現代数学基礎 CⅢ　2024 年 1 月 25 日 定期試験解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

問題 1. 複素関数としての正接 (tangent) 関数を考える:

$$\tan z \coloneqq \frac{1}{i}\frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{\exp(iz)+\exp(-iz)}.$$

(1) 次の複素関数が $\tan z$ の逆関数であることを示せ. 但し Log は複素対数関数の主値である.

$$\operatorname{Arctan} z \coloneqq \frac{1}{2i}\operatorname{Log}\frac{i-z}{i+z}.$$

(2) $\operatorname{Log}(1+z)$ を $z=0$ を中心として Taylor 展開せよ.

(3) $\operatorname{Arctan} z$ を $z=0$ を中心として Taylor 展開せよ.

解答. (1) $w=\tan z$, $E \coloneqq \exp(iz)$ と置くと $iw=\frac{E-E^{-1}}{E+E^{-1}}$ から $E(1-iw)=E^{-1}(1-iw)$, つまり $E^2=\frac{1+iw}{1-iw}=\frac{i-w}{i+w}$. 両辺の対数の主値を取って $2iz=\operatorname{Log}\frac{i-w}{i+w}$. これから主張を得る.

(2) $\frac{d}{dz}\operatorname{Log}(1+z)=\frac{1}{1+z}=\sum_{n=1}^{\infty}(-z)^{n-1}$ で, これは $|z|<1$ で絶対一様収束するから項別積分できる. すると, $\operatorname{Log}(1)=0$ より

$$\operatorname{Log}(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n.$$

(3) 前 2 問より

$$\begin{aligned}\operatorname{Arctan} z &= \frac{1}{2i}\big(\operatorname{Log}(1-\tfrac{z}{i})-\operatorname{Log}(1+\tfrac{z}{i})\big)=\frac{1}{2i}\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big(\frac{z}{i}\Big)^n-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\Big(\frac{z}{i}\Big)^n\right)\\ &= \frac{-2}{2i}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\Big(\frac{z}{i}\Big)^{2m+1}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}z^{2m+1}.\end{aligned}$$

コメント. 各小問を 5 点として, 計 15 点満点で採点しました. 平均点は 10.5 点でした.

問題 2. 原点中心の単位円板を $D \coloneqq \{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$ と書き, $f\colon D\to\mathbb{C}$ を D 上の正則関数とする. また r を, $0<r<1$ を満たす実数とする.

(1) 原点中心で半径 r の円 $|z|=r$ に正の向きを付けた積分路を C と書く. 次の等式を示せ.

$$2f'(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)-f(-z)}{z^2}\,dz.$$

(2) 非負実数 d を $d\coloneqq\sup\{|f(z)-f(w)| \mid z,w\in D\}$ で定める. 次の不等式を示せ.

$$2\,|f'(0)|\le d.$$

解答. (1) 被積分関数 $F(z)\coloneqq\frac{f(z)-f(-z)}{z^2}$ は D 上の有理型関数だから留数定理が使える. 極は $z=0$ で, そこでの Laurent 展開は $F(z)=\frac{2f'(0)}{z}+$ (正則部分). よって $\frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)\,dz=\operatorname{Res}_{z=0}F(z)=2f'(0)$.

(2) $z\in C$ なら $|F(z)|=|f(z)-f(-z)|/r^2\le d/r^2$ なので, 複素積分の不等式評価から

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)\,dz\right|\le\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi r\cdot\sup\{|F(z)| \mid z\in C\}\le r\cdot\frac{d}{r^2}=\frac{d}{r}.$$

これと (1) から, $2\,|f'(0)|\le d/r$ が任意の $0<r<1$ に対して成立する. よって $2\,|f'(0)|\le d$.

コメント. 各小問を 10 点として, 計 20 点満点で採点しました. 各小問の配点は次の通りです.

(1) 留数定理が使えることの議論を 5 点, Laurent 展開を 5 点.

(2) 積分評価を 5 点, 後半の不等式処理を 5 点.

平均点は 10.7 点でした.

(1) は導関数の積分表示を用いて示すこともできます.

問題 3. 複素変数 z の正則関数

$$w = z + \frac{1}{z} \quad (z \neq 0)$$

を写像 $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto w$ とみなす.

(1) 複素数平面において原点中心で半径 r $(r > 0)$ の円周上を z が動くとき, w の軌跡 E_r が
- $r \neq 1$ なら楕円,
- $r = 1$ なら実軸上の閉区間 $[-2, 2]$

になることを示せ. $z = r\exp(i\theta) = r\cos\theta + ir\sin\theta$ と極座標表示すると良い.

(2) 領域 $D_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1/2\}$ 上で関数 $w = z + 1/z$ が等角写像を定めることを示せ.
また D_1 の像を求めよ.

(3) 原点を始点とする偏角 θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ の半直線 $\arg z = \theta$ 上を z が動くとき,
w の軌跡 H_θ が以下の様になることを示せ.
- $\theta \neq 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ なら双曲線の一部,
- $\theta = 0$ なら実軸上の半直線 $(2, \infty)$,
- $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ なら虚軸全体,
- $\theta = \pi$ なら実軸上の半直線 $(-\infty, -2)$.

(4) 領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg z < \pi\}$ 上で関数 $w = z + 1/z$ が等角写像を定めることを示せ.

解答. $w = u + iv$ と実部・虚部に分けると, $z = re^{i\theta}$ は $u = (r + 1/r)\cos\theta$, $v = (r - 1/r)\sin\theta$ に写る.

(1) $r \neq 1$ なら, u, v の式から θ を消去して楕円の方程式 $u^2/(r + 1/r)^2 + v^2/(r - 1/r)^2 = 1$ が得られる.
θ は $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲で動くから, w の軌跡 E_r はこの楕円である.
$r = 1$ なら $v = 0$, $u = 2\cos\theta$ だから, w の軌跡は $E_1 = [-2, 2]$.

(2) $|z| = r$ は E_r に単射に写り, また $0 < r \neq s < 1/2$ なら $E_r \cap E_s = \emptyset$ だから, 関数 $z + z^{-1}$ は D_1 上単射正則で, 特に等角写像.
D_1 の像は楕円 $E_{1/2} = E_2$ の外部, つまり $\{w = u + iv \in \mathbb{C} \mid u^2/(5/2)^2 + v^2/(3/2)^2 \geq 1\}$.

(3) $\cos\theta\sin\theta \neq 0$ なら u, v の式から r を消去して双曲線の方程式 $u^2/\cos^2\theta - v^2/\sin^2\theta = 4$ が得られる.
r は $r > 0$ の範囲を動くから, $\cos\theta > 0$ なら w の軌跡 H_θ は双曲線の右側 (正の実数側), $\cos\theta < 0$ なら H_θ は双曲線の左側 (負の実数側) である.
$\theta = 0$ なら $u = r + 1/r$, $v = 0$ なので, H_0 は 2 より大きい実数全体.
$\cos\theta = 0$ なら $u = 0$, $v = \pm(r - 1/r)$ なので, H_θ は虚数全体.
$\theta = \pi$ なら $u = -(r + 1/r)$, $v = 0$ なので, H_π は -2 より小さい実数全体.

(4) $\arg z = \theta$ は H_θ に単射に写り, また $0 < \theta \neq \phi < \pi$ なら $H_\theta \cap H_\phi = \emptyset$ だから, 関数 $z + z^{-1}$ は問題の領域上で単射正則. よって等角写像である.

コメント. (1) と (2) を 10 点, (3) と (4) を 5 点として, 計 30 点満点で採点しました. 平均点は 9.0 点でした.

(1) は $w = r\cos\theta$ が楕円の極座標表示であることからも従います.

問題 4. 複素積分を利用して, 次の実積分 I を求めよう. 但し a は正の実数である.

$$I := \int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2+x^4}\,dx.$$

(1) $f(z) := \dfrac{\exp(iaz)}{1+z^2+z^4}$ と置く. 上半平面 $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ における $f(z)$ の極が 2 つあることを示せ. また, それらの位数を求めよ.

(2) 前問の極における $f(z)$ の留数が以下の様になることを示せ.

$$\frac{\pm 1}{2\sqrt{3}} \exp\Bigl(-\frac{\sqrt{3}}{2}a\Bigr) \exp\Bigl(\mp i\Bigl(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6}\Bigr)\Bigr) \quad \text{(複号同順)}.$$

(3) 下図の様な, 実軸上の区間 $[-R, R]$ と半円 C_R からなる反時計回りの積分路 C 上での複素積分

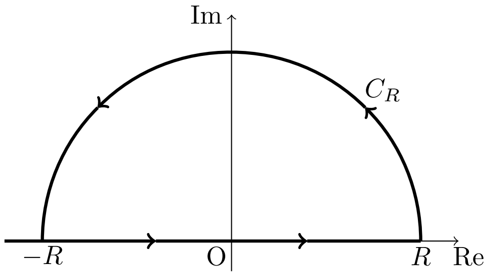
$$\int_C f(z)\,dz$$

を考える. $R > 1$ の時に, この複素積分の値を求めよ.

(4) 次の等式を示せ.

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0.$$

(5) 以上から I の値を求めよ.



解答. (1) $f(z)$ の分子 $\exp(iaz)$ は整関数だから, 極は分母 $1+z^2+z^4$ が 0 になる所で, そこでは

$$z^6 - 1 = (z^2-1)(z^4+z^2+1) = 0.$$

よって $f(z)$ の極は 1 の 6 乗根 $\exp(n\pi i/3)$ $(n \in \mathbb{Z})$ のうち上半平面にある

$$\beta := \exp(\pi i/3) = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \quad \gamma := \beta^2 = \exp(2\pi i/3) = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}.$$

$1+z^2+z^4 = \prod_{j=1}^4 (z-\beta^j)$ より β, γ 共に位数 1 である.

(2) $z = \beta$ は位数 1 の極だから, 留数は $\operatorname{Res}_{z=\beta} f(z) = \lim_{z\to\beta}(z-\beta)f(z)$. l'Hopital の定理を使うと

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=\beta} f(z) &= \lim_{z\to\beta} \frac{(z-\beta)\exp(iaz)}{1+z^2+z^4} = \lim_{z\to\beta} \frac{\bigl((z-\beta)\exp(iaz)\bigr)'}{(1+z^2+z^4)'} = \frac{\exp(ia\beta)}{4\beta^3+2\beta} \\
&= \frac{\exp(ia\beta)}{-4+2\beta} = \frac{1}{-3+\sqrt{3}i} \exp\Bigl(\frac{ia}{2} - \frac{\sqrt{3}a}{2}\Bigr) = \frac{-1}{2\sqrt{3}} \exp\Bigl(-\frac{\sqrt{3}}{2}a\Bigr) \exp\Bigl(+i\Bigl(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6}\Bigr)\Bigr).
\end{aligned}$$

$z = \gamma$ での留数も, 前半は全く同様で,

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=\gamma} f(z) &= \frac{\exp(ia\gamma)}{4\gamma^3+2\gamma} = \frac{\exp(ia\gamma)}{4+2\gamma} = \frac{1}{3+\sqrt{3}i} \exp\Bigl(-\frac{ia}{2} - \frac{\sqrt{3}a}{2}\Bigr) \\
&= \frac{+1}{2\sqrt{3}} \exp\Bigl(-\frac{\sqrt{3}}{2}a\Bigr) \exp\Bigl(-i\Bigl(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6}\Bigr)\Bigr).
\end{aligned}$$

(3) $f(z)$ は積分路 C とその内部を含む領域において有理型関数だから, 留数定理が適用できて

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= 2\pi i\Bigl(\operatorname*{Res}_{z=\beta} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\gamma} f(z)\Bigr)\\ &= \frac{\pi i}{\sqrt{3}}\exp\Bigl(-\frac{\sqrt{3}}{2}a\Bigr)\Bigl[\exp\Bigl(+i\Bigl(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6}\Bigr)\Bigr) - \exp\Bigl(-i\Bigl(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6}\Bigr)\Bigr)\Bigr]\\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\exp\Bigl(-\frac{\sqrt{3}}{2}a\Bigr)\sin\Bigl(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6}\Bigr).\end{aligned}$$

(4) $J \coloneqq \int_{C_R} f(z)\,dz$ と置く. $C_R = \{z\in\mathbb{C} \mid |z| = R,\ 0\le \arg(z)\le\pi\}$ だから

$$|J| \le \ell(C_R)\cdot\sup\{|f(z)| \mid z\in C_R\} \le \pi R\cdot\frac{1}{R^4-R^2-1}\sup\{\bigl|e^{iz}\bigr| \mid z\in C_R\}.$$

$z\in C_R$ を $z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ と表すと, $e^{iz} = e^{-R\sin\theta}e^{iR\cos\theta}$ だから $\sup\{\bigl|e^{iz}\bigr| \mid z\in C_R\}\le 1$.
また, 十分大きい R に対して $R^4-R^2-1\ge R^4/2$ だから

$$|J| \le \pi R\cdot\frac{2}{R^4-R^2}\cdot 1 = \frac{2\pi}{R^4} \xrightarrow{R\to\infty} 0. \quad \therefore \lim_{R\to\infty} J = 0.$$

(5) (3) で極限 $R\to\infty$ を取って (4) を使うと

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\exp\Bigl(-\frac{\sqrt{3}}{2}a\Bigr)\sin\Bigl(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6}\Bigr).$$

この右辺が実数であることと, I の被積分関数が偶関数であることから

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\,f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2+x^4}\,dx = 2I.$$

以上から

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\exp\Bigl(-\frac{\sqrt{3}}{2}a\Bigr)\sin\Bigl(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6}\Bigr).$$

コメント. 各小問を 10 点として, 計 50 点満点で採点しました. 小問の配点は以下の通りです.

(1) β と γ の決定を 5 点, 位数の決定を 5 点.

(2) $\mathrm{Res}_{z=\beta} f(z) = \frac{\exp(ia\beta)}{4\beta^3+3\beta}$ 及び γ に関して同様の部分を 5 点, 残りを 5 点.

(3) Cauchy の積分定理を適用できる理由に 5 点, 残りを 5 点.

(4) 4 か所の不等式評価と最後の極限の議論をそれぞれ 2 点.

(5) 実部を取る部分を 5 点, 偶関数であることを使う部分を 5 点.

平均点は 22.2 点でした.

全体のコメント

計 $15+20+30+50 = 115$ 点で採点しました. 平均点は $10.5+10.7+9.1+22.2 = 52.4$ 点でした. 答案 1 枚目の名前欄の横に xx 点と書いてあるのが点数です. 得点分布は次の通りです.

得点	–29	30–49	50–69	70–89	90–
人数	7	21	23	10	3

成績の付け方

中間試験の得点を m, 定期試験 (期末試験) の得点を f として,

$$t \coloneqq \begin{cases} f & (f \geq m) \\ (f+m)/2 & (f < m) \end{cases}$$

を返却答案の名前の横に丸で囲って書きました. $t = f$ の場合は f を丸で囲ってあります. t の値によって以下の表の様に成績を付けます.

t	–39	40–59	60–74	75–89	90–
成績	C−	C	B	A	A+
人数	12	18	22	8	4

今回の試験の採点や成績に関すること, その他質問・相談を受け付けますので, 気兼ねなくメールして下さい.

以上です.