現代数学基礎 CIII　1 月 11 日分演習問題

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
連絡先: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2023WC3.html

問題 12.1 (講義ノート問題 12.2.2)**.** $a \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し, 次の二条件を満たす複素関数 f の集合を $\mathfrak{F}_a$ と書く.

(i) f は水平帯 $S_a := \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z)| < a\}$ 上の正則関数である.

(ii) 定数 $A \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して, 任意の $z = x + iy \in S_a$ に対し $|f(z)| \le A/(1+x^2)$.

各 $f \in \mathfrak{F}_a$ と $\xi \in \mathbb{R}$ に対し, 積分

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi}\, dx \in \mathbb{C}$$

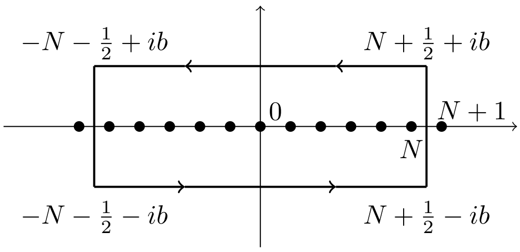
が意味を持つ. こうして得られる複素数値の実関数 $\widehat{f} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を f の **Fourier 変換**と呼ぶ. この時,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)$$

が成立することを, 以下の手順で示せ. この等式を **Poisson 和公式**と呼ぶ.

(1) $f \in \mathfrak{F}_a$ と仮定し, $0 < b < a$ なる実数 b を固定する. N を正の整数として, 下図のような積分路 C_N 上で $f(z)/(e^{2\pi i z} - 1)$ を積分することにより, 次の等式を示せ.

$$\sum_{n=-N}^{N} f(n) = \int_{C_N} \frac{f(z)}{e^{2\pi i z} - 1}\, dz.$$



(2) $L_1 := (-\infty - ib, \infty - ib)$, $L_2 := (-\infty + ib, \infty + ib)$ とする. 次の等式を示せ.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \int_{L_1} \frac{f(z)}{e^{2\pi i z} - 1} dz - \int_{L_2} \frac{f(z)}{e^{2\pi i z} - 1} dz.$$

(3) L_1 上で $1/(e^{2\pi i z} - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi i n z}$, L_2 上で $1/(e^{2\pi i z} - 1) = -\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi i n z}$ となることに注意して, 結論の等式を示せ.

解答は講義ノートの該当箇所を参照して下さい.