現代数学基礎 CⅢ　1 月 18 日分課題解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

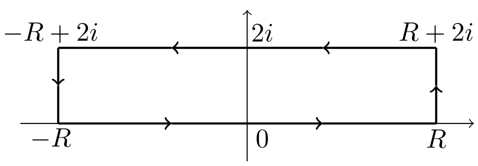
問題. $\cosh \pi x = \frac{1}{2}(\exp(\pi x) + \exp(-\pi x))$ の Fourier 変換を導出しよう.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-2\pi i x\xi)}{\cosh \pi x}\, dx = \frac{1}{\cosh \pi\xi} \quad (\xi \in \mathbb{R}). \tag{$*$}$$

(1) $\xi \in \mathbb{R}$ を固定し, 複素関数 $f(z) := \exp(-2\pi i\xi z)/\cosh \pi z$ を考える. 下図の積分路 C による複素積分 $\int_C f(z)\, dz$ を求めよ.

(2) 複素積分 $I_r := \int_R^{R+2i} f(z)\, dz$ と $I_l := \int_{-R+2i}^{-R} f(z)\, dz$ が共に $R \to \infty$ で 0 に収束することを示せ.

(3) 複素積分 $\int_C f(z)\, dz$ の $R \to \infty$ における極限を考えて, $(*)$ を導出せよ.



解答. (1) $f(z)$ の分子 $e^{-2\pi i\xi z}$ は整関数だから, 極は分母が 0 になる所, つまり $e^{2\pi z} = -1$ である所で, 積分路の内部では $\alpha := i/2$ と $\beta := 3i/2$. $z = \alpha$ での留数は, 極の位数が 1 だから

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=\alpha} f(z) &= \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z) = \lim_{z\to\alpha} e^{-2\pi i z} e^{\pi z}\frac{2(z-\alpha)}{e^{2\pi z}+1} = 2e^{-2\pi i\xi\alpha}e^{\pi\alpha}\lim_{z\to\alpha}\frac{(z-\alpha)}{e^{2\pi z}-e^{2\pi\alpha}} \\ &= 2e^{-2\pi i\xi\alpha}e^{\pi\alpha}\Big(\big(e^{2\pi z}\big)'\Big|_{z=\alpha}\Big)^{-1} = 2e^{\pi\xi} i(2\pi e^{2\pi\alpha})^{-1} = e^{\pi\xi}/(\pi i).\end{aligned}$$

同様に $z = \beta$ では $\operatorname{Res}_{z=\beta} f(z) = 2e^{-2\pi i\xi\beta}e^{\pi\beta}\Big(\big(e^{2\pi z}\big)'\Big|_{z=\beta}\Big)^{-1} = -e^{3\pi\xi}/(\pi i)$. よって留数定理から

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i\big(e^{\pi\xi}/(\pi i) - e^{3\pi\xi}/(\pi i)\big) = 2(e^{\pi\xi} - e^{3\pi\xi}).$$

(2) まず $I_r = \int_R^{R+2i} f(z)\, dz$ について. $z = R + iy$, $y \in [0,2] \subset \mathbb{R}$ とすると, 十分大きい R に対して

$$|f(z)| \le \frac{2\left|e^{2\pi\xi z}\right|}{|e^{\pi z}| - |e^{-\pi z}|} \le \frac{2e^{2\pi|\xi|y}}{e^{\pi R} - e^{-\pi R}} \le \frac{2e^{4\pi|\xi|}}{e^{\pi R} - e^{-\pi R}}$$

なので $|I_r| \le 2\sup\{|f(z)|\,;\, z \in [R, R+2i]\} \le \frac{4e^{4\pi|\xi|}}{e^{\pi R}-e^{-\pi R}} \xrightarrow{R\to\infty} 0$.
同様に, $z = -R + iy$, $y \in [0,2]$ なら $|f(z)| \le 2e^{4\pi|\xi|}/(e^{\pi R} - e^{-\pi R})$ なので, $R \to \infty$ で $|I_l| \to 0$.

(3) 積分路の下辺での積分を $I_R := \int_{-R}^{R} f(x)\, dx$ と置くと, $f(z+2i) = \exp(4\pi\xi)f(z)$ より, 上辺での積分は $\int_{R+2i}^{-R+2i} f(z)\, dz = -e^{4\pi\xi}I_R$. よって (1) で $R \to \infty$ として,

$$(1 - e^{4\pi\xi})I_\infty = -2(e^{2\pi\xi} - 1). \quad \therefore I_\infty = 2\frac{1-e^{2\pi\xi}}{1-e^{4\pi\xi}} = \frac{2}{e^{\pi\xi}+e^{-\pi\xi}} = \frac{1}{\cosh \pi\xi}.$$

コメント. 留数定理を使うところで 1 点, $R \to \infty$ での評価で 1 点, 残り 1 点の計 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.4 点でした.

以上です.