ を Ω での**対数関数の枝**と呼ぶ.

(i) $\operatorname{Log}_\Omega$ は Ω 上正則.

(ii) $z \in \Omega$ なら $e^{\operatorname{Log}_\Omega z} = z$.

(iii) $r \in \mathbb{R}_{>0} \cap \Omega$ なら $\operatorname{Log}_\Omega r = \log r$.

証明. $z \in \Omega$ に対して

$$\operatorname{Log}_\Omega z := \int_C \frac{dw}{w}$$

と定義する. 但し C は 1 を始点とし z を終点とする Ω 内の区分的に滑らかな曲線. $0 \notin \Omega$ より積分が well-defined で, 定理 5.1.2 より $\operatorname{Log}_\Omega z$ は C の選び方に依存しないことに注意する. この $\operatorname{Log}_\Omega$ が三条件を満たすことを確認する.

(i) 定理 5.2.1 の証明と同じ議論により, $\operatorname{Log}_\Omega$ は Ω 上正則で $(\operatorname{Log}_\Omega z)' = 1/z$ を満たす.

(ii) $(\operatorname{Log}_\Omega z)' = 1/z$ より

$$(ze^{-\operatorname{Log}_\Omega z})' = e^{-\operatorname{Log}_\Omega z} - z\cdot(\operatorname{Log}_\Omega z)'e^{-(\operatorname{Log}_\Omega z)} = (1 - z\cdot(\operatorname{Log}_\Omega z)')e^{-\operatorname{Log}_\Omega z} = 0.$$

よって系 2.2.4 より $ze^{-(\operatorname{Log}_\Omega z)}$ は定数で, $z = 1$ での値をみることで証明が終わる.

(iii) $z = r \in \mathbb{R}_{>0} \cap \Omega$ の場合, Cauchy の積分定理より

$$\operatorname{Log}_\Omega r = \int_1^r \frac{dx}{x}$$

となるが, 右辺は実対数関数 $\log r$ の積分表示である.

□

補題 5.3.2. 単連結領域 $\Omega = D := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ の場合,

$$\mathrm{Log}_D\, z \;=\; \mathrm{Log}\, z := \log r + i\theta \quad (z = re^{i\theta},\ |\theta| < \pi).$$

証明. 実際に積分で主値が得られることを示す. $z = re^{i\theta}$, $|\theta| < \pi$ に対して, 1 から r への線分と r から $re^{i\theta}$ への原点中心, 半径 r の弧 η からなる積分路を考えると

$$\mathrm{Log}_\Omega\, z \;=\; \int_1^r \frac{dx}{x} + \int_\eta \frac{dw}{w} \;=\; \log r + \int_0^\theta \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt \;=\; \log r + i\theta.$$

□

演習問題 (解答: 114 ページ)

問題 5.3.1. $f(z) = 1/z$ の原始関数は開集合 $U := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ 上では存在しないことを示せ.

問題 5.3.2. $f(z) = 1/(z^2 + 1)$ の原始関数が開集合 $U := \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ 上で存在するか否か議論せよ.

6 正則関数の性質

今回は Cauchy の積分公式の応用を紹介します．記述は [SS, Chapter 2, §4, §5] に基づいていますが, [岸藤,] と [川平, §3.4, §3.5, §4.1, §4.2, §5.1, §5.2] にも説明があるので参考にして下さい．

前回までと同様, 複素数値関数のことを単に関数と呼びます．また開集合または閉集合といったら § 1.1 の意味での $\mathbb{C}$ の開集合または閉集合のことです．

6.1 Cauchy の不等式, Taylor 展開

命題 6.1.1 (Cauchy の不等式). $D := D(z, R)$ を中心 z, 半径 R の開円板とし, f は $\overline{D}$ を含むある開集合上の正則関数とする．また $\|f\|_{\partial D} := \sup_{w\in\partial D} |f(w)|$ とする．このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!\,\|f\|_{\partial D}}{R^n}.$$

特に $n = 0$ の場合は $\left|f(z)\right| \le \|f\|_{\partial D}$.

証明. $C := \partial D^+$ を D の境界に正の向きを入れたものとする．導関数の積分表示 (定理 4.3.2) と積分の絶対値評価 (命題 3.2.1 (3)) から

$$\begin{aligned}\left|f^{(n)}(z)\right| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw\right| \le \frac{n!}{2\pi}\ell(C)\cdot\sup\{\left|f(w)(w-z)^{-n-1}\right|; w\in\partial D\}\\ &= \frac{n!}{2\pi}2\pi R\cdot R^{-n-1}\sup\{|f(w)|; w\in\partial D\} = \frac{n!}{R^n}\|f\|_{\partial D}.\end{aligned}$$

□

定理 6.1.2 (正則関数の Taylor 展開 [川平, 定理 4.3]). D を中心 c の開円板とし, f を $\overline{D}$ を含む開集合上の正則関数とする, このとき f は任意の $z \in D$ において次の級数展開を持つ．

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n, \quad a_n := \frac{1}{n!}f^{(n)}(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}dw.$$

但し $C := \partial D^+$ は D の境界に正の向き付けを入れたもの．

証明. $z \in D$ を固定する．Cauchy の積分公式 $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(w)}{w-z}dw$ において, $\left|\dfrac{z-c}{w-c}\right| < 1$ に注意して

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-c-(z-c)} = \frac{1}{w-c}\frac{1}{1-(z-c)/(w-c)} = \frac{1}{w-c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-c}{w-c}\right)^n$$

と展開する．この級数が w に関して絶対収束することから, 一様収束する関数列の積分に関する命題 3.2.2 より級数和と積分が順序交換できて,

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty}(z-c)^n\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}dw = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(z-c)^n.$$

□

§2.2 で収束する級数が正則関数であること, 言い換えると解析関数が正則関数であることを扱いました. 定理 6.1.2 はその逆, 正則関数が解析的であることを主張しています (注意 2.2.13). つまり:

系. 解析関数と正則関数は同値な概念である.

また, この定理と解析関数が任意回微分可能であったこと (系 2.2.12) から次の主張も従う.

定理 6.1.3 ([川平, 定理 3.16])**.** f を開集合 U 上の正則関数とすると, f は U 上任意回微分可能であり, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して導関数 $f^{(n)}$ は U 上正則.

演習問題 (解答: 115 ページ)

問題 6.1.1. 以下の関数を括弧内の点を中心にして Taylor 展開せよ.

(1) $\dfrac{(z+2)}{(z-2)z}$ $[z=1]$. (2) z^{-2} $[z=1]$. (3) $\cos z$ $[z=\pi/4]$. (4) $\tan^{-1} z$ $[z=0]$.
(5) $\operatorname{Log} z$ $[z=1]$.

問題 6.1.2. 以下の z の関数を括弧内の点を中心にして Taylor 展開せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^z e^{-\zeta^2} d\zeta$ $[z=0]$. (2) $\displaystyle\int_0^z \frac{\sin\zeta}{\zeta} d\zeta$ $[z=0]$. (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ $[z=i/2]$.

問題 6.1.3. 数列 $\{E_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と $\{B_n \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ を以下のように定義する.

$$\sec z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} z^{2n}, \quad z\cot z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} (2iz)^{2n}.$$

E_1, E_2, E_3 および B_1, B_2 を求めよ. なお E_n は **Euler 数**, B_n は **Bernoulli** (ベルヌーイ) **数**と呼ばれる.

問題 6.1.4. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して n 次多項式 $P_n(z)$ を

$$P_n(z) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n$$

で定義する. $P_n(1)$, $P_n(-1)$, $P_n(0)$ の値を求めよ. 多項式 $P_n(z)$ を **Legendre 多項式** (ルジャンドル) と呼ぶ.

6.2 整関数に関する Liouville の定理

Cauchy の積分公式の応用として整関数に関する Liouville (リューヴィル) の定理が得られます.

定義. $\mathbb{C}$ 上で正則な関数を**整関数** (entire function) と呼ぶ. また $S \subset \mathbb{C}$ 上の関数 $f : S \to \mathbb{C}$ が**有界**であるとは, ある $B \in \mathbb{R}_{>0}$ があって任意の $z \in S$ に対して $|f(z)| < B$ となるもののことをいう.

定理 6.2.1 (**Liouville の定理** [川平, 定理 3.17])**.** 有界な整関数は定数関数である.

証明. 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $f'(z) = 0$ を証明すれば, $\mathbb{C}$ は領域だから系 3.3.4 より $f(z)$ は定数だと分かる. $B \in \mathbb{R}$ を任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $|f(z)| \leq B$ となるものとすると, Cauchy の不等式 (命題 6.1.1) より任意の $z \in \mathbb{C}$ と $R \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して $|f'(z)| \leq B/R$. そこで $R \to \infty$ とすれば $f'(z) = 0$ が分かる. □

Liouville の定理を使うと代数学の基本定理が証明できます.

定理 6.2.2 (**代数学の基本定理** [川平, 定理 3.18])**.** 定数でない複素数係数多項式 $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ は複素数の根を持つ. 特に $P(z) = a_n(z - z_1)\cdots(z - z_n)$, $z_i \in \mathbb{C}$ と因数分解できる.

証明. もし根がなければ関数 $1/P(z)$ は $\mathbb{C}$ 上有界な正則関数である. 実際, $a_n \neq 0$ と仮定すると, $z \neq 0$ なら $P(z)/z^n = a_n + (a_{n-1}/z + \cdots + a_0/z^n)$ だが, ここで $|z| \to \infty$ とすると右辺の括弧内は 0 に収束するので, $c := |a_n|/2$ とすればある $R \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して $|z| > R$ なら $|P(z)|/|z|^n \geq c$ となる. つまり $|z| > R$ なら $1/|P(z)| \leq 1/(c|z|^n) < 1/(cR^n)$ となり, この開集合上で $1/P(z)$ が有界であることが分かる. 一方 $|z| \leq R$ では $|P(z)|$ は 0 にならない連続関数なので, $1/P$ は有界閉集合 $|z| \leq R$ 上有界になる. 以上より $1/P(z)$ は $\mathbb{C}$ 上有界な正則関数.

すると Liouville の定理 (定理 6.2.1) より $1/P$ は定数. これは P が定数でないことと矛盾する.

後半の証明は問題 6.2.1 とする. □

演習問題 (解答: 116 ページ)

問題 6.2.1. 定理 6.2.2 (代数学の基本定理) の後半の主張を証明せよ.

問題 6.2.2 (Liouville の定理の別証)**.** f を有界な整関数とし, $a, b \in \mathbb{C}$ を任意に取る.

(1) $R > \max(|a|, |b|)$ なる実数 R について, 次の不等式が成立することを示せ. 但し積分路は円周に正の向きをいれたものとする.

$$|f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \left| \frac{f(z)}{z-a} - \frac{f(z)}{z-b} \right| |dz| .$$

(2) 上の不等式で $R \to +\infty$ とすることで, $f(a) = f(b)$ となることを示せ.

問題 6.2.3. f を整関数とし, $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して $M(r) := \max\{|f(z)| \mid |z| = r\}$ と定める. 正の実数 B, α が存在して, 任意の r に対して $M(r) \leq Br^\alpha$ となるなら, f は高々 $\lfloor \alpha \rfloor$ 次の多項式であることを示せ. 但し $\lfloor \alpha \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq \alpha\}$.

6.3　一致の定理と解析接続

次に**解析接続**の概念を説明します．これは抽象的な概念で最初は理解しにくいのですが，**現代数学の色々なところで基本的な役割を果たす，大変重要な概念**です．まず一致の定理の紹介から始めます．

定義. $S \subset \mathbb{C}$ を部分集合とする．$z \in \mathbb{C}$ が S の**集積点** (accumulation point) あるいは極限点であるとは，点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, $z_n \neq z$ が存在して $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ となることをいう．

定理 6.3.1 (一致の定理 [川平, 定理 5.7])**.** f を領域 Ω 上の正則関数とする．Ω に集積点を持つ，相異なる点からなる点列 $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Omega$ が存在して，任意の k に対し $f(z_k) = 0$ ならば，f は恒等的に 0 である．

証明. $a \in \Omega$ が点列 $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Omega$ の集積点だとする．まず a を含む開円板 D が存在して，f が D 上 0 であることを背理法で示す．$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z-a)^n$ と Taylor 展開 (定理 6.1.2) すると，背理法の仮定より $f_m \neq 0$ なる m が存在する．そのうち最小のものを改めて m と書くと，$w \to 0$ で $g(w) \to 0$ となる関数 g を用いて

$$f(z) \;=\; f_m(z-c)^m\big(1 + g(z-a)\big)$$

と書ける．ここで $z = z_k$ とすると $0 = f(z_k) = f_m(z_k - a)^m\big(1 + g(z_k - a)\big)$．一方，$\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ の仮定から $z_k \neq a$ だから $f_m(z_k - a)^m \neq 0$．また k を十分大きくとれば $1 + g(z_k - a) \neq 0$．これで矛盾が得られた．

次に $Z := \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$ の内部を，簡単のため $U := Z^{\circ}$ と書く．問題 1.1.4 より U は開集合で，前半の議論より $U \neq \emptyset$．一方 U は閉集合でもある．実際，点列 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ が極限 $w = \lim_{n\to\infty} w_n \in \mathbb{C}$ を持てば，f の連続性から $f(w) = \lim_{n\to\infty} f(w_n) = 0$ より $w \in Z$．すると前半の議論から w を含む開円板 D があって f は D 上 0 になるが，これは $w \in U$ を意味する．よって U の閉包は U に一致し，閉包は閉集合だから，U は閉集合である．

すると $V := \Omega \setminus U$ も開かつ閉であり，$\Omega = U \sqcup V$ と $U \neq \emptyset$ および Ω が連結であることから $V = \emptyset$，つまり $\Omega = U$，すなわち f は Ω 上で 0 であることが分かった． □

系 6.3.2. 領域 Ω 上の正則関数 f, g が Ω の空でない開部分集合上で一致するなら，Ω 上で $f = g$ となる．

集合 S 上の関数 $f : S \to \mathbb{C}$ と部分集合 $U \subset \Omega$ に対し，$f|_U : U \to \mathbb{C}$ で U 上に制限した関数を書きます．

定義 6.3.3. $U, V \subset \mathbb{C}$ を領域とし，$U \cap V \neq \emptyset$ だとする．f を U 上の正則関数，g を V 上の正則関数とする．もし $f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}$ なら，g を f の (V への) **解析接続** (analytic continuation) と呼ぶ．

系 6.3.2 より，解析接続は (存在すれば) 一意に定まります．

解析接続の非自明な例は**ガンマ関数**で，§11 で扱います．この節では簡単な例を演習問題で扱います．

演習問題 (解答: 117 ページ)

問題 6.3.1. 次の 2 つの関数 $f(z)$ と $g(z)$ が解析接続の関係にあることを示せ．

(1) $f(z) = (1+z^2)^{-1}$ と $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$.　　(2) $f(z) = z^{-2}$ と $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n$.

(3) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} z^n/n$ と $g(z) = \log 2 - \sum_{n=1}^{\infty}(1-z)^n/(n \cdot 2^n)$.

問題 6.3.2. 以下の関数は単位円 $|z| = 1$ の外部には解析接続できないことを論じよ.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$. (2) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$.

6.4 Morera の定理

次の Morera の定理は Cauchy の積分定理の逆を主張します.

定理 6.4.1 (**Morera の定理** [川平, 定理 5.2])**.** $D \subset \mathbb{C}$ を開円板とし, f を D 上の連続関数とする. 任意の三角形 $T \subset D$ に対し $\int_T f(z)\,dz = 0$ ならば f は正則である.

証明. 定理 4.2.1 (円板上の正則関数は原始関数を持つ) の証明が Goursat の定理 4.1.2 と与えられた関数の連続性しか用いなかったことに注意して, 同様の議論から f は D 上の原始関数 F を持つ. 特に F は正則関数だから, 定理 6.1.3 (正則関数は無限回微分可能) より F は二回複素微分可能. これは f が複素微分可能, つまり正則であることを意味する. □

6.5 正則関数列

(複素) 数列の収束と同様に, (複素) 関数列の収束という概念が考えられます. 数列の場合と違うのは, 収束の概念に様々なものがある点です. ここでは正則関数の列に関して有用な収束概念を紹介します. まず $\mathbb{C}$ の位相に関して新しい概念を導入します.

定義. $S \subset \mathbb{C}$ を部分集合とする.

(1) S の**開被覆** (open covering) とは, 開集合 $U_i \subset \mathbb{C}$ の族 $\{U_i\}_{i \in I}$ であって $S \subset \cup_{i \in I} U_i$ となるもののことである.

(2) S が**コンパクト** (compact) であるとは, S の任意の開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$ が有限部分被覆を持つ, つまり有限部分集合 $J \subset I$ が存在して $S \subset \{U_j\}_{j \in J}$ となることをいう.

コンパクト集合は $\mathbb{C}$ 以外の位相空間に対しても定義できる概念ですが, 次の主張は $\mathbb{C}$ の位相 (Euclid 位相) に関して成り立つ特殊なものです.

事実 6.5.1 ([杉浦, 第 I 章, §7])**.** $\mathbb{C}$ の部分集合について, コンパクトであることと有界閉集合であることは同値.

特に閉円板 $\overline{D(c,r)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| \leq r\}$ はコンパクトです.

ここで関数の一様収束性 (定義 2.1.1) を思い出しておいて下さい. 次の定理 6.5.2 は正則関数列の収束先が正則関数である, というものです.

定理 6.5.2. $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ を開集合 U 上の正則関数の列であって, U の任意の部分コンパクト集合上で関数 f に一様収束するものとする. このとき f は U 上の正則関数である.

証明. $D \subset \mathbb{C}$ を開円板であってその閉包 $\overline{D}$ が $\overline{D} \subset U$ を満たすものとし, $T \subset D$ を任意の三角形とする. 各 f_n が正則なので, Goursat の定理 4.1.2 より $\int_T f_n(z)\,dz = 0$. $\overline{D}$ はコンパクトなので, 仮定より $\overline{D}$ 上で一様に $f_n \to f$ と収束する. 連続関数の一様収束先は連続だから f は連続で, また命題 3.2.2 より $\int_T f_n(z)\,dz \to \int_T f(z)\,dz$ と収束する. よって $\int_T f(z)\,dz = 0$. T は任意に取っていたから, Morera の定

理 6.4.1 より f は D 上正則. D も任意に取っていたから, f は U 上で正則である. □

次の Weierstrass (ワイエルシュトラス) の定理は正則関数列の広義一様収束先 (定義 2.1.1) が項別微分可能であることを主張します.

定理 6.5.3 (Weierstrass の定理). 定理 6.5.2 と同じ仮定のもと, 関数列 $\{f_n'\}_{n=0}^{\infty}$ は U の任意の部分コンパクト集合上で f' に一様収束する.

証明. U 上一様収束すると仮定しても一般性を失わない. $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して $U_\delta := \{z \in U \mid \overline{D(z,\delta)} \subset U\}$ と定める. 主張を証明するには, 任意の δ に対して U_δ 上で $\{f_n'\}$ が f' に一様収束することを示せば十分. そのためには, U 上の任意の正則関数 F に対して

$$\sup_{z \in U_\delta} |F'(z)| \le \frac{1}{\delta} \sup_{w \in U} |F(w)|$$

を示せば十分. 実際, この不等式を $F = f_n - f$ に適用すればよい. Cauchy の積分公式から, C を $\partial D(z,\delta)$ に正の向きを入れたものとして

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(w)}{(w-z)^2}\, dw.$$

従って

$$|F'(z)| \le \frac{1}{2\pi} \sup_{w \in C} \frac{|F(w)|}{|(w-z)^2|} \cdot \ell(C) \le \frac{1}{2\pi} \sup_{w \in \Omega} |F(w)| \frac{1}{\delta^2} \cdot 2\pi\delta = \frac{1}{\delta} \sup_{w \in \Omega} |F(w)|.$$

□

定理 6.5.2 の応用として, 積分で定義される正則関数を紹介します.

定理 6.5.4. $U \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, $F(z,s)$ を $(z,s) \in U \times [0,1]$ 上で定義された関数で次の二条件を満たすものとする.

(i) 任意の s について $F(z,s)$ は z に関する正則関数.

(ii) F は $U \times [0,1]$ 上連続.

このとき, 次式で定義される関数 f は U 上の正則関数である.

$$f(z) := \int_0^1 F(z,s)\, ds.$$

証明. 各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$f_n(z) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F(z, k/n)$$

と定めると, 最初の条件より f_n は U 上で正則. 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\overline{D} \subset U$ となる任意の円板 D 上で一様に f に収束することが示せれば, 定理 6.5.2 より f は正則である. コンパクト集合上の連続関数は一様連続だから, 任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して, $|s_1 - s_2| < \delta$ ならば $\sup_{z \in D} |F(z,s_1) - F(z,s_2)| < \varepsilon$ となる. 従って $n > 1/\delta$ となるよう n を取れば

$$|f_n(z) - f(z)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} (F(z,k/n) - F(z,s))\, ds \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} |F(z,k/n) - F(z,s)|\, ds \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

よって $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は一様に f に収束する. □

演習問題 (解答: 118 ページ)

問題 6.5.1 (Weierstrass の二重級数定理 [杉浦, 第 IX 章 §3 定理 3.5 系]**).** Weierstrass の定理 6.5.3 から次の主張を導け: 開円板 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < r\}$ において, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し冪級数

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}(z-c)^k$$

が収束し, また級数

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

は D の任意のコンパクト集合上で一様収束するものと仮定する. このとき以下の三つが成立する.

(1) F は D 上の正則関数である.

(2) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $A_k := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k}$ は収束する.

(3) 任意の $z \in D$ に対して次の等式が成り立つ.

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z-c)^k.$$

この主張を Weierstrass の二重級数定理と呼ぶ.

問題 6.5.2. 正整数 k に対し, k を割り切る正整数の個数を $\tau(k)$ と書く. $|z| < 1$ なる複素数 z に対し次の等式が成立することを, 問題 6.5.1 の結果を用いて示せ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \tau(k) z^k.$$

7 有理型関数

前回までと同様, 複素数値関数のことを単に関数と呼び, また開集合または閉集合といったら §1.1 の意味のものとします.

今回は [SS, Chapter 3 §§1–3] に基づいて孤立特異点, 極, Laurent 展開そして有理型関数を扱います.

7.1 孤立特異点

これまでは集合 U 上正則な関数を主に考えてきましたたが, これからは必ずしも U の全ての点で定義されていないものも考えます. 念頭にあるのは有理関数 $P(z)/Q(z)$ (P と Q は多項式) で, これは $\mathbb{C}$ から分母 Q の零点を除いた所で正則な関数です. 但し $z \in \mathbb{C}$ が関数 f の**零点** (zero) であるとは, $f(z) = 0$ となるもののことです.

定義. $s \in \mathbb{C}$ が関数 f の**孤立特異点** (isolated singularity) とは, s を含む開集合 U が存在して, $U \setminus \{s\}$ 上で f は定義されているが s では f が定義されていないもののことをいう.

複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\lim_{n\to\infty} 1/z_n = 0$ を満たすとき, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ は ∞ に収束するといいます. 同様に, 関数 f が $\lim_{z\to s} 1/f(z) = 0$ を満たすとき, f は $z \to s$ で ∞ に収束するといい, これらを

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty, \quad \lim_{z\to s} f(z) = \infty$$

で表します. すると孤立特異点は次のように三種類に分類できます.

定義. $U \subset \mathbb{C}$ を開集合, $s \in U$ とし, f は $U \setminus \{s\}$ 上の正則関数で, s は f の孤立特異点だとする.

(1) $\lim_{z\to s} f(z) \in \mathbb{C}$ が存在する場合, s を f の**除去可能な特異点** (removable singularity) と呼ぶ.

(2) $\lim_{z\to s} f(z) = \infty$ の場合, s を f の**極** (pole) と呼ぶ.

(3) 除去可能な特異点でもなく極でもない孤立特異点を**真性特異点** (essential singularity) と呼ぶ.

例 7.1.1. 三種類の孤立特異点の例を挙げます

(1) $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ での正則関数 $f(z) := (\sin z)/z$ について, $z = 0$ は f の孤立特異点であるが, $\lim_{z\to 0} f(z) = 1$ より $z = 0$ は f の除去可能な特異点である.

(2) 有理関数 $f(z) := P(z)/Q(z)$ について, Q の零点は f の極である.

(3) 関数 $e^{1/z}$ は $z = 0$ を真性特異点に持つ (証明は問題 7.1.1).

除去可能特異点については, 次の Riemann による定理があります.

定理 7.1.2 (Riemann の特異点除去可能定理). $U \subset \mathbb{C}$ を開集合, $s \in U$ とする. f を $U \setminus \{s\}$ 上の有界な正則関数とする. このとき s は f の除去可能な特異点であり, α: $\lim_{z\to s} f(z)$ として $f(s) := \alpha$ と定めれば, f は U 上の正則関数になる.

証明. U を中心 s の円板 D に置き換えても一般性を失わない. D の境界 ∂D に正の向きを入れたものを C と書く. もし任意の $z \in D \setminus \{s\}$ について

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z}dw \tag{7.1.1}$$

となることが示せれば, 定理 6.5.4 (積分で定義される正則関数) より右辺は D 上の正則関数を定め, $z \in D \backslash \{s\}$ では f と値が一致するから結論を得る.

(7.1.1) を示すため, $z \in D$ を固定し, 図 7.1.1 のような積分路 $\gamma(\delta;\varepsilon)$ を考える. 但し δ は z と s をさける二つの帯部分の幅であり, ε は内側の二円の半径である.

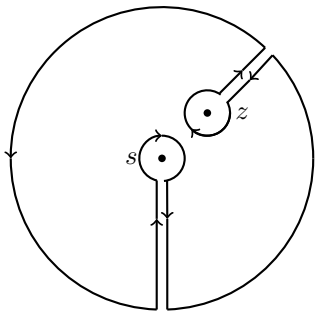


図 7.1.1　積分路 $\gamma(\delta;\varepsilon)$

Cauchy の積分定理より $\int_{\gamma(\delta;\varepsilon)}[f(w)/(z-w)]\,dw = 0$. $\delta \to 0$ の極限で

$$\int_{C^+} \frac{f(w)}{w-z}dw + \int_{C^-(s,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z}dw + \int_{C^-(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z}dw \;=\; 0. \tag{7.1.2}$$

但し $C^-(z,\varepsilon)$ は中心 z 半径 ε の円に正の向きを付けたものである. Cauchy の積分公式 (定理 4.3.1) の証明と同じ議論で

$$\int_{C^-(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z}dw \;=\; -2\pi i f(z)$$

が分かる. 一方で $C^-(s,\varepsilon)$ 上での積分は, f が有界なので

$$\left| \int_{C^-(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z}dw \right| \le 2\pi\varepsilon B$$

と適当な $B \in \mathbb{R}_{>0}$ を用いて評価できる. よって (7.1.2) で $\varepsilon \to 0$ として (7.1.1) を得る. □

次に真性特異点について. 真性特異点は "その他" の孤立特異点として定義しましたが, 関数を写像としてみると次の定理 7.1.3 の性質を持つことが分かります.

中心 $z \in \mathbb{C}$ で半径 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ の開円板を $D(z,r) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w-z| < r\}$ で表してきましたが, それから中心を除いた集合 $D^*(z,r)$ を穴あき円板 (punctured disk) と呼びます. つまり

$$D^*(z,r) \;:=\; D(z,r) \setminus \{z\} \;=\; \{w \in \mathbb{C} \mid 0 < |w-z| < r\}.$$

定義. 部分集合 $S \subset \mathbb{C}$ が**稠密** (dense) であるとは, 任意の $z \in \mathbb{C}$ と任意の $r \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し $D(z,r) \cap S \neq \emptyset$ となることをいう.

定理 7.1.3 (Casorati-Weierstrass)**.** f は穴あき円板 $D^*(s,r)$ 上の正則関数であって s を真性特異点に持つものとする. このとき像 $f(D^*(s,r)) \subset \mathbb{C}$ は稠密である.

証明. 背理法で示す. f の像が稠密でないと仮定すると, $w \in \mathbb{C}$ と $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して, 任意の $z \in D^*(s,r)$ に対して $|f(z)-w| > \delta$. 従って $D^*(s,r)$ 上の関数 $g(z) := (f(z)-w)^{-1}$ が定義できて, これは正則かつ

$|g(z)| < 1/\delta$ となる．よって定理 7.1.2 より g は s で除去可能な特異点を持つ．もし $g(s) \neq 0$ なら $f(z) - w$ は s で正則になり，仮定と矛盾する．$g(s) = 0$ なら $f(z) - w$ は s で極を持ち，やはり仮定と矛盾する． □

最後に極について．まず零点の位数に関する主張を用意します．

定理 7.1.4. f は開集合 V 上の正則関数で $c \in V$ は f の零点とする．また $f \not\equiv 0$ (定数関数 0 ではない) と仮定する．このとき c の開近傍 $U \subset V$ と U 上零点を持たない正則関数 g 及び $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して，

$$f(z) \;=\; (z-c)^n g(z)$$

が任意の $z \in U$ に対して成立する．更に g と n は一意に定まる．

証明. 正則関数の Taylor 展開 (定理 6.1.2) より，c の適当な開近傍 U 上で $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k$ と展開できて，$f \not\equiv 0$ より $a_n \neq 0$ となる n がある．そのうち最小のものを n と書き直すと

$$f(z) \;=\; (z-c)^n \left(a_n + a_{n+1}(z-c) + \cdots\right) \;=\; (z-c)^n g(z)$$

と書けて，g は収束級数だから U 上正則．また $a_n \neq 0$ より，c に十分近い任意の z について $g(z) \neq 0$ である．

次に一意性について．$f(z) = (z-c)^n g(z) = (z-c)^m h(z)$ と二通りに表示できたとすると，$m > n$ なら $g(z) = (z-c)^{m-n} h(z)$ となり $g(c) = 0$ で矛盾する．同様に $m < n$ でも矛盾し，$m = n$ が分かる．よって $g = h$ となり，一意性が示せた． □

系 (零点の孤立性)**.** 正則関数の零点は孤立している．つまり，0 でない正則関数 f の零点 c に対して十分小さい $r \in \mathbb{R}_{>0}$ をとると，開円板 $D(c,r)$ における f の零点は c のみである．

定義. 定理 7.1.4 の状況の下，c は f の**位数 n の零点** (zero of order n) であるという．特に位数 $n = 1$ の零点を**単純零点** (simple zero) と呼ぶ．

すると極について次の主張が成立します．

定理 7.1.5. 関数 f の極 $c \in \mathbb{C}$ に対し，c の開近傍 U と U 上で零点を持たない正則関数 h 及び $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して，次が成立する．更に h と n は一意に定まる．

$$f(z) \;=\; (z-c)^{-n} h(z).$$

証明. $\lim_{z \to c} f(z)^{-1} = 0$ より，十分小さい $r \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して $D^*(c,r)$ 上で $f(z) \neq 0$．従って $g := 1/f$ は $D^*(c,r)$ 上正則で $\lim_{z \to c} g(z) = 0$．定理 7.1.2 より $g(c) := 0$ とすれば g は $U := D(c,r)$ 上正則である．後は定理 7.1.4 を $1/f$ に適用すればよい． □

定義. 定理 7.1.5 の状況の下，c を f の n **位の極**と呼び，特に $n = 1$ 位の極を**単純極** (simple pole) と呼ぶ．

演習問題 (解答: 119 ページ)

問題 7.1.1. 例 7.1.1 (3)，即ち $z = 0$ が $e^{1/z}$ の真性特異点であることを証明せよ．

問題 7.1.2. 以下の関数の孤立特異点全てについて，その種類を判定し，極の場合は位数を求めよ．

(1) $\dfrac{\sin(z^2)}{z^4}$　　(2) $\dfrac{z^4-1}{z^3+1}$　　(3) $\exp(z^{-2})$.　　(4) $(z+1)^{-2} \exp\left(\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}\right)$.

7.2 Laurent 展開

正則関数の場合, Cauchy の積分公式の応用として Taylor 展開が得られた (定理 6.1.2) ことを思い出して下さい. 孤立特異点を持つ関数の級数展開は次のように与えられます.

定理 7.2.1. r と R を $0 \leq r < R \leq +\infty$ なる実数 (又は $+\infty$) とし, f を中心 $c \in \mathbb{C}$ の環状領域 $A := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-c| < R\}$ 上の正則関数とする. このとき f は, A 上で絶対収束かつ広義一様収束 (定義 2.1.1 参照) する級数で

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-c)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n \tag{7.2.1}$$

と一意に展開できる. そして係数 a_n は, $r < d < R$ なる任意の実数 d を用いて

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=d} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}dw \tag{7.2.2}$$

で与えられる. 但し積分路は円に正の向きを入れたもの. (7.2.1) を f の **Laurent 展開**と呼ぶ.

証明. 展開の一意性について. 級数展開 $f(z) = \sum_n a_n(z-c)^n$ があったとする. $|z-c| = d$ 上でこの級数は一様収束しているから, 極限と積分の順序交換 (命題 3.2.2) より任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=d} \frac{f(w)}{(w-c)^{m+1}}dw = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i}\int_{|w-c|=d} (w-c)^{n-m-1}\,dw.$$

問題 3.2.1 (1) より $\int_{|w-c|=d}(w-c)^{n-m-1}\,dw = 2\pi i\delta_{m,n}$ だから (7.2.2) が得られ, a_n の一意性も示せた.

次に展開できることについて. $z \in A$ を固定し, $r < r_1 < |z| < r_2 < R$ なる実数 r_1, r_2 を取る. 十分小さい $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ を取ると図 7.2.1 の状況になる. すると, 正の向きを入れたもの円を積分路として,

$$f(z) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z}dw \overset{(**)}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_2} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_1} \frac{f(w)}{w-z}dw$$

が成立する. ここで $(*)$ は Cauchy の積分公式, $(**)$ は Cauchy の積分定理 5.2.3 の帰結である.

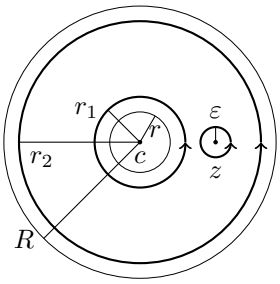


図 7.2.1 Laurent 展開の証明

右辺第一項は z の関数として $|z-c| < r_2$ で正則なので, 絶対収束かつ広義一様収束する級数

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_2} \frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n\geq 0}(z-c)^n \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=d} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}dw$$

に展開できる．第二項については，$\left|\dfrac{w-c}{z-c}\right| = \dfrac{r_1}{w-c} < 1$ に注意して

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{(w-c)-(z-c)} = -\frac{f(w)}{z-c}\frac{1}{1-(w-c)/(z-c)} = -\sum_{n\geq 1}\frac{f(w)}{z-c}\Big(\frac{w-c}{z-c}\Big)^{n-1}$$

と展開すれば，$|z-c| > r_1$ で絶対収束かつ広義一様収束する級数

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_1}\frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n\geq 1}(z-c)^{-n}\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=d} f(w)(w-c)^{n-1}\,dw$$

に展開できる．よって結論が得られた． □

この定理で $r=0$，つまり f が c で極を持つ場合は次のように言い換えられます．

命題 7.2.2. $c\in\mathbb{C}$ が関数 f の n 位の極であるとき，c の開近傍 U とその上の正則関数 $G(z)$ が存在して，任意の $z\in U$ に対して

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-c}+G(z),\quad a_{-k} := \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=d}(w-c)^{k-1}f(w)\,dw. \tag{7.2.3}$$

但し d は $D(c,d)\subset U$ となる任意の正実数で，積分路は円に正の向きを入れたもの．

証明．定理 7.1.5 より $(z-c)^n f(z)$ は正則なので，その Laurent 展開は負冪を含まない．よって f の Laurent 展開は $-n$ 次以上の項からなる．$G(z)$ は Laurent 展開の非負冪の和で，それは正則． □

定義 7.2.3. 命題 7.2.2 の状況ににおいて，$\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-c}$ を f の極 c での**主部**または主要部 (principal part) と呼ぶ．また a^{-1} を f の c での**留数** (residue) と呼んで次のように表す．

$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) := a_{-1}.$$

注意． 勉強が進んでいる人向けのコメント：本当は，留数は $\mathrm{Res}_{z=c}\, f(z)\,dz$ と書いた方が良いです．これは “微分形式 $f(z)\,dz$ の留数” という意味で，そう定義しておくと留数は “座標 z の取り方に依存しない” ものになります．

系 7.2.4. f が c で位数 n の極を持つとき，

$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = \lim_{z\to c}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\Big((z-c)^n f(z)\Big).$$

証明．(7.2.3) より $(z-c)^n f(z) = a_{-n}+\cdots+a_{-1}(z-c)^{n-1}+(z-c)^n(\text{正則})$ と書けて，$(n-1)$ 回微分すると結論が得られる． □

演習問題 (解答: 119 ページ)

問題 7.2.1. $f(z) := z^4(z-1)^{-1}(z+1)^{-2}$ に対し，$z=1,-1$ での留数を求めよ．

問題 7.2.2. 以下の関数の全ての極に対し留数を求めよ．

(1) $\dfrac{e^{\pi z}}{z^2+1}$. (2) $\dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}$. 但し n は正整数. (3) $\cot^2 z$.

問題 7.2.3. 以下の関数を括弧内の点を中心にして Laurent 展開せよ.
(1) $\dfrac{2z}{z^2+1}$ $[z=i,\ z=a$ (実数)$]$. (2) $\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ $[z=0,1,2]$.

問題 7.2.4. 以下の関数を $z=0$ を中心にして Laurent 展開せよ.
(1) $\dfrac{1}{z(z^2+1)}$. (2) $ze^{1/z}$. (3) $\dfrac{\sin z}{z^2}$. (4) $\dfrac{1}{e^z-1}$.

問題 7.2.5. a を $|a|<1$ なる実数とし,

$$f(z) := \frac{(1-a^2)z}{(z-a)(1-az)}$$

とする. $|a|<|z|<1/|a|$ なる複素数 z を中心として f を Laurent 展開し, それを用いて実数 θ に関する次の等式を導け.

$$\frac{1-a^2}{1-2a\cos\theta+a^2} = 1+2\sum_{n\geq 1} a^n\cos n\theta.$$

問題 7.2.6 ([岸藤, 演習問題 3.2.9])**.** $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対して, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ の正則関数 $f(z) := \exp\bigl(t(z-z^{-1})/2\bigr)$ を考える. 円環領域の Laurent 展開 (定理 7.2.1) を $r=0$, $R=\infty$, $d=1$ で f に適用して, 得られた Laurent 展開を

$$\exp\bigl(t(z-z^{-1})/2\bigr) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t)z^n$$

と書く. 関数 $J_n(t)$ を n 次の **Bessel 関数**と呼ぶ. 以下の等式を示せ.
(1) $J_n(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t\sin\theta-n\theta)}\,d\theta = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(t\sin\theta-n\theta)\,d\theta$.
(2) $n\geq 0$ ならば $J_n(t) = \displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\Bigl(\frac{t}{2}\Bigr)^{2k+n}$, $n<0$ ならば $J_n(t) = \displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^{n+k}}{k!(k-n)!}\Bigl(\frac{t}{2}\Bigr)^{2k-n}$.
(3) $J_n''(t)+t^{-1}J_n'(t)+(1-n^2/t^2)J_n(t)=0$.

7.3 有理型関数

定義 7.3.1. 関数 f が開集合 $U \subset \mathbb{C}$ 上**有理型** (meromorphic) であるとは, U 内に集積点を持たない点列 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset U$ であって以下の二条件を満たすものが存在することをいう.

(i) f は $U \setminus \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 上で正則.

(ii) f は各 z_n $(n \in \mathbb{N})$ を極に持つ.

有理型関数は $\mathbb{C}$ 上で考えるより "拡張された複素数平面" で考えた方が自然な対象です.

定義. (1) 関数 f が**無限遠で正則である**とは, 関数 $F(z) := f(1/z)$ が $z = 0$ で正則であることをいう. 同様に f が**無限遠で極を持つ**とは, $F(z) := f(1/z)$ が $z = 0$ で極を持つことをいう. また**無限遠で除去可能特異点を持つ**, および**無限遠で真性特異点を持つ**ことも同様に定義できる.

(2) 関数 f が**拡張された複素数平面で有理型**であるとは, f が $\mathbb{C}$ 上の有理型関数であって, かつ無限遠で正則または無限遠で極を持つことをいう.

定理 7.3.2. 拡張された複素数平面で有理型である関数は有理関数である.

証明. f は拡張された複素数平面で有理型だと仮定する. $f(1/z)$ は $z = 0$ で正則または極を持つから, 適当な $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ があって, 穴あき円板 $D^*(0, \varepsilon) = D(0, \varepsilon) \setminus \{0\}$ 上で $f(1/z)$ は正則である. $f(1/z)$ の $z = 0$ における主部を $f_\infty(z)$ と書こう. 一方で $f(z)$ は $\mathbb{C}$ 上で有理型だから, 事実 6.5.1 ($\mathbb{C}$ において有界閉集合であることとコンパクトであることは同値) より, 有界閉集合 $\overline{D(0, 1/\varepsilon)}$ における $f(z)$ の極の個数は有限個. それらを $z_1, \ldots, z_n$ と名付け, 各 z_k における $f(z)$ の主部 (定義 7.2.3) を $f_k(z)$ と書く. すると

$$F(z) := f(z) - f_\infty(1/z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$$

は整関数かつ有界. よって Liouville の定理 6.2.1 より F は定数関数であり, f は有理関数. □

以上の議論では "拡張された複素数平面" それ自体は定義していませんが, 実は複素数平面 $\mathbb{C}$ に無限遠点 ∞ を付け加えた集合 $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ に適切な位相をいれたものとして, 幾何学的に理解することもできます. この位相空間 $\overline{C}$ は 2 次元球面 S^2 と同相で, **Riemann 球面**と呼ばれています. 詳しくは問題 7.3.2 または春学期の教科書 [川平, §5.5] を参照して下さい.

演習問題 (解答: 122 ページ)

問題 7.3.1. 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の有理型関数全体の集合 $K(\Omega)$ は関数の四則演算 (加減乗除) で閉じている[*5] ことを示せ. つまり, 任意の $f, g \in K(U)$ に対して $f + g, f - g, fg$ もまた有理型関数であること, また更に $g \neq 0$ なら f/g も有理型関数であることを示せ.

以下では "拡張された複素数平面" を幾何学的に扱います. 位相空間に関する基本的な用語を用います.

定義. 中心 $(0, 0, 1/2)$, 半径 $1/2$ の 2 次元球面

$$\mathbb{S} := \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X^2 + Y^2 + (Z - 1/2)^2 = 1/4\}$$

[*5] 代数学の言葉遣いを用いると, $K(\Omega)$ は体をなす, ということです.

とその上の点 $N := (0,0,1)$[*6]を考える．$\mathbb{S}$ から $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ への写像 $p : \mathbb{S} \to \overline{\mathbb{C}}$ を

$$p(X,Y,Z) := \begin{cases} \frac{X}{1-Z} + i\frac{Y}{1-Z} & (X,Y,Z) \neq (0,0,1) \\ \infty & (X,Y,Z) = (0,0,1) \end{cases}$$

で定義すると，この写像は全単射であり，また $\mathbb{S} \setminus \{N\}$ 上では連続写像である．そこで $\overline{\mathbb{C}}$ の位相を

$$U \subset \overline{\mathbb{C}} \text{ が開集合} :\Longleftrightarrow p^{-1}(U) \text{ が } \mathbb{S} \text{ の Euclid 位相に関して開集合}$$

と定義することで $\overline{\mathbb{C}}$ を位相空間とみなしたものを **Riemann 球面**と呼ぶ．

問題 7.3.2. Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$ について以下の主張を示せ．

(1) $z, w \in \overline{\mathbb{C}}$ に対して $d(z,w) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ を，$p(P) = z$, $p(Q) = w$ なる $P, Q \in \mathbb{S}$ によって

$$d(z,w) := (\mathbb{R}^3 \text{ における線分 } \overline{PQ} \text{ の長さ})$$

で定める．すると d は $\overline{\mathbb{C}}$ 上の距離であり，$z, w \in \mathbb{C}$ に対して

$$d(z,w) = \frac{|z-w|}{\sqrt{1+|z|}\sqrt{1+|w|}}, \quad d(z,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|}}.$$

(2) Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$ の部分空間としての $\mathbb{C}$ の位相は $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ の Euclid 位相と同相である．

(3) Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$ はコンパクト位相空間である．

[*6] N は北極 (north pole) の頭文字に由来します．

8 留数定理

前回までと同様, 複素数値関数のことを単に関数と呼び, また開集合または閉集合といったら §1.1 のことを指します.

今回は [SS, Chapter 3 §§1–3] に基づいて, 留数定理及び有理型関数の諸性質を扱います. 教科書 [岸藤, §3.3, §3.4] も参照して下さい.

8.1 留数定理

定理 8.1.1. $D \subset \mathbb{C}$ を開円板とし, $z_0 \in D$ とする. また関数 f は閉円板 $\overline{D}$ を含む開集合から z_0 を除いたところで正則で, かつ z_0 を極に持つとする. ∂D^+ を境界に正の向き付けを入れたものとすると

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^+} f(z)\,dz.$$

証明. $C(\varepsilon)$ を中心 z_0 で十分小さい半径 ε の円に正の向きを入れたものとする. 定理 5.1.2 より積分路をホモトピーで取り換えて

$$\int_{\partial D^+} f(z)\,dz = \int_{C(\varepsilon)} f(z)\,dz.$$

Laurent 展開 (定理 7.2.1) $f = \sum_{k=-n}^{-1} a_k(z-z_0)^k + G(z)$ について, 線積分の定義から

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(\varepsilon)} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}dz = \begin{cases} a_{-1} & (k=1) \\ 0 & (k \geq 2) \end{cases}.$$

また $G(z)$ は正則関数なので, Cauchy の積分定理 4.2.2 より $\int_{C(\varepsilon)} G(z)dz = 0$. 従って $\int_{C(\varepsilon)} f(z)dz = 2\pi i a_{-1} + 0$ となって結論を得る. □

系 8.1.2. 円 C とその内部を含む開集合において, $z_1, \ldots, z_N$ で極を持ちそれ以外では正則な関数 f について

$$\int_{C^+} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

但し C^+ は C に正の向きを入れたもの.

証明. $C^+(z_k, \varepsilon)$ を中心 z_k 半径 ε の円に正の向きを入れたものとする. ε を十分小さくとって C の内部にあるようにすれば, Cauchy の積分定理 5.2.3 より

$$\int_{C^+} f(z)dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{C^+(z_k,\varepsilon)} f(z)dz$$

となる. あとは定理 8.1.1 を用いればよい. □

系 8.1.2 は一般の単純閉曲線でも成立します．定理 8.1.1 や系 8.1.2 およびその一般化を総称して**留数定理**と呼びます．

留数定理は複素積分の計算を簡単にするもので, 大変有用です．また以下の例で説明するように, 実関数の定積分の計算にも応用を持ちます．

例 8.1.3. x, y の有理関数 $f(x, y)$ に関する定積分

$$I \coloneqq \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$$

を考える．$z = e^{i\theta}$ と変数変換すれば

$$I \;=\; i^{-1} \int_{|z|=1} g(z)\, dz, \quad g(z) \;\coloneqq\; z^{-1} f\big((z + z^{-1})/2, (z - z^{-1})/2i\big).$$

よって $|z| < 1$ での g の全ての極の集合を $\{a_k\}_{k=1}^n$ と表せば, 留数定理から

$$I \;=\; 2\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} g(z).$$

例 8.1.4. 関数 $f(z) = e^{iaz} P(z)/Q(z)$ を考える．ここで $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ であり, P と Q は実係数多項式であって $\deg Q \geq \deg P + 2$ かつ実軸上で $Q(z) \neq 0$ だとする．このとき広義積分

$$I \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

が存在するが, その値を留数定理を用いて計算する．

上半平面 $\mathbb{H} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ にある Q の零点を $a_1, \ldots, a_n$ とし, $R \in \mathbb{R}$ を $R > \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}$ となるように取る．上半円 $C_1(R)\colon z = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ と線分 $C_2(R) = [-R, R]$ からなる積分路 $C(R)$ を定め, その上での複素積分 $\int_{C(R)} f(z) dz$ を考える．

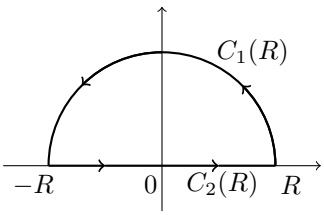


図 8.1.1　積分路 $C(R)$

留数定理から

$$\int_{C_1(R)} f(z)\, dz + \int_{-R}^{R} f(x)\, dx \;=\; 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z). \tag{8.1.1}$$

次数に関する仮定から, ある $M \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して, $|z|$ が十分大きい任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\big|z^2 P(z)/Q(z)\big| \;\leq\; M \tag{8.1.2}$$

となることに注意する (問題 8.1.1 参照)．従って上半円 $C_1(R)$ 上で

$$|f(z)| \;=\; e^{-a \operatorname{Im} z}\, |P(z)/Q(z)| \;\leq\; M/R^2$$

となり, 積分について

$$\left|\int_{C_1(R)} f(z)\,dz\right| \le \frac{M}{R^2}\cdot \pi R = \frac{\pi M}{R}$$

と評価できる．よって $\lim_{R\to 0}\int_{C_1(R)} f(z)dz = 0$. 等式 (8.1.1) は R に無関係に成立しているので, $R\to\infty$ の極限をとっても成立する．従って

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z).$$

演習問題 (解答: 123 ページ)

問題 8.1.1. 例 8.1.4 について, (8.1.2) を満たす M が存在することをを証明せよ.

問題 8.1.2. 以下の関数を円 $|z|=2$ に正の向きを付けた積分路上で積分せよ.

(1) $\dfrac{z}{z-1}$　　(2) $\dfrac{\cos z}{z}$　　(3) $\dfrac{2z-1}{z^2-z}$.

問題 8.1.3. 留数定理を用いて次の実積分を計算せよ．但し a は 1 より大きい実数とする.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta}\,d\theta.$$

問題 8.1.4. a を実数とする.

(1) $|a|<1$ と仮定し, また t を $|t|<1$ なる複素数とする．次の積分の値を求めよ.

$$K := \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{(1-te^{i\theta})(e^{i\theta}-a)(1-ae^{i\theta})}\,d\theta.$$

(2) K を t について展開することで, $|a|<1$ の場合に次の等式を示せ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta = \frac{2\pi a^n}{1-a^2}$$

(3) 次の等式を示せ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta = \begin{cases} 2\pi a^n/(1-a^2) & (|a|<1) \\ 2\pi/\bigl(a^n(a^2-1)\bigr) & (|a|>1) \end{cases}$$

問題 8.1.5. 実積分に関する次の等式を, 例 8.1.4 に従って留数定理を用いて導出せよ[*7].

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$$

問題 8.1.6. 留数定理を用いて以下の実積分の値を求めよ．但し $a\in\mathbb{R}_{>0}$, $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ とする.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+a^4}\,dx.$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^4+1)^n}\,dx.$

問題 8.1.7. 留数定理を用いて次の実積分の値を求めよ．但し a,b ともに正の実数とする.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx}{x^2+a^2}\,dx.$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx}{x^4+x^2+1}\,dx.$

問題 8.1.8. 図 8.1.2 の積分路上での複素積分を用いて, 次の実積分の値を求めよ．但し $0<a<1$ とする.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx.$$

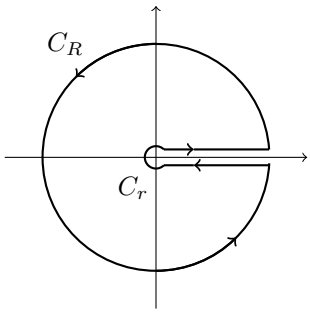


図 8.1.2　問題 8.1.8 の積分路

問題 8.1.9 (Fresnel (フレネル) 積分)**.** 図 8.1.3 の積分路 (弧の角度は $\pi/4$) 上での複素積分を用いて, 次の実積分の値を求めよ.

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx, \qquad \int_0^\infty \sin x^2 dx.$$

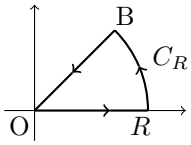


図 8.1.3　問題 8.1.9 の積分路

問題 8.1.10. 次の実積分を複素積分を用いて計算せよ. 但し $a, b \in \mathbb{R}$ かつ $0 < b < a$ とする.

(1) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$.　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+a^2}dx$.　(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.

問題 8.1.11. 下図 8.1.4 の積分路 $C(R)$ 上の複素積分の R についての極限を考えることで, 次の実積分に関する等式を示せ. 但し $n \in \mathbb{N}$ とする.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \pi\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

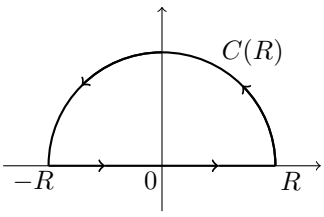


図 8.1.4　問題 8.1.11 の積分路

[*7] $x = \tan\theta$ と変数変換すれば, 複素積分を用いずに実積分で求まります

8.2　偏角の原理

この副節の内容は春学期の教科書 [川平, §5.4, §5.3] でも説明されています.

関数 f が z で零点または極を持つ場合, $\mathrm{ord}_f(z)$ でその位数を表すことにします. 以下では集合 U での**零点の個数** N **とは重複度込みの個数**のこととします. つまり

$$N := \sum_{U\text{ にある相異なる }f\text{ の零点 }z} \mathrm{ord}_f(z).$$

同様に, 極の個数 M を次の式で定義します.

$$M := \sum_{U\text{ にある相異なる }f\text{ の極 }z} \mathrm{ord}_f(z).$$

定理 8.2.1 (偏角の原理). 円 C とその内部を含む開集合 $U \subset \mathbb{C}$ と, U 上の有理型関数 f を考える. もし f が C 上で極も零点も持たなければ, C の内部にある零点と極の個数をそれぞれ N, M として,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - M.$$

但し積分路 C^+ は C に正の向き付けをしたものとする.

証明. f が z_0 で n 位の零点を持つなら, z_0 の近傍で $f(z) = (z-z_0)^n g(z)$ とかけて, $f'(z)/f(z) = n/(z-z_0) + g'(z)/g(z)$ となる. g'/g は $z = z_0$ で正則だから, f'/f は z_0 で 1 位の極を持ち, 留数は n である. 同様に, f が z_0 で n 位の極を持つなら, $f'(z)/f(z) = -n/(z-z_0) + g'(z)/g(z)$ と書けて, f'/f は z_0 で 1 位の極を持ち, 留数は $-n$ である. あとは留数定理を用いればよい. □

注意. (1) 証明から分かるように, この定理の主張は円周以外の単純閉曲線についても成り立ちます.

(2) “偏角の原理”という名前は, 複素数 w の偏角を $\arg(w)$ と書くと $[f'(z)/f(z)]\,dz = d\log f(z) = d\log|f(z)| + i\,d\arg(f(z))$ となるので, 積分が

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi}\int_{C^+} d\arg(f(z))$$

と偏角の変化量を表すことに由来します.

定理 8.2.2 (Rouché[*8]の定理). 円周 C とその内部を含む開集合 $U \subset \mathbb{C}$ と, U 上の正則関数 f, g を考える. もし任意の $z \in C$ に対し $|f(z)| > |g(z)| > 0$ ならば,

$$(C\text{ の内部にある }f+g\text{ の零点の個数}) = (C\text{ の内部にある }f\text{ の零点の個数}).$$

証明. $t \in [0,1] \subset \mathbb{R}$ に対して $f_t(z) := f(z) + tg(z)$ と定め, C の内部における f_t の重複度を込めた零点の個数を n_t と定める. n_t が t に依存しないことを証明すればよい. $n_t \in \mathbb{N}$ だから, そのためには n_t が t の連続関数であることを示せば十分.

[*8] カタカナで近似するとルーシェ.

C 上で $|f(z)| > |g(z)|$ なので f_t は C 上では零点を持たない．従って偏角の原理 (定理 8.2.1) が適用できて

$$n_t = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}dz.$$

被積分関数の $f_t'(z)/f_t(z)$ は $(z,t) \in C \times [0,1]$ に関する連続関数なので，上の積分表示より n_t も連続関数である．これで証明が終わった． □

Rouché の定理の応用として，関数列の零点数に関する Hurwitz の定理[*9]を導出しましょう．

定理 8.2.3 (**関数列の零点数に関する Hurwitz の定理**)**.** 単連結領域 Ω 上の正則関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が非定数関数 f に Ω 上広義一様収束し，また Ω 内の滑らかな単純閉曲線 C 上で $f(z) \neq 0$ だと仮定する．このとき，十分大きい $N \in \mathbb{N}$ をとれば，$n > N$ に対して f_n と f は C の内部で同じ個数の零点を持つ．

証明. $m := \min\{|f(z)| \mid z \in C\}$ は仮定から正．広義一様収束することから，N を十分大きくとれば，$n > N$ なら C 上及び C の内部で $|f_n(z) - f(z)| < m$．f と $g := f_n - f$ に Rouché の定理 8.2.2 を適用して結論を得る． □

偏角の原理の別の応用として，正則写像の幾何学的性質である開写像定理 (open mapping theorem) 及び最大値の原理 (maximum modulus principle) を説明します．

定理 8.2.4 (複素解析における**開写像定理**)**.** 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の定数でない正則関数 f は開写像である．つまり任意の開集合 $V \subset \Omega$ の像 $f(V) \subset \mathbb{C}$ はまた開集合である．

証明. $f(\Omega)$ の点 $w_0 = f(z_0)$ を任意に取り，w_0 の近傍の点 w が像に含まれることを示す．$g(z) := f(z) - w$ を

$$g(z) = F(z) + G(z), \quad F(z) := f(z) - w_0, \quad G(z) := w_0 - w$$

と分解する．$\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ を $D := D(z_0, \delta) \subset \Omega$ かつ $\overline{D} \setminus \{0\}$ 上 $f(z) \neq w_0$ なるものとする．次に $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ を任意の $z \in \partial D$ に対して $|f(z) - w_0| \geq \varepsilon$ となるようにとる．もし $|w - w_0| < \varepsilon$ なら $z \in \partial D$ に対して $|F(z)| > |G(z)|$ なので，Rouché の定理 8.2.2 より $g = F + G$ と F の D における零点の個数は同じ．δ の取り方より $F(z)$ は $z = z_0$ のみで零点を持つから，$g(z)$ も 1 つのみ零点を持つ．これで示せた． □

次の最大値の原理は非常に有用な定理で，例えば § 10.4 で Riemann の写像定理の証明に用いられます．

定理 8.2.5 (複素解析における**最大値の原理**)**.** f を領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の定数でない正則関数とする．このとき関数 $|f|$ は Ω で最大値を持たない．

証明. もし $z_0 \in \Omega$ で $|f|$ が最大値をとるなら，$z_0 \in D \subset \Omega$ を開円板として，開写像定理 8.2.4 より $f(D)$ は $f(z_0)$ を含む開集合．すると $z \in D$ であって $|f(z)| > |f(z_0)|$ となるものが存在することになり矛盾． □

次の系は § 10.3 で単位円板の自己同型を考えるときに用いられます．

系 8.2.6. $\Omega \subset \mathbb{C}$ をコンパクトな閉包 $\overline{\Omega}$ を持つ領域とする．関数 f が Ω で正則かつ $\overline{\Omega}$ で連続ならば

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| \leq \sup_{z \in \overline{\Omega} \setminus \Omega} |f(z)|.$$

証明. 実数値関数 $|f(z)|$ はコンパクト集合 $\overline{\Omega}$ で連続なので最大値を取る．最大値の原理より，f が定数関数でなければ，その最大値は Ω 内では起きえない．f が定数関数の場合は自明な主張である． □

[*9] カタカナ近似するとフルヴィッツ．

演習問題 (解答: 127 ページ)

問題 8.2.1. 以下の等式を示せ.

(1) f と g を滑らかな単純閉曲線 C 及び C の内部で正則な関数とし, C 上で $f(z) \neq 0$ だと仮定する. C の内部にある f の相異なる零点を $a_1, \ldots, a_n$ とするとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C g(w)\frac{f'(w)}{f(w)}dw = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{ord}_f(a_k)g(a_k).$$

(2) C を整数の集合 $\mathbb{Z}$ と交わらない滑らかな単純閉曲線とする. C とその内部 I で正則な関数 g に対し,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C g(w)\cot \pi w\, dw = \sum_{k\in I\cap\mathbb{Z}} g(k).$$

問題 8.2.2. 以下の方程式の解に関する主張を示せ.

(1) $e^z = 2z+1$ は $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ において一つだけ解を持つ.

(2) $z^5 + 15z + 1 = 0$ の解のうち, 一つは $-1 < z < 0$ なる実数で, 残りの四つは $3/2 < |z| < 2$ であって, 第 1,2,3,4 象限に一つずつある.

問題 8.2.3. 滑らかな単純閉曲線 C とその内部 I で正則な関数 f について, $\mathrm{Re}\, f(z) = 0$ が C 上で $2n$ 個の解を持つならば, f は I で高々 n 個の零点を持つことを示せ.

問題 8.2.4 (代数学の基本定理の別証明)**.** Liouville の定理の応用として定理 6.2.2 で次の代数学の基本定理を証明した: 定数でない複素数係数多項式 $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ は複素数の根を持つ. 最大値の原理 (定理 8.2.5) を関数 $f := 1/P$ に適用することで, この主張の別証を与えよ.

9 関数の大域的表示

今回は与えられた極を持つ有理型関数および与えられた零点をもつ正則関数の構成を考えます.

参考文献は [杉浦, 第 IX 章 §10], [SS, Chap. 5 §3, §4] 及び [岸藤, §3.5, §3.6] です.

9.1 有理型関数の部分分数展開

この副節に関しては [杉浦, 第 IX 章 §10] を参照して下さい.

有理関数の (実) 積分をするには部分分数分解して分母の次数を下げるのが定石でした. この副節では有理型関数の部分分数展開を考えます. 部分分数展開は極における主部を記述しているものとみなせるので, 次のような問題を考えるのが自然です.

点列 $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ とそこでの主部 (定義 7.2.3)

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{m_n} \frac{c_{n,k}}{(z-a_n)^k}$$

が与えられたとして, それを満たす $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 f を求める問題を考えます. $\{a_n\}$ が有限個の集合なら, $f = \sum_n P_n(z) + (\text{整関数})$ がこの問題の (完全な) 答です. そこで可算無限個の $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられた場合を考えます. $n \neq m$ なら $a_n \neq a_m$ とします.

数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束部分列を持つなら, 有理型関数の定義 7.3.1 からその収束先は ∞ です. そこで必要なら番号を付け替えて $|a_0| \leq |a_1| \leq \cdots$, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ と仮定してかまいません. すると $n \neq 0$ なら $a_n \neq 0$ であり, $P_n(z)$ は $|z| < |a_n|$ で正則なので, 以下のように Taylor 展開できます.

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k} z^k \quad (|z| < |a_n|,\ n > 0).$$

このとき, 次の Mittag-Leffler (ミッタク・レフラー) による定理が成立します.

定理 9.1.1 (Mittag-Leffler の定理 [杉浦, 第 IX 章 §10 定理 10.1]). 条件

$$0 \leq |a_0| \leq |a_1| \leq \cdots,\ a_1 \neq 0,\ \lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty \tag{9.1.1}$$

を満たす複素数列 $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ と主部 $P_n(z)$ が任意に与えられたとき, 各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $k(n) \in \mathbb{N}$ が存在して, $\varphi_n(z) := \sum_{k=0}^{k(n)} b_{n,k} z^k$ および $\varphi_0(z) := 0$ とすると, 級数

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (P_n(z) - \varphi_n(z))$$

は $\mathbb{C} \setminus A$ 上で広義一様収束する (定義 2.1.1). そして g は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数であり, 極の集合は A で, 各 a_n における主部は P_n となる.

証明. 冪級数 $P_n(z)$ の収束円板に原点中心の開円板 $D(0, |a_n|/2)$ が含まれるから, $D(0, |a_n|/2)$ では $P_n(z)$ は一様収束する. 従って $k(n) \in \mathbb{N}$ が存在して, $\varphi_n(z)$ を $P_n(z)$ の $k(n)$ 項までの和とすれば,

$$|P_n(z) - \varphi_n(z)| < 2^{-n} \quad \forall z \in D(0, |a_n|/2). \tag{9.1.2}$$

$R \in \mathbb{R}_{>0}$ を任意にとると, 数列 $\{a_n\}$ の仮定より, ある $N_R \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N$ なら $|a_n| > 2R$ となる. よって $n > N_R$ なら $P_n(z)$ は $D(0,R)$ で正則であり, (9.1.2) より

$$h(z) := \sum_{n=N_R+1}^{\infty} (P_n(z) - \varphi_n(z))$$

は $D(0,R)$ において一様収束する. 従って h は $D(0,R)$ 上の正則関数である. すると

$$g = \sum_{n=0}^{N_R} (P_n - \varphi_n) + h$$

は $D(0,R)$ 上の有理型関数で, 極の集合は $\{a_n \mid 0 \le n \le N_R\}$ であり, a_n における主部は P_n.

以上の議論で R は任意に取っていたから, $R \to \infty$ で結論が得られる. □

Mittag-Leffler の定理 9.1.1 の結論には整関数分の自由度が残っています. 応用上はこの自由度もなくしたものが使いやすいです. 次の定理は極の位数が 1 の場合にしか適用できませんが, 十分な応用を持ちます.

定理 9.1.2 ([岸藤, §3.5 定理 3])**.** 点列 $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ は条件 (9.1.1) を満たし, かつ $a_0 \neq 0$ だとする. $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 f は, その極の集合が A であって全ての位数が 1 であるものとし, また $\lim_n R_n = +\infty$ となる実数列 $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して, 円 $C_n := \{z \in \mathbb{C} \mid |z_n| = R_n\}$ の上に f の極がなく, n に依存しない正の実数 M で C_n 上 $|f(z)| < M$ となっているとする. このとき

$$f(z) = f(0) + \lim_{n\to\infty} \sum_{C_n \text{ の内部にある } a_k} \left(\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)\right) \cdot \left(\frac{1}{z-a_k} + \frac{1}{a_k}\right).$$

但し右辺は $\mathbb{C} \setminus A$ で広義一様収束する.

証明. $n \in \mathbb{N}$ を一つ取って固定する. また, 円 C_n の内部にあって A には含まれない $z \in \mathbb{C}$ を一つ取って固定する. 円 C_n の内部にある f の極を $a_1, \ldots, a_{N(n)}$ とし, $f(w)/(w-z)$ に留数定理を用いると

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n^+} \frac{f(w)}{w-z}dw = \operatorname*{Res}_{w=z} \frac{f(w)}{w-z} + \sum_{k=1}^{N(n)} \operatorname*{Res}_{w=a_k} \frac{f(w)}{w-z} = f(z) + \sum_{k=1}^{N(n)} \frac{1}{a_k - z} \operatorname*{Res}_{w=a_k} f(w).$$

但し C_n^+ は C_n に正の向きを入れたもの. 一方で $1/(w-z) = 1/w + z/w(w-z)$ から

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n^+} \frac{f(w)}{w-z}dw &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n^+} \frac{f(w)}{w}dw + \frac{z}{2\pi i}\int_{C_n^+} \frac{f(w)}{w(w-z)}dw \\ &= f(0) + \sum_{k=1}^{N(n)} \frac{1}{a_k} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z) + \frac{z}{2\pi i}\int_{C_n^+} \frac{f(w)}{w(w-z)}dw.\end{aligned}$$

最後の項は

$$\left|\frac{z}{2\pi i}\int_{C_n^+} \frac{f(w)}{w(w-z)}dw\right| \le \frac{|z|}{2\pi}\frac{M}{R_n(R_n - |z|)} \cdot 2\pi R_n = \frac{M|z|}{R_n - |z|}$$

と評価できるので, $n \to \infty$ で 0 に収束する. また任意の正の実数 b に対して, $|z| < b$ を満たしていれば $M|z|/(R_n - |z|) < Mb/(R_n - b)$ となるので, この収束は領域 $|z| < b$ 上一様, つまり $\mathbb{C}$ 上広義一様収束する. よって結論が得られる. □

三角関数を用いた具体例を与えます.

命題 9.1.3. $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\pi$ で次式の中辺及び右辺は広義一様収束し, 等式が成立する.

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{(-1)^n}{z-n\pi} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}.$$

証明. $f(z) := 1/\sin z - 1/z$ に定理 9.1.2 を適用したい. f は $\mathbb{C}$ 上有理型であり, $z=0$ は f の除去可能特異点で $\lim_{z\to 0} f(z) = 0$. また f の極は $a_n = n\pi$ $(n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ で, 全て位数 1 で留数は $(-1)^n$. 円 C_n の半径を $R_n := (n+1/2)\pi$ とすれば $\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$ かつ C_n 上に極は無い. $\{|f(z)| \mid z\in C_n\}$ の有界性を確かめよう. これ以降 $z = x+iy \in C_n$ とする.

$$|f(x)| \le |\sin z|^{-1} + |z|^{-1} \le |\sin z|^{-1} + R_n^{-1} < |\sin z|^{-1} + 2$$

だから, $|\sin z|^{-1}$ を調べればよい.

$$|\sin z| = \tfrac{1}{2}\left|(e^y - e^{-y})\cos x - i(e^y + e^{-y})\sin x\right| = \tfrac{1}{2}(e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x)^{1/2}$$

に注意する. (n に依存しない) 十分小さい正の実数 δ を固定する. $|y| \ge \delta$ なら

$$\left|\frac{1}{\sin z}\right| \le \frac{2}{(e^{2y}+e^{-2y}-2)^{1/2}} = \frac{2}{|e^y - e^{-y}|} = \frac{2}{e^\delta - e^{-\delta}}.$$

次に $|y| \le \delta$ の場合. $R_n^2 - \delta^2 \le x^2 \le R_n^2$ と $\delta \ll 1$ より, 任意の n に対して $(n+1/4)\pi \le |x| \le (n+1/2)\pi$. よって $\cos 2x \le 0$ となるので,

$$\left|\frac{1}{\sin z}\right| \le \frac{2}{(e^{2y}+e^{-2y})^{1/2}} \le \sqrt{2}.$$

従って $M > \max\{\sqrt{2}, 2/(e^\delta - e^{-\delta})\}$ なる実数 M を取れば $|\sin z|^{-1} < M$. 以上より定理 9.1.2 が適用できて,

$$f(z) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\Big(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{k\pi} + \frac{1}{z+k\pi} - \frac{1}{k\pi}\Big).$$

これから結論を得る. □

命題 9.1.4. $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\pi$ で中辺および右辺は広義一様収束し, 次の等式が成立する.

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{z-n\pi} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}.$$

証明. $f(z) := \cot z - 1/z$ に定理 9.1.2 を適用したい. f は $\mathbb{C}$ 上有理型であり, $z=0$ は f の除去可能特異点で $\lim_{z\to 0} f(z) = 0$. また f の極は $a_n = n\pi$ $(n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ で, 全て位数 1 で留数は 1. 円 C_n の半径を $R_n := (n+1/2)\pi$ とする.

$$\left|\cot^2 z\right| = \left|\frac{1-\sin^2 z}{\sin^2 z}\right| \le \frac{1}{|\sin z|^2} + 1$$

より命題 9.1.3 の証明が使えて, f は C_n 上で n によらない定数で上から評価できる. 残りの議論は省略する. □

命題 9.1.4 を辺々微分することで, 次の主張も得られます.

命題 9.1.5. $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi$ で右辺は広義一様収束し, 次の等式が成立する.

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n\pi)^2}$$

$z\cot z$ の部分分数展開と Taylor 展開を比較することで Riemann ゼータ関数の偶数における値が計算できることを演習問題で扱います.

演習問題 (解答: 128 ページ)

問題 9.1.1. 以下の等式を証明せよ.

(1) $\displaystyle \frac{1}{\cos z} = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{(2n-1)^2\pi^2 - 4z^2}.$

(2) $\displaystyle \tan z = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{(2n-1)^2\pi^2 - 4z^2}.$

(3) $\displaystyle \frac{1}{\cos^2 z} = 8 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big(z - (k-1/2)\pi\big)^{-2}.$

以下の問題 9.1.2 と問題 9.1.3 で Riemann ゼータ関数

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

の偶数 $s = 2k$ での値を求める.

問題 9.1.2. Bernoulli 数 B_n とその母関数 (演習問題 6.1.3)

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n!)} z^{2n}, \quad B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{5}{66},\ \cdots$$

から次の等式を導け.

$$z\cot z = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} z^{2n}.$$

問題 9.1.3. $\cot z$ の部分分数展開 $\cot z = z^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2z/(z^2 - n^2\pi^2)$ (命題 9.1.4) と Weierstrass の二重級数定理 (演習問題 6.5.1) から次の等式を導け.

$$z\cot z = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} z^{2k}.$$

これと前問 9.1.2 から次の等式が得られる.

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1} B_k}{(2k)!} \pi^{2k}.$$

特に $k = 1, 2, 3, 4$ として

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^6}{9450}.$$

9.2　整関数の無限積表示

この副節に関しては [SS, Chap. 5 §3] を参照して下さい.

前副節では極における主部が与えられたときに関数を構成する問題を考えましたが, この副節では零点における位数が指定された場合を考えます. それは多項式の因数分解の拡張とみなせます.

複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対し, **無限積** $\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$ **が収束する**とは, 極限 $\lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N}(1+a_n)$ が存在することをいいます.

補題 9.2.1. 複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対し, もし $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<\infty$ ならば, 無限積 $\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$ は収束する.

証明. $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<\infty$ より十分大きい n に対して $|a_n|<1/2$. $\mathrm{Log}(1+z):=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}z^k/k$ とすれば $1+a_n=e^{\mathrm{Log}(1+a_n)}$ となるので, $B_N:=\prod_{n=0}^{N}(1+a_n)=e^{L_N}$, $L_N:=\sum_{n=0}^{N}\mathrm{Log}(1+a_n)$. ここで, $z\in\mathbb{C}$ が $|z|<1/2$ を満たすなら

$$|\mathrm{Log}(1+z)|\le|z|+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}|z|^k<|z|+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}|z|^k=|z|+\frac{1}{2}\frac{|z|^2}{1-|z|}<|z|+|z|^2<2|z|$$

となるので, 十分大きい n に対して $|\mathrm{Log}(1+a_n)|<2|a_n|$. 仮定より B_N は $N\to\infty$ で収束する. □

定理 9.2.2. $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を開集合 $U\subset\mathbb{C}$ 上の正則関数の列とする. $\sum_{n=0}^{\infty}c_n<\infty$ かつ任意の $z\in U$ に対し $|F_n(z)-1|\le c_n$ となる正の実数列 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在すると仮定する.

(1) 無限積 $\prod_{n=0}^{\infty}F_n(z)$ は U 上一様に正則関数 $F(z)$ に収束する.

(2) 各 n に対し $F_n(z)\neq 0$ ならば次の等式が成立する.

$$\frac{F'(z)}{F(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n'(z)}{F_n(z)}.$$

証明. (1) $F_n(z)=1+a_n(z)$ と書けば $|a_n(z)|\le c_n$ なので, 補題 9.2.1 より無限積は収束する. またこの評価は z によらないので一様収束することも分かる. すると定理 6.5.2 (正則関数の一様収束極限は正則関数) より極限 $F(z)$ も正則だと分かる.

(2) $K\subset U$ をコンパクト集合とし, $G_N:=\prod_{n=1}^{N}F_n$ とする. K 上一様に $G_N\to F$ と収束するので, Weierstrass の定理 6.5.3 (正則関数の微分の一様収束極限) より K 上一様に $G_N'\to F'$ と収束し, 従って一様に $G_N'/G_N\to F'/F$ となる. 直接計算で $G_N'/G_N=\sum_{n=1}^{N}F_n'/F_n$ となり結論を得る.

□

再び三角関数を用いた具体例を挙げます.

命題 9.2.3. $\mathbb{C}$ において右辺は広義一様収束し, 次の等式が成立する.

$$\sin z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

証明. 定理 9.2.2 の記号に合わせて $F_n(z):=1-z^2/(n\pi)^2$ とする. $R\in\mathbb{R}_{>0}$ を任意に取って固定する. $c_n:=R^2/(n\pi)^2$ とすれば, $\sum_{n=0}^{\infty}c_n<\infty$ かつ $|z|<R$ なら $|F_n(z)-1|\le c_n$ となるので, 定理 9.2.2 (1) よりこの領域で右辺の無限積は一様収束する. つまり右辺は $\mathbb{C}$ 上広義一様収束する.

右辺が定める関数を f と書くと, 定理 6.5.2 (正則関数の一様収束極限は正則関数) より f は整関数. すると定理 9.2.2 (2) より

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}.$$

命題 9.1.4 より右辺は $\cot z$ に等しい. 一方 $g(z) := \sin z$ も $g'(z)/g(z) = \cot z$ を満たす. よって $f'/f = g'/g$ で, これから $(f/g)' = 0$ が従う. つまり f/g は定数関数. それを c とおくと,

$$1 = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z\to 0} c\frac{g(z)}{z} = c$$

より $c = 1$ となって, 結論が得られる. □

演習問題 (解答: 128 ページ)

問題 9.2.1. $|z| < 1$ なら $\prod_{n=0}^{\infty}(1 + z^{2^n}) = 1/(1 - z)$ となることを示せ.

問題 9.2.2. 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し次の等式が成立することを示せ.

$$\cos z = \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\Big).$$

問題 9.2.3. 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し次の等式が成立することを示せ.

$$e^z - 1 = e^{z/2} z \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 + \frac{z^2}{4n^2\pi^2}\Big).$$

問題 9.2.4. 命題 9.2.3 から, 以下の円周率に関する Wallis の公式を導け.

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{4n^2 - 1}, \quad \sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}.$$

問題 9.2.5. $f(z) := \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 + \frac{z}{n}\Big)e^{-z/n}$ が整関数であることを示せ.

9.3 Weierstrass の因数分解定理

この副節に関しては [SS, Chap. 5 §4] を参照して下さい.

定理 9.2.2 は整関数の無限積表示を得るには十分役立ちますが, 与えられた零点を持つような関数の構成問題には, この副節で述べる Weierstrass の構成法の方がより明示的な答えを与えます.

$k \in \mathbb{N}$ に対し Weierstrass の既約因子 (canonical factor) E_k を次で定義します.

$$E_k(z) := \begin{cases} 1-z & (k=0) \\ (1-z)e^{z+z^2/2+\cdots+z^k/k} & (k \geq 1) \end{cases}.$$

次の補題の証明は演習問題とします.

補題 9.3.1. $|z| \leq 1/2$ ならば $|1-E_k(z)| \leq 2e\,|z|^{k+1}$.

定理 9.3.2 (Weierstrass の因数分解定理 [SS, Theorem 4.1])**.** 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ は $\lim_{n\to\infty}|a_n| = +\infty$ を満たすものとする ($a_n = a_m$ のような重複があってもよい).

(1) 零点の集合が $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ となる整関数 f で存在して, 零点集合が $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ となる任意の整関数 F は f と整関数 g でもって $F = f\exp(g)$ と書ける.

(2) 必要なら並べ替えて $a_0 = \cdots = a_{m-1} = 0$, $a_n \neq 0$ $(n \geq m)$ とすると, (1) の f は次で与えられる.

$$f(z) = z^m \prod_{n=m}^{\infty} E_{n+1-m}(z/a_n).$$

証明. まず (2) の $f(z)$ が収束することを示す. 簡単のため $b_k := a_{k-1+m}$ $(k \in \mathbb{Z}_{>}0)$ とすると $f(z) = z^m \prod_{k=1}^{\infty} E_k(z/b_k)$. 正の実数 R を任意に取って $|z| < R$ と仮定し, そのような任意の z について収束が示せれば良い. 仮定より $|b_k| \leq 2R$ となる k は有限個. $|a_k| > 2R$ ならば $|z/b_k| \leq 1/2$ なので, 補題 9.3.1 より $|1-E_k(z/a_k)| \leq c\,|z/a_k|^{k+1} \leq 2e/2^{k+1}$. よって補題 9.2.1より $\prod_{|b_k|\geq 2R} E_k(z/a_k)$ は収束する. 以上で $f(z)$ の収束性が示せた. すると f が整関数で零点集合が $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ になるのは明らか.

(1) を示すために, f_1 と f_2 を整関数であって零点集合が $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ となるものとする. f_1/f_2 は a_n を除去可能特異点に持つので, 整関数であり, また零点は存在しない. すると次の補題 9.3.3 より $f_1(z)/f_2(z) = \exp(g(z))$ となる整関数 $g(z)$ が存在する. これで示せた. □

補題 9.3.3. f が単連結領域 Ω 上の正則関数であって零点を持たないものであれば, Ω 上の正則関数 g であって $f(z) = \exp(g(z))$ となるものが存在する.

証明は演習問題とする.

演習問題 (解答: 129 ページ)

問題 9.3.1. 補題 9.3.1 を証明せよ.

問題 9.3.2. 補題 9.3.3 を証明せよ.

問題 9.3.3. $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 f に対して, 整関数 g と h が存在して $f = g/h$ となることを示せ.

10　等角写像

今回は [SS, Chap. 8] に基づいて Riemann の写像定理を扱います. [川平, §2.6] も参照して下さい.

10.1　曲線の接ベクトルと等角写像

§3.1 で説明した, 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の (区分的に) 滑らかな曲線の定義を思い出しておいて下さい.

定義. C を複素平面上の滑らかな曲線とし, z_0 を C 上の点とする. $p = x + iy : [a, b] \to \mathbb{C}$ を C のパラメータ表示とし, $t_0 \in [a, b]$ を $z_0 = p(t_0)$ なるものとする. この時, 始点を z_0 とする二次元ベクトル

$$p'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0) \quad \text{ないし} \quad \begin{bmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{bmatrix}$$

のことを C の z_0 での (p に関する) **接ベクトル**と呼ぶ.

注意 10.1.1. 滑らかな曲線の接ベクトルに関して,

(1) 接ベクトルの長さは必ず正になる.

(2) 接ベクトルの長さはパラメータ表示 p に依存するが, その方向ベクトルは p に依存しない.

連続微分可能な二変数実関数 u, v から定まる複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ を考えます. C を複素平面上の滑らかな曲線とし, p: $[a, b] \to \mathbb{C}$ を C のパラメータ表示とします. C (の像を含む開集合) 上で f が単射と仮定すると, $f \circ p : [a, b] \to \mathbb{C}$ は滑らかな曲線 $f(C)$ を定めます. また $z_0 = x_0 + iy_0$ は C 上の点であって $z_0 = p(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$ なるものとします.

補題 10.1.2. 上記の記号のもと, 滑らかな曲線 $f(C)$ の点 $f(z_0)$ での ($f \circ p$ に関する) 接ベクトルは

$$\begin{bmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{bmatrix}.$$

証明. 微分の連鎖律そのものである. □

定義. 複素平面上の滑らかな曲線 C_1 と C_2 は点 z_0 で交わるものとする. このとき, **C_1 と C_2 の z_0 における角度**をそれぞれの z_0 における接ベクトルのなす角度で定義する. 但し角度は C_1 の接ベクトルから C_2 の接ベクトルに向かって測るものとする.

注意 10.1.1 より交点における角度はパラメータ表示に依存しません.

定義. 連続微分可能な複素関数 $f(z)$ が点 z_0 において**等角**または**共形** (conformal) であるとは, 以下の二条件を満たすことをいう.

(i) z_0 を含むある開集合上で単射.

(ii) z_0 で交わる任意の滑らかな二曲線 C_1 と C_2 に対し, C_1 と C_2 の z_0 における角度 θ と $f(C_1)$ と $f(C_2)$ の $f(z_0)$ における角度 φ とが等しい.

演習問題 (解答: 130 ページ)

問題 10.1.1. 注意 10.1.1 を示せ.

10.2　正則関数と等角写像

定理 10.2.1 (正則関数の等角性)**.** 点 z_0 を含む開集合上で定義されている複素関数 $f(z)$ について,

$$f \text{ は } z_0 \text{ において等角} \iff f \text{ は } z_0 \text{ において正則かつ } f'(z_0) \neq 0.$$

証明. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とする. 正方行列

$$T := \begin{bmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

は線形写像を定めるが, 補題 10.1.2 より

$$f \text{ が } z_0 \text{ で交わる二曲線の角度を保つ} \iff \text{線形写像 } T \text{ が二つのベクトルのなす角度を保つ.}$$

これと逆写像定理から

$$f \text{ が } z_0 \text{ で等角} \iff \det T \neq 0 \text{ かつ線形写像 } T \text{ が二つのベクトルのなす角度を保つ}$$

が分かる. 従って上記の右辺と主張の右辺が同値であることを示せばよい. 以下 $u_x = u_x(x_0,y_0)$ 等と略記する.

まず T の定める線形写像が角度を保つと仮定する. $e_1 := {}^t(1,0)$ と $e_2 := {}^t(0,1)$ のなす角度は $\pi/2$ だから $Te_1 = {}^t(u_x,v_x)$ と $Te_2 = {}^t(u_y,v_y)$ のなす角も $\pi/2$. よって $k \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して $Te_2 = k\,{}^t(-v_x,u_x)$. つまり

$$T = \begin{bmatrix} u_x & -kv_x \\ v_x & ku_x \end{bmatrix}$$

次に任意の $s \in \mathbb{R}$ について, e_1 と $e_1 + se_2 = {}^t(1,s)$ のなす角度を θ_s とすると $\tan\theta_s = s$. 一方で Te_1 と $T(e_1+se_2) = Te_1 + sTe_2$ のなす角度 φ_s について $\tan\varphi_s = ks$. 任意の s について $\theta_s = \varphi_s$ が成立するから $k = 1$. 以上より $(u_y,v_y) = (-v_x,u_x)$ となり, Cauchy-Riemann 方程式が成立する. つまり f は z_0 において正則. また $\det T = u_x^2 + v_x^2 \neq 0$ なので $f'(z_0) = u_x + iv_x \neq 0$ である.

次に f が z_0 で正則でかつ $f'(z_0) \neq 0$ だと仮定する. 正則性から Cauchy-Riemann 方程式が成立するので $(u_y,v_y) = (-v_x,u_x)$. また $f'(z_0) \neq 0$ より $\det T = u_x^2 + v_x^2 > 0$ である. 任意の 0 でないベクトル $V_1 := {}^t(a,b)$ と $V_2 := {}^t(c,d)$ について, V_1 と V_2 のなす角度を θ, TV_1 と TV_2 のなす角度を φ とする.

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{V_1 \cdot V_2}{|V_1|\,|V_2|} = \frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}, \\ \cos\varphi &= \frac{TV_1 \cdot TV_2}{|TV_1|\,|TV_2|} = \frac{(u_x^2+v_x^2)(ac+bd)}{(u_x^2+v_x^2)\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}} \end{aligned}$$

より内積は一致する. つまり $\theta = \pm\varphi$. $\det T > 0$ と角度の定義より (0 でなければ) $\theta = -\varphi$ は起きえないので $\theta = \varphi$. 以上より T は角度を保つ. □

次の主張は定理 10.2.1 から従います. 詳しい証明は演習問題にします.

系 10.2.2. 等角写像の合成は等角写像である.

この補題を用いて, あるいは定義から直接, 次の例の各関数が等角写像であることが分かります.

例 10.2.3. 以下の関数はその定義域の各点において等角写像である.

(1) $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ および $h \in \mathbb{C}$ とする. $\mathbb{C}$ を定義域とする関数 $cz + h$.

(2) $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ として, $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg(z) < \pi/n\}$ を定義域とする関数 z^n.

(3) 上半円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を定義域とする関数 $(1+z)/(1-z)$.

(4) 上半平面 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を定義域とする関数 $\mathrm{Log}\, z$.

(5) 上半円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を定義域とする関数 $\mathrm{Log}\, z$.

(6) 帯状領域の上半分 $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| < \pi/2,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を定義域とする関数 e^{iz}.

(7) 上半円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を定義域とする関数 $-(z + z^{-1})/2$.

(8) 帯状領域の上半分 $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| < \pi/2,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を定義域とする関数 $\sin z$.

例えば (2) で $n = 2$ の場合, つまり関数 z^2 が等角写像であることは, $z = x + iy$ で x が一定, または y が一定の直線の像を描いてみると分かりやすいです. 下図 10.2.1 は $\{(x, j) \mid -1 \le x \le 1\}$ $(j = 0, 1/15, \ldots, 1)$ および $\{(k, y) \mid 0 \le y \le 1\}$ $(k = -1, \ldots, -1/15, 0, 1/15, \ldots, 1)$ の像を描いたものです. 元の z 平面で直交していた二直線が, z^2 で写った後も直交していることが分かります.

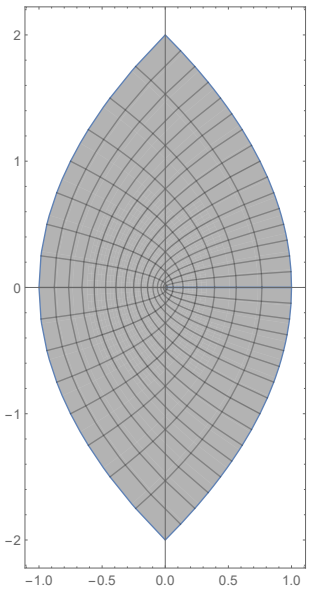


図 10.2.1　関数 z^2 による直交座標格子の像

(5) や (7) の場合は, 直交座標 $z = x + iy$ よりも極座標 $z = re^{i\theta}$ を使って r が一定の円ないし θ が一定の半直線の像を考えたほうが簡単です. 下図 10.2.2 は (5) の場合の $\{re^{i\theta} \mid 0 \le r \le 1\}$ $(\theta = 0, \pi/15, \ldots, \pi)$ 及び $\{re^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \pi\}$ $(r = 0, 1/15, \ldots, 1)$ の像です.

演習問題 (解答: 130 ページ)

問題 10.2.1. 系 10.2.2 をを示せ.

問題 10.2.2. 例 10.2.3 のうち以下の関数について像を記述せよ. また (4), (6) については講義ノートの図 10.2.1 や図 10.2.2 にならって, 直交座標や極座標が一定の曲線の像のグラフを描き, 等角写像であることを確認せよ.

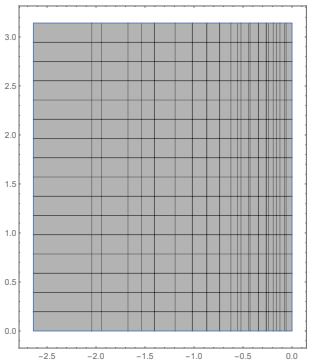


図 10.2.2　関数 $\mathrm{Log}(z)$ による極座標の像

(3) 上半円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を定義域とする関数 $(1+z)/(1-z)$.
(4) 上半平面 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を定義域とする関数 $\log z$.
(6) 帯状領域の上半分 $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| < \pi/2,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を定義域とする関数 e^{iz}.
(7) 上半円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を定義域とする関数 $-(z+z^{-1})/2$.
(8) 帯状領域の上半分 $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| < \pi/2,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を定義域とする関数 $\sin z$.

10.3　双正則写像と単位円板の自己同型

$\mathbb{C}$ の二つの部分集合が等角写像で写りあう状況を考えましょう.

定義. 開集合 $U, V \subset \mathbb{C}$ に対し, 全単射である正則関数 $f : U \to V$ を**双正則写像** (biholomorphism) とよぶ. またこのとき U と V は**共形同値** (conformally equivalent) もしくは**双正則** (biholomorphic) であるという.

次の主張が共形同値という言葉の由来です.

補題. 双正則写像は定義域の全ての点において等角写像である.

証明. 双正則写像 f は全単射なので逆写像 f^{-1} があるが, 逆関数定理より f^{-1} も複素微分可能, つまり正則関数である. すると $(f^{-1} \circ f)(z) = z$ と連鎖律から $f'(z) \neq 0$. よって上の定理の右側の条件が成り立つ. □

双正則な領域の例を一つ挙げます.

命題 10.3.1. 上半平面 (upper half-plane) $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ と**単位円板** (unit disk) $\mathbb{D}$ を

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}, \quad \mathbb{D} := D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

で定義する. すると

$$F(z) := \frac{i-z}{i+z}, \quad G(w) := i\frac{1-w}{1+w}$$

で双正則写像 $F\colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ が定まり, その逆は $G\colon \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ で与えられる.

証明. F と G は有理関数なので定義域上で正則. また $F'(z) \neq 0$ および $G'(w) \neq 0$ も直接計算で確認できる. $F(\mathbb{H}) \subset \mathbb{D}$ は, 任意の $z \in \mathbb{H}$ が $-i$ より i に近いことから $|z-i| < |z+i|$ となることから従う. $G(\mathbb{D}) \subset \mathbb{H}$

は, $w = u + iv$ と実部と虚部に分けると

$$\mathrm{Im}(G(w)) \;=\; \mathrm{Re}\left(\frac{1-u-iv}{1+u+iv}\right) \;=\; \mathrm{Re}\left(\frac{(1-u-iv)(1+u-iv)}{(1+u)^2+v^2}\right) \;=\; \frac{1-u^2-v^2}{(1+u)^2+v^2}$$

と計算できて, $\mathrm{Im}(G(w)) > 0$ となることから従う. 最後に, 直接計算で $F(G(w)) = w$ と $G(F(z)) = z$ が確認できる. 以上で主張が示せた. □

(複素数平面における) **回転**とは, $|c| = 1$ なる複素数 c を用いて $z \mapsto cz$ と表される写像のことでした.

命題 10.3.2 (Schwartz の補題)**.** $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ は正則かつ $f(0) = 0$ とする. このとき

(1) 任意の $z \in \mathbb{D}$ に対し $|f(z)| \le |z|$.

(2) ある $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ で $|f(z_0)| = |z_0|$ ならば, f は回転である.

(3) いつも $|f'(0)| \le 1$ が成立する. もし $|f'(0)| = 1$ ならば, f は回転である.

証明. $f(z) = \sum_{n\ge 0} a_n z^n$ と Taylor 展開すれば, これは $\mathbb{D}$ の任意の点で収束する. 仮定より $a_0 = 0$ なので, $f(z)/z = \sum_{n\ge 1} a_n z^{n-1}$ も $\mathbb{D}$ 上の正則関数である.

(1) $|z| = r < 1$ なる $z \in \mathbb{D}$ について, 仮定 $|f(z)| < 1$ より $|f(z)/z| \le 1/r$. ここで最大値の原理の系 (系 8.2.6) より, 任意の $z \in \overline{D(0,r)}$ についても $|f(z)/z| \le 1/r$ となる. $r \to 1$ とすれば主張を得る.

(2) 仮定と (1) より正則関数 $f(z)/z$ が $\mathbb{D}$ で最大値を取るので, 最大値の原理 (定理 8.2.5) より $f(z)/z$ は定数関数である. $f(z) = cz$ とすると, z_0 での値から $|c| = 1$ となるので, f は回転である.

(3) 仮定 $f(0) = 0$ から $f'(0) = \lim_{z\to 0}(f(z) - f(0))/z = \lim_{z\to 0} f(z)/z$. これと (1) より $|f'(0)| \le 1$. 等号が成立するときは, 最大値の原理から $f(z)/z$ は定数関数であり, (2) と同じ議論ができる.

□

開集合 $U \subset \mathbb{C}$ から自分自身への双正則写像を U の**自己同型** (automorphism) と呼びます.

定理 10.3.3. 単位円板の任意の自己同型 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ は, ある $\theta \in \mathbb{R}$ と $\alpha \in \mathbb{D}$ を用いて次のように書ける.

$$f(z) \;=\; e^{i\theta}\frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}.$$

証明は Schwarz の補題 (命題 10.3.2) を使えば難しくないので, 演習問題にします.

演習問題 (解答: 131 ページ)

問題 10.3.1. 命題 10.3.1 の上半平面 $\mathbb{H}$ から単位円板 $\mathbb{D}$ への双正則写像 $F(z) := (i - z)/(i + z)$ を考える. F は $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ でも定義されているから, その像 $F(\mathbb{R})$ を考えることができる. $F(\mathbb{R})$ がどのような集合か求めよ.

問題 10.3.2. 以下の段階を踏んで定理 10.3.3 を示せ. 但し $\mathbb{D}$ の自己同型のなす集合を $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ と書く.

(1) 任意の $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ に対しある $\alpha \in \mathbb{D}$ が存在して $g := f \circ \psi_\alpha$ が $g(0) = 0$ かつ $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ を満たす. 但し $\psi_\alpha(z) := \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}$.

(2) 任意の $z \in \mathbb{D}$ に対し $|z| = |g(z)|$ となる. (g および g^{-1} に Schwarz の補題 (命題 10.3.2) を適用する.)

(3) $g(z) = e^{i\theta} z$ と書ける. (再び Schwarz の補題を用いる.)

(4) 定理 10.3.3 を導け.

10.4 Riemann の写像定理

領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ は, 空でなくまた全体 $\mathbb{C}$ とも一致しないとき, **真の領域**と呼ぶことにします.

定理 10.4.1. $\Omega \subset \mathbb{C}$ を単連結な真の領域とする. 任意の $z_0 \in \Omega$ に対し双正則写像 $F : \Omega \to \mathbb{D}$ であって $F(z_0) = 0$, $F'(z_0) \in \mathbb{R}_{>0}$ となるものが唯一存在する.

簡単な系を一つ紹介すると:

系 10.4.2. $\mathbb{C}$ の単連結な真の領域は全て共形同値である.

証明は三段階に分かれます.

10.4.1 証明の第一段

$\emptyset \neq \Omega \subsetneq \mathbb{C}$ を単連結開集合とする. $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ を取って固定する. Ω は単連結なので,

$$f(z) \coloneqq \mathrm{Log}_{\Omega}(z - \alpha)$$

(対数関数の枝を取ったもの) によって Ω 上の正則関数 f が定まる. $e^{f(z)} = z - \alpha$ より $f(z)$ は単射である.

以下 $w \in \Omega$ を一つ取って固定する. この時, 任意の $z \in \Omega$ に対して $f(z) \neq f(w) + 2\pi i$ である. 実際, そうでなければ $e^{f(z)} = e^{f(w)}$ となり矛盾する. また $f(\Omega)$ は $f(w) + 2\pi i$ から真に離れている. つまり, ある $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して, $f(\Omega) \cap D(f(w), \varepsilon) = \emptyset$ である. 実際, そうでなければ点列 $\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \Omega$ で $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(w) + 2\pi i$ となるものが取れるが, このとき $\lim_{n\to\infty} e^{f(z_n)} = e^{f(w)}$ だから, 指数関数の連続性より $\lim_{n\to\infty} z_n = w$ となり, 対数関数の連続性より $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(w)$ となって矛盾する.

ここで関数 F を

$$F(z) \coloneqq \frac{1}{f(z) - (f(w) + 2\pi i)}$$

で定義する. 上の考察から F は Ω 上の関数として well-defined である. また F が単射だったので F も単射であり, 微分を計算することで Ω の各点で等角写像であることが分かる. つまり $F : \Omega \to F(\Omega)$ は双正則写像である. 更に上の考察より像 $F(\Omega)$ は有界集合である. 従って, F と適当な平行移動および定数倍を合成した双正則写像 G でもって $0 \in G(\Omega) \subset \mathbb{D}$ とできる.

以上より定理 10.4.1 の証明は Ω が $0 \in \Omega \subset \mathbb{D}$ を満たす場合に帰着できる. 実際, その場合に得られた双正則写像と上の G とを合成したものを F とすればよい. $F'(0) \in \mathbb{R}_{>0}$ にするには絶対値が 1 の適当な複素数を F にかければよい.

10.4.2 正規族と Montel の定理

証明の第二段に移る前にいくつか準備をします.

定義. $\Omega \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, $\mathcal{F}$ を Ω 上の関数からなる集合とする

(1) $\mathcal{F}$ が Ω の**コンパクト部分集合上で一様有界** (uniformly bounded on compact subsets) であるとは, 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ に対して定数 $B > 0$ が存在して, 任意の $z \in K$ と $f \in \mathcal{F}$ に対して次が成立することをいう.

$$|f(z)| \leq B.$$

(2) $\mathcal{F}$ が**正規** (normal) であるとは, $\mathcal{F}$ の任意の列が, Ω の任意のコンパクト部分集合上で一様収束するような部分列を持つことである.

どちらの概念も, 複素関数に限らず, 一般の位相空間上の写像について定義できるものですが, 次の定理は**正則関数**の族に関して成立します.

定理 10.4.3 (Montel の定理)**.** $\Omega \subset \mathbb{C}$ を開集合とする. $\mathcal{F}$ を Ω 上の正則関数からなる集合で, Ω のコンパクト部分集合上で一様有界であるとする. このとき, $\mathcal{F}$ は正規である.

この定理の証明はしません. [SS, Chapter 8 Theorem 3.3] を参照して下さい.
もう一つ必要な主張があります.

命題 10.4.4. $\Omega \subset \mathbb{C}$ を領域とし, $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を Ω 上の単射な正則関数の列のであって, ある正則関数 f に Ω の任意のコンパクト部分集合上で収束するものとする. このとき f は単射であるか, または定数関数である.

この命題の証明は演習問題にします.

10.4.3 証明の第二段

第一段より Ω は $0 \in \Omega \subset \mathbb{D}$ となる単連結開集合と仮定してよい. Ω 上の関数族 $\mathcal{F}$ を

$$\mathcal{F} := \{f : \Omega \to \mathbb{D} \mid \text{単射かつ正則かつ } f(0) = 0\}$$

と定義する. 恒等写像が含まれるので $\mathcal{F} \neq \emptyset$ である. この第二段では, $f \in \mathcal{F}$ の中で $|f'(0)|$ が最大になるものの存在を示す.

$\mathcal{F}$ の定義より, 任意の $f \in \mathcal{F}$ の値域の絶対値が 1 未満なので, $\mathcal{F}$ は一様有界である. Ω 自身が有界だから, $\mathcal{F}$ は Ω のコンパクト部分集合上で一様有界である. 従って Montel の定理 10.4.3 より $\mathcal{F}$ は正規である.

ここで Cauchy の不等式 (命題 6.1.1) を思い出す: f を開円板 $D(0, R)$ の閉包上の正則関数とすると, $\|f\|_{\partial D} := \sup_{z \in \partial D} |f(z)|$ として

$$|f'(0)| \leq \|f\|_{\partial D}/R.$$

これを各 $f \in \mathcal{F}$ に適用すれば, $\|f\|_{\partial D} \leq 1$ より $|f'(0)| \leq 1/R$ となる. R は Ω にのみ依存するので,

$$s := \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)| < \infty$$

が従う.

$\lim_{n \to \infty} |f_n'(0)| = s$ となる関数列 $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$ を取る. $\mathcal{F}$ が正規なので, そのある部分列が存在して, 正則関数 f に Ω 内のコンパクト集合上で一様収束する. 特に $f'(0) = s$ である.

さて, 恒等写像が $\mathcal{F}$ に含まれているので $s \leq 1$ である. 従って収束先の正則関数 f は定数関数ではない. すると命題 10.4.4 より f は単射である.

収束先の正則関数 f は, 連続性から任意の $z \in \Omega$ に対して $|f(z)| \leq 1$ となるここで最大値の原理 (定理 8.2.5) より $|f(z)|$ は最大値を持たないから, $|f(z)| < 1$ が分かる. また $f_n(0) = 0$ より $f(0) = 0$ も従う. 以上より $f \in \mathcal{F}$ が分かった.

10.4.4 証明の第三段

第二段で存在を証明した f が結論の双正則写像 $\Omega \to \mathbb{D}$ であることを示す. f が正則な単射であることは第二段で分かっているので, 全射であることを示せば十分. 条件 $f'(0) \in \mathbb{R}_{>0}$ は, 第一段と同様に, 絶対値 1 の適

当な複素数をかければ満たされる.

f が全射でないと仮定して, $\alpha \in \mathbb{D} \setminus f(\Omega)$ を取る. $\mathbb{D}$ の自己同型

$$\psi_\alpha(z) \coloneqq \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}$$

を考える (定理 10.3.3 参照). $\psi_\alpha(\alpha) = 0$ および $\psi_\alpha(0) = \alpha$ に注意する.

ここで次の事実を用います. 証明は演習問題にします.

- $U \coloneqq (\psi_\alpha \circ f)(\Omega)$ は単連結であり, 更に原点を含まない.

よって U 上の正則関数 g が $g(w) \coloneqq e^{\frac{1}{2}\log w}$ で定まる. そして正則関数 F を次のように定める.

$$F \coloneqq \psi_{g(\alpha)} \circ g \circ \psi_\alpha \circ f.$$

$F \in \mathcal{F}$ となることを確かめよう. $F(0) = 0$ と $F(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ は, 合成に現れる各関数が同じ性質を満たすので確かに成立する. F が単射であることも同様に示せる. 以上より $F \in \mathcal{F}$ である.

こうして得られた F が f の取り方と矛盾することを言えば証明が終わる. つまり $|F'(0)| > |f'(0)|$ を示せばよい. 二乗関数を $h(w) \coloneqq w^2$ と書き, $\Phi \coloneqq \psi_\alpha^{-1} \circ h \circ \psi_{g(\alpha)}^{-1}$ とすると

$$f = \psi_\alpha^{-1} \circ h \circ \psi_{g(\alpha)}^{-1} \circ F = \Phi \circ F$$

が成立する. 特に $f'(0) = \Phi'(0)F'(0)$. 従って $|F'(0)| < 1$ が言えれば証明が終わる.

ここで $\Phi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ と $\Phi(0) = 0$ に注意する. また F は単射だが h は単射でないので, Φ も単射でない. すると Schwarz の補題の最後の主張 (命題 10.3.2 (3)) が使えて, 目的の $|F'(0)| < 1$ が得られた.

演習問題 (解答: 131 ページ)

問題 10.4.1. 命題 10.4.4 を背理法で証明しよう. 主張を思い出すと:

> $\Omega \subset \mathbb{C}$ を領域とし, $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を Ω 上の単射な正則関数の列のであって, ある正則関数 f に Ω の任意のコンパクト部分集合上で収束するものとする. このとき f は単射であるか, または定数関数である.

f が単射でないと仮定して, $f(z_1) = f(z_2)$ なる $z_1 \neq z_2 \in \Omega$ を取る. 新しい関数列 $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を

$$g_n(z) \coloneqq f_n(z_1) - f_n(z_2)$$

で定義する. 仮定より, 各 g_n は z_1 以外に零点を持たず, また関数列 $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は関数 $g(z) \coloneqq f(z) - f(z_1)$ に任意のコンパクト部分集合上で一様収束する. $g \not\equiv 0$ と仮定してよい.

(1) Ω が連結であることから, z_2 が g の孤立した零点であることを示せ. つまり, ある $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して, $D \coloneqq (z_2, \varepsilon) \subset \Omega$ かつ $D \setminus \{z_2\}$ で g は零点を持たないことを示せ.

(2) g の z_2 での零点の位数を N とする. γ を (1) の D の境界 ∂D に正の向きを入れた積分路として, 次の等式を示せ.

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)}\, d\zeta.$$

(3) γ 上で g_n が g に一様収束することを確認し, それから次の等式を確認せよ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g_n'(\zeta)}{g_n(\zeta)}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)}\, d\zeta.$$

(4) g_n が γ の内部 $D = D(z_2, \varepsilon)$ に零点を持たないことと (3) から矛盾を導け.

問題 10.4.2. Riemann の写像定理の証明の第三段で以下の主張を用いた.

$\mathbb{D}$ の自己同型 $\psi_\alpha(z) := \dfrac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}$ を考えると, $U := (\psi_\alpha \circ f)(\Omega)$ は単連結であり, 更に原点を含まない.

Ω が単連結であることを用いてこの主張を示せ.

問題 10.4.3 ([SS, Chap. 8 §4.1 Example 1])**.** α を $0 < \alpha < 2$ なる実数とする.

(1) 関数 $f(z) := z^\alpha$ による上半平面 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ の像を求めよ.

(2) 関数 $f(z) := \alpha \int_0^z \zeta^{\alpha-1}\, d\zeta$ による上半平面 $\mathbb{H}$ の像を求めよ. 但し積分路は線分 $\overline{0z}$ とする.

問題 10.4.4 ([SS, Chap. 8 §4.1 Example 2])**.** 関数 $f(z) := \int_0^z (1 - \zeta^2)^{-1/2}\, d\zeta$ による上半平面 $\mathbb{H}$ の像を求めよ. 但し $(1 - \zeta^2)^{1/2}$ の枝は $\mathbb{H}$ で正則かつ $-1 < \zeta < 1$ で正になるようにとるものとし, また積分路は線分 $\overline{0z}$ とする.

問題 10.4.5 ([SS, Chap. 8 §4.1 Example 3])**.** k を $0 < k < 1$ なる実数とする. 関数

$$f(z) := \int_0^z \frac{d\zeta}{[(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)]^{1/2}}$$

による上半平面 $\mathbb{H}$ の像を求めよ. 但し $[(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)]^{1/2}$ の枝は $\mathbb{H}$ で正則かつ $-1 < \zeta < 1$ で正になるようにとるものとし, また積分路は線分 $\overline{0z}$ とする.

11　ガンマ関数

今回の内容は [SS, Chapter 6 §1] と [岸藤, §5.1] に基づいて Euler のガンマ関数を扱います. Euler は無限積でガンマ関数を定義した (問題 11.3.4) が, ここでは積分表示を定義 11.1.1 として複素解析的に性質を調べた後, Gauss の表示 (定理 11.3.2) 及び Weierstrass の無限積表示 (定理 11.3.1) を経て Euler の定義を復元します.

11.1　積分表示と解析接続

定義 11.1.1. $s \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し**ガンマ関数**を次の広義積分で定義する.

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1}\, dt. \tag{11.1.1}$$

広義積分が収束することを確認しておきます: 条件 $s > 0$ より関数 t^{s-1} は $t = 0$ の近くで (Riemann 積分の意味で) 可積分です. また $t \to \infty$ で e^{-t} が冪関数 t^{s-1} より速く 0 に収束するので, 大きい t に対しても $e^{-t}t^{s-1}$ は可積分です.

$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対しては, 部分積分を繰り返して値が計算できるのでした.

$$\Gamma(n) \;=\; (n-1)!.$$

後の補題 11.1.3 も参照して下さい.

命題 11.1.2. (11.1.1) は複素数平面の右半平面 $\mathbb{H}_{\mathrm{r}} := \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\}$ 上の正則関数を定める. それも変数 s のガンマ函数と呼ぶ.

証明. 任意の $s \in \mathbb{H}_{\mathrm{r}}$ に対して積分 (11.1.1) が収束し s に関して正則であることを示せばよい.

まず $s \in \mathbb{H}_{\mathrm{r}}$ に対して積分が収束することを確認する. $\sigma := \mathrm{Re}(s)$ と書くと $\left|e^{-t}t^{s-1}\right| = e^{-t}t^{\sigma-1}$. よって $|\Gamma(s)| \le \Gamma(\sigma)$ となり, $\sigma \in \mathbb{R}_{>0}$ だから $\Gamma(\sigma)$ は有限値. 従って $\Gamma(s)$ も収束する.

次に $\mathbb{H}_{\mathrm{r}}$ 上正則であることを示す. $0 < m < M < \infty$ となる任意の実数 m, M から定まる帯状領域 $S_{m,M} := \{s \in \mathbb{C} \mid m < \mathrm{Re}(s) < M\}$ の上で正則であることを示せば十分. 広義積分の定義から

$$\Gamma(s) \;=\; \lim_{\varepsilon \to +0} F_\varepsilon(s), \quad F_\varepsilon(s) := \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} e^{-t}t^{s-1}\, dt$$

となるので, 定理 6.5.4 (積分で定義される正則関数) より $F_\varepsilon(s)$ は $S_{m,M}$ 上正則である. ここで定理 6.5.2 (コンパクト集合上の正則関数列の一様収束先は正則関数) を思い出すと, $\Gamma(s)$ が正則であることを示すには, $F_\varepsilon(s)$ が $S_{m,M}$ において $\Gamma(s)$ に一様収束することを示せば十分.

再び記号 $\sigma := \mathrm{Re}(s)$ を用いると

$$|\Gamma(s) - F_\varepsilon(s)| \;\le\; \int_0^\varepsilon e^{-t}t^{\sigma-1}\, dt + \int_{1/\varepsilon}^\infty e^{-t}t^{\sigma-1}\, dt.$$

右辺の前半の積分について. $\varepsilon < 1$ で考えればよいが, $m < \sigma$ より

$$\int_0^\varepsilon e^{-t}t^{\sigma-1}\, dt \;\le\; \int_0^\varepsilon t^{\sigma-1}\, dt \;\le\; \int_0^\varepsilon t^{m-1}\, dt \;=\; \frac{\varepsilon^m}{m}.$$

これは $\varepsilon \to 0$ でに 0 に $S_{m,M}$ 上一様収束する．後半の積分も $1/\varepsilon > 1$ で考えれると，$\sigma < M$ より

$$\int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t} t^{\sigma-1}\, dt \le \int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t} t^{M-1}\, dt.$$

ここで，ある正の実数 C が存在して，$t > 1$ なら $e^{t/2}/t^{M-1} \ge C$ となる（この部分は演習問題とする）．従って

$$\int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t} t^{\sigma-1}\, dt \le \int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t} t^{M-1}\, dt \le C^{-1} \int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t/2}\, dt = \frac{2}{Ce^{1/(2\varepsilon)}}.$$

これは $\varepsilon \to 0$ でに 0 に $S_{m,M}$ 上一様収束する． □

ガンマ関数は右半平面 $\mathbb{H}_{\mathrm{r}}$ 上の正則関数から更に $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続できます．それを述べるために次の補題を用意します．

補題 11.1.3. $s \in \mathbb{H}_{\mathrm{r}}$ に対して

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

特に $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\Gamma(n) = (n-1)!\Gamma(1) = (n-1)!$.

証明は演習問題にします．

定理 11.1.4. $\Gamma(s)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続される．極は $s = 0, -1, -2, \ldots$ にあって全て 1 位であり，$s = -n$ での留数は $(-1)^n/n!$ である．

証明. 各 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して領域 $\mathbb{H}_{\mathrm{r}}(m) := \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > -m\}$ に解析接続すれば良い．$m = 1$ の場合，

$$F_1(s) := \frac{\Gamma(s+1)}{s}$$

とすれば $F_1(s)$ は $\mathbb{H}_{\mathrm{r}}(1)$ 上の有理型関数で，$s = 0$ にのみ 1 位の極を持ち，留数は $\mathrm{Res}_{s=0} F_1(s) = \Gamma(1) = 1$ である．$m > 1$ の場合は

$$F_m(s) := \frac{F_{m-1}(s+1)}{s} = \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2)\cdots s}$$

と定義すれば，m に関する帰納法で $\mathbb{H}_{\mathrm{r}}(m)$ 上の有理型関数で，$s = 0, -1, \ldots, -(m-1)$ にのみ 1 位の極を持つことが分かる．留数は，$k \in \mathbb{Z}_{>0}$ なら $\Gamma(k) = (k-1)!$ であることから

$$\operatorname*{Res}_{s=-n} F_m(s) = \frac{\Gamma(-n+m)}{(m-1-n)! \cdot (-1)(-2)\cdots(-n)} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

補題 11.1.3 より $s \in \mathbb{H}_{\mathrm{r}}$ なら $F_m(s) = \Gamma(s)$ が分かる．すると一致の原理より $1 \le k \le m$ なら $\mathbb{H}_{\mathrm{r}}(k)$ 上で $F_m(s) = F_k(s)$ となる．こうして $\Gamma(s)$ の $\mathbb{H}_{\mathrm{r}}(m)$ 上への解析接続 $F_m(s)$ が得られた． □

これ以降は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続したものを単にガンマ関数と呼び，$\Gamma(s)$ と書くことにします．この後の副節でガンマ関数の性質のうち顕著なものを二つ紹介します．

演習問題 (解答: 133 ページ)

問題 11.1.1. 命題 11.1.2 で用いた次の主張を示せ: 正の実数 M に対してある正の実数 C が存在して，任意の $t > 1$ に対し $e^{t/2}/t^{M-1} \ge C$ となる．

問題 11.1.2. 補題 11.1.3 を証明せよ．

11.2　関数等式

定理 11.2.1. 任意の $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ に対して

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

特に

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

証明. 両辺とも $s \in \mathbb{Z}$ に 1 位の極を持つ有理型関数なので, 実区間 $(0,1) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ で等式を証明すれば, 解析接続の一意性より有理型関数として一致することが分かる.

$\Gamma(s)$ は $s \in (0,1)$ に対しては積分で定義されていたので, まず右辺を積分で表すことを考える.

補題. $s \in (0,1)$ に対して

$$\frac{\pi}{\sin \pi s} = \int_0^\infty \frac{v^{s-1}}{1+v}\, dv.$$

補題の証明. 変数変換 $v = e^x$ により

$$\int_0^\infty \frac{v^{s-1}}{1+v}\, dv = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{sx}}{1+e^x}\, dx.$$

右辺が $\pi/\sin \pi s$ に等しいことは演習問題 8.1.8 で示した. □

定理の証明に戻ろう. $s \in (0,1)$ に対して

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-u} u^{s-1}\, du = t \int_0^\infty e^{-vt} (vt)^{s-1}\, dv.$$

ここで $t \in \mathbb{R}_{>0}$ は定数であり, $u = vt$ と変数変換した. すると

$$\begin{aligned}
\Gamma(1-s)\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{-s} \Gamma(s)\, dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{-s} \left(t \int_0^\infty e^{-vt} (vt)^{s-1}\, dv \right) dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t(1+v)} v^{s-1}\, dv dt \overset{(*)}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t(1+v)} v^{s-1}\, dt dv \\
&= \int_0^\infty \frac{v^{s-1}}{1+v}\, dv = \frac{\pi}{\sin \pi s}.
\end{aligned}$$

最後の等式で上の補題を用いた. $(*)$ で積分の順序を交換したが, これは広義積分

$$\int_0^\infty e^{-t(1+v)} v^{s-1}\, dt = \frac{v^{s-1}}{1+v}$$

が $(0,\infty)$ 上で広義一様収束しているからである.

関数等式で特に $s = 1/2$ とすれば $\Gamma(1/2)^2 = \pi$. $s \in (0,1)$ で被積分関数が正なので積分 $\Gamma(s)$ も正であるから, 後半の主張が得られる. □

演習問題 (解答: 133 ページ)

問題 11.2.1. 以下の等式を示せ.

(1) $\Gamma(1/2+z)\Gamma(1/2-z) = \dfrac{\pi}{\cos \pi z} \quad (z \notin \mathbb{Z}+1/2)$.

(2) $|\Gamma(1/2+iy)|^2 = \dfrac{\pi}{\cosh \pi y} \quad (y \in \mathbb{R})$.

(3) $|\Gamma(iy)|^2 = \dfrac{\pi}{y \sinh \pi y} \quad (y \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

11.3　無限積表示

定義. Euler の定数 $\gamma \in \mathbb{R}$ を次で定義する.

$$\gamma := \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N \right).$$

極限 γ が収束することは微積分で簡単に示せます (問題 11.3.1). 実際の値は $\gamma = 0.57721566...$ です.

Weierstrass によるガンマ関数の無限積表示を紹介します.

定理 11.3.1 (Weierstrass の表示)**.** 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-z/n}.$$

問題 9.2.5 より右辺が整関数であることに注意して下さい. 証明は次の表示に帰着させます.

定理 11.3.2 (Gauss の表示)**.** 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!\, n^z}.$$

定理 11.3.1 と定理 11.3.2 が同値であることの証明. 以下の等式から従う.

$$\begin{aligned} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!\, n^z} &= z(1+z)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)\exp(-z\log n) \\ &= z e^{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)z} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-z/k}. \end{aligned}$$

□

Gauss の表示は以下のように実解析で示せます.

定理 11.3.2 の証明. 任意の正の実数 x に対して主張を示せば, 既に示した同値性から右辺 $\lim_n \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!\, n^z}$ は整関数であることが分かっているから, 任意の複素数 z に対して主張が従う.

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と $x \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し

$$\gamma_n(x) := \int_0^n t^{x-1} f_n(t)\, dt, \quad f_n(t) := (1-t/n)^n$$

とすると, ベータ関数

$$B(\alpha,\beta) := \int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1}\,ds \;=\; \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

を用いて

$$\gamma_n(x) \;=\; n^x B(x,n+1) \;=\; n^x \frac{n!}{x(x+1)\cdots x(x+n)}$$

となることに注意する. 従って $\lim_{n\to\infty}\gamma_n(x)=\Gamma(x)$ を示せばよい.

一方, $0\le t\le n$ で

$$f_n(t) \;\le\; f_{n+1}(t), \quad f_n(t) \;\le\; e^{-t} \tag{11.3.1}$$

であることが微積分で簡単に示せる (問題 11.3.2). よって

$$\gamma_n(x)\le\gamma_{n+1}(x), \quad \gamma_n(x)\le\int_0^n t^{x-1}e^{-t}\,dt\le\Gamma(x).$$

となり, 特に $\lim_{n\to\infty}\gamma_n(x)\le\Gamma(x)$. 逆の不等式を示すため, 正の実数 c を固定し, n を $n>c$ なる整数とする. $\gamma_n(x)\ge\int_0^c t^{x-1}(1-t/n)^n\,dt$ と, $[0,c]$ 上で一様に $\lim_{n\to\infty}(1-t/n)^n=e^{-t}$ となる (問題 11.3.3) ことから

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n(x)\ge\lim_{n\to\infty}\int_0^c t^{x-1}(1-t/n)^n\,dt=\int_0^c t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

従って $c\to+\infty$ として $\lim_{n\to\infty}\gamma_n(x)\ge\Gamma(x)$ が得られた. □

最後に Legendre (ルジャンドル) の倍数公式と呼ばれる公式を紹介します.

定理 11.3.3 (Legendre の倍数公式)**.** z と $z+1/2$ が $\mathbb{Z}_{\le 0}$ に含まれなければ

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) \;=\; \sqrt{\pi}2^{1-2z}\Gamma(2z).$$

証明. Gauss の表示 (定理 11.3.2) から

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) \;&=\; \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z2^{n+1}}{2z(2z+2)\cdots(2z+2n)},\\
\Gamma(z+1/2) \;&=\; \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{z+1/2}2^{n+1}}{(2z+1)(2z+3)\cdots(2z+2n+1)},\\
\Gamma(2z) \;&=\; \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{2z}}{2z(2z+1)\cdots(2z+n)} \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!\,(2n+1)^{2z}}{2z(2z+1)\cdots(2z+2n+1)}.
\end{aligned}$$

最初二つの等式から, 示すべき等式の左辺について

$$\begin{aligned}
2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) \;&=\; \lim_{n\to\infty}2^{2z-1}\frac{n^{2z+1/2}(n!)^2 2^{2n+2}}{(2n+1)^{2z}(2n+1)!}\frac{(2n+1)!\,(2n+1)^{2z}}{2z(2z+1)\cdots(2z+n+1)}\\
&=\; \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{2n}{2n+1}\Big)^{2z}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n!)\big(\sqrt{n}+1/(2\sqrt{n})\big)}\frac{(2n+1)!\,(2n)^{2z}}{2z(2z+1)\cdots(2z+n+1)}
\end{aligned}$$

と式変形できる. 円周率に関する Wallis の公式 (問題 9.2.4)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} \;=\; \sqrt{\pi}$$

と上記の $\Gamma(2z)$ の等式から結論が得られる. □

演習問題 (解答: 133 ページ)

問題 11.3.1. Euler の定数 $\gamma := \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} n^{-1} - \log N\right)$ が収束することを示せ.

問題 11.3.2. 不等式 (11.3.1) を示せ.

問題 11.3.3. c を正の実数とする. $n \to \infty$ で $(1-t/n)^n$ は e^{-t} に $[0,c]$ 上一様収束することを示せ.

問題 11.3.4. Gauss の表示 (定理 11.3.2) から次の Euler の無限積表示を導け.

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}.$$

問題 11.3.5 ([岸藤, 演習問題 5.1.6])**.** n を 2 以上の整数とし, $z \in \mathbb{C}$ を $z, z+1/n, \ldots, z+(n-1)/n$ が $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ に含まれないものとする. Stirling の公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}} = 1$$

と Gauss の表示 (定理 11.3.2) から次の等式を導け.

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/n)\cdots\Gamma(z+(n-1)/n) = (2\pi)^{(n-1)/2}n^{-nz+1/2}\Gamma(nz).$$

問題 11.3.6. 文字 a と非負整数 n に対し

$$(a)_n := \begin{cases} 1 & (n=0) \\ a(a+1)\cdots(a+n-1) & (n \geq 1) \end{cases}$$

と書く. また $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$ に対し **Gauss の超幾何級数** $F(z) = F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ を次で定める.

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n(1)_n}z^n.$$

(1) $F(z)$ の収束半径を求めよ.

(2) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$, $\gamma > \beta$ かつ z が (1) で求めた収束領域にある場合に次の等式を示せ.

$$F(z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-zt)^{-\alpha}\,dt.$$

(3) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ かつ $\gamma > \beta$ の場合に, $F(z)$ が $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ 上に解析接続されることを示せ.

12　ゼータ関数

今回の内容は [SS, Chapter 6 §2, Chapter 7 §1] に基づいて Riemann のゼータ関数を扱います.

12.1　関数等式と解析接続

定義. $s \in \mathbb{R}_{>1}$ に対し Riemann の**ゼータ関数** $\zeta(s)$ を次の級数で定義する.

$$\zeta(s) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

命題 12.1.1. 級数 $\zeta(s)$ は領域 $\mathrm{Re}(s) > 1$ で収束し, この領域で正則関数を定める.

証明. $s = \sigma + i\tau$ と実部と虚部に分ければ $|n^{-s}| = n^{-\sigma}$. 仮定より $\sigma > 1+\delta$ なる $\delta > 0$ が取れて $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\delta}$ は収束するから, 級数 $\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1+\delta$ で一様収束する. 従って $\mathrm{Re}(s) > 1$ で正則関数を定める. □

この副節の目的は $\zeta(s)$ の解析接続です.

定理 12.1.2. $\zeta(s)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続され, その極は $s = 1$ のみにあり, 単純極である.

$\zeta(s)$ の解析接続の方法は数通りありますが, ここでは次の関数等式を用いる方法を紹介します.

定理 12.1.3 (Riemann ゼータ関数の関数等式)**.**

$$\xi(s) \coloneqq \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で正則であり, $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続される. 解析接続されたものは $s = 0$ と $s = 1$ に 1 位の極を持ち, さらに任意の $s \in \mathbb{C}$ に対し次の関数等式を満たす.

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

$\zeta(s)$ で言い換えると

$$\zeta(s) = \pi^{s-1/2}\frac{\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma(s/2)}\zeta(1-s).$$

関数等式の証明は次の副節に回して, 先に定理 12.1.2 を証明します.

定理 12.1.2 の証明. $\xi(s)$ を用いて

$$\zeta(s) = \pi^{s/2}\frac{\xi(s)}{\Gamma(s/2)}$$

となるので, これが $\zeta(s)$ の解析接続を与える. 定理 11.1.4 より $1/\Gamma(s/2)$ は整関数で $s = 0, -2, -4, \ldots$ のみに単純零点を持つ. よって $\xi(s)$ の 1 位の極 $s = 0$ は $1/\Gamma(s/2)$ の零点と打ち消しあい, $s = 1$ のみが残る. つまり $\zeta(s)$ は $s = 1$ のみに極を持つ. □

12.2　テータ関数と関数等式の証明

ゼータ関数の関数等式 (定理 12.1.3) の証明の準備として:

定義. 正の実数 $t > 0$ に対する**テータ関数** $\vartheta(t)$ を次の級数で定義する.

$$\vartheta(t) \coloneqq \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}.$$

補題 12.2.1. $\vartheta(t)$ は $t > 0$ で広義一様収束し, 実関数 $\vartheta\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ を定める. 更に, ある $C \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して, $t \geq 1$ なら $|\vartheta(t) - 1| \leq Ce^{-\pi t}$.

証明. まず前半について. 各項 $e^{-\pi n^2 t}$ は正の実数だから, 級数和を上から評価すれば和の収束が言えるが,

$$\vartheta(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \leq 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n t} = 1 + \frac{2e^{-\pi t}}{1 - e^{-\pi t}}$$

より収束性が従う. またこの評価から, 任意の $t_0 > 0$ を一つ固定すると, 任意の $t > t_0$ に対して $\vartheta(t) \leq 1 + \frac{2e^{-\pi t_0}}{1-e^{-\pi t_0}}$ が成立する. 従って $\vartheta(t)$ は $t > t_0$ で一様収束, つまり $t > 0$ で広義一様収束する.

後半は, $t \geq 1$ なら

$$\vartheta(t) - 1 \leq \frac{2e^{-\pi t}}{1 - e^{-\pi t}} \leq \frac{2}{1 - e^{-\pi}} e^{-\pi t}$$

と評価できるので, $C \coloneqq \frac{2}{1-e^{-\pi}}$ とすれば良い. □

テータ関数は次の関数等式を満たします. Fourier 変換を使った証明を演習問題 (§ 12.2) で扱います.

定理 12.2.2. 任意の $t > 0$ に対し

$$\vartheta(t) = t^{-1/2}\vartheta(1/t).$$

定理 12.2.2 と次の主張がゼータ関数の関数等式の証明の鍵になります.

命題 12.2.3. $\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ について, $\mathrm{Re}(s) > 1$ なら

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} u^{s/2-1}\left(\vartheta(u) - 1\right) du.$$

証明. 右辺の積分から計算する. $\vartheta(u)$ の定義より

$$\frac{\vartheta(u) - 1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u}.$$

補題 12.2.1 より積分の順序交換ができて, 更に $t = \pi n^2 u$ と変数変換すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{\infty} u^{s/2-1}\left(\vartheta(u) - 1\right) du &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} u^{s/2-1} e^{-\pi n^2 u}\, du = \sum_{n=1}^{\infty}(\pi n^2)^{-s/2}\int_0^{\infty} t^{s/2-1} e^{-t}\, dt \\ &= \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\end{aligned}$$

になって左辺と一致する. □

定理 12.1.3 の証明. $\psi(u) := (\vartheta(u)-1)/2$ とする. 定理 12.2.2 より

$$\psi(u) \;=\; u^{-1/2}\psi(1/u) + \frac{1}{2u^{1/2}} - \frac{1}{2}.$$

$\mathrm{Re}(s) > 1$ と仮定して, 命題 12.2.3 とこの関数等式を用いると

$$\begin{aligned}
\xi(s) \;&=\; \int_0^\infty u^{s/2-1}\psi(u)\,du \\
&=\; \int_0^1 u^{s/2-1}\psi(u)\,du + \int_1^\infty u^{s/2-1}\psi(u)\,du \\
&=\; \int_0^1 u^{s/2-1}\left(u^{-1/2}\psi(1/u) + \frac{1}{2u^{1/2}} - \frac{1}{2}\right)du + \int_1^\infty u^{s/2-1}\psi(u)\,du \\
&=\; \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty \left(u^{-s/2-1/2} + u^{s/2-1}\right)\psi(u)\,du.
\end{aligned}$$

補題 12.2.1 より $\psi(u)$ は $u \to \infty$ で指数関数的に減衰するので, 右辺の積分は整関数を定める. これで $\xi(s)$ が $s=0$ と $s=1$ にのみ 1 位の極を持つ有理型関数に解析接続されることが分かった. またこの表示で $s \mapsto 1-s$ としても変わらないので $\xi(1-s) = \xi(s)$ である. □

演習問題 (解答: 135 ページ)

以下では定理 12.2.2 (テータ関数の関数等式) を証明する.

定義. 実数の集合 $\mathbb{R}$ を含む開集合上で定義されている複素数値関数 f に対し, その **Fourier 変換** $\widehat{f}$ を (意味があれば) 次の積分によって定義する.

$$\widehat{f}(\xi) \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\,dx.$$

定義. $a \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し, 次の二条件を満たす関数 f の集合を $\mathfrak{F}_a$ と書く.

(i) f は水平帯 $S_a := \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z)| < a\}$ 上の正則関数である.

(ii) 定数 $A \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して, 任意の $z = x+iy \in S_a$ に対し $|f(z)| \le A/(1+x^2)$.

また $\mathfrak{F}$ を次で定める.

$$\mathfrak{F} \;:=\; \bigcup_{a\in\mathbb{R}_{>0}} \mathfrak{F}_a.$$

問題 12.2.1 ([SS, Chap. 4 Theorem 2.1])**.** 次の主張を手順を踏んで示せ: $a \in \mathbb{R}_{>0}$ かつ $f \in \mathfrak{F}_a$ ならば, $0 \le b < a$ なる任意の実数 b に対しある定数 $B \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して, $\xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \;\le\; Be^{-2\pi b|\xi|}.$$

(1) $b = 0$ の場合を (実積分のみを用いて) 示せ.

(2) $0 < b < a$ かつ $\xi > 0$ の場合を, 図 12.2.1 のような積分路 C での複素積分 $\int_C f(z)e^{-2\pi i z\xi}\,dz$ を考えることで示せ.

(3) $0 < b < a$ かつ $\xi < 0$ の場合を示せ.

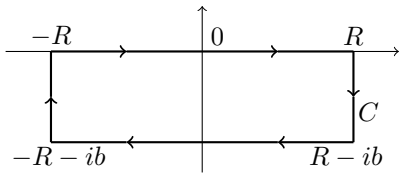


図 12.2.1　問題 12.2.1 (2) の積分路 C

問題 12.2.2 (**Poisson 和公式** [SS, Chap. 4 Theorem 2.3])**.** 任意の $f \in \mathfrak{F}$ に対して

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)$$

が成立することを, 以下の手順で示せ.

(1) $f \in \mathfrak{F}_a$ と仮定し, $0 < b < a$ なる実数 b を固定する. N を正の整数として, 図 12.2.2 のような積分路 C_N 上で $f(z)/(e^{2\pi iz}-1)$ を積分することにより, 次の等式を示せ.

$$\sum_{n=-N}^{N} f(n) = \int_{C_N} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz}-1} dz.$$

(2) $L_1 := (-\infty - ib, \infty - ib)$, $L_2 := (-\infty + ib, \infty + ib)$ とする. 次の等式を示せ.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \int_{L_1} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz}-1} dz - \int_{L_2} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz}-1} dz.$$

(3) L_1 上で $1/(e^{2\pi iz}-1) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi inz}$, L_2 上で $1/(e^{2\pi iz}-1) = -\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi inz}$ となること, 及び

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x \pm ib) e^{-2\pi i(x \pm ib)\xi}\, dx \quad (\text{右辺は複号同順})$$

(証明は [SS, Chapter 4, Theorem 2.1, (2)] を参照) となることを用いて, 結論の等式を示せ.

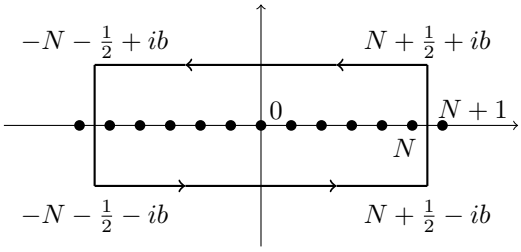


図 12.2.2　問題 12.2.2 (1) の積分路 C

問題 12.2.3. $f(x) = e^{-\pi x^2}$ とする.

(1) $f \in \mathfrak{F}$ を示せ.

(2) $\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$ となること, つまり f は Fourier 変換で不変であることを示せ.

(3) $t > 0$ を固定する. $g(x) := e^{-\pi t x^2}$ の Fourier 変換が $\widehat{g}(\xi) = t^{-1/2} e^{-\pi\xi^2/t}$ であることを示せ.

(4) Poisson 和公式 (問題 12.2.2) から等式 $\vartheta(t) = t^{-1/2}\vartheta(1/t)$ を示せ.

12.3 無限積表示

ゼータ関数 $\zeta(s)$ は以下の無限積表示を持ちます. s が正整数の場合は Euler が考察したものなので, 一般の $s \in \mathbb{C}$ の場合でも **Euler の無限積公式**と呼ばれます.

定理 12.3.1. $\mathrm{Re}(s) > 1$ において

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

但し積の p は全ての素数を走る.

証明は素因数分解の一意性を使ってできます. 詳細は演習問題にします.

Euler の無限積公式から, 特に $\mathrm{Re}(s) > 1$ で $\zeta(s)$ は零点を持たないことが分かります. $\zeta(s)$ の零点集合については, 関数等式から次の主張が導出できます.

定理 12.3.2. $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ の補集合にある $\zeta(s)$ の零点は $s = -2, -4, -6, \ldots$ である.

証明. ゼータ関数の関数等式

$$\zeta(s) = \pi^{s-1/2} \frac{\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma(s/2)} \zeta(1-s)$$

の右辺を考えると, $\mathrm{Re}(s) < 0$ の場合

- $\zeta(1-s)$ は $\mathrm{Re}(1-s) > 1$ より零点を持たない.
- $\Gamma((1-s)/2)$ も $\mathrm{Re}(1-s) > 1$ より零点を持たない.
- $1/\Gamma(s/2)$ は $s = -2, -4, -6, \ldots$ に単純零点を持つ.

$\mathrm{Re}(s) > 0$ の場合と合わせて結論を得る. □

もう少し考察を進めると, 次の主張が証明できます.

事実 12.3.3 ([SS, Chapter 7, Theorem 1.2])**.** $\mathrm{Re}(s) = 1$ 上に $\zeta(s)$ の零点は存在しない.

函数等式から $\mathrm{Re}(s) = 0$ 上にも $\zeta(s)$ は零点を持ちません.

ゼータ関数は素数の深い性質を反映する関数です. それは Euler の無限積公式 (定理 12.3.1) だけからでも推測できます. 幾つかの有名な事項を述べておくと:

- **素数定理**, つまり素数分布を表す関数 $\pi(x) := \#\{x \text{ 以下の素数}\}$ の漸近挙動が

  $$\pi(x) \approx \frac{x}{\log x} \quad (x \to \infty)$$

  となること**と事実 12.3.3 は同値**である. [SS, Chapter 7 §2] を参照.
- **Riemann 予想**: ゼータ関数 $\zeta(s)$ の $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ における零点は $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ **上にのみ存在**する.

13　楕円関数

この節では (Weierstrass の) 楕円関数を扱います. [SS, Chapter 9 §1] や [岸藤, §5.2] を参照して下さい.

13.1　二重周期関数

定義. ω_1, ω_2 を 0 でない複素数であって $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ を満たすものとする. $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 f は

$$f(z+2\omega_1) = f(z), \quad f(z+2\omega_2) = f(z)$$

が (定義域上に z があれば) 常に成立する時, **周期** $2\omega_1, 2\omega_2$ **の二重周期関数** (doubly-periodic function) と呼ばれる. 定数関数でない二重周期関数を**楕円関数** (elliptic function) と呼ぶ.

以下, 二重周期関数といったら周期 $2\omega_1, 2\omega_2$ の二重周期関数のこととします.

定義. 二重周期関数 f の**周期格子** (period lattice) Ω とは以下の $\mathbb{C}$ の部分集合のことである.

$$\Omega := 2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z} = \{2m\omega_1 + 2n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

注意. (1) 周期の定義から周期格子 Ω の任意の点 ω について $f(z+\omega) = f(z)$.

(2) 周期格子 Ω は (加法に関して) $\mathbb{C}$ の部分加群であり, また $\mathbb{C}$ の離散部分空間です. 格子 (lattice) という言葉はこの二つの性質を反映したもの.

定義. f を二重周期関数とする. 複素平面上の平行四辺形の内部であって以下の二条件を満たすものを f の**基本領域** (fundamental region) と呼ぶ.

(i) ある $z_0 \in \mathbb{C}$ が存在して, 四頂点が $z_0, z_0+2\omega_1, z_0+2\omega_1+2\omega_2, z_0+2\omega_2$ と書ける.

(ii) 周上に f の極が位置しない.

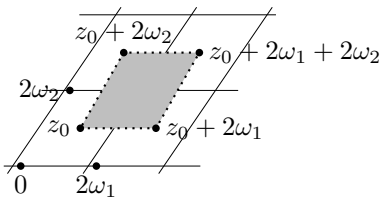


図 13.1.1　二重周期関数の基本領域

定理 13.1.1. f を二重周期関数とし, D を f の基本領域とする.

(1) D にある f の極の数は有限個.

(2) f が恒等的に 0 でなければ, D にある f の零点の数は有限個.

(3) D にある f の極での留数の総和は 0.

(4) D に極を持たない f は定数 (**楕円関数に関する Liouville の定理**).

証明. (1) Bolzano-Weierstrass の定理, 即ち ($\mathbb{R}^n$ 内の) 有界点列は収束部分列を持つことから, 無限個の極が D に存在すれば, 極限点が $\overline{D}$ にある. それは孤立していない特異点で, f が有理型であることと矛盾.

(2) $1/f(z)$ に (1) を適用すればよい.

(3) D の頂点を反時計回りに $t, t+2\omega_1, t+2\omega_1+2\omega_2, t+2\omega_2$ とする. D の境界に反時計回りの向きを入れた積分路を C とすると, 留数の総和は留数定理から

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_t^{t+2\omega_1} + \int_{t+2\omega_1}^{t+2\omega_1+2\omega_2} + \int_{t+2\omega_1+2\omega_2}^{t+2\omega_2} + \int_{t+2\omega_2}^{t}\right\} f(z)\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+2\omega_1} \left(f(z) - f(z+2\omega_2)\right)\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+2\omega_2} \left(f(z) - f(z+2\omega_1)\right)\,dz \\ &= 0 - 0 \;=\; 0.\end{aligned}$$

(4) 基本領域 D 内で極を持たなければ $f(z)$ は $\overline{D}$ の各点で解析的なので, $|f(z)|$ は有界閉集合 $\overline{D}$ 上連続. よって $|f(z)|$ は最大値を持ち, 特に有界. すると $\mathbb{C}$ 上で $|f(z)|$ は有界だから, (整関数に関する) Liouville の定理 6.2.1 より $f(z)$ は定数.

□

命題 13.1.2. 楕円関数 f と $c \in \mathbb{C}$ について, 基本領域内の $f(z) = c$ の解の重複度込みの個数は c によらない.

命題 13.1.2 の証明. g を閉積分路 C 上とその内部で正則な関数とし, 更に C 上零点を持たないと仮定する. 偏角の原理 (定理 8.2.1) から

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g'(z)}{g(z)}dz \;=\; (\text{零点の重複度を込めた個数}) - (\text{極の位数の総和}).$$

特に $g(z) = f(z) - c$, C を基本領域の周とすることで

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)-c}dz \;=\; (f(z) = c \text{ の解の個数}) - (f(z) \text{ の極の位数の総和}).$$

しかし $f(z)$ は楕円関数だから, $f(z+2\omega_1) = f(z+2\omega_2) = f(z)$ および $f'(z+2\omega_1) = f'(z+2\omega_2) = f'(z)$ が成立する. 定理 13.1.1 (3) と同様の議論によりこの積分が 0 になることが分かる. □

定義. 楕円関数 f について, $f(z) = c$ の基本領域内での解の重複度込みの個数を f の**位数** (order) と呼ぶ.

命題 13.1.2 から, 楕円関数の位数は零点の重複度を込めた個数, 及び極の位数の総和と等しいです.

定理 13.1.3. 楕円関数の位数は 2 以上.

証明. 位数 1 の楕円関数があればそれは基本領域内に位数 1 の極を一つ持ち, その留数は 0 ではない. これは定理 13.1.1 (3), つまり留数の総和が 0 となることに矛盾する. □

この定理から最も簡単な楕円関数は位数 2 の楕円関数だと分かり, 次の二種類が考えられます.

- 基本領域に位数 2 の極を一つ持つもの.
- 基本領域に位数 1 の極を二つ持つもの.

次の副節で導入する **Weierstrass のペー関数**は前者の例です.

演習問題 (解答: 136 ページ)

問題 13.1.1. f と g を楕円関数とする. 以下の主張を証明せよ.

(1) 零点と極が位数をこめて一致すれば, 定数 c が存在して $g = cf$.

(2) 極と Laurent 展開の主要部が一致すれば, 定数 c が存在して $g = f + c$.

13.2 Weierstrass のペー関数

ω_1 と ω_2 は 0 でない複素数で $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$ だとします．また，$\sum'_{m,n}$ で $(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ にわたる和を表すことにします．

定義. 関数 $\wp(z) = \wp(z|\omega_1, \omega_2)$ を以下で定義する ($\wp$ は「ペー」と読みます).

$$\wp(z) \coloneqq \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n}{}' \left(\frac{1}{(z - 2m\omega_1 - 2n\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^2} \right).$$

簡単のため $\Omega_{m,n} \coloneqq 2m\omega_1 + 2n\omega_2$ とおけば $\wp(z) = z^{-2} + \sum'_{m,n} \left((z - \Omega_{m,n})^{-2} - \Omega_{m,n}^{-2} \right)$ と書ける．

$|\Omega_{m,n}|$ が十分大きいような m, n に関しては $\wp(z)$ の和に現れる各項は $O(|\Omega_{m,n}|^{-3})$ です．このことから，級数 $\wp(z)$ は極の近傍を除いて z に関して絶対一様収束することが従います (演習問題 13.2.1 参照)．よって関数 $\wp$ は $\mathbb{C}$ 上 $z = \Omega_{m,n}$ を除いて正則です．そして $\Omega_{m,n}$ を 2 位の極に持ちます．

$\wp$ が楕円関数であることを示しましょう．そのために $\wp$ の微分を考えます．$\wp$ は一様収束級数で定まる有理型関数だから項別微分ができて，$\sum_{m,n} \coloneqq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty}$ と書くと

$$\wp'(z) = -2 \sum_{m,n} (z - \Omega_{m,n})^{-3}.$$

次の補題の証明は演習問題にします．

補題 13.2.1. 関数 $\wp$ について以下が成立する．

(1) $\wp'$ は奇関数，$\wp$ は偶関数．(2) $\wp'(z+2\omega_1) = \wp'(z+2\omega_2) = \wp'(z)$．(3) $\wp(z+2\omega_1) = \wp(z+2\omega_2) = \wp(z)$．

最後の主張と $\wp$ が極以外の特異点を持たないことから:

定理 13.2.2. $\wp(z)$ は $2\omega_1, 2\omega_2$ を周期とする 2 位の楕円関数．$\wp(z)$ を **Weierstrass のペー関数**と呼ぶ．

演習問題 (解答: 136 ページ)

問題 13.2.1. 二重級数 $\wp(z) \coloneqq z^{-2} + \sum'_{m,n} \left((z - \Omega_{m,n})^{-2} - \Omega_{m,n}^{-2} \right)$ が広義絶対一様収束すること，以下の段階を踏んで示せ．

(1) $\sum'_{m,n} |\Omega_{m,n}|^{-a}$ は $a > 2$ なら収束することを示せ．$k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し，$2k(\pm\omega_1 \pm \omega_2)$ を頂点とする平行四辺形の辺上にある Ω の点 ($8k$ 個ある) 全体を E_k として，$\sum'_{m,n} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\omega \in E_k}$ と考えると良い．

(2) $R > 0$ を固定して $\overline{D} \coloneqq \{w \in \mathbb{C}; |w| \leq R\}$，$\Omega' \coloneqq \Omega \setminus \overline{D}$ と置く．$(z - \omega)^{-2} - \omega^{-2} = A/\omega^3$，$A \coloneqq (2z\omega - z^2)\omega/(z - \omega)^2$ とすることで，$z \in \overline{D} \setminus \Omega$ について $\sum_{\omega \in \Omega'} ((z - \omega)^{-2} - \omega^{-2})$ が絶対一様収束することを示せ．

(3) 主張を示せ．

問題 13.2.2. 補題 13.2.1 を示せ．

13.3　ペー関数が満たす微分方程式

$\wp(z)-z^{-2}$ は $\sum'_{m,n}\left((z-\Omega_{m,n})^{-2}-\Omega_{m,n}^{-2}\right)$ と等しいことから, $z=0$ の近傍で正則だと分かります. また補題 13.2.1 より偶関数です. $z=0$ での値は級数の形から 0. 従って以下のように Taylor 展開できます.

$$\wp(z)-z^{-2} \;=\; \frac{1}{20}g_2z^2+\frac{1}{28}g_3z^4+O(z^6)$$

次の補題は演習問題にします.

補題 13.3.1. 以下の等式が成立する.

$$g_2 \;=\; 60\sum_{m,n}{}'\,\Omega_{m,n}^{-4}, \quad g_3 \;=\; 140\sum_{m,n}{}'\,\Omega_{m,n}^{-6}.$$

これから以下の展開が得られます.

$$\wp(z) \;=\; z^{-2}+\frac{1}{20}g_2z^2+\frac{1}{28}g_3z^4+O(z^6), \quad \wp'(z) \;=\; -2z^{-3}+\frac{1}{10}g_2z+\frac{1}{7}g_3z^3+O(z^5).$$

次の補題も演習問題にします.

補題 13.3.2. 次の等式が成立する.

$$\wp'^2(z)-4\wp^3(z)+g_2\wp(z)+g_3 \;=\; O(z^2).$$

従って関数 $\wp'^2(z)-4\wp^3(z)+g_2\wp(z)+g_3$ は原点 $z=0$ において正則です. $\wp$ が楕円関数だからこの関数も楕円関数で, $z=0$ と周期格子 Ω に関して合同な点 $z=\Omega_{m,n}$ でも正則です. 一方で $\wp(z)$ の定義から, この関数の極は $\Omega_{m,n}$ にしかありません. 以上より $\wp'^2(z)-4\wp^3(z)+g_2\wp(z)+g_3$ は極を持たない二重周期関数です. すると定理 13.1.1 (4) からこの関数は定数です. $z=0$ での値は 0 だから, 任意の $z\in\mathbb{C}$ について $\wp'^2(z)-4\wp^3(z)+g_2\wp(z)+g_3=0$ です. 以上より:

定理 13.3.3. Weierstrass のペー関数は次の微分方程式を満たす.

$$\wp'^2(z) \;=\; 4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3, \quad g_2 \;\coloneqq\; 60\sum_{m,n}{}'\,\Omega_{m,n}^{-4}, \quad g_3 \;\coloneqq\; 140\sum_{m,n}{}'\,\Omega_{m,n}^{-6}.$$

逆に $g_2,g_3\in\mathbb{C}$ が与えられたとして, 関数 $y(z)$ に関する次の微分方程式を考えます.

$$(y'(z))^2 \;=\; 4y^3(z)-g_2y(z)-g_3. \tag{13.3.1}$$

これを **Weierstrass の微分方程式**と呼びます.

補題 13.3.4. もし $g_2=60\sum'_{m,n}\Omega_{m,n}^{-6}$, $g_3=140\sum'_{m,n}\Omega_{m,n}^{-6}$ と書ければ, この微分方程式の解は以下のように書ける.

$$y(z) \;=\; \wp(z+\alpha\,|\,\omega_1,\omega_2) \quad (\alpha \text{ は積分定数}).$$

証明. $y=\wp(u)$ を満たす u が任意の $y\in\mathbb{C}$ について存在する. これから $y(z)=\wp(u)$ を満たす関数 $u=u(z)$ が定まる. y の満たす微分方程式から $(du/dz)^2=1$ が得られるので $u=\pm z+\alpha$ と書ける. $\wp(z)$ が偶関数なので $y=\wp(\pm z+\alpha)=\wp(z\pm\alpha)$ となり, $\pm\alpha$ を α に置きなおすことで結論が得られる. □

Weierstrass の微分方程式の応用として, ペー関数の加法定理を導きましょう.

定理 13.3.5 (ペー関数の加法定理)**.** $u+v+w=0$ なら

$$\begin{vmatrix} \wp(u) & \wp'(u) & 1 \\ \wp(v) & \wp'(v) & 1 \\ \wp(w) & \wp'(w) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

補題を一つ用意します.

補題 13.3.6. C を複素平面上の単純閉曲線とし, D をその内部とする. 但し C の向き付けは D が左側にあるようなもの (つまり正の向き付け) だとする. f を $\overline{D}$ 上の正則関数とし, φ を D 上有限個の極を持ちそれ以外は正則な関数とする. また φ は C 上正則でかつ零点ももたないと仮定する. このとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz = \sum_{i\geq 1} r_i f(a_i) - \sum_{j\geq 1} s_j f(b_j)$$

となる. 但し φ の D での零点を $a_1, a_2, \ldots$ とし, それらの重複度を $r_1, r_2, \ldots$ とした. また φ の D での極を $b_1, b_2, \ldots$ とし, それらの位数を $s_1, s_2, \ldots$ とした.

この補題の証明は演習問題にします.

証明. $u, v \in \mathbb{C}\setminus\Omega$ として A, B に関する次の連立方程式を考える.

$$\wp'(u) = A\wp(u) + B, \quad \wp'(v) = A\wp(v) + B \tag{13.3.2}$$

この方程式は $\wp(u) \neq \wp(v)$ なら A, B を一意に決定する. つまり $u \not\equiv \pm v \pmod{\Omega}$ なら A, B が決まる (この部分の証明は演習問題 13.3.5). 以下 u, v はこの条件を満たしているものとし, A, B を上の方程式で決定したものとする. 次に関数

$$f(z) := \wp'(z) - A\wp(z) - B$$

を考える. この関数は周期格子 Ω の各点 $\Omega_{m,n}$ を 3 位の極として持つ楕円関数である. 従って命題 13.1.2 よりこの関数は基本領域内に重複度を込めて 3 つの零点を持つ. この零点を a_1, a_2, a_3 と置く.

ここで補題 13.3.6 を, f は今考えている f, $\varphi(z) = z$, C は基本領域の周として適用する. 但し C は周期格子 Ω の一点 $\Omega_{m,n}$ のみを内部に含むものとする. 左辺の積分は補題 13.3.6 の証明と同じ議論で 0 になるので

$$0 = a_1 + a_2 + a_3 - 3\Omega_{m,n}.$$

つまり $a_1 + a_2 + a_3 \in \Omega$ だと分かる. 零点のうち二つは $\zeta = u, v$ だと分かるので, 残り一つを w とすれば $w \equiv -u - v \pmod{\Omega}$. よって $-u-v$ 自身も零点である. つまり

$$\wp'(-u-v) = A\wp(-u-v) + B.$$

これと (13.3.2) から結論が得られる. □

演習問題 (解答: 136 ページ)

問題 13.3.1. $\wp(z) - z^{-2} = \sum'_{m,n}\left((z-\Omega_{m,n})^{-2} - \Omega_{m,n}^{-2}\right)$ から補題 13.3.1 と補題 13.3.2 を導け.

問題 13.3.2. $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ とする．次の積分で定まる ζ の関数 z を考える．

$$z(\zeta) := \int_{\zeta}^{\infty} (4t^3 - g_2 t - g_3)^{-1/2} dt.$$

但し積分路は $4t^3 - g_2 t - g_3$ の零点をよけるものとする．更に $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ で $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$ となるものが存在して，$\Omega_{m,n} := 2m\omega_1 + 2n\omega_2$ と略記すると

$$g_2 = 60 \sum_{m,n}{}' \Omega_{m,n}^{-4}, \quad g_3 = 140 \sum_{m,n}{}' \Omega_{m,n}^{-6}$$

と書けると仮定する．この時，適当な $k, l \in \mathbb{Z}$ が存在して，関数 z は次を満たすことを示せ．

$$\zeta = \wp(z + \Omega_{k,l} | \omega_1, \omega_2).$$

問題 13.3.3. 問題 13.3.2 で $g_2 = 4, g_3 = 0$ とした次の積分を考える．

$$z(\zeta) := \int_{\zeta}^{\infty} (4t^3 - 4t^2)^{-1/2} dt.$$

この時

$$\zeta = \frac{1}{\sin^2(z + \alpha)}$$

と書けることを示せ．なおこの場合は，$g_2 = 60 \sum'_{m,n} \Omega_{m,n}^{-4}$, $g_3 = 140 \sum'_{m,n} \Omega_{m,n}^{-6}$ となる ω_1, ω_2 を取って問題 13.3.2 の議論を適用することが**できない**場合なので注意すること．

問題 13.3.4. 補題 13.3.6 を証明せよ．

問題 13.3.5. 定理 13.3.5 の証明で，$u \not\equiv \pm v \pmod{\Omega}$ の場合は連立方程式 (13.3.2) が A, B を一意に決定することを確認せよ．

問題 13.3.6 (ペー関数の加法定理の別形と倍角公式). 周期格子 Ω の Weierstrass のペー関数 $\wp(z)$ について考える．

(1) $\wp(x)$ が次の加法定理を満たすことを，手順 (i)–(iii) に従って証明せよ．

$$\wp(z + w) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)} \right)^2 - \wp(z) - \wp(w). \tag{13.3.3}$$

(i) 定理 13.3.5 の証明の記号 u, v, A, B を用いる．関数

$$f(z) := \wp'^2(z) - (A\wp(z) + B)^2$$

が $z = u, v, -u - v$ を零点に持つことを示せ．

(ii) Weierstrass の微分方程式を用いて f が次のように書き直せることを確認せよ．

$$f(z) = 4\wp^3(z) - A^2\wp^2(z) - (2AB + g_2)\wp(z) - (B^2 + g_3)$$

(iii) 以上より 3 次方程式 $4Z^3 - A^2 Z^2 - (2AB + g_2)Z - (B^2 + g_3) = 0$ が解 $Z = \wp(u), \wp(v), \wp(-u-v) = \wp(u+v)$ を持つことが分かった．すると解と係数の関係から

$$\wp(u) + \wp(v) + \wp(u + v) = \frac{A^2}{4}.$$

A の値を連立方程式 (13.3.2) から求めて代入して，結論を得よ．

(2) (13.3.3) の極限を取って, $2z \notin \Omega$ なら次の等式が成立することを示せ.

$$\wp(2z) \;=\; \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^2 - 2\wp(z).$$

13.4　ペー関数の半周期での値

引き続き, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$ をみたすものとし, $2\omega_1$ と $2\omega_2$ を周期に持つ Weierstrass のペー関数を $\wp(z)$ と書きます.

定理 13.4.1. $\omega_3 := -\omega_1 - \omega_2$ とおき, また $e_j := \wp(\omega_j)$ $(j = 1, 2, 3)$ と定める. この時 e_j 達は互いに異なり, また次の 3 次方程式の解である.

$$4t^3 - g_2 t - g_3 \;=\; 0.$$

証明. $\wp'(z)$ が奇関数であることから $\wp'(\omega_1) = -\wp'(-\omega_1) = -\wp'(2\omega_1 - \omega_1) = -\wp'(\omega_1)$. 同様の議論から

$$\wp'(\omega_1) \;=\; \wp'(\omega_2) \;=\; \wp'(\omega_3) \;=\; 0.$$

$\wp'(z)$ は Ω の各点 $\Omega_{m,n}$ を 3 位の極に持つ楕円関数なので, 命題 13.1.2 より $\wp'(z)$ は基本領域内に 3 つの零点を持つ. よって $z \equiv \omega_1, \omega_2, \omega_3 \pmod{\Omega}$ となる点 z で零点は尽くされる.

次に関数 $\wp(z) - e_1$ を考える. $\wp'(\omega_1) = 0$ より $z = \omega_1$ はこの関数の 2 位以上の零点である. $\wp(z)$ は基本領域内に二つしか極を持たないので, 命題 13.1.2 よりこの関数の零点は $z \equiv \omega_1 \pmod{\Omega}$ で尽くされる. $\wp(z) - e_2$, $\wp(z) - e_3$ の零点も同様. これから $e_1 \neq e_2 \neq e_3$ が従う.

また $\wp(z)$ の満たす微分方程式 ${\wp'}^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$ から e_j 達が $4t^3 - g_2 t - g_3 = 0$ の解であることは直ちに従う. □

上記の証明で「これから $e_1 \neq e_2 \neq e_3$ が従う」の部分および「e_i 達が $4t^3 - g_2 t - g_3 = 0$ の解であることは直ちに従う」の部分は演習問題にします.

系.

$$e_1 + e_2 + e_3 \;=\; 0, \quad e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 \;=\; -g_2/4, \quad e_1e_2e_3 = g_3/4.$$

演習問題 (解答: 138 ページ)

問題 13.4.1. 定理 14.1.1 の証明で「これから $e_1 \neq e_2 \neq e_3$ が従う」の部分および「e_i 達が $4t^3 - g_2 t - g_3 = 0$ の解であることは直ちに従う」の部分を説明せよ.

問題 13.4.2. 以下の等式を示せ.

$$\begin{aligned}\wp(\omega_1/2) \;&=\; e_1 \pm \left((e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\right)^{1/2},\\ \wp(\omega_1/2 + \omega_2) \;&=\; e_1 \mp \left((e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\right)^{1/2},\end{aligned}$$

13.5 Weierstrass のツェータ関数とシグマ関数

定義. 関数 $\zeta(z)$ を, 次の性質を満たすものとして定める.

$$\frac{d\zeta(z)}{dz} = -\wp(z), \quad \lim_{z\to 0}(\zeta(z) - z^{-1}) = 0.$$

Riemann のゼータ関数と区別するために, この関数を **Weierstrass のツェータ関数**と呼ぶ.

補題. $\zeta(z)$ は一意に存在して, 次の級数で与えられる.

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{m,n}{}' \left(\frac{1}{z - \Omega_{m,n}} + \frac{1}{\Omega_{m,n}} + \frac{z}{\Omega_{m,n}^2} \right).$$

証明. $\wp(z) - z^{-2}$ は (原点以外の) $\Omega_{m,n}$ の近傍を含まない領域上で一様収束するから項別積分できて

$$\zeta(z) - z^{-1} = -\int_0^z \left(\wp(z) - z^{-2}\right) dz = \sum_{m,n}{}' \left(\frac{1}{z - \Omega_{m,n}} + \frac{1}{\Omega_{m,n}} + \frac{z}{\Omega_{m,n}^2} \right).$$

これから主張の級数を得る. ζ の一意性は, 原始関数が定数項を除いて一意に定まることから従う. □

系. $\zeta(z)$ は z の奇関数.

ツェータ関数の極 $\Omega_{m,n}$ での位数は 1 だから, 楕円関数にはなり得ない. しかし次のような性質を持つ.

命題 13.5.1 (**ツェータ関数の準周期性**)**.** $\eta_j := \zeta(\omega_j)$ $(j = 1, 2)$ と定めると

$$\zeta(z + 2\omega_j) = \zeta(z) + 2\eta_j \quad (j = 1, 2).$$

証明. $\wp(z + 2\omega_1) = \wp(z)$ を積分して $\zeta(z + 2\omega_1) = \zeta(z) + c$. 但し c は積分定数. $z = -\omega_1$ を代入して $\zeta(z)$ が奇関数であることを用いると $c = 2\eta_1$ が分かる. ω_2 についても同様. □

準周期性に現れた η_j は半周期 ω_k と次の関係を持つ.

定理 13.5.2 (Legendre 関係式)**.**

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \pi i/2.$$

証明. 基本領域の境界に反時計回りの向きを付けた積分路 C での積分 $\int_C \zeta(z)dz$ を考える. $\zeta(z)$ は基本領域に 1 つ極を持ちその留数は 1 だから, 留数定理から $\int_C \zeta(z)dz = 2\pi i$. 一方で積分を変形すると

$$\begin{aligned}\int_C \zeta(z)dz &= \int_t^{t+2\omega_1} (\zeta(z) - \zeta(z + 2\omega_2))\, dz - \int_t^{t+2\omega_2} (\zeta(z) - \zeta(z + 2\omega_1))\, dz \\ &= -2\eta_2 \int_t^{t+2\omega_1} dz + 2\eta_1 \int_t^{t+2\omega_2} dz.\end{aligned}$$

これから結論が得られる. □

次にシグマ関数を導入します.

定義. 関数 σ を次の二条件を満たすものとして定義し, **Weierstrass のシグマ関数**と呼ぶ.

$$\frac{d}{dz}\operatorname{Log}\sigma(z) \;=\; \zeta(z), \quad \lim_{z\to 0}\frac{\sigma(z)}{z} \;=\; 1.$$

次の補題の証明は演習問題にします.

補題 13.5.3. シグマ関数 σ に関して以下が成立する.

(1) 次の無限積表示がある. 但し $\prod'_{m,n}$ は $(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}$ にわたる積を表す.

$$\sigma(z) \;=\; z\prod_{m,n}{}'\left\{\left(1-\frac{z}{\Omega_{m,n}}\right)\exp\left(\frac{z}{\Omega_{m,n}}+\frac{z^2}{2\Omega_{m,n}^2}\right)\right\}.$$

(2) $\sigma(z)$ は $\Omega_{m,n}$ を 1 位の零点とする奇関数である.

ツェータ関数と同様にシグマ関数も準周期性を持ちます.

定理 13.5.4 (Weierstrass のシグマ関数の準周期性).

$$\sigma(z+2\omega_j) \;=\; -e^{2\eta_j(z+\omega_j)}\sigma(z) \quad (j=1,2).$$

証明. 命題 13.5.1 の $\zeta(z+2\omega_1)=\zeta(z)+2\eta_1$ を積分して $\sigma(z+2\omega_1)=ce^{2\eta_1 z}\sigma(z)$. ここで $z=-\omega_1$ を代入し $\sigma(-\omega_1)=-\sigma(\omega_1)$ を用いると $\sigma(\omega_1)=-ce^{-2\eta_1\omega_1}\sigma(\omega_1)$ となり, 積分定数 c が $-e^{2\eta_1\omega_1}$ だと分かる. □

ここまで調べてきた関数 $\wp(z)$, $\zeta(z)$, $\sigma(z)$ は **Weierstrass の関数**と総称されます. これらと対応する三角関数や有理関数をまとめると以下のようになります.

Weierstrass の関数	$\wp(z)$	$\zeta(z)$	$\sigma(z)$
関係式	$\wp=-\zeta'$	$\zeta=\sigma'/\sigma$	
極の性質	2 位極	1 位極	1 位零点
偶奇	偶関数	奇関数	奇関数
三角関数	$1/\sin^2(z)$	$\cot(z)$	$\sin(z)$
有理関数	$1/z^2$	$1/z$	z

表 13.5.1 有理・三角・楕円関数

Weierstrass の関数を用いて任意の楕円関数が表示できます. ペー関数を用いた表示を紹介しましょう.

命題 13.5.5. 楕円関数かつ偶関数である任意の複素関数 $\varphi(z)$ は同じ周期を持つ $\wp(z)$ の有理式で書ける. より具体的に述べると, $\varphi(z)$ の零点の列 $\pm a_1,\dots,\pm a_n$ と極の列 $\pm b_1,\dots,\pm b_n$ および定数 $c\in\mathbb{C}$ が存在して

$$\varphi(z) \;=\; c\prod_{r=1}^{n}\frac{\wp(z)-\wp(a_r)}{\wp(z)-\wp(b_r)}.$$

証明. 任意の基本領域 D に対して $D\cap(\{\pm a_1,\dots,\pm a_r\}+\Omega)$ が D 内の重複込みの零点集合と一致するように a_i 達を取る. 同様に b_i たちを取ると, 関数 $\varphi(z)^{-1}\prod_{r=1}^{n}\frac{\wp(z)-\wp(a_r)}{\wp(z)-\wp(b_r)}$ は極を持たない楕円関数だから (整関数に関する) Liouville の定理より定数. この定数を c とすればよい. □

定理 13.5.6 (**ペー関数による表示**)**.** 任意の楕円関数は同じ周期を持つ $\wp(z)$ と $\wp'(z)$ の有理式で書ける.

証明. 任意の楕円関数 $f(z)$ について $f(z)+f(-z)$ は楕円関数かつ偶関数なので, 上の命題 13.5.5 から有理式 $R_1(x)$ があって $f(z)+f(-z)=2R_1(\wp(z))$. また $(f(z)-f(-z))/\wp'(z)$ も楕円関数かつ偶関数なので別の有理式 $R_2(x)$ があって $(f(z)-f(-z))/\wp'(z)=2R_2(\wp(z))$. よって $f(z)$ は次のように書ける.

$$f(z) \;=\; R_1(\wp(z))+\wp'(z)R_2(\wp(z)).$$

□

他にツェータ関数やシグマ関数を用いても任意の楕円関数を表すことができる. 演習問題を参照せよ.

演習問題 (解答: 138 ページ)

問題 13.5.1. 補題 13.5.3 を証明せよ.

問題 13.5.2 (**ツェータ関数による表示**)**.** $f(z)$ を周期 $2\omega_1, 2\omega_2$ の楕円関数とする. 基本周期内の極を $a_1,\dots,a_n$ とし, 各 a_i での Laurent 展開を

$$f(z)=\frac{c_{k,r_k}}{(z-a_k)^{r_k}}+\cdots+\frac{c_{k,1}}{z-a_k}+(\text{正則部分})$$

と書く. この時ある定数 $c\in\mathbb{C}$ が存在して, $f(z)$ は Weierstrass の ζ 関数を用いて次のように表せることを示せ.

$$f(z) \;=\; c+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{r_k}\frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!}c_{k,s}\zeta^{(s-1)}(z-a_k).$$

問題 13.5.3 (**シグマ関数による表示**)**.** $f(z)$ を周期 $2\omega_1, 2\omega_2$ の楕円関数とする. 基本周期内の零点を重複を込めて $a_1,\dots,a_n$ とする.

(1) f の極の部分集合 $\{b_1,\dots,b_n\}$ であって, 任意の極は何れかの b_j と周期格子 $2\omega_1\mathbb{Z}+2\omega_2\mathbb{Z}$ を法として合同であり, 更に $a_1+\cdots+a_n=b_1+\cdots+b_n$ となるようなものが存在することを示せ.

(2) ある定数 $c\in\mathbb{C}$ が存在して, 次の等式が成立することを示せ.

$$f(z) \;=\; c\prod_{r=1}^{n}\frac{\sigma(z-a_r)}{\sigma(z-b_r)}.$$

前回と同様, $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ は $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1)>0$ をみたすものとし, $2\omega_1$ と $2\omega_2$ を周期に持つ Weierstrass のペー関数を $\wp(z)$ と書く.

13.6　楕円積分

定理 13.6.1. 4 次式 $f(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$ は重根を持たないものとする．x_0 を $f(x)$ の根とし, 平方根の逆数の積分

$$z = \int_{x_0}^{x} f(t)^{-1/2} dt,$$

を考える．もし

$$g_2 \coloneqq a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2, \quad g_3 \coloneqq a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_2^3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4$$

に対応した $\wp(z)$ が存在するなら, x を次のように $\wp(z)$ の有理関数で表せる．

$$x = x_0 + \frac{f'(x_0)}{4\wp(z) - f''(x_0)/6}.$$

証明. 一部計算を省略して述べる (省略した部分は演習問題).

$f(t)$ を $t = x_0$ で Taylor 展開して係数 $A_0, \ldots, A_3$ を

$$f(t) \;=\; 4A_3(t-x_0) + 6A_2(t-x_0)^2 + 4A_1(t-x_0)^3 + A_0(t-x_0)^4 \tag{13.6.1}$$

とおく．$\tau \coloneqq (t-x_0)^{-1}$, $\xi \coloneqq (x-x_0)^{-1}$ とすると

$$z = \int_{\xi}^{\infty} (4A_3\tau^3 + 6A_2\tau^2 + 4A_1\tau + A_0)^{-1/2} d\tau. \tag{13.6.2}$$

仮定より $A_3 \neq 0$ であることに注意して, $\tau = A_3^{-1}(\sigma - A_2/2)$, $\xi = A_3^{-1}(s - A_2/2)$ と変数変換すると

$$z = \int_{s}^{\infty} \left(4\sigma^3 - (3A_2^2 - 4A_1A_3)\sigma - (2A_1A_2A_3 - A_2^3 - A_0A_3^2)\right)^{-1/2} d\sigma. \tag{13.6.3}$$

ここで次の等式 (13.6.4) に注意すると, 前回の問題 13.3.2 の結果が使えて $s = \wp(z)$ が分かる．

$$3A_2^2 - 4A_1A_3 = g_2, \quad 2A_1A_2A_3 - A_2^3 - A_0A_3^2 = g_3 \tag{13.6.4}$$

最後に $x = x_0 + A_3/(s - A_2/2)$ で変数を元に戻すと結論を得る． □

演習問題 (解答: 138 ページ)

問題 13.6.1. 定理 13.6.1 の証明で省略した部分を補え．特に

(1) 等式 (13.6.2) を確かめよ．

(2) 等式 (13.6.3) を確かめよ．

(3) 式 (13.6.1) の A_i 達を a_i 達で書き表し, 等式 (13.6.4) を確かめよ．

(4) 最後の「変数を元に戻すと結論を得る」の部分を確かめよ．

14　問題の解答

1　複素微分

1.1　複素数平面 (問題: 7 ページ)

問題 1.1.1. 任意の $z \in S^\circ$ に対し, ある $r \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して $D(z,r) \subset S$. z は $D(z,r$ の中心だから $z \in D(z,r)$. よって $z \in D(z,r) \subset S$, つまり $z \in S$. 以上より $S^\circ \subset S$.

問題 1.1.2. 中心 $z \in \mathbb{C}$, 半径 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ の開円板 $D(z,r)$ を考える. 任意の $w \in D(z,r)$ に対して, $|z-w| < r$ であることに注意すると, $D(w, r-|z-w|) \subset D(z,r)$ より $w \in D(z,r)^\circ$. よって $D(z,r)$ は開集合.

問題 1.1.3. 中心 $z \in \mathbb{C}$, 半径 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ の閉円板 $\overline{D(z,r)}$ を考える. 任意の $w \in \overline{D(z,r)}^c$ に対して, $|w-z| > r$ であることに注意すると, $D(w, |w-z|-r) \subset \overline{D(z,r)}^c$ より $w \in (\overline{D(z,r)}^c)^\circ$. よって $\overline{D(z,r)}^c$ は開集合で, 言い換えると $\overline{D(z,r)}$ は閉集合.

問題 1.1.4. $z \in S^\circ$ を任意にとると, 適当な $r \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して $D(z,r) \subset S$. すると任意の $w \in D(z,r/2)$ について, $D(w,r/2) \subset D(z,r)$ が成立する. 実際, 任意の $x \in D(w,r/2)$ について $|x-w| < r/2$ であり, また三角不等式から $|x-z| \leq |z-w| + |w-z|$ だから, $|w-z| < r/2$ とあわせて $|x-z| < r/2 + r/2 = r$.

よって $D(w,r/2) \subset D(z,r) \subset S$ となるので $w \in S^\circ$. w は $D(z,r/2)$ の任意の点だったから, $D(z,r/2) \subset S^\circ$ が従う. z は S° の任意の点だったから, S° は開集合である.

問題 1.1.5. $\emptyset$ は点を持たないので開集合の条件を自動的に満たす. よって $\emptyset$ は開集合

任意の $z \in \mathbb{C}$ について, 任意の $r \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して $D(z,r) \subset \mathbb{C}$ となるから, $\mathbb{C}$ は開集合. また $\mathbb{C}^c = \emptyset$ は開集合だから, $\mathbb{C}$ は閉集合である.

そして $\emptyset^c = \mathbb{C}$ は開集合だから, $\emptyset$ は閉集合である.

問題 1.1.6. 開集合でも閉集合でもない.

まず開集合でないことについて. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ の任意の点, つまり任意の無理数 $x \in \mathbb{R}$ を取ると, 任意の $r \in \mathbb{R}_{>0}$ について開円板 $D(x,r) \subset \mathbb{C}$ は有理数を含む. 実際, 有理数の稠密性から開区間 $(x, x+r) \subset \mathbb{R}$ はある有理数 q を含むから, $q \in D(x,r)$ となる. つまり $D(x,r) \not\subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ であり, 定義より $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ は開集合ではない.

次に閉集合でないことについて. $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q})^c = \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ が開集合でないことを言えばよい. 任意の $q \in \mathbb{Q}$ と任意の $r \in \mathbb{R}_{>0}$ について, $q + ir/2 \in D(q,r) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ より $D(q,r) \not\subset \mathbb{Q}$ だから, $\mathbb{Q}$ は開集合ではない.

1.2　複素微分 (問題: 8 ページ)

問題 1.2.1. (1) $z = re^{i\theta}$ とおくと $(z+\overline{z})/|z| = 2\cos\theta$. $z \to 0$, つまり $r \to 0$ とすると θ によって異なる値に近づくから極限は存在せず, 従って $f(z)$ は $z=0$ で不連続.

(2) $z = re^{i\theta}$ とおくと $(z+\overline{z})^2/|z| = 4r\cos^2\theta$. $z \to 0$ とすると $f(z) \to 0$. 従って $f(z)$ は $z=0$ で連続.

(3) $z = re^{i\theta}$ とおくと $(z+\overline{z})/|z|^{1/2} = 2r\cos\theta$. $z \to 0$ とすると $f(z) \to 0$. 従って $f(z)$ は $z=0$ で連続.

問題 1.2.2. $f(z) = \overline{z}$ について, $h = re^{i\theta}$ とすると $(f(z+h)-f(z))/h = \overline{h}/h = e^{2i\theta}$ と θ に依存した値にな

るので, $h \to 0$ つまり $r \to 0$ での極限は存在しない. よって $f(z)$ は (どの $z \in \mathbb{C}$ においても) 正則ではない.

1.3 Cauchy-Riemann 方程式 (問題: 9 ページ)

問題 1.3.1. $\overline{\partial} := \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$, $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$, $u_x := \frac{\partial u}{\partial x}$ 等と略記すると $2\overline{\partial} f = (\partial_x + i\partial_y)(u+iv) = (u_x - v_y) + i(u_y + v_x)$. よって $\overline{\partial} f = 0 \iff u_x - v_y = 0 = u_y + v_x \iff$ Cauchy-Riemann 方程式.

問題 1.3.2. (1) $u_r := \partial u/\partial r$ 等と略記する. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と微分の連鎖律から

$$\begin{aligned} u_r &= u_x x_r + u_y y_r = u_x \cos\theta + u_y \sin\theta, & u_\theta &= u_x x_\theta + u_y y_\theta = -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta, \\ v_r &= v_x x_r + v_y y_r = v_x \cos\theta + v_y \sin\theta, & v_\theta &= v_x x_\theta + v_y y_\theta = -v_x r\sin\theta + v_y r\cos\theta. \end{aligned}$$

ここで Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ と第 1 式及び第 4 式から $v_\theta = ru_r$. 同様に第 2 式及び第 3 式から $u_\theta = -rv_r$. よって結論を得る.

(2) $u = R\cos\varphi$, $v = R\sin\varphi$ と $u_x = v_y$ から $R_x \cos\varphi - R\varphi_x \sin\varphi = R_y \sin\varphi + R\varphi_y \cos\varphi$ (a)
同様に $u_y = -v_x$ から $R_y \cos\varphi - R\varphi_y \sin\varphi = -R_x \sin\varphi - R\varphi_x \cos\varphi$ (b)
(a) $\times \cos\varphi +$ (b) $\times \sin\varphi$ から $R_x = R\varphi_y$ を, (a) $\times \sin\varphi -$ (b) $\times \cos\varphi$ から $R_y = -R\varphi_x$ を得る.

(3) $u = R\cos\varphi$, $v = R\sin\varphi$ と微分の連鎖律から $u_r = R_r \cos\varphi - \varphi_r R\sin\varphi$, $u_\theta = R_\theta \cos\varphi - \varphi_\theta R\sin\varphi$, $v_r = R_r \sin\varphi + \varphi_r R\cos\varphi$, $v_\theta = R_\theta \sin\varphi + \varphi_\theta R\cos\varphi$. これらを (1) の結論に代入すると

$$\begin{aligned} R_r \cos\varphi - R\varphi_r \sin\varphi &= R_\theta r^{-1} \sin\varphi + R/r \cdot \varphi_\theta \cos\varphi \qquad \text{(c)} \\ -R_r \sin\varphi + R\varphi_r \cos\varphi &= R_\theta r^{-1} \cos\varphi - R/r \cdot \varphi_\theta \sin\varphi \qquad \text{(d)} \end{aligned}$$

(c) $\times \cos\varphi +$ (d) $\times \sin\varphi$ から $R_r = \varphi_\theta R/r$ を, (c) $\times \sin\varphi -$ (d) $\times \cos\varphi$ から $R_\theta/r = -R\varphi_r$ を得る.

問題 1.3.3. $f = u + iv$ と実部と虚部に分けると, 仮定から $u_x = u_y = 0$. よって Cauchy-Riemann 方程式から $v_x = v_y = 0$ となり, v は定数. つまり f も定数.

問題 1.3.4. 仮定から u は y に依存しないので $u = u(x)$ と書ける. また Cauchy-Riemann 方程式から $v_x = 0$ なので, $v = v(y)$ と書ける. 再び Cauchy-Riemann 方程式から $u_x = v_y$ なので $u'(x) = v'(y)$ となり, これは実定数 r でなければならない. すると実定数 ξ, η を用いて $u(x) = rx + \xi$, $v(y) = ry + \eta$ となり, $c := \xi + i\eta \in \mathbb{C}$ とすれば $f(z) = rz + c$. 逆にこの形の関数 f は条件を満たす. 以上より

$$f(z) = rz + c \quad (r \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{C})$$

が求める関数全てを尽くす.

問題 1.3.5. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ を実部と虚部への分解とすると $g(z) = u(x,-y) - iv(x,-y)$. よって $(\operatorname{Re} g)_x = u_x \overset{*}{=} v_y = (\operatorname{Im} g)_y$, $(\operatorname{Re} g)_y = -u_y \overset{*}{=} v_x = -(\operatorname{Im} g)_x$. ここで $*$ は f に関する Cauchy-Riemann 方程式. 従って g も Cauchy-Riemann 方程式を満たし, 正則である.

問題 1.3.6. (1) 偏微分の順序交換 $\partial_x \partial_y = \partial_y \partial_x$ を使うと $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ より $4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta$. $4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z} = \Delta$ も同様に確かめることができる.

(2) f は正則なので $\partial f/\partial \overline{z} = 0$. よって (1) より $\Delta f = 0$. 特に $f = u + iv$ と分解すれば $\Delta u = \Delta v = 0$. なお正則関数について偏微分が交換できることは, 正則関数が級数展開を持つこと (定理 6.1.2) と級数の定める関数が何回でも複素微分可能であること (定理 2.2.12) から従う.

2 冪級数と正則関数

2.1 一様収束 (問題: 12 ページ)

問題 2.1.1. 任意の部分集合 $V \subset U$ に対して $\|f_n - f\|_V \le \|f_n - f\|_U$ が成立するから, 任意の有界閉部分集合 $K \subset U$ に対して $0 \le \|f_n - f\|_K \le \|f_n - f\|_U$ である. よって, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_U = 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_K = 0$ である.

2.2 冪級数と正則関数 (問題: 16 ページ)

問題 2.2.1. (1) $b_n := (n!)^{1/n}$ が単調増加かつ上に有界ではないことを示せば十分. 実際, それから $\lim_{n\to\infty} b_n^{-1} = 0$ が従うので, $\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n^{-1} = \lim_{n\to\infty} b_n^{-1} = 0$ を得る.
まず単調増加について. 各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $b_{n+1}^{n(n+1)} - b_n^{n(n+1)} > 0$ を示せばよいが,

$$b_{n+1}^{n(n+1)} - b_n^{n(n+1)} = ((n+1)!)^n - (n!)^{n+1} = (n!)^n\left((n+1)^n - n!\right)$$

と $(n+1)^n > n^n \ge n!$ より従う.
次に有界ではないことについて. b_n が有界だと仮定すると, ある $M \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $M > b_n$, つまり $M^n > n!$. 両辺の対数を取って $n \log M > \sum_{k=1}^n \log k$. ここで実数 x の関数 $\log x$ が上に凸な単調増加関数であることから $\sum_{k=1}^n \log k > \int_1^n \log x\, dx$ となることに注意すると

$$n \log M > \sum_{k=1}^n \log k > \int_1^n \log x\, dx = n \log n - (n-1).$$

従って任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $n + n\log M > n - 1 + n \log M > n \log n$, つまり $(eM)^n > n^n$. しかし, ここで $n_1 := \lceil eM \rceil$ (eM 以上の最小の整数) と定めると $n_1^{n_1} \ge (eM)^{n_1}$ となって矛盾する.

(2) (1) の b_n を使うと, $a_{2n}^{1/2n} = b_{2n}^{-1}$ より $\{b_{2m}^{-1}\}_{m\ge n} = \{a_{2m}^{1/2m}\}_{m\ge n} \subset \{a_m^{1/m}\}_{m\ge n}$ が得られる. すると $0 \le \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n^{1/n} \le \overline{\lim}_{n\to\infty} a_{2n}^{1/2n} = \overline{\lim}_{n\to\infty} b_{2n}^{-1}$. 一方 (1) より $\lim_{n\to\infty} b_{2n}^{-1} = 0$ なので $\overline{\lim}_{n\to\infty} b_{2n}^{-1} = \lim_{n\to\infty} b_{2n}^{-1} = 0$. よって $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 0$.

問題 2.2.2. ratio test (命題 2.2.5) を用いる.

(1) $|a_{n+1}/a_n| = (1 + \log(1+1/n)/\log n)^2 \to 1$ より収束半径は 1.

(2) $|a_{n+1}/a_n| = n + 1 \to \infty$ より収束半径は 0.

(3) $|a_{n+1}/a_n| = 4^{-1}(1+1/n)^2(1+3n/4^n)/(1+3(n+1/4^{n+1}) \to 1/4$ より収束半径は 4.

問題 2.2.3. $\alpha := (1+\sqrt{5})/2$, $\beta := (1-\sqrt{5})/2$ とすると $a_n = (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})/(\alpha - \beta)$. $0 < \beta < \alpha$ に注意して

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha^n - \beta^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^n}\frac{1-(\beta/\alpha)^{n-1}}{1-(\beta/\alpha)^n} = \alpha^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

従って ratio test (命題 2.2.5) から $(\sqrt{5}-1)/2$ が収束半径.

問題 2.2.4. (1) $x > 0$ で $f^{(n)}(x) = x^{-3n} d_n(x) \exp(-1/x^2)$, 但し $d_n(x)$ は x の $2(n-1)$ 次多項式, と書けることが n に関する帰納法で示せる. $y := 1/x$ として, 十分大きい y に対して $\exp(y^2) > y^{4n}/(2n)!$

となるので $\lim_{y\to+\infty} y^{2n}\exp(-y^2)=0$. つまり $\lim_{x\to+0} f^{(n)}(x)=0$. $x<0$ では $f^{(0)}(x)=0$ だから, これで無限回微分可能であることが示せた.

(2) 既に示した.

(3) もし $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と級数展開できるなら, 収束数列の微分と級数和は交換できるから $f^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot(n-k+1)a_n x^{n-k}$ となり, $f^{(k)}(0)=0$ より任意の $n\geq 1$ で $a_n=0$ となる. つまり $f(x)$ は $x=0$ の近傍で恒等的に 0 になり, f の定義と矛盾する.

問題 2.2.5. (1) $|z|<1$ で $\sum_{n\geq 0} z^n$ は絶対収束して $\sum_{n\geq 0} z^n=(1-z)^{-1}$. 左辺が項別微分できることに注意して両辺を z で微分し, 更に z を乗ずれば良い.

(2) (1) の $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$ の左辺も $|z|<1$ で絶対収束していることに注意して, 両辺を z で微分して, z を乗ずれば結論を得る.

(3) p に関する帰納法で, (1) や (2) と同様に示せる.

問題 2.2.6. (1) N に関する帰納法で示す. $N=M$ の場合は左辺は $a_M b_M$, 右辺は $a_M B_M - a_M B_{M-1} = a_M(B_M - B_{M-1}) = a_M b_M$ なので確かに一致する. N まで示せたとして, $N+1$ の時

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{n=M}^{N+1} a_n b_n &= a_{N+1}b_{N+1} + \textstyle\sum_{n=M}^{N} a_n b_n \\
&\overset{(*)}{=} a_{N+1}b_{N+1} + a_N B_N - a_M B_{M-1} - \textstyle\sum_{n=M}^{N-1}(a_{n+1}-a_n)B_n \\
&= (a_{N+1}B_{N+1} - a_{N+1}B_N) + a_N B_N - a_M B_{M-1} - \textstyle\sum_{n=M}^{N-1}(a_{n+1}-a_n)B_n \\
&= a_{N+1}B_{N+1} - a_M B_{M-1} - \textstyle\sum_{n=M}^{N}(a_{n+1}-a_n)B_n.
\end{aligned}$$

但し $(*)$ で帰納法の仮定を用いた.

(2) 前問で a_n と b_n を取り換えて, さらに $b_n=r^n$ とする. そして $M=1$, $N\to\infty$ とすれば $\sum_{n=1}^{\infty} r^n a_n = (1-r)\sum_{n=1}^{\infty} r^n A_n$. 但し $A_N := \sum_{n=1}^{N} a_n$. 以下 $A := A_\infty$ と書くと, 任意の $\varepsilon>0$ について十分大きく N をとれば, $N<n$ なら $|A_n - A|<\varepsilon$ とできる. そこで $\sum_{n=1}^{\infty} r^n a_n = (1-r)\sum_{n=1}^{N} r^n A_n + (1-r)\sum_{n=N+1}^{\infty} r^n A_n$ と分けて辺々 A を引くと

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} r^n a_n - A\right| < |1-r|\left|\sum_{n=0}^{N} r^n A_n\right| + \varepsilon\frac{|1-r|}{1-|r|}$$

と評価できる. これで $r\to 1-0$ とすれば $|\sum_{n=1}^{\infty} r^n a_n - A|\to 0$ が分かる.

2.3 初等関数 (問題: 19 ページ)

問題 2.3.1. (1) $\cosh z = (e^z+e^{-z})/2 = 0$ より $e^{2z} = -1 = 1\cdot e^{(2n+1)\pi i}$ $(n\in\mathbb{Z})$. よって $z = (2n+1)\pi i/2 = (1/2+n)\pi i$ $(n\in\mathbb{Z})$.

(2) $z=re^{i\theta}$ とおくと $\log z = \log r + i(\theta+2n\pi)$ $(n\in\mathbb{Z})$. よって $\log r = 2$, $\theta+2n\pi=\pi/6$. 従って $z = e^2 e^{(\pi/6-2n\pi)i} = e^2(\sqrt{3}+i)/2$.

問題 2.3.2. (1) $w=\sin^{-1} z$ とすると $z=\sin w = (e^{iw}-e^{-iw})/2i$. よって $e^{2iw}-2ize^{iw}-1=0$ で, 二次方程式を解いて $e^{iw} = iz\pm\sqrt{1-z^2}$. これから

$$\sin^{-1} z = w = -i\log\left(iz\pm\sqrt{1-z^2}\right).$$

また $z = \sin w$ の両辺を z で微分して $1 = \cos w \cdot dw/dz$. よって

$$(\sin^{-1} z)' = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\cos w} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

(2) $w = \tanh^{-1} z$ とすると $z = \tanh w = (e^w - e^{-w})/(e^w + e^{-w})$. すると $e^{2w} = (1+z)/(1-z)$ なので

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}.$$

また $z = \tanh w$ の両辺を w で微分して $1 = \operatorname{sech}^2 w \cdot dw/dz$. よって

$$(\tanh^{-1} z)' = \frac{1}{\operatorname{sech}^2 w} = \frac{1}{1-\tanh^2 w} = \frac{1}{1-z^2}.$$

問題 2.3.3. (1) $\log i = \log(1 \cdot e^{i\pi/2}) = \log 1 + i(\pi/2 + 2n\pi) = (1/2 + 2n)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

(2) $i^i = e^{i \operatorname{Log} i} = e^{i \cdot \pi i/2} = e^{-\pi/2}$.

問題 2.3.4. (1) どの分岐についても成立しない.

(2) $-\pi < \operatorname{Im}(\log z) < \pi$ となる分岐について成立する.

問題 2.3.5. $f(z) := (1+z)^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Log}(1+z))$ を微分すると $f'(z) = \alpha(1+z)^{-1} f(z)$.

一方 $g(z) := \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} z^n$ の収束半径は $\lim_{n\to\infty}\left|\binom{\alpha}{n}/\binom{\alpha}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1$. よって $|z| < 1$ では $g'(z) = \sum_{n=0}^\infty n\binom{\alpha}{n} z^{n-1}$. ここで二項係数の定義から

$$n\binom{\alpha}{n} + (n+1)\binom{\alpha}{n+1} = \alpha\binom{\alpha}{n}$$

となることを用いると $(1+z)g'(z) = \alpha g(z)$ が示せる.

すると $(g(z)/f(z))' = 0$ が示せて, 事実 2.3.4 を $\Omega = D(0,1)$ と函数 $g(z)/f(z)$ に適用して $g(z)/f(z) = g(0)/f(0) = 1$. よって $|z| < 1$ なら $g(z) = f(z)$.

問題 2.3.6. 正弦関数の逆関数が存在すると仮定して g と書く. $z = \sin w$ として, $|z| < 1$ の場合, g の z での微分は $g'(z) = 1/(\sin w)' = 1/\cos w = 1/\sqrt{1-z^2}$. すると二項定理 (問題 2.3.5) から

$$g'(z) = (1-z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^\infty \binom{-1/2}{n}(-z^2)^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} z^{2n}.$$

一方, 冪級数 $\operatorname{Arcsin} z$ の収束半径は ratio test により 1 で, 収束円板内で $(\operatorname{Arcsin} z)' = \sum_{n=0}^\infty \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} z^{2n}$. よって $(\operatorname{Arcsin} z - g(z))' = 0$ なので $\operatorname{Arcsin} z - g(z) = \operatorname{Arcsin} 0 - g(0) = 0$, つまり $\operatorname{Arcsin} z$ は逆関数.

$\operatorname{Arccos} z$ については, 加法定理と既に得た結果から $\cos(\operatorname{Arccos} z) = \cos(\pi/2 - \operatorname{Arcsin} z) = \sin \pi/2 \cdot \sin(\operatorname{Arcsin} z) = z$ となって, 確かに $\cos z$ の逆関数である.

問題 2.3.7. 問題 2.3.6 と同様の方針をとる. $\tan z$ の逆関数 $g(z)$ が存在すると仮定すれば

$$g'(z) = \frac{1}{(\tan w)'} = \frac{1}{1+\tan^2 w} = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n z^{2n}.$$

一方で冪級数 $\operatorname{Arctan} z$ の収束半径は ratio test から 1 だと分かり, 収束円板内で $(\operatorname{Arctan} z)' = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n z^{2n}$. よって $\operatorname{Arctan} z - g(z) = \operatorname{Arctan} 0 - g(0) = 0$ となる.

3 複素積分

3.1 複素数平面内の曲線 (問題: 23 ページ)

問題 3.1.1. $p\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, $q\colon [c,d] \to \mathbb{C}$, $r\colon [e,f] \to \mathbb{C}$ をパラメータ付き曲線とする．p はパラメータの取り替え $\varphi = \mathrm{id}$ によって p 自身と同値である．写像 $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ を p から q へのパラメータの取り替えとすると，逆写像 $\varphi^{-1}\colon [a,b] \to [c,d]$ もまた連続微分可能全単射であって $(\varphi^{-1})'(t) > 0$ $(\forall t \in [a,b])$ かつ $p = q \circ \varphi'$ となるので．q と p は同値．最後に，p と q が $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ によって，q と r が $\psi\colon [e,f] \to [c,d]$ によって同値ならば，$\rho := \psi \circ \varphi$ は連続微分可能全単射であって $\rho'(u) = \psi'(\varphi(u))\varphi'(u) > 0$ $(\forall u \in [e,f])$ かつ $r = \psi \circ q = \psi \circ (\varphi \circ p) = (\psi \circ \varphi) \circ p = \rho \circ p$ となるので，p と r は同値．

問題 3.1.2. パラメータ付き曲線 $p\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ から $q\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ へのパラメータの取り替え $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ が存在するとき，$\psi(s) := a + b - \varphi(c + d - s)$ で連続微分可能全単射 $\psi\colon [c,d] \to [a,b]$ が定めると，$q = p \circ \varphi$ より $p^-(\psi(s)) = p(a + b - \psi(s)) = p(\varphi(c + d - s)) = q(c + d - s) = q^-(s)$ となるので，ψ はパラメータ付き曲線 $p^-(t) = p(a + b - t)$ から $q^-(s) = q(c + d - s)$ へのパラメータの取り替えである．

問題 3.1.3. パラメータ付き曲線 $p\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ から $q\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ へのパラメータの取り替え $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ が存在するなら，$\varphi(c) = a$ かつ $\varphi(d) = b$ だから $q(c) = p(\varphi(c)) = p(a)$ かつ $q(d) = p(\varphi(d)) = p(b)$ となり，始点と終点は一致する．

問題 3.1.4. パラメータ付き曲線 $p\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ から $q\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ へのパラメータの取り替え $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ が存在し，かつ任意の $s \neq t \in (a,b)$ について $p(s) \neq p(t)$ だと仮定する．$\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$ かつ φ は全単射だから，任意の $u \neq v \in (c,d)$ について $\varphi(u) \neq \varphi(v) \in (c,d)$．よって $q(u) = p(\varphi(u)) \neq p(\varphi(v)) = q(v)$ である．

3.2 複素積分 (問題: 26 ページ)

問題 3.2.1. (1) $z(t) = re^{it}$ と C をパラメータ付けると

$$\int_C z^n\,dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{int} \cdot ire^{it}\,dt = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt = \begin{cases} 0 & (n \neq -1) \\ 2\pi i & (n = -1) \end{cases}.$$

(2) $z(t) = 2r + re^{it}$ と C をパラメータ付けると

$$\begin{aligned}\int_C z^n\,dz &= \int_0^{2\pi} r^n(e^{it} + 2)^n \cdot ire^{it}\,dt = r^{n+1}\int_0^{2\pi} ie^{it}(e^{it} + 2)^n\,dt \\ &= \frac{r^{n+1}}{n+1}\left[(e^{it} + 2)^{n+1}\right]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

(3) $z(t) = re^{it}$ と C をパラメータ付けると

$$\begin{aligned}I &= \int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)}\,dz \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(re^{it} - a)(re^{it} - b)} \cdot ire^{it}\,dt = \frac{1}{a-b}\int_0^{2\pi}\left(\frac{ire^{it}}{re^{it} - a} - \frac{ire^{it}}{re^{it} - b}\right)dt\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(\left[\mathrm{Log}(re^{it}-a)\right]_0^{2\pi} - \left[\mathrm{Log}(re^{it}-b)\right]_0^{2\pi}\right) = \frac{1}{a-b}(2\pi i - 0) = \frac{2\pi i}{a-b}.$$

最後から二番目の等号について (図 3.2.1 参照): $|a| < r$ より $re^{it} - a$ の偏角は $t : 0 \to 2\pi$ で 2π 増えるので $\left[\mathrm{Log}(re^{it}-a)\right]_0^{2\pi} = 2\pi$. $r < |b|$ より $re^{it} - b$ の偏角は $t : 0 \to 2\pi$ で不変だから $\left[\mathrm{Log}(re^{it}-b)\right]_0^{2\pi} = 0$.

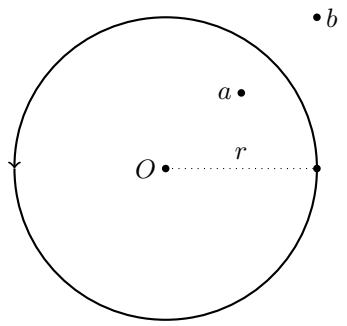


図 3.2.1　$|a| < r < |b|$ の場合の偏角の変化の様子

問題 3.2.2. まず $\displaystyle\lim_{r\to+0}\int_{C_r}\frac{e^{iz}-1}{z}dz = 0$ を示す.

$$\left|e^{iz}-1\right| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}(iz)^n \leq \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}|z|^n = e^{|z|}-1$$

より, C_r 上 $\dfrac{e^{iz}-1}{z} \leq \dfrac{e^r-1}{r}$ となって, 命題 3.2.1 ((3)) より

$$\left|\int_{C_r}\frac{e^{iz}-1}{z}dz\right| \leq \frac{e^r-1}{r}\cdot 2\pi r = 2\pi(e^r-1).$$

従って $\displaystyle\lim_{r\to+0}\int_{C_r}\frac{e^{iz}-1}{z}dz = 0$ となり,

$$\lim_{r\to+0}\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz = \lim_{r\to+0}\int_{C_r}\frac{1}{z}dz = 2\pi i.$$

問題 3.2.3. 前問を参考にして, $M(r) := \max\{|f(z)-a| \mid |z| = r\}$ とすると, 仮定より $\lim_{r\to+0} M(r) = 0$. よって

$$\left|\int_{C_r}\frac{f(z)}{z}dz - 2\pi i a\right| = \left|\int_{C_r}\frac{f(z)-a}{z}dz\right| \leq 2\pi M(r) \longrightarrow 0 \quad (r \to +0).$$

問題 3.2.4. 求める積分を I と書く.

(1) 直線 $[0, i]$ 上では $1/(z+1)$ が (分岐を指定した) log を原始関数を持つことに注意して

$$\begin{aligned}\int_0^i \frac{z}{z+1}dz &= \int_0^i \left(1-(z+1)^{-1}\right)dz = \left[z - \log(z+1)\right]_0^i \\ &= i - (\log(i+1) - \log 1) = i - \left(\log(\sqrt{2}e^{i\pi/4}) - \log 1\right) \\ &= i - \left(\log\sqrt{2} + i(\pi/4 + 2n\pi) - 2n\pi i\right) = -(\log 2)/2 + i(1-\pi/4).\end{aligned}$$

三行目で log の分岐を取るときに同じ n を用いることに注意する.

(2) $z = e^{i\theta}$ と C をパラメータ付けすると

$$I = \int_C |z|\, dz = \int_0^{\pi} 1 \cdot ie^{i\theta}\, d\theta = \left[e^{i\theta}\right]_0^{\pi} = e^{i\pi} - 1 = -2.$$

(3) $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} it \cdot ie^{it}\, dt = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} te^{it}\, dt = \left[(it-1)e^{it}\right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = -2i.$

(4) 不定積分が $\operatorname{Log} z$ であることから $I = [\operatorname{Log} z]_0^{2\pi} = \pi i/2.$
(または C を $z(t) = 1 + i - t$ とパラメータ付けして $I = \int_0^{2\pi} -dt/(1+i-t) = [-\operatorname{Log}(1+i-t)]_0^{2\pi} = \pi i/2$ と求めても同じ.)

3.3 連結性と弧状連結性 (問題: 27 ページ)

問題 3.3.1. (1) $z(t^*) \in \Omega_1$ と仮定する. z は連続写像で Ω_1 は開集合なので, 十分小さい正の実数 ε があって $z(t^* + \varepsilon) \in \Omega_1$. 一方 sup の定義から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $z(t^* + \varepsilon) \notin \Omega_1$. よって矛盾する.
次に $z(t^*) \in \Omega_2$ と仮定する. z は連続写像で $\Omega_{"}$ は開集合なので, 十分小さい正の実数 ε があって $z(t^* - \varepsilon) \in \Omega_2$. 一方 sup の定義から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $z(t^* - \varepsilon) \in \Omega_1$. よって矛盾する.

(2) 任意の $z \in \Omega_1$ に対して, Ω が開集合であることから $D_r(z) \subset \Omega$ となる $r \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在する. $D_r(z)$ の任意の点は z と直線で結べるから, $D_r(z) \subset \Omega_1$. よって Ω_1 は開集合. また $w \in \Omega_1$ より $\Omega_1 \neq \emptyset$.
次に任意の $z \in \Omega_2$ に対して, Ω が開集合であることから $D_r(z) \subset \Omega$ となる $r \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在する. $D_r(z)$ の任意の点は z と直線で結べるから, $D_r(z) \subset \Omega_2$. よって Ω_2 は開集合.

問題 3.3.2. (1) 問題 3.3.1 (2) と同様に C_z は開集合だと分かり, 同問題 (1) と同じ議論で連結性が出る.

(2) $z \in C_z$ について. Ω は開集合なので $D_r(z) \subset \Omega$ となる正の実数 r が存在する. パラメータ付き曲線 $p(t) := z - r/3 + re^{it}/3$ $(t \in [0, 2\pi])$ の定める曲線を c とすれば, c の始点と終点は z なので, $z \in C_z$. $w \in C_z$ なら, 始点 z, 終点 w の曲線 c があるが, その逆向きの曲線 c^- により $z \in C_w$ が分かる. $w \in C_z$ かつ $z \in C_u$ ならば, 始点 z, 終点 w の曲線 c_1 と始点 u, 終点 z の曲線 c_2 があるが, それらを結んで u を始点とし w を終点とする曲線が作れるので $w \in C_u$.

問題 3.3.3. 任意の $t \in [0, 1]$ に対して $p(t) \in D$ であること, つまり $|p(t) - z| < r$ であることを示せば良い. $p(t) - z = (1-t)(x-z) + t(y-z)$ であり, 仮定 $x, y \in D$ より $|x - z|, |y - z| < r$ だから, 三角不等式から $|p(t) - z| \leq |(1-t)(x-z)| + |t(y-z)| = (1-t)|x-z| + t|y-z| < (1-t)r + tr = r.$

問題 3.3.4. $F_1'(z) = F_2'(z) = f(z)$ より $(F_1 - F_2)' = 0$. したがって系 3.3.4 から $F_1 - F_2$ は定数関数.

4 Cauchy の積分定理 1

4.2 Cauchy の積分定理 (問題: 31 ページ)

問題 4.2.1. 被積分関数を $f(x) := e^{-\pi x^2}$ と略記する.

(1) $V_r(R)$ については

$$\begin{aligned}|V_r(R)| &= \left|\int_0^\xi f(R+iy)i\,dy\right| = \left|\int_0^\xi e^{-\pi(R^2+2iRy-y^2)}\,dy\right| \\ &= \int_0^\xi e^{-\pi(R^2-y^2)}\,dy \le \int_0^\xi e^{-\pi(R^2-\xi^2)}\,dy = \xi e^{-\pi(R^2-\xi^2)}.\end{aligned}$$

$V_l(R)$ については, $V_r(R)$ の議論で $R \mapsto -R$ とすれば同じ評価ができる.

(2) 次の計算から従う.

$$\int_R^{-R} f(x+i\xi)\,dx = -e^{\pi\xi^2}\int_{-R}^R e^{-\pi x^2}e^{-2\pi i x\xi}\,dx.$$

(3) $I := (\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi x^2}\,dx)^2 = \int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi(x^2+y^2)}\,dxdy$ で $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と変数変換して $I = \int_0^\infty\int_0^{2\pi} re^{-\pi r^2}drd\theta = 1$. よって $\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi x^2}\,dx = \sqrt{I} = 1$.

(4) 積分路の図が実軸より下になるだけで, $\xi > 0$ の場合と全く同じ議論で結論が得られる.

問題 4.2.2. 被積分関数を $f(z) := (1-e^{iz})/z^2$ と書く.

(1) $z \in C_R^+$ の偏角を θ とすると, $e^{iz} = e^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)} = e^{-\sin\theta}e^{iR\cos\theta}$ より $\left|e^{iz}\right| \le e^{-\sin\theta} \le 1$. よって $\left|(1-e^{iz})/z^2\right| \le 2/|z|^2$ であり,

$$\left|\int_{C_R^+} f(z)\,dz\right| \le \int_{C_R^+}\frac{2}{|z|^2}\,dz = \frac{2}{R^2}\cdot\pi R = \frac{2\pi}{R}$$

と評価できるので, $R \to \infty$ で 0 に収束する.

(2) $z = 0$ で $1-e^{iz}$ は正則で微分の値は $-i$ だから, $z \to 0$ で有界な関数 $E(z)$ を用いて $1-e^{iz} = -iz + zE(z)$, つまり $f(z) = -i/z + E(z)$ と書ける. C_r^- を $z = re^{i(\pi-\theta)}$, $0 \le \theta \le \pi$ とパラメータ付けすると

$$\int_{C_r^-}\frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz = \int_0^\pi\left(\frac{-i}{re^{i(\pi-\theta)}} + E(re^{i(\pi-\theta)})\right)(-ir)e^{i(\pi-\theta)}\,d\theta = -\int_0^\pi d\theta + ir\int_\pi^0 E(re^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta.$$

$|E(z)| < B$ とすれば $\left|\int_\pi^0 E(re^{i\theta})e^{i\theta}d\theta\right| \le B\int_0^\pi d\theta = \pi B$ なので, $r \to 0$ で

$$\int_{C_r^-}\frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz \longrightarrow -\int_0^\pi d\theta = -\pi.$$

(3) 以上より $(*)$ の極限は

$$\int_{-\infty}^0\frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx + \int_0^\infty\frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx = \pi.$$

あとは $\cos x = (e^{ix}+e^{-ix})/2$ より結論を得る.

4.3 Cauchy の積分公式 (問題: 34 ページ)

問題 4.3.1. 開円板 $D_a(R)$ の境界に正の向き付けを入れた曲線を C とする．示すべき等式は, Cauchy の積分公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

を C のパラメータ表示 $z(t) = a + re^{it}$ で書き換えたものである．

問題 4.3.2. (1) E と C で囲まれた領域を D とすると, D の境界に正の向き付けを入れた曲線 ∂D^+ は $E \cup (-C)$ もしくは $(-E) \cup C$ となる． D では $1/z$ は正則だから, Cauchy の積分定理より $\int_{\partial D^+} dz/z = 0$. あとは $\int_{\partial D^+} = \int_E - \int_C$ または $\int_{\partial D^+} = \int_C - \int_E$ より結論が従う．

(2) (1) の $\int_E dz/z$ をパラメータ付け $z(t) = a\cos t + ib\sin t$ を用いて計算すると

$$\int_E \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{-a\sin t + ib\cos t}{a\cos t + ib\sin t}dt = \int_0^{2\pi} \frac{(b^2-a^2)\cos t\sin t + iab}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}dt.$$

一方で $\int_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i$. そこで $\int_E dz/z = \int_C dz/z$ の虚部を比較すれば $\int_0^{2\pi} ab/(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t)\,dt = 2\pi i$. よって求める積分は

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = \frac{\pi}{ab}.$$

問題 4.3.3. Cauchy の積分定理を用いる．

(1) $e^z/z = (e^z-1)/z + 1/z$ と分解する．$f(z) := (e^z-1)/z$ は $f(0) = 1$ と定義すれば $\mathbb{C}$ 上正則なので, Cauchy の積分定理より $\int_C f(z)dz = 0$. よって

$$\int_C \frac{e^z}{z}dz = \int_C \frac{1}{z}dz = 2\pi i.$$

(2) C を $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ とパラメータ表示すれば,

$$e^z = \exp(e^{i\theta}) = \exp(\cos\theta + i\sin\theta) = \exp(\cos\theta)\exp(i\sin\theta) = e^{\cos\theta}\big(\cos(\sin\theta) + i\sin(\sin\theta)\big)$$

より (1) の積分は

$$\int_C \frac{e^z}{z}dz = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\big(\cos(\sin\theta) + i\sin(\sin\theta)\big)\cdot i\,d\theta$$

と書き直せる．従って (1) の結果から

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,d\theta = \mathrm{Im}\int_C \frac{e^z}{z}dz = 2\pi.$$

5 Cauchy の積分定理 2

5.1 ホモトピーと単連結領域 (問題: 37 ページ)

問題 5.1.1. §1.1 の記号を用いて $D = D(c,r)$, $D' = D(c',r')$ と中心および半径を置く. $D \cap D' \neq \emptyset$ と仮定して, まずそれが開集合であることを示す. $z \in D \cap D'$ を任意にとると $|z-c| < r$ かつ $|z-c'| < r'$. そこで $s := \min\{r - |z-c|, r' - |z-c'|\}$ と置くと $s > 0$ であり, また $w \in \mathbb{C}$ が $|w-z| < s$ を満たすなら $|w-c| \leq |w-z| + |z-c| < s + |z-c| \leq r - |z-c| + |z-c| = r$ となるので $D(z,s) \subset D(c,r) = D$ が従い, 同様に $D(z,s) \subset D(c',r') = D'$ が示せる. 従って $D(z,s) \subset D \cap D'$ となり, $D \cap D'$ は開集合である.

次に $D \cap D'$ が弧状連結であることを示す. $D \subset D'$ または $D' \subset D$ なら開円板の場合だから, そうでないと仮定して良い. すると境界 ∂D と $\partial D'$ は二つの交点を持つが, それらの中点を w とすると $w \in D \cap D'$ である. 任意の相違なる 2 点 $z, z' \in D \cap D'$ をとると, 線分 $\overrightarrow{zw}$ および $\overrightarrow{wz'}$ はともに $D \cap D'$ に含まれるから, それらを w で連結して得られる zwz' は始点 z, 終点 z' の $D \cap D'$ 上の曲線である. よって $D \cap D'$ は弧状連結.

問題 5.1.2. 弧状連結なので連結である. 開集合であることは仮定に含まれているので, これで領域であることが示せた. 次に単連結であることを示す. S の二点 p, q を結ぶ曲線 γ とそれらを結ぶ線分 I がホモトピー同値であることを示せば十分. 前者のパラメータ表示を $f(t) : [0,1] \to S$ とし, 後者のパラメータ表示を $g(t) : [0,1] \to S$ とすると, $H(s,t) := (1-s)f(t) + sg(t)$ は凸であるという仮定から S への写像で, 連続であり, ホモトピーを定める.

問題 5.1.3. 弧状連結なので連結. 開集合であることは, 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 0]\}$ に対して $D_{|\mathrm{Im}(z)|/2}(z) \subset \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 0]$ となることから従う. 単連結であることを示すには任意の閉曲線 C が一点とホモトープであることを言えばよい. C は $\{z \in \mathbb{C} \mid z > 1\}$ の領域内の部分とホモトープだから, あとは $\{z \in \mathbb{C} \mid z > 1\}$ が単連結であることを言えばよいが, それは凸開集合なので前の問題 5.1.2 より従う.

問題 5.1.4. 弧状連結なので連結である. 開集合であることは, 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して $D_{|z|/2}(z) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ となることから従う. 単連結領域ではないことを示すのに関数 $f(z) = 1/z$ を考える. f は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上で正則だが, 単位円に正の向きを入れたものを C として $\int_C f(z)dz = 2\pi i \neq 0$. もし $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ が単連結ならば定理 5.1.5 より f は原始関数を持つので $\int_C f(z)dz = 0$ となり矛盾する.

5.2 単連結領域と Cauchy の積分定理 (問題: 39 ページ)

問題 5.2.1. $(z^2+1)^{-1} = ((z-i)^{-1} - (z+i)^{-1})/(2i)$ と部分分数分解する. $C_\pm$ を $\pm i$ を中心とし半径を $1/2$ とする円に正の向き付けを入れたものとすれば

$$\begin{aligned}\int_C \frac{dz}{z^2+1} &= \int_C \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)dz = \frac{1}{2i}\int_C \frac{dz}{z-i} - \frac{1}{2i}\int_C \frac{dz}{z+i} \\ &= \frac{1}{2i}\int_{C_+} \frac{dz}{z-i} - \frac{1}{2i}\int_{C_-} \frac{dz}{z+i} = \frac{2\pi i(1-1)}{2i} = 0.\end{aligned}$$

問題 5.2.2. 積分を I で表すことにする.

(1) $z = 0$ を中心とした半径 $r < 1/2$ の円での積分と同じになるので, $I = 2\pi i \times 1 = 2\pi i$.

(2) 被積分関数は積分路の上とその内部で正則なので $I = 0$.

(3) $(z^2-4/9)^{-1}=(z-2/3)^{-1}(z+2/3)^{-1}$ で積分路の内部では $z=2/3$ を除いて正則．その周りでは，$w:=z-2/3$ として

$$\frac{1}{z^2-4/9}=\frac{1}{w}\frac{1}{w+4/3}=\frac{3}{4}\frac{1}{w}\left(1+O(w)\right)$$

と展開できるので，$I=2\pi i\times 3/4=3\pi i/2$.

問題 5.2.3. 積分を I と表す．積分路のパラメータ表示を $z=e^{i\theta}$, $0\le\theta\le 2\pi$ と取ると，$d\theta=dz/iz$, $\cos\theta=(z+z^{-1})/2$ なので

$$I=\int_{|z|=1}\frac{1}{1-c(z+z^{-1})+c^2}\frac{dz}{iz}=\int_{|z|=1}\frac{i\,dz}{c(z-c)(z-c^{-1})}.$$

単位円上とその内部において，被積分関数は $z=c$ を除いて正則で，$z=c$ の周りでは $w:=z-c$ として

$$\frac{1}{c(z-c)(z-c^{-1})}=\frac{1}{cw(w+c-c^{-1})}=\frac{1}{c(c-c^{-1})w}\left(1+(w\text{ の正則函数})\right)$$

と展開できるので，$I=2\pi i\times i/(c^2-1)=2\pi/(1-c^2)$.

問題 5.2.4. (1) Green の公式から直ちに従う．

(2) $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ と実部と虚部に分けると，$(u(x,y),v(x,y))$ の Jacobi 行列式は，Cauchy-Riemann 方程式と $f'(z)=u_x(x,y)+iv_x(x,y)$ から

$$\begin{vmatrix}u_x(x,y) & v_x(x,y)\\ u_y(x,y) & v_y(x,y)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_x(x,y) & v_x(x,y)\\ -v_y(x,y) & u_x(x,y)\end{vmatrix}=u_x(x,y)^2+v_x(x,y)^2=|f'(x+iy)|^2.$$

よって $f(D)$ の面積は

$$\iint_{f(D)}dudv=\iint_D|f'(x+iy)|^2\,dxdy.$$

問題 5.2.5. (1) $|w|>R$ より，被積分関数は C 上とその内部で正則である．従って積分は 0.

(2) $\zeta=Re^{i\varphi}$ と変数変換する．

$$\mathrm{Re}\left(\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)=\mathrm{Re}\left(-1+\frac{2\zeta}{\zeta-z}\right)=-1+\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}-\overline{z}}$$

に注意して，示すべき等式の右辺は

$$\begin{aligned}\int_C f(\zeta)\left(-1+\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}-\overline{z}}\right)\frac{d\zeta}{i\zeta}&=\frac{1}{i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{i}\int_C f(\zeta)\left(-1+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}-\overline{z}}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}\\&=2\pi f(z)+\frac{1}{i}\int_C f(\zeta)\left(-1+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}-\overline{z}}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}.\end{aligned}\tag{5.2.1}$$

ここで C 上で $\overline{\zeta}=R^2/\zeta$ となることに注意して

$$\frac{1}{i}\int_C f(\zeta)\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}-\overline{z}}\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{1}{i}\int_C\frac{f(\zeta)}{1-\overline{z}/\overline{\zeta}}\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{1}{i}\int_C\frac{f(\zeta)}{1-\overline{z}\zeta/R^2}\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{1}{i}\int_C\frac{f(\zeta)}{1-\zeta/w}\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

従って (5.2.1) の最右辺は

$$2\pi f(z)+\frac{1}{i}\int_C f(\zeta)\left(-1+\frac{1}{1-\zeta/w}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}=2\pi f(z)+\frac{1}{i}\int_C f(\zeta)\frac{1}{\zeta-w}d\zeta.$$

第二項は (1) より 0 なので，結論を得る．

問題 5.2.6. $u_x := \partial_x u$ 等と略記する.

(1) 二変数関数 $v(x,y)$ を

$$v(x,y) := -\int_0^x u_y(p,0)dp + \int_0^y u_x(x,q)dq$$

で定める. すると $v_y(x,y) = u_x(x,y)$ であり, また $v_x(x,y) = -u_y(x,0) + \int_0^y u_{xx}(x,q)dq$ と仮定 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ から $v_y(x,y) = -u_y(x,0) - [u_y(x,q)]_{q=0}^y = -u_x(x,y)$ が従う. よって $f := u + iv$ は Cauchy-Riemann 方程式を満たすので正則関数である.

f の虚部が別の関数 $\widetilde{v}$ だとすると, Cauchy-Riemann 方程式から $w := v - \widetilde{v}$ は $\partial_x w = 0$ かつ $\partial_y w = 0$ を満たす. 従って w は定数関数で, v は一意に定まる.

(2) f を (1) の正則関数とする. (1) の議論から, $R_0 > 1$ なる実数 R_0 が存在して, f は $D(0,R_0)$ 上正則だとして構わない. 問題 4.2.5 (2) から $z = re^{i\theta} \in D(0,1)$ と $r < R < R_0$ に対して

$$f(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\,\mathrm{Re}\Big(\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\Big)\,d\varphi.$$

この式の実部を取ると,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\Big(\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\Big) &= \mathrm{Re}\,\frac{(Re^{i\varphi}+z)(Re^{-i\varphi}-\overline{z})}{(Re^{i\varphi}-z)(Re^{-i\varphi}-\overline{z})} = \mathrm{Re}\,\frac{R^2+Rre^{i(\theta-\varphi)}-Rre^{i(\varphi-\theta)}-r^2}{R^2-Rre^{i(\theta-\varphi)}-Rre^{i(\varphi-\theta)}+r^2}\\ &= \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\end{aligned}$$

より

$$u(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi})\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\varphi.$$

$R = 1$ として結論を得る.

5.3 複素対数 (問題: 41 ページ)

問題 5.3.1. 原始関数が存在すれば複素線積分は積分路の両端のみで定まる (定理 3.2.4) ことを思い出す. C_1 を原点中心で半径 1/2 の上半円に正の向きを入れた $e^{i\theta}/2$ $(0 \le \theta \le \pi)$ とすると $\displaystyle\int_{C_1}\frac{dz}{z} = \int_0^{\pi} i\theta\,d\theta = i\pi$. 一方で C_2 を下半円に負の向きを入れた $e^{-i\theta}/2$ $(0 \le \theta \le \pi)$ とすると $\displaystyle\int_{C_2}\frac{dz}{z} = \int_0^{-\pi} i\theta\,d\theta = -i\pi$. よって両端が同じ二つの積分路 C_1, C_2 における積分の値が異なるので, 原始関数は存在しない.

問題 5.3.2. 結論は存在しない. 部分分数分解して $\displaystyle\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$ とし, 中心 i で半径 1/2 の上半円と下半円について前問と同様の議論をすれば示せる.

6 正則関数の性質

6.1 Taylor 展開 (問題: 43 ページ)

問題 6.1.1. (1) 部分分数分解して

$$\begin{aligned}\frac{z+2}{(z-2)z} &= \frac{2}{z-2}-\frac{1}{z} = \frac{2}{(z-1)-1}-\frac{1}{(z-1)+1} = -2\sum_{n\geq 0}(z-1)^n-\sum_{n\geq 0}(-1)^n(z-1)^n \\ &= \sum_{n\geq 0}((-1)^{n+1}-2)(z-1)^n \quad (|z-1|<1).\end{aligned}$$

(2) $z^{-1}=((z-1)+1)^{-1}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n(z-1)^n$ を微分して

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n\geq 1} n(-1)^{n+1}(z-1)^{n-1} \quad (|z-1|<1).$$

(3) Taylor 展開 $\cos z=\sum_{n\geq 0} z^{2n}(-1)^n/(2n)!$, $\sin z=\sum_{n\geq 0} z^{2n+1}(-1)^n/(2n+1)!$ から

$$\begin{aligned}\cos z &= \cos((z-\pi/4)+\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\cos(z-\pi/4)-\sin(z-\pi/4)\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-\pi/4)^{2n}-\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-\pi/4)^{2n+1}\Big).\end{aligned}$$

(4) $\tan^{-1} z=w \iff iz=(e^{iw}-e^{-iw})/(e^{iw}+e^{-iw}) \iff w=(2i)^{-1}\log(1+iz)/(1-iz)$ より

$$\tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\big(\log(1+iz)-\log(1-iz)\big) = \frac{1}{2i}\sum_{n\geq 0}\frac{(iz)^n}{n}-\frac{1}{2i}\sum_{n\geq 0}\frac{(-iz)^n}{n} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}z^{2n+1}.$$

(5) $f(z):=\operatorname{Log} z$ とすると, $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して $f^{(n)}(z)=(-1)^{n-1}(n-1)!/z^n$. よって $f^{(n)}(1)/n!=(-1)^{n-1}/n$ となるので, $f(1)=0$ と合わせて

$$\operatorname{Log} z = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n \quad (|z-1|<1).$$

問題 6.1.2. (1) $e^{-\zeta^2}=\sum_{n\geq 0}(-\zeta^2)^n/n!$ は有界な ζ に関して絶対収束するから項別積分できて

$$\int_0^z e^{-\zeta^2}\,d\zeta = \sum_{n\geq 0}\int_0^z\frac{(-\zeta^2)^n}{n!}d\zeta = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}z^{2n+1}.$$

(2) $\zeta^{-1}\sin\zeta=\sum_{n\geq 0}(-\zeta^2)^n/(2n+1)!$ は有界な ζ に関して絶対収束するから項別積分できて

$$\int_0^z\frac{\sin\zeta}{\zeta}d\zeta = \sum_{n\geq 0}\int_0^z\frac{(-\zeta^2)^n}{(2n+1)!}d\zeta = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}z^{2n+1}.$$

(3) $|z|<1$ で $\sum_{n=0}^{\infty} z^n=(1-z)^{-1}$ なので

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-i/2-(z-i/2)} = \sum_{n\geq 0}\frac{(z-i/2)^n}{(1-i/2)^{n+1}}.$$

問題 6.1.3. $\cos z \cdot \sec z = 1$ より

$$(1 - z^2/2! + z^4/4! - z^6/6! + \cdots)(E_0 + E_1/2! + E_2/4! + E_3/6! + \cdots) = 1.$$

両辺の z^{2n} の係数を比較して

$$E_0 = 1, \quad E_1 - E_0 = 0, \quad E_2 - \frac{4!}{2!2!}E_1 + E_0 = 0, \quad E_3 - \frac{6!}{2!4!}E_2 + \frac{6!}{4!2!}E_1 - E_0 = 0.$$

E_0 から順に決めていくと $E_0 = 1$, $E_1 = 1$, $E_2 = 5$, $E_3 = 61$.

次に $z \cot z = iz(e^{iz} + e^{-iz})/(e^{iz} - e^{-iz}) = iz + 2iz/(e^{2iz} - 1)$ に注意して, $w := 2iz$ として $\frac{2iz}{e^{2iz}-1} = \frac{w}{e^w - 1} = (\sum_{n\geq 1} w^{n-1}/n!)^{-1}$. これを $\sum_{n\geq 0} b_n w^n$ とおくと, $(\sum_{n\geq 0} b_n w^n) \cdot (e^w - 1)/w = 1$ から

$$\big(b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + b_4 w^4 + \cdots\big)\big(1 + w/2! + w^2/3! + w^3/4! + w^4/5! + \cdots\big) = 1.$$

両辺の w^n の係数を比較して

$$b_0 = 1, \quad b_0/2! + b_1 = 0, \quad b_0/3! + b_1/2! + b_2 = 0, \quad b_0/4! + b_1/3! + b_2/2! + b_3 = 0,$$
$$b_0/5! + b_1/4! + b_2/3! + b_3/2! + b_4 = 0.$$

これらから $b_1 = -1/2$, $b_2 = 1/12$, $b_3 = 0$, $b_4 = -1/720$ となって $B_1 = 2! \cdot b_2 = 1/6$, $B_2 = -4! \cdot b_4 = 1/30$.

問題 6.1.4. $P_n(z)$ は $(z^2 - 1)^n/2^n n!$ の n 次導関数なので, 導関数の積分表示 (定理 4.3.2) より

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^n}\int_{|w-z|=r} \frac{(w^2-1)^n}{(w-z)^{n+1}}dw.$$

但し積分路は円周 (半径 r は正なら何でもよい) に正の向き付けを入れたもの. これから

$$\begin{aligned}
P_n(1) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^n}\int_{|w-1|=r} \frac{(w+1)^n}{w-1}dw = 1,\\
P_n(-1) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^n}\int_{|w+1|=r} \frac{(w-1)^n}{w+1}dw = (-1)^n,\\
P_n(0) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^n}\int_{|w|=r} \frac{(w^2-1)^n}{w^{n+1}}dw \overset{(*)}{=} \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{2\pi i}\binom{n}{k}\int_{|w|=r}\frac{w^{2k}}{w^{n+1}}dw,\\
&\overset{(**)}{=} \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\delta_{2k-n,0} = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}) \\ \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\binom{2k}{k} & (n = 2k) \end{cases}.
\end{aligned}$$

但し $(*)$ では二項定理を, $(**)$ では $\int_{|w|=r} w^m dw = 2\pi i \delta_{m+1,0}$ を用いた (問題 3.2.1 ((1))). $\delta_{l,m}$ は Kronecker のデルタ (§0.2 を参照).

6.2 Liouville の定理 (問題: 44 ページ)

問題 6.2.1. 多項式 $P(z)$ の次数に関する帰納法で示す. 次数が 1 の場合は $P(z) = a_1 z + a_0 = a_1(z - (-a_0/a_1))$ となるので成立する. 次数が n まで成立したと仮定し, $P(z)$ は次数 $n+1$ の多項式だとする. 前半の議論から, $P(z)$ の根 w_{n+1} が存在する. 多項式の剰余の定理から $P(z) = (z - w_{n+1})Q(z)$, $Q(z)$ は n 次の多項式, と因数分解できる. $Q(z)$ に帰納法の仮定を用いて $n+1$ のときの主張が示せた.

問題 6.2.2.　(1) Cauchy の積分公式 $f(a) = (2\pi i)^{-1}\int_{|z|=R} f(z)(z-a)^{-1}dz$ から

$$|f(a)-f(b)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|z|=R}\left(\frac{f(z)}{z-a}-\frac{f(z)}{z-b}\right)dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R}\left|\frac{f(z)}{z-a}-\frac{f(z)}{z-b}\right||dz|.$$

(2) f が有界であることから, ある実数 B が存在して, 任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して $|f(z)|\le B$. また積分路 $|z|=R$ 上で $|z-a|^{-1}\le(R-|a|)^{-1}$. 従って

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R}\left|\frac{f(z)}{z-a}-\frac{f(z)}{z-b}\right||dz| = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R}\left|\frac{(a-b)f(z)}{(z-a)(z-b)}\right||dz| \le \frac{BR|a-b|}{(R-|a|)(R-|b|)}.$$

右辺は $R\to\infty$ で 0 に収束するので, (1) と合わせて $|f(a)-f(b)|=0$ となる.

問題 6.2.3. $n>\lfloor\alpha\rfloor$ なる整数 n について, 導関数の積分表示 $f^{(n)}(0)=(2\pi i)^{-1}n!\int_{|z|=r}f(z)z^{-n-1}dz$ から

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \le \frac{n!}{2\pi}\left|\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right| \le \frac{n!}{2\pi}\cdot 2\pi r\cdot\sup\left\{\left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right|;|z|=r\right\} = \frac{n!M(r)}{r^n} \le n!Br^{\alpha-n}.$$

右辺は $r\to\infty$ で 0 に収束するから, $n>\lfloor\alpha\rfloor$ ならば $f^{(n)}(0)=0$. よって Taylor 展開から $f(z)$ は高々 $\lfloor\alpha\rfloor$ 次だと分かる.

6.3 解析接続 (問題: 45 ページ)

問題 6.3.1. ある共通の領域内で $f=g$ となることを示せばよい.

(1) f は $|z|<1$ で $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}=g(z)$ と展開できるので, 両者は解析接続の関係にある.

(2) g は $|z+1|<1$ で正則. f の $z=-1$ を中心とした展開は, $-1/z=1/(1-(1+z))=\sum_{n\ge0}(z+1)^n$ を微分して $z^{-2}=\sum_{n\ge1}n(z+1)^{n-1}=g(z)$ となるので, $|z+1|<1$ で両者は一致する.

(3) f は $|z|<1$ で収束し, g は $|z-1|<2$ で収束する. 前者の領域は後者に含まれる. この領域 $|z|<1$ において $f(z)=\log(1+z)=g(z)$ なので両者は一致する.

問題 6.3.2.　(1) $|z|<1$ では $\left|z^{(n+1)!}/z^{n!}\right|=|z|^{n+1}\to0$ $(n\to\infty)$ なので, 級数は収束し, f は正則であることに注意する. 任意の有理数 p/q について $z_0:=\exp(2\pi ip/q)$ が特異点であることが示せれば, 有理数の稠密性から $|z|=1$ 上の任意の点の近傍に特異点が含まれることになり, 外部に解析接続できないことが分かる.

$q\in\mathbb{Z}_{>1}$ として構わない. $z=re^{2\pi ip/q}$ として $r\to1-0$ で $z\to z_0$ の極限を考える. 任意の $n\in\mathbb{Z}_{\ge q}$ に対して $z^{n!}=r^{n!}$ なので $f(z)=\sum_{n=1}^{q-1}z^{n!}+\sum_{n\ge q}r^{n!}$ となり, $r\to1$ で $\sum_{n\ge q}r^{n!}\to\infty$ から $f(z)\to\infty$ となって, z_0 が特異点であることが分かる.

(2) (1) と同様の議論で, $|z|<1$ では級数が正則なことが分かる. p を任意の整数, q を任意の正の整数として, $z_0:=\exp(i\pi p/2^q)$ が特異点であることを示そう. $p/2^q$ という形の有理数はやはり稠密なので, (1) と同じ議論で $|z|>1$ に解析接続できないことが分かる.

$z=r\exp(i\pi p/2^q)$ として $r\to1-0$ の極限で $z\to z_0$ となる. 一方 $z^{2^n}=r^{2^n}\exp(2^{q-n}p\pi i)$ より $g(z)=\sum_{n=1}^{q}z^{2^n}+\sum_{n\ge q+1}r^{2^n}$ となり, $r\to1$ で $\sum_{n\ge q+1}r^{2^n}\to\infty$ から $f(z)\to\infty$ が従う.

6.5 正則関数列 (問題: 48 ページ)

問題 6.5.1. Weierstrass の定理 6.5.3 より F は $D_c(r)$ 上の正則関数である．よって (1) が成立する．また同定理より F は何度でも項別微分可能で, 項別微分した級数は収束する．すると正則関数の Taylor 展開から $A_k = F^{(k)}(c)/k! = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}/k! = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k}$ となって (2) と (3) が成立する．

問題 6.5.2. $D := D_0(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ とし, $z \in D$ に対し $f_n(z) := z^n/(1-z^n)$ とする．$F := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が D の任意のコンパクト部分集合上で一様収束することを示そう．そのためには, 任意の $0 < r < 1$ なる実数 r に対し $D_0(r) \subset D$ で一様収束することを示せば十分．$r^N < 1/2$ なる正整数 N を取る．任意の $z \in D_0(r)$ に対し, $n \geq N$ なら $|f_n(z)| \leq r^n/(1-r^N) < 2r^n$ なので $\left|\sum_{n \geq N} f_n(z)\right| < 2r^N/(1-r)$. よって F は $D_0(r)$ で絶対一様収束することが分かる．

ここで整数 $a_{n,k}$ を, n が k を割り切れば 1, そうでなければ 0 と定める．すると $f_n(z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^{nm} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z^k$. よって Weierstrass の二重級数定理より $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$, $A_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} = \tau(k)$.

7 有理型関数

7.1 孤立特異点 (問題: 51 ページ)

問題 7.1.1. z が $z \in \mathbb{R}_{>0}$ のまま 0 に近づくときは $e^{1/z} \to \infty$. 一方 z が $z \in \mathbb{R}_{<0}$ のまま 0 に近づくときは $e^{1/z} \to 0$. 従って除去可能な特異点でも極でもない.

問題 7.1.2. (1) $z = 0$ は 2 位の極

(2) $z = -1$ は除去可能特異点. $z = e^{\pi i/3}, e^{2\pi i/3}$ は 1 位の極.

(3) $z = 0$ は真性特異点.

(4) $z = -1$ は 2 位の極. $z = 1, 2$ は真性特異点.

7.2 Laurent 展開 (問題: 53 ページ)

問題 7.2.1. $f(z)$ が $z = \pm 1$ を極に持つことは明らか ($z = 1$ については, $f(z) = (z-1)^{-1}g(z)$, $g(z) := z^4(z+1)^{-2}$ と書けて, g は $z = 1$ の近傍で正則かつ $g(1) \neq 0$ であるから). $z = 1$ は 1 位の極なので,

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z^4}{(z+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

$z = -1$ は 2 位の極なので,

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\big((z+1)^2 f(z)\big) = \lim_{z\to -1}\frac{z^2(3z-4)}{(z-1)^2} = \frac{7}{4}.$$

問題 7.2.2. (1) 極は $z = \pm i$ で留数は $\pm i/2$ (複合同順).

(2) 極は $z = 1$ で留数は $\binom{2n}{n-1}$.

(3) 極は $z = n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) で留数は全て 0. 留数の計算は周期性から $z = 0$ で行えば十分だが,

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \cot^2 z = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{z^2\cos^2 z}{\sin^2 z} = \lim_{z\to 0}\frac{z\cos z}{\sin^3 z}(\sin 2z - 2z) = \lim_{z\to 0}\frac{z\cos z}{\sin^3 z}\left(\frac{(2z)^3}{3} + O(z^5)\right) = 0.$$

問題 7.2.3. (1) $2z/(z^2+1) = (z-i)^{-1} + (z+i)^{-1}$ と部分分数分解できる.

(1) $z = i$ 中心の Laurent 展開について. $z = i$ 中心で半径 $|i - (-i)| = 2$ の円の内外で場合分けする. $|z - i| < 2$ の場合は

$$\frac{2z}{z^2+1} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2i + (z-i)} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2i}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n = \frac{1}{z-i} + \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(z-i)^n.$$

$|z - i| > 2$ の場合は

$$\frac{2z}{z^2+1} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2i + (z-i)} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z-i}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{-2i}{z-i}\right)^n = \frac{1}{z-i} + \sum_{n\geq 0}\frac{(-2i)^n}{(z-i)^{n+1}}.$$

(2) $z = a \in \mathbb{R}$ 中心の Laurent 展開について. $z = a$ 中心で半径 $|a \pm i| = \sqrt{a^2+1}$ の円の内外で場合分けする. $|z - a| < |a \pm i|$ の時は

$$\frac{2z}{z^2+1} = \frac{1}{a - i + (z-a)} + \frac{1}{a + i + (z-a)}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(a-i)^{n+1}}(z-a)^n + \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(a+i)^{n+1}}(z-a)^n$$
$$= \sum_{n\geq 0}(-1)^n \left((a-i)^{-n-1} + (a+i)^{-n-1}\right)(z-a)^n.$$

$|z-a| > |a \pm i|$ の時は

$$\frac{2z}{z^2+1} = \frac{1}{a-i+(z-a)} + \frac{1}{a+i+(z-a)} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n(a-i)^n}{(z-a)^{n+1}} + \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n(a+i)^n}{(z-a)^{n+1}}$$
$$= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n\left((a-i)^n + (a+i)^n\right)}{(z-a)^{n+1}}.$$

(2) $(z^2-3z+2)^{-1} = (z-2)^{-1} - (z-1)^{-1}$ と部分分数できる.

(1) $z=0$ 中心の Laurent 展開について. $|z|<1$ なら

$$\frac{1}{z^2-3z+2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n\geq 0} z^n = \sum_{n\geq 0}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n.$$

$1<|z|<2$ なら

$$\frac{1}{z^2-3z+2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} = -\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^n} - \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

$2<|z|$ なら

$$\frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-2/z} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{z}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n\geq 1}\frac{2^n-1}{z^n}.$$

(2) $z=1$ 中心の Laurent 展開について. $|z-1|<1$ なら

$$\frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{1}{1-(z-1)} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z-1} + \sum_{n\geq 0}(z-1)^n.$$

$|z-1|>1$ なら

$$\frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1-1/(z-1)} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(z-1)^n} - \frac{1}{z-1} = \sum_{n\geq 2}\frac{1}{(z-1)^n}.$$

(3) $z=2$ 中心の Laurent 展開について. $0<|z-1|<1$ なら

$$\frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{1+(z-2)} = \frac{1}{z-2} + \sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}(z-2)^n.$$

$|z-2|>1$ なら

$$\frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-2}\frac{1}{1+1/(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-2}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(z-2)^n} = \sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{(z-2)^n}.$$

問題 7.2.4.　(1) $1/z(z^2+1) = 1/z - z/(z^2+1)$ と部分分数分解する. $|z|<1$ の場合は

$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{z} - z\sum_{n\geq 0}(-1)^n z^{2n} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}z^{2n+1}.$$

$|z|>1$ の場合は

$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}} = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{1}{z^{2n+1}}.$$

(2) $ze^{1/z} = z\sum_{n\geq 0}1/(n!z^n) = z + \sum_{n\geq 1}(n!)^{-1}z^{-n+1}$.

(3) $(\sin z)/z^2 = z^{-2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n z^{2n+1}/(2n+1)! = z^{-1} + \sum_{n\geq 1}(-1)^n z^{2n-1}/(2n+1)!$.

(4) 問題 6.1.3 の Bernoulli 数 B_n を用いると $z/(e^z-1)+z/2 = 1+\sum_{n\geq 1}z^{2n}\cdot(-1)^{n+1}B_n/(2n)!$. よって

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}B_n}{(2n)!}z^{2n-1}.$$

問題 7.2.5. $f(z) = a/(z-a)+1/(1-az)$ より Laurent 展開は $f(z) = 1+\sum_{n\geq 0}a^n(z^n+z^{-n})$ となる. 等式は $z=e^{i\theta}$ とすれば得られる.

問題 7.2.6. (3) では常微分方程に関する基本的な知識を使う. 例えば　高野恭一「常微分方程式」新数学講座 6、朝倉書店　の §13.2 を参照せよ.

(1) Laurent 展開の係数の積分表示から, C を原点中心で半径 1 の正向きの円として

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{e^{in\theta}}d\theta.$$

但し最右辺では積分路 C を $z=e^{i\theta}$, $-\pi\leq\theta\leq\pi$ と表示した. 問題の最初の等式は $f(e^{i\theta})/e^{in\theta} = \exp\bigl(i(t\sin\theta - n\theta)\bigr)$ から得られる. 二番目の等式は, $w(\theta) := t\sin\theta - n\theta$ が奇関数であることに注意して, 次のように式変形して得られる.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iw(\theta)}d\theta &= \int_0^{\pi}e^{iw(\theta)}\,d\theta + \int_{-\pi}^{0}e^{iw(\theta)}\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi}e^{iw(\theta)}\,d\theta + \int_0^{\pi}e^{-iw(\theta)}\,d\theta = 2\int_0^{\pi}\cos w(\theta)\,d\theta.\end{aligned}$$

(2) $e^z = \sum_{l=0}^{\infty}z^l/l!$ から

$$\begin{aligned}\exp\bigl(t(z-z^{-1})/2\bigr) &= e^{tz/2}e^{-t/(2z)} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(tz/2)^l}{l!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-t/2z)^m}{m!} \\ &= \sum_{l,m=0}^{\infty}z^{l-m}\frac{(-1)^m}{l!\,m!}\Bigl(\frac{t}{2}\Bigr)^{l+m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}z^n\sum_{l,m\geq 0,\ l-m=n}\frac{(-1)^m}{l!\,m!}\Bigl(\frac{t}{2}\Bigr)^{l+m}.\end{aligned}$$

$n\geq 0$ の場合, 最終式の二番目の和で $l=m+n$ なので

$$J_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m+n)!\,m!}\Bigl(\frac{t}{2}\Bigr)^{2m+n}$$

となり, m を k と書いて前半の主張を得る. 同様に $n<0$ の場合は, 二番目の和で $m=l-n$ なので

$$J_n(t) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l-n}}{l!\,(l-n)!}\Bigl(\frac{t}{2}\Bigr)^{2l-n}$$

となり, l を k に置き直せば $(-1)^{l-n} = (-1)^{l+n}$ より後半の主張が得られる.

(3) $t=0$ を確定特異点とする常微分方程式

$$f''(t)+t^{-1}f'(t)+(1-n^2/t^2)f(t) \;=\; 0 \tag{$\sharp$}$$

の級数解を Frobenius の方法を用いて求める．$d_t := \frac{d}{dt}$ と略記して，まず方程式 ($\sharp$) を $Lf(t)=0$, $L := t^2d_t^2+td_t+(t^2-n^2)$ と書き直す．冪関数 t^ρ に微分作用素 L を作用させると $Lt^\rho = t^\rho\big(\rho(\rho-1)+\rho+t^2-n^2\big)$ となるので，決定方程式は

$$\rho(\rho-1)+\rho-n^2 \;=\; 0.$$

よって $\rho=\pm n$ が方程式 ($\sharp$) の特性冪数であり，級数解は $f_1(t) = t^n\sum_{m=0}^\infty a_mt^m$ 及び $f_2(t) = t^{-n}\sum_{l=0}^\infty b_lt^l$ と書ける．
さて $n\geq 0$ の場合，級数 $f_1(t)$ を方程式 ($\sharp$) に代入して t の冪ごとに係数比較すると，$m\geq 2$ なら

$$\big((n+m)(n+m-1)+(n+m)-n^2\big)a_m+a_{m-2} \;=\; 0$$

となり，a_m の漸化式 $m(n+m)a_m+a_{m-2}=0$ が得られる．従って

$$a_{2k} \;=\; \frac{(-1)^k}{(2k)!!\,(2n+2k)(2n+2k-2)\cdots(2n+2)}a_0$$

となり，特に $a_0=(n!2^n)^{-1}$, $a_1=0$ とすると方程式 ($\sharp$) の級数解 $f_1(t)=\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}(t/2)^{2k+n}$ が得られる．これと (2) から $n\geq 0$ の場合の主張が成立する．
$n<0$ の場合は，級数 $f_2(t)$ を方程式 ($\sharp$) に代入して b_l の漸化式 $l(l-2n)b_l+b_{l-2}=0$ が得られ，$b_0=\big((-n)!2^{-n}\big)^{-1}$, $b_1=0$ として級数解 $f_2(t)=\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!(k-n)!}(t/2)^{2k-n}$ が得られる．これと (2) から $n<0$ の場合の主張が成立する．

7.3 有理型関数 (問題: 55 ページ)

問題 7.3.1. $\{z_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ と $\{w_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ をそれぞれ f と g の極の集合とすると，$f\pm g$ および fg の極の集合は $\{z_n\}\cup\{w_n\}$ に含まれる．$\{z_n\}\cup\{w_n\}$ は集積点を持たないので，$f\pm g$ および fg は有理型関数である．

また $\{u_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ を g の零点の集合とする．この集合が集積点を持つ場合は，U が領域であるという仮定と一致の原理より $g=0$ なので，考慮しなくて良い．すると f/g の極の集合は $\{z_n\}\cup\{u_n\}$ に含まれる．後は前半と同じの議論で，f/g が有理型関数であることが分かる．

問題 7.3.2. (1) 略．

(2) (1) から $\overline{\mathbb{C}}$ の点列 $\{z_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty}z_n=z\in\overline{\mathbb{C}}$ と $\lim_{n\to\infty}d(z_n,z)=0$ が同値であることが分かる．特に $\mathbb{C}$ の点列 $\{z_n\}$ に対しても同値性が言える．
さて，$\mathbb{S}$ の Euclid 位相は $\mathbb{R}^3$ の Euclid 距離から定まる位相であったから，$\mathbb{C}\subset\overline{\mathbb{C}}$ の位相は距離 $d(z,w)$ から定まる位相である．上の議論より，それは $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ の距離 $|z-w|$ から定まる位相と同相である．

(3) $\mathbb{S}\subset\mathbb{R}^3$ は有界閉集合なので事実 6.5.1 よりコンパクト．よって $\overline{\mathbb{C}}$ もコンパクト

8 留数定理

8.1 留数定理 (問題: 59 ページ)

問題 8.1.1. $\deg Q > \deg P + 2$ ならば $\lim_{z\to\infty} z^2 P(z)/Q(z) = 0$ なので, M は任意の正の実数とすればよい. $\deg Q = \deg P + 2$ ならば $\lim_{z\to\infty} z^2 P(z)/Q(z) = p/q$ (p と q は各々 P と Q の最高次係数) となるので, M は $|p/q|$ より大きい正の実数とすればよい.

問題 8.1.2. (1) $f(z) = z$ に留数定理を適用して $\int_{|z|=2} \frac{f(z)}{z-1} dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i$.

(2) $f(z) = \cos z$ に留数定理を適用して $\int_{|z|=2} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i$.

(3) $(2z-1)/(z^2-z) = 1/z + 1/(z-1)$ と部分分数分解すると

$$\int_{|z|=2} \frac{2z-1}{z^2-z} dz = \int_{|z|=2} \frac{1}{z} dz + \int_{|z|=2} \frac{1}{z-1} dz = 2\pi i [1]_{z=1} + 2\pi i [1]_{z=1} = 4\pi i.$$

問題 8.1.3. $z = e^{i\theta}$ と変数変換する. $d\theta = dz/(iz)$ に注意して

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta} d\theta = \int_{|z|=1} \frac{1}{a + (z+z^{-1})/2} \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{-2i}{z^2+2az+1} dz.$$

被積分関数は $\alpha := -a + \sqrt{a^2-1}$ と $\beta := -a - \sqrt{a^2-1}$ に 1 位の極を持つ. $a > 1$ より α と β は共に実数で, 積分路内にあるのは α のみ. 従って留数定理から

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta} d\theta = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\alpha} \frac{-2i}{z^2+2az+1} = \operatorname*{Res}_{z=\alpha} \frac{4\pi}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{4\pi}{\alpha-\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

問題 8.1.4. (1) C を単位円に正の向き付けを入れたものとし, $f(z) := 1/[(1-tz)(z-a)(1-az)]$ とすると $K = i^{-1}\int_C f(z)\,dz$. f の C の内側での極は $z = a$ だけなので $K = 2\pi \operatorname{Res}_{z=a} f(z) = 2\pi/\big((1-at)(1-a^2)\big)$.

(2) K の定義から $K = \int_0^{2\pi} [\sum_{n=0}^\infty t^n e^{in\theta}/\big((e^{i\theta}-a)(e^{-i\theta}-a)\big)]\,d\theta = \sum_{n=0}^\infty K_n t^n$, $K_n := \int_0^{2\pi} [e^{in\theta}/\big((e^{i\theta}-a)(e^{-i\theta}-a)\big)]\,d\theta = \int_0^{2\pi} [e^{in\theta}/(1-2a\cos\theta+a^2)]\,d\theta$ と展開できる. 一方で (1) の結果を展開すると $2\pi/\big((1-at)(1-a^2)\big) = \sum_{n=0}^\infty t^n \cdot 2\pi a^n/(1-a^2)$. t^n の係数比較で結論を得る.

(3) $I_n := \int_0^{2\pi} [\cos(n\theta)/(1-2a\cos\theta+a^2)\,d\theta]$ とする. $|a| < 1$ の場合は (2) の K_n を用いて $I_n = \operatorname{Re} K_n = 2\pi a^n/(1-a^2)$.

$|a| > 1$ の場合は, (1) の計算で f の単位円内の極が $z = a^{-1}$ のみになるから $\int_C f(z)\,dz = 2\pi \operatorname{Res}_{z=a^{-1}} f(z) = 2\pi/\big((a^2-1)(1-t/a)\big)$. あとは $|a| < 1$ の場合と同様に t で展開して係数比較すると $I_n = 2\pi/\big(a^n(a^2-1)\big)$.

問題 8.1.5. $f(z) := 1/(1+z^2)^{n+1}$ とし, 例 8.1.4 の積分路 $C(R)$ を用いる. f の極は $z = \pm i$ なので, $R > 1$ としておく. $C(R)$ の内側では f は $z = i$ に 1 位の極を持つ. 留数定理から

$$\int_{C_1(R)} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} (1+z^2)^{-1} = \pi. \qquad (\#)$$

上半円 $C_1(R)$ での積分は

$$\left| \int_{C_1(R)} f(z)\,dz \right| = \pi R \cdot \sup\{\big|(1+z^2)^{-1}\big| \mid z \in C_1(R)\} \le \pi R \cdot \frac{1}{R^2-1}$$

と評価できて, $R \to +\infty$ で $R/(R^2-1) \to 0$ なので $\int_{C_1(R)} f(z)dz \to 0$. よって (#) で $R \to 0$ とすることで $I = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \pi$ が従う.

問題 8.1.6.　(1) 原点中心で半径 $R \gg 0$ の上半平面内の半円に正の向きを入れた C_R と, 実軸上の閉区間 $[-R, R]$ からなる積分路 C で関数 $1/(z^4+a^4)$ を C を積分すると

$$\int_C \frac{dz}{z^4+a^4} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+a^4} + \int_{C_R} \frac{dz}{z^4+a^4}.$$

C の内部で関数 $1/(z^4+a^4)$ は $\alpha = ae^{\pi i/4}$ と $\beta = ae^{3\pi i/4}$ において 1 位の極を持つから, 留数定理より

$$\int_C \frac{dz}{z^4+a^4} = \operatorname*{Res}_{z=\alpha} \frac{2\pi i}{z^4+a^4} + \operatorname*{Res}_{z=\beta} \frac{2\pi i}{z^4+a^4} = \frac{2\pi i}{4\alpha^3} + \frac{2\pi i}{4\beta^3} = \frac{2\pi i}{4a^3}\left(e^{-3\pi i/4} + e^{-9\pi i/4}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}a^3}.$$

(2) (1) で $b := a^4$ として $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+b} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+b} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} b^{-3/4}$. 両辺を b で n 回微分して

$$(-1)^n n! \int_0^\infty \frac{dx}{(x^4+b^n)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}-1\right)\cdots\left(-\frac{3}{4}-n+1\right)b^{-3/4-n}.$$

$b = 1$ とすれば

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^4)^n} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{3\cdot 7\cdot\cdots\cdot(4n-1)}{4^n n!}.$$

問題 8.1.7.　(1) 前問 8.1.6 (1) と同様に, 原点中心で半径 $R \gg 0$ の上半平面内の半円に正の向きを入れた C_R と, 実軸上の閉区間 $[-R, R]$ からなる積分路 C をとり, その上で積分

$$\int_C \frac{e^{ibz}}{z^2+a^2}dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ibx}}{x^2+a^2}dx + \int_{C_R} \frac{e^{ibz}}{z^2+a^2}dz$$

を考える. 被積分関数の C 内の極は $z = ia$ のみなので, 留数定理より

$$\int_C \frac{e^{ibz}}{z^2+a^2}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ia} \frac{e^{ibz}}{z^2+a^2} = \frac{\pi e^{-ab}}{a}.$$

一方で C_R 上の積分は $z = Re^{i\theta}$ と変数変換して

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{ibz}}{z^2+a^2}dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{e^{ibR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{R^2e^{2i\theta}+a^2} Rie^{i\theta}d\theta\right| \le R\int_0^\pi \frac{e^{-bR}}{R^2-a^2}d\theta = \frac{2\pi R}{R^2-a^2}$$

と評価できるので, $R \to \infty$ で $\int_{C_R} \to 0$. 以上より求める積分は

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibx}}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi e^{-ab}}{2a}.$$

(2) 同じ積分路 C をとって積分 $J := \int_C e^{ibz}/(z^4+z^2+1)dz$ を考える. C_R での積分は上と同様の評価ができて, $R \to \infty$ で 0 に収束することが分かる. C 内の極は $\alpha = e^{\pi i/3}$ と $\beta = e^{2\pi i/3}$ なので

$$\begin{aligned} J &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\alpha} \frac{e^{ibz}}{z^4+z^2+1} + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\beta} \frac{e^{ibz}}{z^4+z^2+1} = 2\pi i \frac{e^{ib\alpha}}{4\alpha^3+2\alpha} + 2\pi i \frac{e^{ib\beta}}{4\beta^3+2\beta} \\ &= \frac{-2\pi i}{2\sqrt{3}} e^{-b\sqrt{3}/2} e^{-i(b/2+\pi/6)} + \frac{2\pi i}{2\sqrt{3}} e^{-b\sqrt{3}/2} e^{i(b/2+\pi/6)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-b\sqrt{3}/2} \sin\left(\frac{b}{2}+\frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

従って求める積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx}{x^4+x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(J) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-b\sqrt{3}/2} \sin\left(\frac{b}{2}+\frac{\pi}{6}\right).$$

問題 8.1.8. $e^x = t$ と変数変換すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \;=\; \int_0^{\infty} \frac{t^a}{1+t}\frac{dt}{t} \;=\; \int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt.$$

問題の積分路 C 上で関数 $z^{a-1}/(1+z)$ を積分すると, $z^{a-1} = e^{(a-1)\log z}$ の分岐に気を付けて

$$\int_C \frac{z^{a-1}}{1+z} dz \;=\; \int_{C_R} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz + \int_{C_r} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz + \int_r^R \frac{t^{a-1}}{1+t} dt + \int_R^r \frac{e^{2\pi i(a-1)} t^{a-1}}{1+t} dt.$$

まず C 内の被積分関数の極は $z = -1$ のみだから

$$\int_C \frac{z^{a-1}}{1+z} dz \;=\; 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{z^{a-1}}{1+z} \;=\; 2\pi i e^{(a-1)\log(-1)} \;=\; -2\pi i e^{a\pi i}.$$

次に C_R 上の積分について

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz \right| \le \left| \int_0^{2\pi} \frac{R^{a-1} e^{i\theta(a-1)}}{1+Re^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta \right| \le \int_0^{2\pi} \frac{R^a}{R-1} d\theta \;=\; \frac{2\pi R^a}{R-1}.$$

$R \to \infty$ で $R^a/(R-1) \to 0$ なので, $\int_{C_R}$ も $R \to \infty$ で 0 に収束する. 同様に C_r 上の積分も

$$\left| \int_{C_r} \frac{z^{a-1}}{1+z}\, dz \right| \le \frac{2\pi r^a}{1-r}$$

と評価できて, $r \to 0$ で 0 に収束することが分かる. 最後に

$$\int_r^R \frac{t^{a-1}}{1+t} dt + \int_R^r \frac{e^{2\pi i(a-1)} t^{a-1}}{1+t} dt = (1 - e^{2\pi i a}) \int_r^R \frac{t^{a-1}}{1+t} dt$$

は $r \to 0$, $R \to \infty$ で $(1 - e^{2\pi i a}) \int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt$ に収束する. 以上より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \;=\; \frac{-2\pi i e^{a\pi i}}{1 - e^{2\pi i a}} \;=\; \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

問題 8.1.9. 積分路の弧の部分を C_R と書くと

$$\int_C e^{-z^2}\, dz \;=\; \int_0^R e^{-x^2}\, dx + \int_{C_R} e^{-z^2}\, dz + \int_{\mathrm{BO}} e^{-z^2}\, dz.$$

C の内部で被積分関数は正則だから $\int_C e^{-z^2}\, dz = 0$. また

$$\left| \int_{C_R} e^{-z^2}\, dz \right| \le \int_0^{\pi/4} e^{-R^2} R d\theta \;=\; \frac{\pi}{4} R e^{-R^2}$$

と評価できるので, $R \to \infty$ で $\int_{C_R} e^{-z^2}\, dz \to 0$. 一方で積分路のうち辺 BO 上の積分は $z = r\exp(\pi i/4)$ と置換すれば

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{BO}} e^{-z^2}\, dz \;&=\; \int_R^0 \exp(-(re^{\pi i/4})^2) \exp(\pi i/4)\, dr \;=\; -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-ir^2} dr \\ &=\; -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \Big(\int_0^R \cos r^2\, dr - i \int_0^R \sin r^2\, dr \Big). \end{aligned}$$

よって $R \to \infty$ とすれば

$$\int_0^\infty \cos r^2\,dr - i\int_0^\infty \sin r^2\,dr \;=\; \frac{\sqrt{2}}{1+i}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

実部と虚部を比較して

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx \;=\; \int_0^\infty \sin x^2\,dx \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

問題 8.1.10.　(1) 倍角公式から

$$I \;\coloneqq\; \int_0^\pi \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a^2+b^2)+(a^2-b^2)\cos\varphi}.$$

そこで

$$J(p) \;\coloneqq\; \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1+p\cos\varphi}$$

を考える．求めたい I は $p = (a^2-b^2)/(a^2+b^2)$ の場合で，その時は $0 < p < 1$ となることに注意する．積分 $J(p)$ は，$z = e^{i\varphi}$ と変数変換すれば

$$J(p) \;=\; \int_{|z|=1} \frac{dz/iz}{1+p(z+z^{-1})/2} \;=\; \int_{|z|=1} \frac{2dz}{ip(z^2+2p^{-1}z+1)}.$$

$\alpha_\pm \coloneqq (-1 \pm \sqrt{(}1-p^2))/p$ とすると，単位円内の極は α_+ のみで，

$$J(p) \;=\; 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\alpha} \frac{2}{ip(z-\alpha_+)(z-\alpha_-)} \;=\; \frac{4\pi i}{ip(\alpha_+-\alpha_-)} \;=\; \frac{2\pi}{\sqrt{1-p^2}}.$$

従って

$$I \;=\; \frac{1}{a^2+b^2}J\Big(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\Big) \;=\; \frac{1}{a^2+b^2}\frac{2\pi}{1-(a^2-b^2)^2/(a^2+b^2)^2} \;=\; \frac{\pi}{ab}.$$

(2) $y = \sqrt{x}$ と変数変換すると

$$I \;\coloneqq\; \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+a^2}dx \;=\; \int_0^\infty \frac{2y^2}{y^4+a^2}dy \;=\; \int_{-\infty}^\infty \frac{y^2}{y^4+a^2}dy.$$

例 8.1.4 と同様に，原点中心で半径 R の円周の上半分と $[-R, R]$ からなる積分路での

$$f(z) \;\coloneqq\; \frac{z^2}{z^4+a^2}$$

の積分を考えて，$R \to \infty$ で I が求まる．積分路内の極は $\alpha_1 = a^{1/2}e^{i\pi/4}$ と $\alpha_2 = a^{1/2}e^{i3\pi/4}$ なので，

$$I \;=\; 2\pi i\Big(\operatorname*{Res}_{z=\alpha_1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\alpha_2} f(z)\Big) \;=\; 2\pi i\Big(\frac{1}{4\alpha_1}+\frac{1}{4\alpha_2}\Big) \;=\; \frac{\pi}{\sqrt{2a}}.$$

(3) $\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$ より

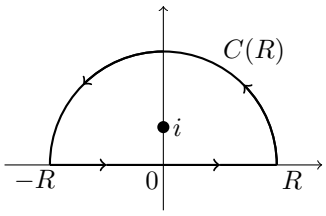
$$I \coloneqq \int_C \frac{1-e^{2iz}}{2z^2}dz$$

を，問題 4.2.2 と同じ積分路 C，つまり半径 R と r の二つの半円と実軸からなる積分路で考える．$R \to \infty$ と $r \to 0$ で求めたい積分が得られる．計算は問題 4.2.2 と全く同じで，結果は

$$\mathrm{Re}(I) \;=\; \mathrm{Re}(\pi/2) \;=\; \pi/2.$$

問題 8.1.11. R が十分大きければ, $f(z) := (1+z^2)^{-(n+1)}$ の $C(R)$ の内部での極は $z = i$ のみで位数は $n+1$. よって留数定理と系 7.2.4 から

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{2\pi i}{n!}\left(\frac{d^n}{dz^n}\frac{(z-i)^{n+1}}{(z^2+1)^{n+1}}\right)\Bigg|_{z=i}$$
$$= 2\pi i\cdot(-1)^n\binom{2n}{n}(2i)^{-2n-1} = \pi\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$



最後の等号で $\frac{(2n)!}{n!2^n} = (2n-1)!!$ を用いた. これは帰納法でい示せる. 一方, 上半円周部分を A と書くと $\int_C f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(z)\,dz + \int_A f(z)\,dz$ で,

$$\left|\int_A f(z)\,dz\right| \le \pi R\cdot\sup_{z\in A}|f(z)| = \pi R\cdot\frac{1}{\inf_{z\in A}|z^2+1|} = \frac{\pi R}{R^2-1}$$

により $R\to\infty$ で $\int_A f(z)\,dz \to 0$ が分かる. 以上から結論が得られる.

8.2 偏角の原理 (問題: 63 ページ)

問題 8.2.1. (1) 留数定理から左辺は $\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=a_k} g(z)f'(z)/f(z)$. ここで $z=a_k$ が gf'/f の 1 位の極であることに注意して, $\operatorname{Res}_{z=a_k} g(z)f'(z)/f(z) = \lim_{z\to a_k}(z-a_k)g(z)f'(z)/f(z) = g(a_k)\operatorname{ord}_f(a_k)$.

(2) 前問を $f(z) = \sin\pi z$ に適用する.

問題 8.2.2. (1) $f(z) = -z$ と $g(z) = e^z - z - 1$ について, $|z| = 1$ なら

$$|g(z)| = \left|\sum_{k\ge 2} z^k/k!\right| \le \sum_{k\ge 2}\left|z^k\right|/k! = e-2 < 1 = |f(z)|.$$

Rouché の定理 8.2.2 を f と g に適用する.

(2) $f(z) = z^5 + 15z + 1$ は $f(0) > 0$ かつ $f(-1) < 0$ なので, 少なくとも一つ $-1 < z < 0$ なる実根がある. $|z| = 3/2$ では $|15z+1| > |z|^5$ なので, Rouché の定理 8.2.2 から $|z| < 3/2$ での f の零点の個数は $15z+1$ と同じで, 一つだと分かる. また $|z| \ge 2$ なら $|f(z)| \ge \left|z^5\right| - |15z+1| > 0$ より f は零点を持たない.

R を $R > 2$ なる次数として, 線分 $C_1 := [0,R]$, 弧 C_2: $z = Re^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le \pi/2)$, 線分 $C_2 := [iR, 0]$ を順につないだ閉曲線に正の向きをいれたものを C とする. $R\to+\infty$ で $\arg f(z) \to \arg(z^5)$ となることと $\frac{1}{2\pi}\int_C d\arg(z^5) = 1$ に注意すると, $\frac{1}{2\pi}\int_C d\arg f(z) \in \mathbb{Z}$ から $\frac{1}{2\pi}\int_C d\arg f(z) = 1$. よって偏角の原理より第 1 象限の零点の個数は一つ. 複素共役をとって第 4 象限の零点の個数も一つである. 第 2, 3 象限についても同様の議論が成り立つ.

問題 8.2.3. P を次数 $n > 0$ の多項式とする. 十分大きい $R \in \mathbb{R}$ を取れば, $|z| > R$ なら $|P(z)| > |z^n|/2 > R^n/2$ となる. P が零点を持たないと仮定すると $f := 1/P$ は整関数で, $|z| > R$ なら $|f(z)| < 2/R^n$ となる. 更に $|f(0)| > 2/R^n$ となるように R を大きく取り直せば, $|f|$ が連続関数であることから $|f|$ は最大値を取る. よって最大値の原理より f は定数関数になり, 矛盾する.

9 関数の表示

9.1 有理型関数の部分分数分解 (問題 67 ページ)

問題 9.1.1. (1) $1/\sin z$ の部分分数分解 (命題 9.1.3) で z を $z+\pi/2$ に置き換える.

(2) $\cot z$ の部分分数分解 (命題 9.1.4) で z を $z+\pi/2$ に置き換える.

(3) (2) を項別微分する.

問題 9.1.2. $f(z) := \frac{z}{e^z-1}$ とすると $z\cot z = iz\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = f(2iz)+iz$.
これに $f(z) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} z^2 n(-1)^{n-1}B_n/(2n!)$ を代入すれば結論を得る.

問題 9.1.3. $|z|<\pi$ なら $z^2/(n^2\pi^2-z^2) = \sum_{k=1}^{\infty}(z/n\pi)^{2k}$ なので, それを $\cot z = z^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty} 2z/(z^2-n^2\pi^2)$ に代入して二重級数定理をもちいると結論が得られる.

9.2 整関数の無限積表示 (問題 69 ページ)

問題 9.2.1. $(1-z)\prod_{n=0}^{N}(1+z^{2^n}) = 1-z^{2^{n+1}}$ より従う.

問題 9.2.2. $\sin z$ の無限積表示から

$$\cos z \;=\; \frac{\sin 2z}{2\sin z} \;=\; 2z\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{4z^2}{n^2\pi^2}\Big)\Big/z\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{4z^2}{(2n)^2\pi^2}\Big) \;=\; \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\Big).$$

問題 9.2.3. $\sin z$ の無限積表示から

$$e^z-1 \;=\; e^{z/2}2i\sin(z/2\pi) \;=\; e^{z/2}2i\cdot\frac{z}{2i}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{(z/2i)^2}{(2n)^2\pi^2}\Big) \;=\; e^{z/2}z\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{z^2}{4n^2\pi^2}\Big).$$

問題 9.2.4. $\sin z$ の無限積表示で $z=\pi/2$ とすれば前半が得られる. 後半は, 前半の無限積を

$$\prod_{n=1}^{N}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} \;=\; \frac{1}{2N+1}\Big(\frac{2^{2N}N!}{(2N)!}\Big)^2$$

と書き換えれば従う.

問題 9.2.5. 定理 9.2.2 を適用するために, $\big|(1+z/n)e^{-z/n}-1\big|$ を上から評価したい. Taylor 展開から

$$\big|(1+w)e^{-w}-1\big| \;=\; \left|\sum_{k\ge 2}(-1)^k\frac{k-1}{k!}w^k\right| \;\le\; \frac{|w|^2}{2}\sum_{k\ge 0}w^k \;\le\; \frac{|w|^2}{2}\frac{1}{1-|w|}$$

となることに注意する. 正の実数 R を任意にとり, $z\in\mathbb{C}$ が $|z|<R$ を満たすものとすれば, 上の議論から

$$\Big|(1+z/n)e^{-z/n}-1\Big| \;\le\; \frac{1}{2}\frac{R^2}{n(n-R)}.$$

よって $N>R$ なる整数 N について

$$\sum_{n\ge N}\Big|(1+z/n)e^{-z/n}-1\Big| \;\le\; \frac{R^2}{2}\sum_{n\ge N}\frac{1}{n(n-R)} \;<\; +\infty$$

となり, 定理 9.2.2 が適用できる.

9.3 Weierstrass の因数分解定理 (問題 70 ページ)

問題 9.3.1. $k = 0$ の時は $|1 - E_0(z)| = |z| < 2e\,|z|$. 以下 $k \geq 1$ とする. $|z| < 1/2$ で $\mathrm{Log}(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ は $\exp(\mathrm{Log}(1-z)) = 1 - z$ を満たすので, $w := -\sum_{n=k+1}^{\infty} z^n/n$ とすれば

$$E_k(z) \;=\; \exp(\mathrm{Log}(1-z) + z + z^2/2 + \cdots + z^k/k) \;=\; e^w.$$

$|z| < 1/2$ より

$$|w| \;\leq\; |z|^{k+1} \sum_{n=k+1}^{\infty} |z|^{n-k-1}/n \;\leq\; |z|^{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \leq 2\,|z|^{k+1}.$$

特に $|w| \leq 1$ となるので,

$$|1 - E_k(z)| \;=\; |1 - e^w| \;=\; \left| \int_0^w e^z\,dz \right| \;\leq\; \sup_{z \in \overline{0w}} |e^z| \cdot |w| \;\leq\; e\,|w|.$$

最後に $|w| \leq (k+1)^{-1}\,|z|^{k+1}/(1-|z|) \leq (k+1)^{-1} 2\,|z|^{k+1} \leq 2\,|z|^{k+1}$ より

$$|1 - E_k(z)| \;\leq\; e\,|w| \;\leq\; 2e\,|z|^{k+1}.$$

問題 9.3.2. $z_0 \in \Omega$ を固定し, $c_0 \in \mathbb{C}$ を $c_0 := \mathrm{Log}_\Omega(f(z_0))$, すなわち $e^{c_0} = f(z_0)$ なるものとする. Ω 上の関数 g を

$$g(z) \;=\; \int_C \frac{f'(w)}{f(w)} dw + c_0$$

で定義する. 但し積分路 C は z_0 を始点とし z を終点とする Ω 内の曲線. Ω が単連結領域なので g は C の選び方によらず定まる. Cauchy の積分定理の証明と同様にして g は正則で $g' = f'/f$ となることが分かる. すると Ω 上で $(fe^{-g})' = 0$ となるので fe^{-g} は定数関数. 定め方から $f(z_0)e^{-g(z_0))} = 1$ なので, Ω 上で $f = e^g$.

問題 9.3.3. f の全ての極で同じ位数の零点を持つ整関数 h が Weierstrass の因数分解定理 9.3.2 より存在する. すると $g := fh$ は整関数である.

10　等角写像

10.1　曲線の接ベクトル (問題 71 ページ)

問題 10.1.1.　(1) 曲線のパラメータ p の定義から $p'(t) \neq 0$ なので, 対応するベクトルの長さは正.

(2) $q(s)$ を他のパラメータ付けとすると, 連続微分可能な関数 $s(t)$ があって $q(s(t)) = p(t)$ かつ $s'(t) > 0$. $s_0 = s(t_0)$ とすると連鎖率から $q'(s_0) = p'(t_0)/s'(t_0)$. $s'(t_0)$ は正の実数だから, 方向ベクトル $q'(s_0)/|q'(s_0)|$ と $p'(t_0)/|p'(t_0)|$ は一致する.

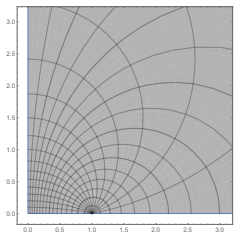
10.2　正則写像と等角写像 (問題 73 ページ)

問題 10.2.1. 関数 f が z_0 で, 関数 g が $f(z_0)$ で等角写像だと仮定する. 定理 10.2.1 より f と g はともに正則関数であり, 正則関数の合成は正則関数なので, $g \circ f$ は正則. また合成関数の微分の連鎖率 $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$ と定理 10.2.1 より $g'(f(z_0)) \neq 0$ かつ $f'(z_0) \neq 0$ なので, $(g \circ f)'(z_0) \neq 0$. 再び定理 10.2.1 より $g \circ f$ は z_0 で等角写像である.

問題 10.2.2.　(3) $z = x + iy$ とすると

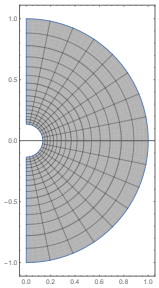
$$w = (1+z)/(1-z) = \frac{1-(x^2+y^2)}{(1-x)^2+y^2} + i\frac{2y}{(1-x)^2+y^2}.$$

よって像は第一象限 $\{w = u + iv \mid u > 0, v > 0\}$. 極座標にそった曲線の像は下図のようになる.

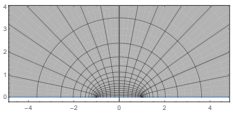


(4) $z = re^{i\theta}$ と極座標表示すると, $z \in \mathbb{H} \iff r > 0,\ 0 < \theta < \pi$. このとき $\log z = \log r + i\theta$ だから, 像は帯状領域 $\{x + iy \mid 0 < y < \pi\}$ になる. θ が一定の半直線は x 軸に平行な $\{x + i\theta \mid x \in \mathbb{R}\}$ に写り, r が一定の半円は y 軸に平行な $\{\log r + i\theta \mid 0 < \theta < \pi\}$ に写る.

(6) $z = x + iy$ とすれば $e^{iz} = e^{ix}e^{-y}$. よって像は $\{w = re^{i\theta} \mid -\pi/2 < \theta < \pi/2, 0 < r < 1\}$, つまり半径 1 の円板の右半分. x 軸または y 軸と並行な直線の像を描くと下図の通り.



(7) $z = re^{i\theta}$ とすると $0 < r < 1$ かつ $0 < \theta < \pi$. $w = -(z + 1/z)/2 = -(r + 1/r)/2 \cdot \cos\theta - i(r - 1/r)/2 \cdot \sin\theta$ より, 像は上半平面 $\mathbb{H}$. なお極座標に沿った曲線の像を描くと下図のようになる.



(8) $\zeta = e^{iz}$ とすると $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i = -(i\zeta + 1/i\zeta)/2$. よってこの写像は, (6) の写像の後に i をかける写像を合成し更に (7) の写像を合成したものと一致する. 従って像は上半平面 $\mathbb{H}$.

10.3 双正則写像と単位円板の自己同型 (問題 75 ページ)

問題 10.3.1. $x \in \mathbb{R}$ について $|i - x| = |i + x|$ なので $|F(x)| = 1$. つまり $F(\mathbb{R})$ は単位円 ($\mathbb{D}$ の境界) に含まれる. $x = \tan t$ $(-\pi/2 \le t \le \pi/2)$ と置くと

$$F(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} + i\frac{2x}{1 + x^2} = \cos 2t + i \sin 2t = e^{i2t}$$

となるので, $F(\mathbb{R})$ は単位円 $|w| = 1$ から -1 を除いたものである.

問題 10.3.2. $\psi_\alpha^{-1} = \psi_\alpha$ に注意する.

(1) $\alpha := f^{-1}(0) \in \mathbb{D}$ とすれば良い.

(2) (1) より $g(0) = 0$, $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ なので Schwarz の補題が使えて, $z \in \mathbb{D}$ ならば $|g(z)| \le |z|$. また $g^{-1}(0) = 0$, $g^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ なので, やはり Schwarz の補題より $w \in \mathbb{D}$ ならば $\left|g^{-1}(w)\right| \le |w|$. これら二つの不等式で $w = g(z)$ として $|g(z)| = |z|$ が得られる.

(3) 命題 10.3.2 (Schwarz の補題) (2) より明らか.

(4) $\psi_\alpha^{-1} = \psi_\alpha$ より $f(z) = g \circ \psi_\alpha^{-1}(z) = e^{i\theta}\psi_\alpha(z)$.

10.4 Riemann の写像定理 (問題 78 ページ)

問題 10.4.1. (1) 一致の定理 (定理 6.3.1) から直ちにに従う.

(2) 偏角の原理 (定理 8.2.1) から直ちに従う.

(3) $\gamma \subset \Omega$ はコンパクト集合なので, 仮定より γ 上で $f_n \to f$ と一様収束する. このことから $g_n \to g$ と γ 上一様収束する. すると $1/g_n \to 1/g$ も一様収束であり, また Weierstrass の定理 6.5.3 (一様収束する正則関数列の微分の一様収束性) より $g_n' \to g'$ と一様収束する. 従って $g_n'/g_n \to g'/g$ と一様収束する. よって積分値も収束する.

(4) g_n が零点を持たないことから, 偏角の原理より $\int_\gamma [g_n'(z)/g_n(z)]\,dz = 0$. (3) より $n \to \infty$ で収束するが, それは 0 で, (2) と矛盾する.

問題 10.4.2. ψ_α が $\mathbb{D}$ の自己同型であることから. U 内の始点と終点を共有する二曲線 C_1, C_2 の ψ_α^{-1} による像は Ω 内の始点と終点を共有する二曲線となり, Ω が単連結であることからホモトープ. するとホモトピー写像と ψ_α の合成が C_1 と C_2 のホモトピー写像を与える. つまり U は単連結.

$\psi_\alpha(z) = 0$ となる $z \in \mathbb{D}$ は $z = \alpha$ だけなので, 仮定 $\alpha \in \mathbb{D} \setminus f(\Omega)$ より $\psi_\alpha(f(w)) = 0$ となる $w \in \Omega$ は存在しない.

問題 10.4.3.　(1) 楔形の領域 $\{w \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg w < \alpha\pi\}$.

(2) (1) と同じ

問題 10.4.4. 上半平面の境界, つまり実軸を $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$ と分けてその像を見ると, 求める集合は $\{w \in \mathbb{H} \mid |\mathrm{Im}\, w| < 1/2\}$.

問題 10.4.5. 前問 10.4.4 と同様, 実軸を $(-\infty, -1/k)$, $(-1/k, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 1/k$, $(1/k, \infty)$ と分けてその像を見ると, 結論は $\pm K$ と $\pm K + iK'$ を頂点とする四辺形の内部. 但し K, K' は次で定まる正の実数.

$$K \coloneqq f(1) = \int_0^1 \frac{d\zeta}{[(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)]^{1/2}}, \quad K' \coloneqq \int_1^{1/k} \frac{d\zeta}{[(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)]^{1/2}}.$$

11 ガンマ関数

11.1 積分表示と解析接続 (問題 81 ページ)

問題 11.1.1. n を $n-1 < M \le n$ となる整数とする. $n \ge 1$ に注意する. $t > 1$ なら $e^{t/2} = \sum_{k\ge 0}(t/2)^k/k! \ge (t/2)^n/n!$ かつ $t^{M-1} \le t^n$ なので,

$$\frac{e^{t/2}}{t^{M-1}} \ge \frac{(t/2)^n}{n!\,t^n} = \frac{1}{2^n n!}.$$

よって $C := 1/(2^n n!)$ とすれば良い.

問題 11.1.2. 命題 11.1.2 の証明で用いた $F_\varepsilon(s) := \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} e^{-t}t^{s-1}dt$ を使うと, 部分積分で

$$F_\varepsilon(s+1) = -\int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \frac{d}{dt}(e^{-t}t^s) + sF_\varepsilon(s).$$

$e^{-t}t^s$ は $t \to 0$ 及び $t \to \infty$ で 0 に収束するので, 漸化式 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ を得る.

11.2 関数等式 (問題 83 ページ)

問題 11.2.1. 関数等式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$ から直ちに従う.

11.3 無限積表示 (問題 85 ページ)

問題 11.3.1. $\log N$ の積分表示を用いて

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \int_1^N \frac{1}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x}\right) dx + \frac{1}{N}$$

となる. $x \in [n, n+1]$ として, 平均値の定理を $f(x) := 1/x$ と区間 $[n, x]$ に使うと, ある $y \in [n, x]$ があって

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{x}\right| = \frac{|x-n|}{y^2} \le \frac{1}{n^2}$$

となる. よって

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N \le \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{N}.$$

この右辺は収束するので, 極限値 γ も存在する.

問題 11.3.2. 前半は対数を取って微分を見ればよい. 後半は前半で $n \to \infty$ とすればよい.

問題 11.3.3. $n > c \ge t \ge 0$ ならば $0 \le e^{-t} - (1-t/n)^{-n} \le 1 - e^t e^{n\log(1-t/n)} \le 1 - e^c e^{n\log(1-t/n)} \le 1 - e^c(1-c/n)^n$. 最後の式は $n \to 0$ で 0 に収束する.

問題 11.3.4. Gauss の表示で $\frac{k}{z+k} = (1+\frac{z}{k})^{-1}$, $n^z = (\frac{2}{1}\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n})^z(\frac{n}{n+1})^z$ と変形すればよい.

問題 11.3.5. 略.

問題 11.3.6. 定義から $(1)_n = n!$ となることに注意する.

(1) $F(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$ と係数を置くと, $\dfrac{f_n}{f_{n+1}} = \dfrac{(\gamma+n)(1+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}$. 従って $\alpha, \beta \notin -\mathbb{N}$ なら $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f_n}{f_{n+1}} = 1$ と ratio test から収束半径は 1. また α と β のどちらかが $-\mathbb{N}$ に属するなら $F(z)$ は多項式なので収束半径は ∞.

(2) 一般二項展開 (命題 1.5.6) を使う: $\alpha, z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ に対して $(1+z)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n$, $\binom{\alpha}{n} := (\alpha - n + 1)_n / n!$. (1) より $|z| < 1$ だから, 被積分関数の $(1-zt)^{-\alpha}$ について $|zt| < 1$ なので一般二項展開できて,

$$(1-zt)^{-\alpha} = \sum_{n\geq 0} \binom{-\alpha}{n} (-zt)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n}{n!} (zt)^n.$$

二項展開は絶対収束しているので, 積分と和の順序を交換できて

$$\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-zt)^{-\alpha}\,dt = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n}{n!} z^n \int_0^1 t^{n+\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\,dt.$$

この等式の右辺の積分は $\beta, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ よりベータ積分なので,

$$\int_0^1 t^{n+\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\,dt = \frac{\Gamma(n+\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(n+\gamma)}.$$

すると

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-zt)^{-\alpha}\,dt &= \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n}{n!} \frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(n+\gamma)} z^n \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n}{(1)_n} \frac{(\beta)_n}{(\gamma)_n} z^n = F(z).\end{aligned}$$

但し $(*)$ ではガンマ関数の漸化式 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ から $\Gamma(n+\beta)/\Gamma(\beta) = (\beta)_n$ となることを用いた.

(3) $(1-zt)^{-\alpha} = \exp\bigl(-\alpha \log(1-zt)\bigr)$ の値は, log の分岐を $\log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta$, $0 < \theta < 2\pi$ と取ることで $0 < t < 1$, $z \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ に対して定まる. そこで (2) の積分を $z \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ に対する $F(z)$ の定義とすれば, z について正則であることは定理 6.5.4 から従い, また (2) より $|z| < 1$ なら Gauss の超幾何級数と一致するので, 解析接続を与えることになる.

12　ゼータ関数

12.2　テータ関数と関数等式 (問題 88 ページ)

問題 12.2.1.　(1) $\widehat{f}$ が有界であることを示せばよいが,

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx \le A\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = 2A\Big(\int_0^1 + \int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}\Big) \le 2A(1+1) = 4A$$

となって示せた.

(2) 積分路 C の左側の辺について,

$$\left|\int_{-R-ib}^{-R} f(z)e^{-2\pi iz\xi}\,dz\right| \le \int_0^b \left|f(-R-it)e^{-2\pi i(-R-it)\xi}\right|\,dt \le \int_0^b \frac{A}{R^2}e^{-2\pi t\xi}\,dt \le \frac{Ab}{R^2}$$

より $R\to\infty$ で 0 に収束する. 右側の辺についても同様. 一方 C 上とその内部に f の極はないから, Cauchy の積分定理より $\int_C f(z)\,dz = 0$. よって $R\to\infty$ として $\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-ib)e^{-2\pi i(x-ib)\xi}\,dx$. これから

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \le \int_{-\infty}^{\infty}\frac{A}{(1+x^2)^2}e^{-2\pi b\xi}\,dx \le 4Ae^{-2\pi b\xi}.$$

(3) (2) の積分路の代わりに $-R, R, R+ib, -R+ib$ を頂点とする四角形の周を積分路として, (2) と同様の議論をすればよい.

問題 12.2.2.　(1) C_N の内部の $f(z)/(e^{2\pi iz}-1)$ の極は $z=n$ ($n\in\mathbb{Z}$, $|n|\le N$) で留数は $f(n)/(2\pi i)$. 留数定理から結論が従う.

(2) 積分路の右辺 (上向き) を L と置くと, 仮定 $f\in\mathfrak{F}_a$ から適当な $A>0$ が存在して

$$\left|\int_L \frac{f(z)}{e^{2\pi iz}-1}\,dz\right| \le \ell(L)\cdot\frac{A}{1+(N+\frac{1}{2})^2}\sup\Big\{\frac{1}{e^{-2\pi y}+1}\mid -b\le y\le b\Big\} \le \frac{2Ab}{N^2}$$

よって $N\to\infty$ で左辺での積分は 0 に収束する. 同様に左辺での積分も 0 に収束する. (1) の等式で $R\to\infty$ として, 主張が得られる.

(3) (2) と注意により $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty}\widehat{f}(n) + \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)$.

問題 12.2.3.　(1) $e^{\pi x^2}\ge 1+x^2$ より $f\in\mathfrak{F}_1\subset\mathfrak{F}$.

(2) Gauss 積分より $\widehat{f}(0)=1$. また

$$(\widehat{f})'(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot(-2\pi ix)e^{-2\pi i\xi}\,dx = i\widehat{f'}(\xi) = i\cdot(2\pi i\xi)\widehat{f}(\xi)$$

より $(\widehat{f})'(\xi) = -2\pi i\xi\widehat{f}(\xi)$. よって $\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$.

(3) 前問で $x\mapsto t^{1/2}x$ と変数変換すれば良い.

(4) 前問の $g(x)$ に Poisson 和公式を適用する.

13 楕円関数

13.1 二重周期関数 (問題 92 ページ)

問題 13.1.1. (1) g/f は極を持たないので, 楕円関数に関する Liouville の定理 13.1.1 (4) より定数.

(2) $g-f$ は極を持たないので, 楕円関数に関する Liouville の定理より定数.

13.2 Weierstrass のペー関数 (問題 93 ページ)

問題 13.2.1. (1) $R := \min\{|\omega|\,;\omega \in E_1\}$ と置くと, $\omega \in E_k$ なら $kR \le |\omega|$ だから

$$\sum_{\omega\in E_k} |\omega|^{-s} \le 8k(kR)^{-a}. \quad \therefore \sum_{m,n}{}' |\Omega_{m,n}|^{-a} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\omega\in E_k} |\omega|^{-a} \le \frac{8}{R^a}\sum_{k=1}^{\infty} k^{-(a-1)} < \infty.$$

最後の評価で $a-1>1$ を用いた.

(2) $|\omega| \to \infty$ で $A = (2z\omega - z^2)\omega/(z-\omega)^2 \to 2z$ なので, $z \in \overline{D}$ なら $\omega \in \Omega'$ に依存しない定数 C で $|A| < C$ と評価できる. また $|z| \le R$ より, C は z に依存しない定数で置き換えられる. 従って (1) より

$$\sum_{\omega\in\Omega'} \left|(z-\omega)^{-2} - \omega^{-2}\right| < C\sum_{\omega\in\Omega'} \omega^{-3} < \infty.$$

この評価は z によらないので, 級数は絶対一様収束する.

(3) 前問の記号をそのまま使い, $R>0$ を固定する. $\sum_{\omega\in\Omega\cap\overline{D}}$ は有限和だから, $z\in\overline{D}$ に対して $\sum_{\omega\in\Omega} = \sum_{\omega\in\Omega\cap\overline{D}} + \sum_{\omega\in\Omega'}$ は絶対一様収束する. R は任意に取っていたので, これで広義絶対一様収束することが示せた.

問題 13.2.2. (1) $\wp'(z) = -2\sum_{m,n}(z-\Omega_{m,n})^{-3}$ より

$$\wp'(-z) = -2\sum_{m,n}(-z-\Omega_{m,n})^{-3} = 2\sum_{m,n}(z+\Omega_{m,n})^{-3} = 2\sum_{m,n}(z-\Omega_{m,n})^{-3} = -\wp'(z).$$

但し 3 番目の等号で添え字 (m,n) を $(-m,-n)$ に置き換えて $\Omega_{-m,-n} = -\Omega_{m,n}$ を用いた. よって $\wp'(z)$ は奇関数. すると $\wp(z)$ は奇関数の原始関数だから偶関数.

(2) $\Omega_{m,n} - 2\omega_1 = \Omega_{m-1,n}$ に注意して

$$\wp'(z+2\omega_1) = -2\sum_{m,n}(z+2\omega_1-\Omega_{m,n})^{-3} = -2\sum_{m,n}(z-\Omega_{m-1,n})^{-3} = -2\sum_{m,n}(z-\Omega_{m,n})^{-3} = \wp'(z).$$

(3) $j=1,2$ として, (2) を積分して $\wp(z+2\omega_j) - \wp(z) = c$ は定数. $z=-\omega_j$ として $c = \wp(\omega_j) - \wp(-\omega_j)$ だが, (1) より $\wp$ は偶関数なので $c=0$.

13.3 ペー関数が満たす微分方程式 (問題 95 ページ)

問題 13.3.1. (1) 一般二項定理から

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} = \frac{1}{\omega^2(1-z/\omega^2)^2} = \frac{1}{\omega^2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}\left(\frac{-z}{\omega^2}\right)^k = \frac{1}{\omega^2}\left(1+\frac{2z}{\omega^2}-\frac{3z^2}{\omega^4}+\frac{4z^3}{\omega^6}-\frac{5z^4}{\omega^8}+\cdots\right).$$

級数 $\wp(z)$ は広義一様収束するので, Weierstrass の二重級数定理が使えて, 無限和の順序が交換できる. このことと上の展開から結論が得られる. z の奇数次の項は $\Omega_{-m,-n} = -\Omega_{m,n}$ より消えることに注意する.

(2) $\wp(z) = z^{-2} + g_2 z^2/20 + g_3 z^4/28$ を 3 乗して

$$\wp^3(z) \;=\; z^{-6} + \frac{3}{20} g_2 z^{-2} + \frac{3}{28} g_3 + O(z^2).$$

同様に $\wp'(z) = -2z^{-3} + g_2 z/10 + g_3 z^3/7$ から

$$\wp'^2(z) \;=\; 4z^{-6} - \frac{2}{5} g_2 z^{-2} - \frac{4}{7} g_3 + O(z^2).$$

よって

$$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) \;=\; -g_2 z^{-2} - g_3 + O(z^2).$$

問題 13.3.2. 両辺を z で微分することで $(d\zeta/dz)^2 = 4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3$. これは Weierstrass の $\wp$ 関数 $\wp(z)$ の満たす微分方程式に他ならない. よって補題 13.3.4 より, もし $g_2 = 60\sum'_{m,n}\Omega_{m,n}^{-4}$, $g_3 = 140\sum'_{m,n}\Omega_{m,n}^{-6}$ と書けるなら, ζ は $\zeta = \wp(z+\alpha)$ と書ける. 但し α は積分定数. $\zeta \to \infty$ で $z \to 0$ となるから α は $\wp(z)$ の零点. よって $\alpha = \Omega_{k,l}$ と書ける.

問題 13.3.3. $z(\zeta)$ の定義式を微分して $(d\zeta/dz)^2 = 4(\zeta^3 - \zeta^2)$. ここで $\zeta(z) = 1/\sin^2 u$ で $u = u(z)$ を定義する。$y(u) := 1/\sin^2 u$ が $(dy/du)^2 = 4(y^3 - y^2)$ を満たすことから $(du/dz)^2 = 1$. よって積分定数 α を用いて $\zeta = 1/\sin^2 u = 1/\sin^2(\pm z + \alpha)$ と書ける。最後に $1/\sin^2 z$ が偶関数であることを用いて $\pm\alpha$ を α と書き直して結論を得る。

問題 13.3.4. ϕ の零点 a_k では, $\phi(z) = (z - a_k)^{r_k}\psi_k(z)$ と書けば $f(z)\phi'(z)/\phi(z) = f(a_k)r_k(z - a_k)^{-1} + (\text{正則部分})$ と書けるので, $\mathrm{Res}_{z=a_k} f(z)\phi'(z)/\phi(z) = r_k f(a_k)$. 同様に ϕ の極 b_k では $\mathrm{Res}_{z=b_k} f(z)\phi'(z)/\phi(z) = -s_k f(b_k)$. あとは留数定理より結論を得る.

問題 13.3.5. 問題の連立方程式の行列表示を考えると, $u \not\equiv \pm v \pmod{\Omega}$ なら小行列式が 0 でないことから結論が従う. 詳細は略す.

問題 13.3.6. $\Omega := \{\Omega_{m,n} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ をペー関数の周期格子とする. $u, v \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ かつ $u \not\equiv v \pmod{\Omega}$ であり, また $\wp'(u) = A\wp(u) + B$, $\wp'(v) = A\wp(v) + B$ であることを思い出しておく.

(1) (i) 定理 13.3.5 の証明から関数 $\wp'(z) - (A\wp(z) + B)$ は $z = u, v, -u - v$ を零点に持つ. 従って

$$f(z) \;=\; \big(\wp'(z) - (A\wp(z) + B)\big)\big(\wp'(z) + (A\wp(z) + B)\big)$$

も $z = u, v, -u - v$ を零点に持つ.

(ii) Weierstrass の微分方程式 $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ を f の $\wp'^2$ に代入すれば良い.

(iii) $A = \big(\wp'(u) - \wp'(v)\big)/\big(\wp(u) - \wp(v)\big)$ を $(\flat)$ に代入すれば良い.

(2) $z \notin \Omega$ で $\wp(z)$ や $\wp'(z)$ は正則なので

$$\lim_{w\to z} \frac{\wp'(z) - \wp(w)}{\wp(z) - \wp(w)} \;=\; \lim_{w\to z} \frac{\wp'(w) - \wp(z)}{w - z} \frac{w - z}{\wp(w) - \wp(z)} \;=\; \wp''(z) \cdot \frac{1}{\wp'(z)}$$

となる. これを用いて $(\sharp)$ の $\lim_{w\to z}$ を取れば結論が従う.

13.4 ペー関数の半周期での値 (問題 97 ページ)

問題 13.4.1. 前半: $e_1 = e_2$ なら $\wp(z) - e_1$ が $\omega_2 \not\equiv \omega_1 \pmod{\Omega}$ を零点に持ってしまうので矛盾する.
後半: $z = \omega_j$ を代入すれば $\wp'(\omega_i) = 0$ となることから従う.

問題 13.4.2. 実は $\wp$ 関数の加法公式の別形 $\wp(z+w) + \wp(z) + \wp(w) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z)-\wp'(w)}{\wp(z)-\wp(w)}\right)^2$ が成立する. よって $\wp(z+w) + \wp(z) + \wp(\omega_1) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z)}{\wp(z)-\wp(\omega_1)}\right)^2$. 一方 $\wp'(z)^2 = 4(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3)$ なので $\wp(z+\omega_1) = \frac{(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3)}{\wp(z)-e_1} - \wp(z) - e_1 = \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\wp(z)-e_1} + e_1$. $z = -\omega_1/2$ を代入して $\wp$ が偶関数であることから $\wp(\omega_1/2) = e_1 \pm ((e_1-e_2)(e_1-e_3))^{1/2}$.
同様に $\wp(z+\omega_2) = \frac{(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_3)}{\wp(z)-e_2} - \wp(z) - e_2$ が導けて, これに $\wp(\omega_1/2)$ を代入して後半の結果を得る.

13.5 Weierstrass のツェータ関数とシグマ関数 (問題 100 ページ)

問題 13.5.1. (1) $\zeta(z)$ の級数は広義絶対一様収束しているから項別積分できて, 積分定数を除いて $\sigma(z)$ が定まる. その定数は条件 $\lim_{z\to 0}\frac{\sigma(z)}{z} = 1$ より 0 だと分かる.
(2) (1) の無限積表示から明らか.

問題 13.5.2. $F(z) := \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{r_k}\frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!}c_{k,s}\zeta^{(s-1)}(z-a_k)$ とする. 準周期性 $\zeta(z+2\omega_j) = \zeta(z) + 2\eta_j$ から $F(z+2\omega_1) - F(z) = \sum_{k=1}^{n} 2\eta_1 c_{k,1}$. しかし $\sum_{k=1}^{n} c_{k,1}$ は基本領域内の $f(z)$ の極における留数の総和だから, 定理 13.1.1 (3) より 0. 同様に $F(z+2\omega_2) = F(z)$ も示せるので, $f(z) - F(z)$ は二重周期関数. しかしこれは $F(z)$ の定義より極を持たないので, 楕円関数に関する Liouville の定理 13.1.1 (4) より定数. それを c とおけば結論が得られる.

問題 13.5.3. (1) D を f の基本領域とし, $b'_1, \ldots, b'_m$ を D にある f の極とする. D の境界に正の向き付けを入れたものを C とすると, 補題 13.1.3 から $\int_C z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} s_j b'_j$. 但し s_j は極 b'_j の位数. 一方, C の頂点を t, $t+2\omega_1$, $t+2\omega_2$, $t+2\omega_1+2\omega_2$ とすると, 部分積分と f の周期性から $\int_C z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\left(-2\omega_2[\mathrm{Log}\, f(z)]_t^{t+2\omega_1} + 2\omega_1[\mathrm{Log}\, f(z)]_t^{t+2\omega_2}\right) = 2k\omega_1 + 2l\omega_2$ $(k, l \in \mathbb{Z})$ と書ける. そこで $b_1, \ldots, b_{n-1}$ を b'_1 が s_1 個, …, b'_{m-1} が s_{m-1} 個, b'_m が $s_m - 1$ 個となるように取り, $b_n := b'_m + 2k\omega_1 + 2l\omega_2$ と定めればよい.
(2) $F(z) := \prod_{r=1}^{n}\frac{\sigma(z-a_r)}{\sigma(z-b_r)}$ とすると, これは $f(z)$ と同じ極と零点を持つ. すると準周期性と (1) から $F(z+2\omega_1) = F(z)\cdot\prod_{r=1}^{n}\frac{\exp(2\eta_1(z-a_r))}{\exp(2\eta_1(z-b_r))} = F(z)\cdot\exp(2\eta_1(\sum_r a_r - \sum_r b_r)) = F(z)$. 同様に $F(z+2\omega_2) = F(z)$. よって $f(z)/F(z)$ は極も零点も持たない楕円関数で, 楕円関数に関する Liouville の定理 13.1.1 (4) より定数.

13.6 楕円積分 (問題 101 ページ)

問題 13.6.1. 略.

参考文献

[SS] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton lectures in Analysis Ⅱ, Princeton University Press (2003); 日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, **プリンストン解析学講義 Ⅱ 複素解析**, 日本評論社 (2009).

[川平] 川平友規, **入門 複素関数**, 裳華房 (2019). [Kindle 版有り]

[岸藤] 岸正倫, 藤本坦孝, **複素関数論**, 学術図書出版社 (1980).

[杉浦] 杉浦光夫, **解析入門 I**, 東京大学出版会 (1980).

以上です.