現代数学基礎 CIII　1 月 18 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023WC3.html

問題 13.1 (講義ノート問題 13.2.1)**.** 二重級数 $\wp(z) \coloneqq z^{-2} + \sum'_{m,n} \bigl((z-\Omega_{m,n})^{-2} - \Omega_{m,n}^{-2}\bigr)$ が広義絶対一様収束すること, 以下の段階を踏んで示せ.

(1) $\sum'_{m,n} |\Omega_{m,n}|^{-a}$ は $a > 2$ なら収束することを示せ. $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し, $2k(\pm\omega_1 \pm \omega_2)$ を頂点とする平行四辺形の辺上にある Ω の点 ($8k$ 個ある) 全体を E_k として, $\sum'_{m,n} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\omega \in E_k}$ と考えると良い.

(2) $R > 0$ を固定して $\overline{D} \coloneqq \{w \in \mathbb{C}; |w| \leq R\}$, $\Omega' \coloneqq \Omega \setminus \overline{D}$ と置く. $(z-\omega)^{-2} - \omega^{-2} = A/\omega^3$, $A \coloneqq (2z\omega - z^2)\omega/(z-\omega)^2$ とすることで, $z \in \overline{D} \setminus \Omega$ について $\sum_{\omega \in \Omega'} ((z-\omega)^{-2} - \omega^{-2})$ が絶対一様収束することを示せ.

(3) 主張を示せ.

問題 13.2 (講義ノート問題 13.3.1)**.** $\wp(z) = z^{-2} + \frac{1}{20} g_2 z^2 + \frac{1}{28} g_3 z^4 + (6\ 次以上)$, $\wp'(z) = -2z^{-3} + \frac{1}{20} g_2 z + \frac{1}{7} g_3 z^3 + (5\ 次以上)$ から $\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + g_2 \wp(z) + g_3 = (2\ 次以上)$ を導け.

問題 13.3. $\zeta(z) = z^{-1} + \sum'_{m,n} \bigl((z-\Omega_{m,n})^{-1} + \Omega_{m,n}^{-1} + z\Omega_{m,n}^{-2}\bigr)$ が奇関数である事を示せ.

問題 13.4. $\sigma(z) = z \prod'_{m,n} \bigl((1 - z\Omega_{m,n}^{-1}) \exp(z\Omega_{m,n}^{-1} + z^2(2\Omega_{m,n})^{-2})\bigr)$ が奇関数である事を示せ.

解答 13.1. (1) $R := \min\{|\omega|\,;\omega\in E_1\}$ と置くと, $\omega\in E_k$ なら $kR\le|\omega|$ だから

$$\sum_{\omega\in E_k}|\omega|^{-s}\le 8k(kR)^{-a}.\quad \therefore \sum_{m,n}{}' |\Omega_{m,n}|^{-a}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\omega\in E_k}|\omega|^{-a}\le\frac{8}{R^a}\sum_{k=1}^{\infty}k^{-(a-1)}<\infty.$$

最後の評価で $a-1>1$ を用いた.

(2) $|\omega|\to\infty$ で $A=(2z\omega-z^2)\omega/(z-\omega)^2\to 2z$ なので, $z\in\overline{D}$ なら $\omega\in\Omega'$ に依存しない定数 C で $|A|<C$ と評価できる. また $|z|\le R$ より, C は z に依存しない定数で置き換えられる. 従って (1) より

$$\sum_{\omega\in\Omega'}\left|(z-\omega)^{-2}-\omega^{-2}\right|<C\sum_{\omega\in\Omega'}\omega^{-3}<\infty.$$

この評価は z によらないので, 級数は絶対一様収束する.

(3) 前問の記号をそのまま使い, $R>0$ を固定する. $\sum_{\omega\in\Omega\cap\overline{D}}$ は有限和だから, $z\in\overline{D}$ に対して $\sum_{\omega\in\Omega}=\sum_{\omega\in\Omega\cap\overline{D}}+\sum_{\omega\in\Omega'}$ は絶対一様収束する. R は任意に取っていたので, これで広義絶対一様収束することが示せた.

解答 13.2. $\wp(z)=z^{-2}+g_2z^2/20+g_3z^4/28$ を 3 乗して

$$\wp^3(z)=z^{-6}+\frac{3}{20}g_2z^{-2}+\frac{3}{28}g_3+(2\text{ 次以上}).$$

同様に $\wp'(z)=-2z^{-3}+g_2z/10+g_3z^3/7$ から

$$\wp'^2(z)=4z^{-6}-\frac{2}{5}g_2z^{-2}-\frac{4}{7}g_3+(2\text{ 次以上}).$$

よって

$$\wp'^2(z)-4\wp^3(z)=-g_2z^{-2}-g_3+(2\text{ 次以上})$$

となって, これから主張が従う.

解答 13.3. $\zeta(-z)$ の和の添え字を $(m,n)\mapsto(-m,-n)$ と置き換える.

解答 13.4. $\sigma(-z)$ の積の添え字を $(m,n)\mapsto(-m,-n)$ と置き換える.