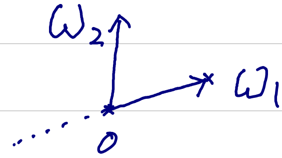
§13 楕円函数　　1・18・1.

§13.1. 二重周期函数

Dfn. $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\mathrm{Im}\,\omega_2/\omega_1 > 0$　　☆期末アンケート



(1) 周期 $2\omega_1, 2\omega_2$ の二重周期函数 f

:⟺ $\mathbb{C}$ 上の有理型函数, $\forall z \in$(定義域)

$f(z+2\omega_j) = f(z)$ $(j=1,2)$

(2) 楕円函数 :⟺ 定数ではない二重周期函数 □

Dfn. f: 周期 $2\omega_1, 2\omega_2$ の二重周期函数

(1) 周期格子 $\Omega := 2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z} = \{2m\omega_1 + 2n\omega_2 \mid m,n\in\mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$

($\because$ $\forall \omega\in\Omega$, $\forall z \in$(定義域) $f(z+\omega) = f(z)$)

(2) 基本領域: $\mathbb{C}$ の平行四辺形の内部 s.t.　　基本領域は開集合.

頂点は $\exists t$, $t+2\omega_1$ $t+2\omega_2$ $t+2\omega_1+2\omega_2$ & 周上に f の極はない □

Thm. 13.1.1. f: 二重周期函数, D: 基本領域

(1) D にある f の極の数は有限個

(2) $f \not\equiv 0$ なら, D 〃 零点 〃

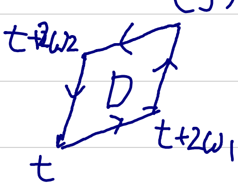
(3) $\sum_{p\in\Omega, 極} \mathrm{Res}_{z=p} f(z) = 0$

(4) D に極を持たない f は定数 (楕円函数に関するLiouvilleの定理)

☺ (1) 無限にあるとBolzano-Weierstrassから $\exists$ 集積点 $\in \overline{D}$ (Dの閉包). 有理型と矛盾.

(2) $1/f(z)$ に(1)を適用

(3) 留数定理から $2\pi i \sum_p \mathrm{Res}_{z=p} f(z) = \int_{\partial D^+} f(z)\,dz$　　境界 ∂D に正の向き付け.



$= \left(\int_t^{t+2\omega_1} + \int_{t+2\omega_1}^{t+2\omega_1+2\omega_2} + \int_{t+2\omega_1+2\omega_2}^{t+2\omega_2} + \int_{t+2\omega_2}^{t}\right) f(z)\,dz$

$= \int_t^{t+2\omega_1} (f(z) - f(z+2\omega_2))\,dz - \int_t^{t+2\omega_2} (f(z) - f(z+2\omega_1))\,dz$

$= 0 - 0 = 0$

(4) $f(z)$ は $\overline{D}$ 上正則なので, $|f(z)|$ は $\overline{D}$ 上連続. $\overline{D}$ はコンパクトだから $|f(z)|$ は最大値を持つ. 二重周期性より f は有界な整函数. □

Prp. 3.1.2. f: 楕円函数, D: fの基本領域, $c \in \mathbb{C}$
Dでの $f(z)=c$ の解の, 重複度込みの個数は cによらない.

(∵) $g(z) := f(z)-c$. 偏角の原理 (定理8.2.1) から
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = (gの零点の位数の和) - (gの極の位数の和)$$
$$= (f(z)=cの重複度込みの解の個数) - (fの極の位数の和)$$
gは二重周期函数だから, Thm.(3)と同様に 左辺は0. □

Dfn. 楕円函数 fの位数 := Prp.の解の個数, □
= Dでのfの零点の位数の和 = Dでの極の位数の和

Thm. 13.1.3. 楕円函数fの位数は2以上.
(∵) D: fの基本領域. fの位数が1なら $\exists w \in D$, 位数1のfの極.
かつ, それ以外にDでの極はない.
すると $\sum_{p\in D 極} \mathrm{Res}_{z=p} f(z) = \mathrm{Res}_{z=w} f(z) \neq 0$ で Thm.13.1.1.(3)と矛盾. □

⇝ 最も"単純な"楕円函数は位数2のもの. つまり基本領域内に
- 位数2の極が1つ　又は　◦ 位数1の極が2つ.

前者の例が $\wp(z)$

§13.2. Weierstrass のペー函数

Dfn. ω_1, ω_2: 以前と同じ.
$$\wp(z\,|\,\omega_1,\omega_2) = \wp(z) := z^{-2} + \sum_{m,n}{}' \left((z-\Omega_{m,n})^{-2} - \Omega_{m,n}^{-2}\right)$$
但し $\Omega_{m,n} := 2m\omega_1 + 2n\omega_2$
$$\sum_{m,n}{}' := \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}$$
□

問1. $^\forall z \in \mathbb{C}\setminus\Omega$, $\wp(z)$は絶対一様収束.

$\wp(z)$は$\mathbb{C}$上の有理型函数．極の集合はΩで，全て2位．

<u>Lem.</u> 13.2.1. (1) $\wp'$は奇函数，$\wp$は偶函数

(2) $\wp'(z+2\omega_j) = \wp'(z)$ $(j=1,2)$

(3) $\wp(z+2\omega_j) = \wp(z)$ (〃) $\square$

<u>Thm.</u> 13.2.2. $\wp(z)$は周期$2\omega_1, 2\omega_2$の2位の楕円函数：Weierstrassの$\wp$函数．

$\wp'(z)$は ―〃― 3位の―〃―． $\square$

(Lemの証明) $\wp$は項別微分できて $\wp'(z) = -2\sum_{m,n}(z-\Omega_{m,n})^{-3}$． ↓ $\sum_{m,n\in\mathbb{Z}^2}$

(1) $\wp'(-z) = +2\sum_{m,n}(z+\Omega_{m,n})^{-3} = 2\sum_{m,n}(z-\Omega_{-m,-n})^{-3}$

$= 2\sum_{k,l}(z-\Omega_{k,l})^{-3} = -\wp'(z)$

$\wp$は奇函数$\wp'$の原始函数だから偶函数．

(2) $\wp'(z+2\omega_1) = -2\sum(z-(\Omega_{m,n}-2\omega_1))^{-3} = -2\sum_{m,n}(z-\Omega_{m-1,n})^{-3}$

$= -2\sum_{m,n}(z-\Omega_{m,n})^{-3} = \wp'(z)$． ω_2も同様．

(3) (2)より $\wp(z+2\omega_j) - \wp(z) = c$：定数．

$z=-\omega_j$：$c = \wp(+\omega_j) - \wp(-\omega_j)$ は(1)より0． $\square$

§13.3. Weierstrassの微分方程式．

<u>Thm.</u> 13.3.3. $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\cdot\wp(z) - g_3$．

$g_2 := 60\sum'_{m,n}\Omega_{m,n}^{-4}$, $g_3 := 140\sum'_{m,n}\Omega_{m,n}^{-6}$

(∵) $\wp(z) = z^{-2} + \sum'_{m,n}\left((z-\Omega_{m,n})^{-2} - \Omega_{m,n}^{-2}\right)$

$(z-\Omega_{m,n})^{-2} = (1-z/\Omega_{m,n})^{-2}\cdot\Omega_{m,n}^{-2}$ $\quad \binom{-2}{k} = \frac{1}{k!}\underbrace{(-2)(-3)\cdots(-2-k+1)}_{k個}$

$= \Omega_{m,n}^{-2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}(-z/\Omega_{m,n})^k$ 一般2項定理

$= \Omega_{m,n}^{-2} + \circledast z + 3\cdot\Omega_{m,n}^{-4}z^2 + \circledast\cdot z^3 + 5\Omega_{m,n}^{-6}z^4 + \cdots$

$\wp$は偶. $\therefore \wp(z)=z^{-2}+\frac{1}{20}g_2z^2+\frac{1}{28}g_3z^4+$ (6次以上)

$\wp'(z)=-2z^{-3}+\frac{1}{10}g_2z+\frac{1}{7}g_3z^3+$ (5次以上)

$\Rightarrow f(z):=\wp'(z)^2-4\wp(z)^3+g_2\wp(z)+g_3=$ (2次以上) 問2.

fは$z=0$で正則. Lem. 13.2.1.より f は二重周期函数. $\therefore \forall z\in\Omega$で正則

$\wp$の定義式より f の極は Ωにしかないから、fは極を持たない二重周期函数.

Thm. 13.1.1. (4) より $\forall z\in\mathbb{C}$ $f(z)=f(0)=0$. $\square$

Cor. $\omega_3:=-\omega_1-\omega_2$, $e_j:=\wp(\omega_j)$ $(j=1,2,3)$

(Thm. 13.4.1) e_j達は tの方程式 $4t^3-g_2t-g_3=0$ の解.

∵ $\wp'$は奇. $\therefore \wp'(\omega_j)=-\wp'(-\omega_j)=-\wp'(-\omega_j+2\omega_j)=-\wp'(\omega_j)$ Ω

$\therefore \wp'(\omega_j)=0$.

Weierstrassの微分方程式から $4e_j^3-g_2e_j-g_3=0$. $\square$

§13.5. Weierstrassのツェータ函数とシグマ函数

Dfn. $\zeta(z):=z^{-1}+\sum'_{m,n}\left((z-\Omega_{m,n})^{-1}+\Omega_{m,n}^{-1}+z\cdot\Omega_{m,n}^{-2}\right)$

: Weierstrassのツェータ函数. $\square$

Lem. $\zeta(z)$は$\mathbb{C}$上の有理型函数を定め、次をみたす.

$\zeta'(z)=-\wp(z)$, $\lim_{z\to 0}(\zeta(z)-z^{-1})=0$.

∵ $-\int_0^z(\wp(z)-z^{-2})dz=-\int_0^z\sum'_{m,n}\left((z-\Omega_{m,n})^{-2}-\Omega_{m,n}^{-2}\right)dz$

Σ'は一様収束 $=-\sum'_{m,n}\int_0^z\cdots dz=\sum'_{m,n}\left((z-\Omega_{m,n})^{-1}+\Omega_{m,n}^{-1}+\Omega_{m,n}^{-2}z\right)$

$=\zeta(z)-z^{-1}$. $\square$

問3: $\zeta(z)$は奇函数.

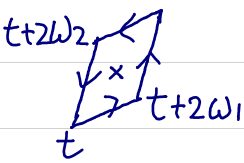
Prp. (準周期性) $\zeta(z+2\omega_j)=\zeta(z)+2\eta_j$, $\eta_j:=\zeta(\omega_j)$ $(j=1,2)$

13.5.1. ∵ $\wp(z+2\omega_j)=\wp(z)$を積分して $\zeta(z+2\omega_j)-\zeta(z)=C$:定数.

$z=-\omega_j$ として. $\zeta(z)=-\zeta(-z)$ より. $\square$

Thm. (Legendre関係式) $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \pi i/2$

∵ $\int_{\partial D_t}\zeta(z) = \mathrm{Res}_{z=0}\,\zeta(z)\times 2\pi i = 2\pi i$



$$= \int_t^{t+2\omega_1}(\zeta(z)-\zeta(z+2\omega_2))\,dz - \int_t^{t+2\omega_2}(\zeta(z)-\zeta(z+2\omega_1))\,dz$$

$$= 2\omega_1\cdot(-2\eta_2) - 2\omega_2\cdot(-2\eta_1) \qquad \square$$

$\prod_{m,n\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}$

Dfn. $\sigma(z) := z\prod'_{m,n}\left(\left(1-\frac{z}{\Omega_{m,n}}\right)\cdot\exp\left(\frac{z}{\Omega_{m,n}}+\frac{z^2}{2\Omega_{m,n}^2}\right)\right).$

Lem. 13.5.3. σは整函数を定め，次を満たす。

$$(\mathrm{Log}\,\sigma(z))' = \zeta(z),\quad \lim_{z\to 0}\frac{\sigma(z)}{z} = 1.$$

∵ ζの時と同様に、$\int_0^z(\zeta(z)-z^{-1})\,dz$ が項別積分できて、$\mathrm{Log}\,\sigma(z)$が定数を除いて決まる。lim.より $\sigma(z)$が一意に決まる。 □

問4. σは奇函数。

Thm. 13.5.4. (準周期性) $\sigma(z+2\omega_j) = -\exp(2\eta_j(z+\omega_j))\,\sigma(z)\quad (j=1,2)$

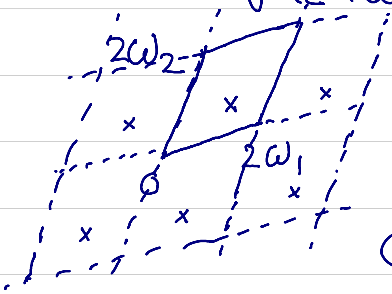
∵ $\zeta(z+2\omega_j)=\zeta(z)+2\eta_j$ を積分。 $\sigma(z+2\omega_j) = c\cdot e^{2\eta_j z}\sigma(z)$.

$z=-\omega_j$, σ:奇.より $c = -e^{2\eta_j\omega_j}$ □

Weierstrass函数	$\wp(z)$	$\zeta(z)$	$\sigma(z)$
	$\wp=-\zeta'$	$\zeta=\sigma'/\sigma$	
$\Omega=2\omega_1\mathbb{Z}+2\omega_2\mathbb{Z}$	2位極	1位極	1位零点
偶奇	偶	奇	奇
三角函数 $\Omega=2\pi\mathbb{Z}$	$1/\sin^2 z$	$\cos z/\sin z$ $=\cot z$	$\sin z$
有理函数 $\Omega=\{0\}$	$1/z^2$	$1/z$	z

Rmk. (℘関数と複素トーラスの射影埋め込み)

$\wp(z+\omega_{m,n})=\wp(z)$, $\wp'(z+\omega_{m,n})=\wp'(z)$, $\forall m,n\in\mathbb{Z}$ $\quad(*)$



$\mathbb{C}\ni z,w$. $z\sim w :\Leftrightarrow z-w\in\Omega=\{\Omega_{m,n}\mid m,n\in\mathbb{Z}\}$

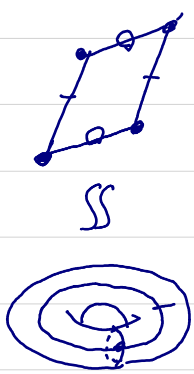
$\sim$は同値関係.

$\mathbb{C}\twoheadrightarrow \mathbb{C}/\sim =: \mathbb{C}/\Omega$: 複素トーラス

$z \mapsto [z]$

$(*) \Rightarrow$ $\wp$, $\wp'$ は $\mathbb{C}/\Omega$ 上 well-defined.

$\wp([z]) := \wp(z)$



$\mathbb{C}/\Omega$:

$X=(x_0,x_1,x_2)$, $Y=(y_0,y_1,y_2)\in\mathbb{C}^3\setminus\{(0,0,0)\}$

$X\sim' Y :\Leftrightarrow \exists c\in\mathbb{C},\ \forall j=1,2,3,\ x_j=cy_j$.

$\sim'$は同値関係

$\mathbb{C}^3\setminus\{(0,0,0)\}\twoheadrightarrow(\mathbb{C}^3\setminus\{(0,0,0)\})/\sim' =: \mathbb{CP}^2 = \mathbb{C}^2\cup\{\infty\}$

$(x_0,x_1,x_2)\mapsto[x_0,x_1,x_2]$ 複素射影平面

c.f. $\mathbb{CP}^1=\tilde{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$

$\varphi: \mathbb{C}/\Omega \hookrightarrow \mathbb{CP}^2$: 単射

$$z \mapsto \begin{cases} [1,\wp(z),\wp'(z)] & z\notin\Omega \\ [0,0,1]=\infty & z\in\Omega \end{cases}$$

$\mathrm{Im}\,\varphi=\{[x_0,x_1,x_2]\in\mathbb{CP}^2 \mid x_0x_2^2=4x_1^3-g_2x_0^2x_1-g_3x_0^3\}$

射影曲線.