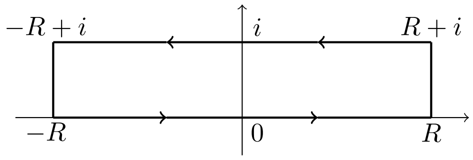
# 現代数学基礎 CⅢ　1 月 11 日分課題解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

**問題.** 図の積分路 $C$ での複素積分 $\int_C \exp(-z^2)\,dz$ と Gauss 積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ を利用して, 次の実積分の値を求めよ.

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2x)\,dx.$$




**解答.** $f(z) := \exp(-z^2)$ は整関数なので, 留数定理より $\int_C f(z)dz = 0$. $\int_R^{R+i} f(z)dz$ は

$$\left|\int_R^{R+i} f(z)\,dz\right| \le 1\cdot\sup\{|f(R+iy)| \mid 0\le y\le 1\} = \sup\{\left|\exp(-R^2+y^2-2iRy)\right| \mid 0\le y\le 1\} = e^{-R^2}$$

より $R\to\infty$ で 0 に収束する. $\int_{-R+i}^{-R} f(z)\,dz$ も同様. よって $\int_C f(z)dz = 0$ で $R\to\infty$ として

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x+i)\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx - 2e\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2x\,dx.$$

従って求める積分は

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2x\,dx = e^{-1}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2e}.$$

**コメント.** 留数定理を使うところで 1 点, $R\to\infty$ での評価で 1 点, 残り 1 点の計 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.4 点でした.

**以上です.**